INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
Escuela Superior de Física y Matemáticas

GEOMETRIA DEL ESPACIO FASE

TESIS

Que para obtener el título de
Licenciado en Física y Matemáticas

P r e s e n t a

CRISTOBAL VARGAS JARILLO

MEXICO, D. F. SEPTIEMBRE DE 1971

A MI PADRE

Deseo expresar mis más sinceras gracias al Profesor Harold V. McIntosh, director de este trabajo, por toda la ayuda que me ha brindado en el transcurso de mi carrera.

P R O L O G O

Los paréntesis de Poisson son de importancia en la mecánica clásica debido a que en primer lugar pueden ser usados para dar un criterio que nos permita ver si un sistema de coordenadas es canónico y en segundo lugar por que pueden ser usados para definir las transformaciones infinitesimales de contacto. Además si se piensa en ellos como un operador bilineal, sobre los espacios de polinomios homogéneos formados de coordenadas y momenta, se pueden usar para definir un producto interno.

El espacio fase junto con sus operadores lineales adquiere una estructura muy interesante si se toma en cuenta la relación que hay entre el producto interno y los paréntesis de Poisson. Esta relación nos lleva a la definición una operación de conjugación para los espacios de monomios; a una forma canónica para los operadores, en la cual ellos son expresados como una suma de productos, a un teorema de parejas el cual dice que los operadores normales deben tener parejas conjugadas de eigenfunciones y parejas negativas de eigenvalores, y finalmente a sistemas de coordenadas canónicas relacionados al álgebra de Lie de los operadores formados por los polinomios de segundo grado homogéneos.

Contenido

INTRODUCCION

En los cursos de mecánica hamiltoniana, los paréntesis de Poisson son introducidos con el objeto de dar un criterio para reconocer las transformaciones canónicas y para discutir el concepto de transformaciones infinitesimales de contacto. Los axiomas con que cumplen los paréntesis de Poisson siempre son observados, porque los conmutadores en la mecánica cuántica cumplen con los mismos axiomas y usando esta relación la transición entre los formalismos canónicos de las dos materias, es facilmente realizable. Esto último es un incentivo más para llevar a cabo un análisis cuidadoso del papel y las propiedades de los paréntesis de Poisson.

En un contexto tan general se deben de considerar los parénteisis de Poisson de funciones completamente arbitrarias. Pero si nos retringimos a los espacios vectoriales de polinomios homogéneos de grado k, $\Phi_n^{(k)}$, formados de n coordenadas y sus momenta, y particularmente a los espacios $\Phi_n^{(1)}$ y $\Phi_n^{(2)}$, los axiomas que satisfacen los paréntesis de Poisson nos dan resultados muy interesantes sobre la geometría del espacio fase y de sus transformaciones lineales.

Los resultados mencionados, se deben a que en primer lugar los paréntesis de Poisson definen una seudométrica para el espacio fase, $\Phi_n^{(1)}$.

Una "métrica" de este tipo define una geometría la cual es en muchas ocasiones completamente diferente a la geometría definida por una métrica ortogonal ordinaria, a la cual uno está acostumbrado. Uno puede encontrar estos conceptos tratados desde el punto de vista matemático en el libro de Artin, *Geometric Algebra* [1].

Matemáticamente hablando, una seudométrica es una funcion bilineal alternante, definida sobre nuestro espacio fase de dimensión $2n$. Sin embargo podemos definir un producto interno, en este espacio, de manera usual en que se hace en cualquier otro espacio vectorial, donde la métrica ortogonal que nos es familiar se define como la suma de los cuadrados de las coordenadas.

La interrelación entre estas dos métricas sirve para iluminar la geometría, muy peculiar, del espacio fase; la cual incluye su característica separación en "coordenadas y momenta".

Mientras que el espacio fase, $\Phi_n^{(1)}$, debe su geometría característica a la interrrealación que hay entre dos formas biliniales, una definida por los paréntesis de Poisson y la otra debida a la definición de distancia por medio de una suma de cuadrados, el espacio de polinomios homogéneos de segundo grado es cerrado, con respecto a la formación de los paréntesis de Poisson, de dos miembros cualesquiera de él.

Dado que los axiomas que satisfacen los paréntesis de Poisson incluyen a aquellos que definen un álgebra de Lie, el resultado de la cerradura de $\Phi_n^{(2)}$, es que este espacio es también un álgebra de Lie.

La teoría de las álgebras de Lie y sus clasificaciones se pueden encontrar en el libro de Jacobson, *Lie Algebras* [2] en donde se puede, por comparación, observar que $\Phi_n^{(2)}$ forma una álgebra de Lie isomorfa a la clasica álgebra de Lie simple C_n. Esta álgebra es la de los generadores infinitesimales del grupo simpléctico $S_p(n)$, el cual es el grupo de todas aquellas transformaciones lineales que dejan invariante una forma antisimétrica en un espacio de dimensión $2n$.

