

# Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Sección de Computación

Programa de Maestría en Ingeniería Eléctrica  
con Opción en Ciencias de la Computación

**Análisis y Diseño de Algoritmos**  
Enero-Abril 2005

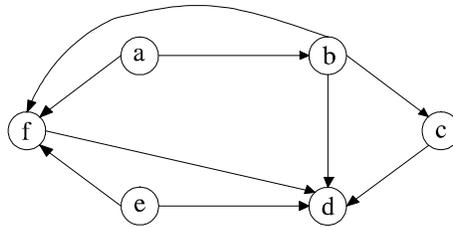
## Lista de Ejercicios No. 2

1. Supongamos que tiene un arreglo  $A$  de  $n$  números ordenados a los cuales se les ha aplicado un corrimiento circular en  $k$  posiciones a la derecha. Por ejemplo,  $\{35, 42, 5, 17, 23, 29\}$  es un arreglo ordenado con un corrimiento circular en  $k=2$  posiciones, mientras que  $\{23, 29, 35, 42, 5, 17\}$  se ha corrido en  $k=4$  posiciones.
  - a. Suponiendo que conoce  $k$ . Dar un algoritmo que tome tiempo  $O(1)$  para encontrar el número más grande en  $A$ .
  - b. Suponiendo que NO conoce  $k$ . Dar un algoritmo que tome tiempo  $O(\log n)$  para encontrar el número más grande en  $A$ .
2. Tiene 50 monedas que se supone son todas de oro y pesan lo mismo. Sin embargo, usted sabe que una de ellas es falsa y pesa menos que las otras. Dispone de una balanza que puede tomar dos conjuntos de monedas y le dice si pesan lo mismo o si uno es más ligero que el otro. Desarrolle un algoritmo para encontrar la moneda falsa. ¿Cuántas operaciones de pesado realiza?
3. Considere un arreglo desordenado de  $n$  elementos. Diseñe y analice un algoritmo divide y vencerás que utiliza  $\lceil 3n/2 - 2 \rceil$  comparaciones para determinar los elementos menor y mayor del arreglo. Sugerencia: considere que  $n$  es una potencia de 2.
4. Desarrolle un algoritmo razonable para resolver cada uno de los siguientes problemas. Dar la complejidad del peor caso para cada algoritmo.
  - a. Se le dan miles de cuentas de teléfono y miles de cheques enviados para pagar las cuentas. Encuentre quien no pagó.
  - b. Se le da una lista que contiene título, autor, número y editorial de todos los libros en una biblioteca y otra lista con 30 editoriales. Encuentre cuantos libros de la biblioteca son publicados por cada una de las 30 editoriales.
  - c. Se le proporcionan todas las tarjetas de los libros de una biblioteca durante el año pasado, cada una de ellas contiene el nombre de la persona que retiró el libro. Determine cuántas personas distintas retiraron al menos un libro.