Además de la estructura de álgebra de Lie con la que está dotado $\Phi_n^{(2)}$, podemos ver que este espacio se puede considerar como un álgebra de transformaciones lineales del espacio fase en si mismo, por considerar el paréntesis de Poisson, $\{f, g\}$ donde $f \in \Phi_n^{(2)}$ y $g \in \Phi_n^{(1)}$, para f fijo. Una transformación de este tipo es lineal y por tanto se le puede expresar por medio de una matriz. Más generalmente si f y g son polinomios homogéneos de grado m y n respectivamente el paréntesis de Poisson $\{f, g\}$ es un polinomio homogéneo de grado $m+n-2$. De esta manera cuando g pertenece a $\Phi_n^{(2)}$ y f es miembro de cualquier otro espacio homogéneo $\Phi_n^{(k)}$, el paréntesis de Poisson $\{g, f\}$ será de grado k. Entonces los elementos de $\Phi_n^{(2)}$ no solo definen mapeos lineales de $\Phi_n^{(k)}$ en si mismo, representables por matrices cuadradas, sino que además estas matrices son automáticamente una representación del álgebra de Lie $\Phi_n^{(2)}$.

Ya que tenemos una representación de $\Phi_n^{(2)}$ en términos de matrices cuadradas, podemos aplicarle la teoría de éstas tal como se encuentra en los libros de Halmos [3] o Gel'fand [4].

Las preguntas típicas que pueden ser discutidas son: ¿cuando los polinomios involucrados corresponden a un operador normal o a uno hermitiano?, ¿las formas canónicas matriciales implicaran una correspondencia con una forma canónica polinomial de $\Phi_n^{(2)}$?.

El resultado principal en este sentido es el hecho de que para un operador normal, los eigenvalores deben ocurrir en parejas negativas, cuyos eigenvectores son conjugados con respecto a la seudométrica. Además asociado con cada operador normal hay conjuntos de operadores isomorfos a los cuaterniones; para una seudométrica, este es el análogo de la resolución de la identidad la cual está asociada con cada operador normal con respecto a una métrica ortogonal.

La forma canónica polinomial para un operador de $\Phi_n^{(2)}$ es la de una suma de cuadrados absolutos, esta terminología se refiere al producto de un polinomio por su conjugado. Además las eigenfunciones del operador, cuando se le considera operando sobre un espacio de un grado dado, determinan todas las eigenfunciones en un espacio de grado mayor. Estos resultados se pueden usar para escribir el polinomio en una forma factorizada útil y también para caracterizar el Kernel del polinomio considerado como operador.

Se ven dos de las aplicaciones principales de estos resultados a la mecánica hamiltoniana. El resultado de que los eigenvalores de un operador normal siempre ocurren en parejas negativas ha sido explotado por Dulock y McIntosh [5] para construir constantes de movimiento y operadores simétricos para el oscilador armónico y otros sistemas que poseen hamiltonianos cuadráticos. Este trabajo da a esta construcción una perspectiva más general. Pero ya antes se había observado un resultado similar a este, Poincare [6], al discutir la ecuación diferencial lineal, que se debe satisfacer, para perturbaciones de una órbita en mecánica hamiltoniana notó que los exponenetes característicos, los cuales eran los eigenvalores de la matriz de coeficientes de la ecuación diferencial, ocurrian en parejas negativas, Birkhoff [7] y Whittaker [8] incluyen en sus libros este resultado, Courant y Snyder [9], han usado el mismo aparejamiento, así como la naturaleza simpléctica de la matriz de coeficientes en un sistema hamiltoniano de ecuaciones para estudiar el movimiento de una partícula cargada en el campo magnético de un sicrotón de gradiente alternante.

En los últimos diez años, ya han aparecido algunos libros sobre mecánica clásica que mencionan explícitamente las transformaciones simplécticas como el libro de Corben y Stehle [10] y otros que también hacen mención al teorema de parejas para los eigenvalores como Siegel [11].

El teorema de las parejas ha sido bastante utilizado en otros contextos, las referencias se encuentran en un artículo de McIntosh [12].

Por otro lado la monografía de Mackey [13] sobre los fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica menciona la naturaleza simpléctica de las transformaciones canónicas en una forma explícita, lo mismo es hecho en un artículo posterior debido a Jost [14]. En el quinquenio presente es quizás cuando más se ha escrito sobre este punto como se puede ver en el tratado de mecánica celestial de Pollard [15] y en algunos artículos [16] [17] . Es por tanto factible que el concepto de transformación simpléctica sea usado cada vez más junto con las ideas que circulan a su alrededor.

La presencia de parejas negativas de eigenvalores, además de su relación con la existencia de constantes de movimiento, está muy relacionada al conjunto de cuaterniones asociados con cada operador normal. Este conjunto está compuesto de operadores los cuales en el sistema de coordenadas canónico, corresponden a la inversión del tiempo, a la inversión del espacio y al operador conjugación. La naturaleza particular de anticonmutación de estos operadores es suficiente para asegurar la existencia de parejas negativas de eigenvalores. Este es en el que se basa el razonamiento del artículo de referencia [5]. Así la simetría del espacio-tiempo se apoya en la forma hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento.

En este trabajo examinamos estos puntos en detalle, comenzando con un repaso del álgebra lineal y teoría de matrices necesaria en las dos áreas de la mecánica clásica en las que los paréntesis de Poisson juegan un papel. Es decir, en la discusión de transformaciones canónicas y en la descripción de transformaciones de contacto infinitesimales.

Una cosa importante, es que prácticamente solo se ha necesitado un cierto conocimento de los resultados más generales de la teoría de espacios vectoriales de dimensión finita el concepto de espacio dual y las propiedades de los operadores normales y de los hermitanianos.