5. Sea  $S$  un arreglo no ordenado de  $n$  enteros. Dar un algoritmo que encuentra el par  $x, y \in S$  que maximiza  $|x-y|$ . El algoritmo debe tomar tiempo  $O(n)$  en el peor caso.
6. Suponga que tiene  $2n$  jugadores para un partido de dos equipos con  $n$  jugadores cada uno. Cada jugador tiene un rango numérico que mide que tan bueno es el jugador en el juego. Su trabajo es organizar los equipos de la manera menos pareja posible, tal que, crea el desbalance más grande posible entre el equipo A y el equipo B. Muestre como se puede hacer ese trabajo en tiempo  $O(n \log n)$ .
7. Sean  $T_1$  y  $T_2$  dos árboles de búsqueda binaria con la propiedad de que los elementos de  $T_1$  son todos menores a los elementos de  $T_2$ . Dar un algoritmo que mezcle los dos árboles en uno solo. El resultado debe ser un árbol de búsqueda binaria y debe ejecutarse en tiempo  $O(h)$  donde  $h$  es el máximo de las alturas de ambos árboles.
8. Escriba en pseudocódigo un procedimiento para insertar un elemento en un árbol 2-3.
9. Escriba en pseudocódigo un procedimiento para borrar un elemento en un árbol 2-3.
10. Describa cómo modificar un árbol 2-3 en el cual las operaciones de búsqueda, inserción, supresión, mínimo y máximo toman un tiempo  $O(\log n)$  cada una, pero las operaciones sucesor y predecesor toman un tiempo  $O(1)$ . Indique cómo modificar la implementación de las primeras operaciones para que lo anterior pueda suceder.
11. Suponga que se tienen dos conjuntos en los cuales todos los elementos de un conjunto son menores que los elementos del otro conjunto. La **concatenación** de los dos conjuntos mezcla los miembros de ambos conjuntos. Si los conjuntos están representados por un árbol 2-3, diseñe un algoritmo para concatenar los dos árboles 2-3 en uno sólo. El tiempo de ejecución para el peor caso debe ser  $O(h)$ , donde  $h$  es el peso del árbol más grande.
12. Considere un conjunto dinámico  $S$  el cual se representa por una tabla de direccionamiento directo  $T$  de longitud  $m$ . Describa un procedimiento para encontrar el máximo de  $S$ . ¿Cuál es el peor caso del tiempo de ejecución de su algoritmo?
13. Suponga que se utiliza una función de hash aleatoria  $h$  para distribuir  $n$  llaves sobre una tabla de dispersión  $T$  de longitud  $m$  con encadenamiento. ¿Cuál es el número esperado de colisiones? En otras palabras, ¿cuál es la cardinalidad esperada del conjunto  $\{(x,y) | h(x) = h(y)\}$ ?
14. Considere una versión del método de división en el cual  $h(k) = k \bmod m$ , donde  $m=2^p-1$  y  $k$  es una cadena de caracteres interpretada en base  $2^p$ . Muestre que si la cadena  $x$  puede ser derivada de la cadena  $y$  permutando sus caracteres, entonces,  $x$  y  $y$  tienen el mismo valor de hash. Presente un ejemplo en el cuál esta propiedad es no adecuada.
15. ¿Cuáles serían los tiempos esperados de una búsqueda exitosa cuando se usa encadenamiento al inicio y al final de una lista?

16. Considere una tabla de dispersión de tamaño  $m = 1000$  y la función de dispersión  $h(k) = \lfloor m(kA \bmod 1) \rfloor$  para  $A = (\sqrt{5} - 1/2)$ . Calcule las posiciones para las llaves 61, 62, 63, 64 y 65.
17. Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n/F_{n-1} = \mathbf{f}$ , donde  $F_n$  es el  $n$ -ésimo número de Fibonacci.
18. Considere una tabla de dispersión en donde las colisiones se resuelven por encadenamiento. Suponga que todas los elementos que colisionan se mantienen en forma ordenada. ¿Cómo afecta esto al tiempo de ejecución de búsquedas exitosas, búsquedas no exitosas, inserciones y supresiones sobre la tabla? Justifique su respuesta.
19. Suponga que se utiliza la función de exploración doble,  $h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod m$ , para resolver colisiones en una tabla de direccionamiento abierto. Muestre que la secuencia de pruebas  $h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m-1)$  es una permutación de la secuencia  $0, 1, \dots, m-1$ , si y solamente si,  $h_2(k)$  es un primo relativo de  $m$ . (Sugerencia: revise el capítulo 33 del libro de texto).
20. Considere una tabla de dispersión de direccionamiento abierto con un factor de carga  $\alpha$ . Encuentre el valor de  $\alpha$  diferente de 0 para el cual el número de exploraciones en una búsqueda no exitosa es igual al doble del número de exploraciones en una búsqueda exitosa. Use la estimación  $(1/\alpha) \ln(1/(1-\alpha))$  para el número de exploraciones en una búsqueda exitosa.
21. Muestre que cualquier árbol binario de  $n$  nodos se puede transformar mediante  $O(n-1)$  rotaciones a un árbol binario que en el cual todos los hijos están a la derecha (prácticamente sería una lista encadenada).
22. Muestre que el camino más largo desde un nodo  $x$  hasta uno de sus descendientes hojas en un árbol rojinegro tiene a lo más el doble del camino más corto desde  $x$  hasta una de sus hojas.
23. Considere un árbol rojinegro que se forma al insertar  $n$  nodos con el procedimiento de inserción visto en clase. Muestre que si  $n > 1$ , entonces el árbol tiene al menos un nodo rojo.
24. Suponga que un nodo  $x$  se inserta en un árbol rojinegro con el procedimiento visto en clase e inmediatamente después se borra. ¿El árbol resultante es el mismo antes de la inserción? Justifique su respuesta.
25. Encuentre el árbol rojinegro resultante después de insertar la secuencia de llaves 42, 38, 31, 19, 12, y 8 en un árbol vacío. Indique cuál es el árbol resultante al borrar las llaves en el orden 8, 12, 31, 38 y 41.
26. Dar un algoritmo eficiente para determinar si dos conjuntos, de tamaño  $m$  y  $n$ , son disjuntos. Analice la complejidad de su algoritmo en términos de  $m$  y  $n$ . Asegúrese de considerar el caso en el cuál  $m$  es sustancialmente menor que  $n$ .