Capítulo 1

Los paréntesis de Poisson en la mecánica hamiltoniana

1.1 Las ecuaciones de Hamilton en su forma matricial

Las ecuaciones de hamilton son:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.1}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.2}$$

lo que haremos será entender bien la forma de estas ecuaciones.

Estas ecuaciones son un caso especial de un sistema expresado por

$$\dot{\xi}_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \Phi(\xi_i)}{\partial \xi_j} \tag{1.3}$$

donde las a_{ij} pueden ser funciones de las ξ_i y del tiempo y $\xi_i = \xi_i(t)$.

Al sistema de ecuaciones (1.3) se le llama de Pfaff.

Así las ecuaciones de Hamilton, dentro de un sistema de Pfaff tienen una forma muy simple.

Haciendo

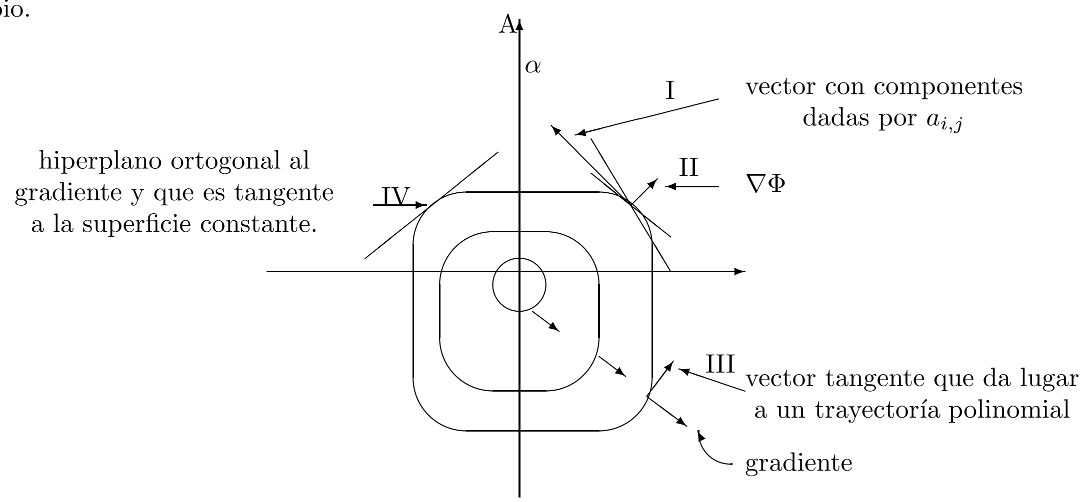
$$\left.\begin{array}{rcl} \xi_i & = & q_i \\ \xi_{n+i} & = & p_i \end{array}\right. \quad \text{con } i = 1, 2, \ldots, n$$

tenemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_n \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} . & . & . & -1 & . & . \\ . & . & . & . & -1 & . \\ . & . & . & . & . & -1 \\ \hline 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \end{array}\right] \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Vale la pena hablar un poco más acerca de un sistema de Pfaff. Para ello tomaremos las líneas de contorno de Φ es decir líneas donde Φ es constante.

Sabemos que el gradiente es un vector dirigido en la dirección de mayor cambio de la función y cuyo tamano queda dado por la derivada de la función en la dirección de mayor cambio.



Un corolario es que cualquier hiperplano ortogonal al gradiente (linea IV en el caso de dos dimensiones en la figura) es tangente a la superficie de nivel.

Así, si queremos integrar numéricamente el sistema, lo que tenemos que hacer es tomar el gradiente de Φ , $\nabla\Phi$, y formar el producto interno con algún vector α, el cual puede variar de punto a punto que además puede depender de las $\xi\prime_s$ y posiblemente del tiempo.
Entonces

$$\dot{\xi}_i = (\alpha_i, \nabla\Phi) \tag{1.5}$$

donde

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}, & \alpha_{i2}, & \dots & ,\alpha_{in} \end{pmatrix}$$

Hay que hacer notar que tenemos un campo de α's que determinan en cada punto una dirección y también tenemos gradientes de la función Φ y el producto interior de estos (el de los vectores I y II en la figura) de la velocidad de ξ.

Una manera más conveniente de tratar esto es tomar un vector con componentes ξ_i y escribir α como una matriz, operando sobre el vector gradiente.

Lo que quiere decir (1.5) en la figura es que en cualquier punto tendremos un vector gradiente que depende de la función Φ y una transformación lineal que varía punto a punto y posiblemente con el tiempo, la cual aplicandola al gradiente determina una dirección. Tendremos así un campo de velocidades en cada punto y podemos en cada instante construir un vector, llamado "vector tangente". Debido a que la solución del movimiento es una curva que tiene una de las líneas III como su tangente en cualquier momento, entonces la línea III es tangente en el sentido en que la dirección con que se mueve la partícula en este momento y cuyo tamaño da la velocidad.

Podemos aplicar algún método numérico, por ejemplo el de Euler o el de Rungge-Kutta, para determinar las trayectorias.

Las ecuaciones de Hamilton las podemos escribir como

$$\delta \;=\; J\partial$$

donde δ, representa los vectores tangentes (velocidades), J es la matriz de coeficientes y ∂ representa a las componentes del gradiente.

Hemos discutido que esta relación lineal es base de los procesos tanto teórico como numérico, en el sentido, que los vectores tangentes (incremento en las velocidades) cambian con la posición del punto en un intervalo pequeño del tiempo.