27. Considere el siguiente grafo dirigido



- a) Suponga que el orden de los vértices es a, b, ..., f. Construya un bosque de expansión del recorrido en profundidad; indique los arcos de árbol, hacia adelante, hacia atrás y cruzados y numere los vértices conforme se completa su visita en el recorrido.
  - b) Encuentre el grafo reducido
28. Muestre con un ejemplo que el algoritmo de Dijkstra no funciona adecuadamente si existen arcos con costos negativos.
  29. La raíz de un grafo dirigido acíclico es un vértice  $r$ , tal que, cada vértice del grafo se puede alcanzar por un camino desde  $r$ . Escriba un programa para determinar si un grafo dirigido acíclico tiene una raíz.
  30. Escriba una función para determinar si un grafo no dirigido de  $n$  vértices es acíclico. La función debe tomar un tiempo  $O(n)$ .
  31. La transpuesta de una gráfica dirigida  $G = (V,E)$  es la gráfica  $G^T = (V,E^T)$ , donde,  $E^T = \{(v,u) \mid (u,v) \in E\}$ . Describa algoritmos eficientes para calcular  $G^T$  a partir de  $G$  usando listas de adyacencia y matrices de adyacencia. Analice el tiempo de ejecución de sus algoritmos.
  32. Escriba un algoritmo que imprima el tipo de cada uno de los arcos del recorrido en profundidad de una gráfica. Analice el tiempo de ejecución de su algoritmo.
  33. Sea  $G = (V, A)$  un grafo dirigido con matriz de costos  $C$ . Sea  $v \in V$  un vértice del grafo. La excentricidad de  $v$  se define como

$$\max_w (la \text{ longitud del camino más corto de } w \text{ a } v)$$

El centro de un grafo es el vértice con la mínima excentricidad. Escriba un algoritmo para calcular la excentricidad de un grafo. Analice el tiempo de ejecución de su algoritmo.

34. Escriba un algoritmo que mejore el algoritmo de Prim para calcular un árbol generador de costo mínimo para un grafo no dirigido en tiempo  $O(E + V \lg V)$  donde  $E$  y  $V$  son la cantidad de arcos y vértices, respectivamente, en el grafo de entrada.
35. Suponga que se le proporciona un árbol generador de costo mínimo,  $T$ , para una gráfica  $G=(V, E)$  (con  $n$  vértices y  $e$  arcos). Se desea agregar un nuevo arco  $e = (u, v)$  con peso  $w$  a la gráfica  $G$ . Dar un algoritmo eficiente para hallar un árbol generador de costo mínimo para la gráfica  $G'=(V, E \cup \{(u,v)\})$ . Su algoritmo debe ejecutarse en tiempo  $O(n)$ .