Estos incrementos los podemos obtener considerando primero la función H, vemos que su gradiente nos da un vector, que transformamos con la matriz J y esto va a dar un campo de tangentes y la trayectoria que resulta es una trayectoria que siempre tiene estos vectores δ como vectores tangentes.

En base tanto teórica como numérica se puede desarrollar una serie de potencias, como el método de Euler para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, o si deseamos algo más sofisticado se puede usar el proceso de Rungge-Kutta y efectuar la computación numérica. Esta es una de las grandes ventajas de tener en forma hamiltoniana las ecuaciones de movimiento.

La otra propiedad, que es de gran beneficio, de los sistemas hamiltonianos es que podemos cambiar coordenadas con más facilidad, aunque esto es posible en la formulación de Lagrange. Pero podemos ver más claramente el efecto de este cambio.

Lo primero que haremos será introducir dos conjuntos de coordenadas $\{p_i, q_i\}$ y $\{P_i, Q_i\}$ tales que:

$$\begin{aligned} P_i &= P_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ Q_i &= Q_i(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{aligned}$$

con $1 \leq i \leq$ n.

Del cálculo diferencial sabemos que

$$\frac{dP_i}{dt} \;=\; \sum \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} + \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \right)$$

con $1 \leq i \leq$ n.

Para las Q_i tenemos también n ecuaciones de estas. Y estas $2n$ ecuaciones pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \vdots \\ \dot{P}_n \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \\ \vdots \\ \dot{Q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial p_1} & \frac{\partial p_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial p_n} & \frac{\partial p_1}{\partial q_1} & \frac{\partial p_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial q_n} \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . & . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \frac{\partial Q_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \frac{\partial Q_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_n \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

A la matriz que aparece en esta expresión la denotamos por

$$\frac{\partial(P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)}$$

y es la matriz jacobiana de la transformación.

Evitemos por el momento las variables p's y q's y escribamos

$$X_i = X_i(X_1', X_2', \ldots, X_n'), \quad 1 \leq i \leq n$$

nuestra relación es:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(X_1', X_2', \ldots, X_n')} \begin{bmatrix} \dot{X}_1' \\ \dot{X}_2' \\ \vdots \\ \dot{X}_n' \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Simbólicamente escribimos

$$\delta = \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(X_1', X_2', \ldots, X_n')}\delta' \qquad \text{(1.6a)}$$

Si suponemos ahora que

$$X_i' = X_i\left(X_1'', X_2'', \ldots, X_n''\right) \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n$$

y que

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial(\dot{X}_1', \dot{X}_2', \ldots, \dot{X}_n')}{\partial(\dot{X}_1'', \dot{X}_2'', \ldots, \ldots, \dot{X}_n'')} \begin{bmatrix} \dot{X}_1'' \\ \dot{X}_2'' \\ \vdots \\ \dot{X}_n'' \end{bmatrix}$$

entonces sustituyendo en la anterior relación tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial(X_1,\ldots,X_n)\partial(X_1^{'},\ldots,X_n^{'})}{\partial(X_1^{'},\ldots,X_n^{'})\partial(X_1^{''},\ldots,X_n^{''})} \begin{bmatrix} \dot{X}_1^{''} \\ \dot{X}_2^{''} \\ \vdots \\ \dot{X}_n^{''} \end{bmatrix}$$

y recordando una propiedad de los jacobianos tenemos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{\partial(X_1^{''},X_2^{''},\ldots,X_n^{''})} \begin{bmatrix} \dot{X}_1^{''} \\ \dot{X}_2^{''} \\ \vdots \\ \dot{X}_n^{''} \end{bmatrix}$$

Ahora veremos como cambian las derivadas parciales del hamiltoniano

$$H = H(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)$$

cuando cambiamos de sistema de coordenadas.

Por el momento para evitar la distinción entre las coordenadas y los momentos, trabajaremos una función.

$$\Phi = \Phi(x_1,\ldots,x_n)$$

y además con dos sistemas de coordenadas:

$$X_i = X_i(x_i^{'},\ldots,x_n^{'}) \quad 1 \leq i \leq n$$

Calculemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i^{'}}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X_i^{'}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial X_i^{'}}$$

y tendremos n ecuaciones de este tipo, las cuales pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial X_1^{'}} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial X_2^{'}} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial X_n^{'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_1^{'}} & \frac{\partial X_2}{\partial X_1^{'}} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial X_1^{'}} \\ \frac{\partial X_1}{\partial X_2^{'}} & \frac{\partial X_2}{\partial X_2^{'}} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial X_2^{'}} \\ . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial X_1}{\partial X_n^{'}} & \frac{\partial X_2}{\partial X_n^{'}} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial X_n^{'}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

tenemos así una transformación con casi la misma estructura que la de la transformación de derivadas totales (1.6). Con la diferencia de que en (1.6) fijamos la variable que vamos a derivar y aquí fijamos la variable con respecto a la cual vamos a derivar.

Así vemos que la relación (1.7) casi puede escribirse utilizando una matriz jacobiana y que el casi aparece por las razones expuestas en el párrafo anterior.

Podemos resolver nuestro problema, introduciendo una matriz transpuesta; es decir, si llamamos a la matriz que aparece en (1.7), M^{-1} entonces:

$$M^{-1^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_1'} & \frac{\partial X_2}{\partial X_2'} & \dots & \frac{\partial X_i}{\partial X_n'} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \frac{\partial X_n}{\partial X_1'} & \frac{\partial X_n}{\partial X_2'} & \dots & \frac{\partial X_i}{\partial X_n'} \end{bmatrix} = \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(X_1', \dots, X_n')}$$

Así tenemos que las ecuaciones (1.7) se escribirán como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1'} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2'} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_n'} \end{bmatrix} = \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)^T}{\partial(X_1', \dots, X_n')} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Simbólicamente lo escribiremos como

$$\partial' = \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)^T}{\partial(X_1', \dots, X_n')}\partial \qquad (1.8)$$

Esta ecuación la escribiremos como

$$\left[\frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(X_1', \dots, X_n')}\right]^{T^{-1}} \partial' = \partial$$

y recordando que para matrices invertibles

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

entonces

$$\partial = \left[\frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(X_1', \dots, X_n')}\right]^{-1^T} \partial'$$

Utilizando ahora otra relación de los jacobianos que dice

$$\frac{\partial(X_1, \dots, X_n)^{-1}}{\partial(X_1', \dots, X_n')} = \frac{\partial(X_1', \dots, X_n')}{\partial(X_1, \dots, X_n)} \qquad (1.8a)$$

tenemos que

$$\partial = \frac{\partial(X_1', \dots, X_n')^T}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\partial' \qquad (1.9)$$

escribiremos nuevamente la ecuación (1.6a) para ver analogías y diferencias con (1.9)

$$\delta = \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(X_1', \dots, X_n')}\delta' \qquad (1.6a)$$

y vemos que la matriz de transformación es que en una aparece la matriz inversa y transpuesta de la que aparece en la otra.

Así que si transformamos δ podemos transformar inmediatamente ∂ y recíprocamente.

Es claro que para hacer esto, es necesario estar trabajando en una región donde la transformación sea invertible, es decir, donde el determinante jacobiano sea distinto de cero.

Regresemos ahora a las ecuaciones hamiltonianas, en las cuales tendremos

$$\delta = J\partial$$

y como

$$M^{-1^T} = \frac{\partial(X_1,\ldots,X_n)}{\partial(X_1',\ldots,X_n')}$$

entonces

$$M^T = \frac{\partial(X_1',\ldots,X_n')}{\partial(X_1,\ldots,X_n)}$$

por lo tanto

$$\delta = M^{T^{-1}}\delta'$$

y

$$\partial = M\partial'$$

Las ecuaciones de Hamilton las podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned} M^{T^{-1}}\delta' &= JM\partial' \\ \delta' &= M^T JM\partial' \end{aligned}$$

Así vemos que bajo un cambio de coordenadas las ecuaciones hamiltonianas cambian en el hecho de que J será reemplazada por

$$M^T JM$$

donde M^T es la matriz jacobiana de las nuevas coordenadas con respecto a las antiguas.

Así para el sistema hamiltoniano

$$M^T = \frac{\partial(P_1,P_2,\ldots,P_n,Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)}{\partial(p_1,p_2,\ldots,p_n,q_1,q_2,\ldots,q_n)}$$

1.2 Transformaciones canónicas

Si queremos ahora, que el nuevo sistema de coordenadas $P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_n$ se preserve la "forma" de las ecuaciones, es decir, que

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

y

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

vemos que imponer la condición, sobre la matriz de transformación

$$M^T JM$$

de que

$$M^T J M \quad = \quad J \tag{1.10}$$

Aquellas transformaciones tales que cumplan con (1.10) seran llamadas canónicas.

Cabe hacer notar que cuando J es simplemente una matriz antisimétrica no singular entonces las transformaciones que cumplen con

$$M^T J M \quad = \quad J.$$

son llamadas simplécticas.

Entonces las transformaciones canónicas son un caso especial de las simplécticas.

Veamos ahora las condiciones que deben cumplir los elementos de la matriz M para que tengamos una transformación canónica; estas serán obtenidas de la relación de definición.

$$M^T J M \quad = \quad J.$$

donde J la escribiremos como

$$J \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}$$

donde 0 e $\mathbf{I}$ son submatrices de orden $n \times n$.

M^T que es la matriz jacobiana de la transformación la escribiremos como

$$M^T \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ & \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

donde entenderemos por $\frac{\partial P}{\partial p}$ una submatriz $n \times n$, cuyo elemento general es $\frac{\partial P_i}{\partial p_i}$ que va a estar en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna, es decir,

$$\frac{\partial P}{\partial p} \quad = \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)_{n \times n}$$

a su vez,

$$\frac{\partial P}{\partial q} \quad = \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \quad = \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\right)$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \quad = \quad \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\right)$$

Recordando que si tenemos una matriz subdividida en submatrices digamos que

$$A \quad = \quad \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$$

entonces la transpuesta de A está dada por

$$A^T \quad = \quad \begin{bmatrix} B^T & D^T \\ C^T & E^T \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$JM = \begin{bmatrix} -\frac{\partial P^T}{\partial q} & -\frac{\partial Q^T}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial P^T}{\partial p} & \frac{\partial Q^T}{\partial p} \end{bmatrix}$$

con esto $M^T JM$ está dada por

$$\begin{aligned} M^T JM &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial P^T}{\partial q} & -\frac{\partial Q^T}{\partial q} \\ \\ \frac{\partial P^T}{\partial p} & -\frac{\partial Q^T}{\partial p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P^T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P^T}{\partial p} & -\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q^T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q^T}{\partial p} \\ \\ -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P^T}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P^T}{\partial p} & -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q^T}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q^T}{\partial p} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pero $M^T JM = J$ nos dice que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P^T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P^T}{\partial p} &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q^T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q^T}{\partial p} &= -\mathbf{I} \\ -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P^T}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P^T}{\partial p} &= \mathbf{I} \\ -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q^T}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q^T}{\partial p} &= 0 \end{aligned}$$

Estas condiciones las podemos escribir para cada uno de los elementos que forman las matrices y estas serán:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) &= 0 \qquad \text{para todo } i\,,\, j \\ \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \right) &= -\delta_{ij} \\ \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) &= \delta_{ij} \\ \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Así, estas $4n^2$ ecuaciones expresan en términos de elementos matriciales, las condiciones necesarias y suficientes para que una transformación sea una transformación canónica.

Dentro de la mecánica clásica este tipo de ecuaciones se presentan muy frecuentemente y por eso vale la pena darle un nombre, entonces definimos el paréntesis de Poisson de f y g con respecto a las variables $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ como

$$\{f, g\} = \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_k}\frac{\partial g}{\partial Y_k} - \frac{\partial f}{\partial Y_k}\frac{\partial g}{\partial X_k} \right)$$

Con esta notación nuestras condiciones para que una transformación sea canónica, serán:

$$\begin{aligned} \{P_i, P_j\} &= 0 \\ \{P_i, Q_j\} &= -\delta_{ij} \\ \{Q_i, P_j\} &= \delta_{ij} \\ \{Q_i, Q_j\} &= 0 \end{aligned}$$

Veamos ahora dos ejemplos:

Ejemplo 1.

$$\begin{aligned} P &= p^2 \\ Q &= q^2 \end{aligned}$$

tomemos

$$\begin{aligned} \{P, Q\} &= \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} \\ &= 0 - \frac{\partial p^2}{\partial p}\frac{\partial q^2}{\partial q} \\ &= -(2p)(2q) \\ &= -4pq \neq \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto podemos afirmar que no tenemos una transformación canónica.

Ejemplo 2.

$$p = \frac{p}{2q}, \quad Q = q^2$$

$$\begin{aligned} \{P, P\} &= \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \\ &= 0 \\ \{P, Q\} &= \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\frac{p}{q^2}\right)(0) - \frac{1}{2q}2q \\ &= -1 \\ \{Q, P\} &= -\{P, Q\} \\ &= 1 \\ \{Q, Q\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así vemos que ésta sí es una transformación canónica.
Regresemos a nuestra relación

$$M^T J M = J$$

tomando inversos tenemos

$$\begin{aligned} (M^T J M)^{-1} &= J^{-1} \\ M^{-1} J^{-1} {M^T}^{-1} &= J^{-1} \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} J^{-1} &= J^T \\ &= -J \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} M^{-1}J^TM^{T^{-1}} &= J^T \\ M^{-1}JM^{T^{-1}} &= J \end{aligned}$$

Con la notación usada en (1.11) y utilizando la propiedad de los jacobianos enunciada en (1.8a) tenemos que

$$M^{T^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial q}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial q}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p^T}{\partial P} & \frac{\partial q^T}{\partial P} \\ \\ \frac{\partial p^T}{\partial Q} & \frac{\partial q^T}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

Tomemos el producto $JM^{T^{-1}}$

$$\begin{aligned} JM^{T^{-1}} &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial q}{\partial Q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial q}{\partial P} & -\frac{\partial q}{\partial Q} \\ \\ \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial Q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} M^{-1}JM^{T^{-1}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p^T}{\partial P} & \frac{\partial q^T}{\partial P} \\ \\ \frac{\partial p^T}{\partial Q} & \frac{\partial q^T}{\partial Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial q}{\partial P} & -\frac{\partial q}{\partial Q} \\ \\ \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial Q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial p^T}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial q^T}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial P} & -\frac{\partial p^T}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial q^T}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} \\ \\ -\frac{\partial p^T}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial q^T}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} & -\frac{\partial p^T}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial q^T}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial Q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así $M^{-1}JM^{T^{-1}} = J$ implica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q^T}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p^T}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial P} &= 0 \\
\frac{\partial q^T}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} - \frac{\partial p^T}{\partial P}\frac{\partial q}{\partial Q} &= -\mathbf{I} \\
\frac{\partial q^T}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p^T}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial P} &= \mathbf{I} \\
\frac{\partial q^T}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial Q} - \frac{\partial p^T}{\partial Q}\frac{\partial q}{\partial Q} &= 0
\end{aligned}$$

Escribiremos ahora estas condiciones, por medio de los elementos matriarcales, recordando primero como estan dadas las matrices que intervienen en las anteriores igualdades.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial P} &= \left(\frac{\partial q_i}{\partial P_j}\right) \\
\frac{\partial p}{\partial P} &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\right) \\
\frac{\partial q}{\partial Q} &= \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\right) \\
\frac{\partial p}{\partial Q} &= \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\right)
\end{aligned}$$

Las condiciones son entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial P_i}\frac{\partial P_k}{\partial P_j} - \frac{\partial P_k}{\partial P_i}\frac{\partial q_k}{\partial P_j}\right) &= 0 \\
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial P_i}\frac{\partial P_k}{\partial Q_j} - \frac{\partial p_k}{\partial P_i}\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\right) &= -\delta_{ij} \\
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\frac{\partial P_k}{\partial P_j} - \frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\frac{\partial q_k}{\partial p_j}\right) &= \delta_{ij} \\
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\frac{\partial P_k}{\partial Q_j} - \frac{\partial P_k}{\partial Q_i}\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\right) &= 0 \quad \text{para todo } \; i,j
\end{aligned}$$

Por los mismos motivos que se introdujeron los paréntesis de Poisson se introducen los de Lagrange. Por tanto definiremos el paréntesis de Lagrange de u y v con respecto a las variables $\{q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n\}$ como

$$[u,v] \quad = \quad \sum_k\left(\frac{\partial q_k}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v} - \frac{\partial p_k}{\partial u}\frac{\partial q_k}{\partial v}\right)$$

Con esta notación nuestras cuatro condiciones quedan como

$$\begin{aligned}
[P_i,P_j] &= 0 \\
[P_i,Q_j] &= -\delta_{ij} \\
[Q_i,P_j] &= \delta_{ij} \\
[Q_i,Q_j] &= 0
\end{aligned}$$

Consideremos la transformación identidad, la cual cumple con

$$\begin{aligned}
M^T &= \mathbf{I} \\
M &= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

por tanto

$$M^T J M \;=\; \mathbf{I}\, J\, \mathbf{I} \;=\; J$$

lo cual nos dice que es una transformación canónica. Entonces se debe cumplir

$$\begin{array}{rcl} \{p_i, p_j\} & = & 0 \\ \{p_i, q_j\} & = & -\delta_{ij} \\ \{q_i, p_j\} & = & \delta_{ij} \\ \{q_i, q_j\} & = & 0 \end{array}$$

y también

$$\begin{array}{rcl} [p_i, p_j] & = & 0 \\ [p_i, q_j] & = & -\delta_{ij} \\ [q_i, p_j] & = & \delta_{ij} \\ [q_i, q_j] & = & 0 \end{array}$$

1.3 Transformaciones infinitesimales

Vamos a ver que condición adicional, debe cumplir una transformación canónica para que sea una transformación que difiere en poco de la identidad es decir, las tranformaciones infinitesimales.

Recordemos que la condición para que una transformación sea canónica es que

$$M^T J\, M = J$$

Esta relación nos recuerda una anterior muy conocida, la cual es

$$O^T \mathbf{I}\, O = \mathbf{I}$$

Tomando en cuenta que la norma euclidiana de un vector está dada por

$$\|X\|^2 = \sum x_i^2 = X^T X$$

trataremos de averiguar un poco acerca de las transformaciones, O, las cuales preservan las norma, es decir,

$$\|OX\| = \|X\|$$

para lo cual desarrollamos $\|OX\|$

$$\|OX\|^2 = (OX)^T (OX) = (X^T O^T)\,(OT) = X^T (O^T O)\, X$$

y como queremos

$$\|OX\|^2 \;\;=\;\; \|X\|^2$$

entonces necesitamos tener

$$X^T (O^T O) X \;\;=\;\; X^T X$$

Una condición suficiente para que la última identidad se cumpla es que

$$O^T O = \mathbf{I}$$

Probaremos que también es una condición necesaria, es decir si

$$X^T(O^T O)X = X^T X$$

entonces

$$O^T O = \mathbf{I}$$

Para hacer eso primero definimos

$$O^T O = P$$

Así tenemos

$$X^T P X = X^T X.$$

El vector X está dado por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

X^T por

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

y $P = (p_{ij})$

Por lo tanto el vector PX estará dado por

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n p_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n p_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_{nj}x_j \end{bmatrix}$$

multiplicando por X^T a la izquierda

$$\begin{aligned} X^T P X &= [\, x_1, x_2, \dots, x_n \,] \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n p_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n p_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_{nj}x_j \end{bmatrix} \\ &= x_1 \sum_{j=1}^n p_{1j}x_j + x_2 \sum_{j=1}^n p_{2j}x_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^n p_{nj}x_j \\ &= \sum_{j=1}^n p_{1j}x_i x_j + \sum_{j=1}^n p_{2j}x_2 x_j + \dots + \sum_{j=1}^n p_{nj}x_n X_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_ix_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

pero $X^TX = \sum_{i=1}^{n} x_ix_i$
por lo tanto;

$$p_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} x_ix_j$$

Pero esto se debe cumplir para cualquier vector que tiene en sus entradas solamente ceros excepto en la k-ésima que tiene un 1

Entonces tendríamos la relación:

$$p_{kk}x_kx_k = x_kx_x \quad \text{pero} \;\; x_k = 1$$

entonces

$$p_{kk} = 1$$

y esto es valido para toda k tal que $1 \leq k \leq n$.

Ahora que sabemos que la matriz P tiene solamente unos en la diagonal.

Utilizando el hecho de que

$$P = O^TO$$

vemos que P es simétrica, ya que

$$
\begin{aligned}
P^T &= (O^TO)^T \\
&= O^T(O^T)^T \\
&= O^TO
\end{aligned}
$$

de donde

$$P^T = P$$

y ahora haciendo uso de la relación 1 pero con el vector con un uno en la i-ésima y en la k-ésima entrada y ceros en las demás llegamos a que

$$2 + 2P_{ik} = 2$$

de aqui vemos que

$$P_{ik} = P_{ki} = 0 \quad \text{con} \quad i \neq k$$

así tenemos que

$$P = \mathbf{I}$$

que es lo que queriamos probar.

Las matrices que cumplen con la relación

$$A^T A = \mathbf{I}$$

se llaman matrices ortogonales.

Se puede generalizar el concepto de norma definiéndolo de la manera siguiente:

$$\|X\|^2 = X^T G X$$

$$\|X\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$$

Hay dos casos importantes

a) G es una matriz simétrica

b) G es una matriz antisimétrica

De aquí podemos ver que no necesariamente consideramos ortogonales a los vectores base.

Ahora nos preguntamos cuales son las transformaciones que guardan la norma.

Trabajando análogamente a como se hizo en el caso de la norma euclideana se llega a la conclusión de que las transformaciones requeridas cumplen con la condición:

$$M^T G M = G$$

Dedicaremos nuestra atención al caso, donde G es la matriz antisimétrica

De aqui se puede observar que bajo condicines de simetría o de antisimetría, la condición de guardar una norma, es más o menos la condición que hemos visto que debe cumplir una transformacion para guardar la forma de un sistema hamiltoniano de ecuaciones.

Definimos una transformación Simpléctica M como aquella que cumple con:

$$M^T J M = J$$

Cuando hablamos de normas en el espacio vectorial real, los dos casos posibles para preservar una norma es que las transformaciones sean ortogonales o simplécticas.

Porque cuando G es simétrica siempre podemos reducir esta a la matriz identidad mediante un cambio de base. Y cuando G es antisimétrica la podemos reducir a la matriz J.

Los dos últimos resultados serán probados posteriormente.

Recordemos que el hecho de que una transformación sea o no canónica no depende del hamiltoniano. En cambío puede ocurrir que un sistema de coordenadas sea más adecuado, para un hamiltoniano, que otro.

Esto nos lleva a pensar que existen clases de equivalencia en el conjunto de sistemas de coordenadas.

Decimos que un sistema de coordenadas S_1 es equivalente al $S_1^{'}$ si existe una transformación simpléctica u ortogonal entre S_1 y $S_1^{'}$.

Puede suceder que por medio de alguna transformación lleguemos de S_1 y $S_1^{'}$ y que por medio de alguna transformación lleguemos de S_2 y $S_2^{'}$ y sin embargo de S_1 no podemos obtener $S_2^{'}$.

Esto no quiere decir que como sistema de coordenadas S_1 sea más valioso que S_2, sino que simplemente que para algunos problemas S_1 sea más adecuado y recíprocamente.

En resumen hay una clase de sistemas que pueden ser derivados de un sistema inicial, otra clase que puede ser derivada de otro sistema incial sin necesidad que los dos sistemas iniciales sean equivalentes.

Diremos que dos sistemas son equivalentes canónicamente si existe una transformación canónica tal que de uno podamos derivar el otro.

Recordemos que la condición para que una transformación sea canónica es que

$$M^T J M = J$$

y también que pueda preservar un producto interior definido por

$$(X, X) = X^T J X$$

La forma que tiene M es

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ & \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{bmatrix}$$

Ahora escribimos

$$M = \mathbf{I} + \varepsilon S$$

Justificamos esto por escribir

$$\begin{aligned} P_j &= p_j + \varepsilon \xi_j(p_i, q_i) \quad \text{con} \quad \varepsilon \leq 0 \\ Q_j &= q_j + \varepsilon \eta_j(p_i, q_i) \end{aligned}$$

Así P_j difiere de p_j en muy poco y esto se deberá a la función ξ_j que depende de p_i y q_i.

Análogamente Q_j difiere solamente por la variación de η_j y entre más pequeño sea ε menos diferencia vamos a ver entre P_j y p_j y entre Q_j y q_j.

Esto es lo que entendemos por una transformación infinitesimal.

También podemos pedir que $\max\{|\max\xi|, |\min\xi|, |\max\eta|, |\min\eta|\} < 1$.

Nuestro interés aumentará cuando $\varepsilon \to 0$.

Ahora M toma la forma siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} \delta_{ij} + \varepsilon\frac{\partial \xi_i}{\partial p_i} & \varepsilon\frac{\partial \eta_j}{\partial p_i} \\ & \\ \varepsilon\frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} & \delta_{ij} + \varepsilon\frac{\partial \eta_j}{\partial q_i} \end{bmatrix}$$

Cada término que hemos escrito en la matriz en realidad es una submatriz.

M puede ser escrita de la manera siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & O \\ & \\ O & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \eta_j}{\partial p_i} \\ & \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} & \frac{\partial \eta_j}{\partial q_i} \end{bmatrix}$$

Definiendo

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \eta_j}{\partial p_i} \\ \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} & \frac{\partial \eta_j}{\partial q_i} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$M = \mathbf{I} + \varepsilon S$$

Tenemos interés en el caso en que $\varepsilon \ll 1$ tal que ε^2 pueda despreciarse.
Ahora recordemos que

$$M^T J M = J$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \xi_i}{\partial q_i} \\ \\ \frac{\partial \eta_j}{\partial p_j} & \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -\mathbf{I} \\ \\ \mathbf{I} & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & -\mathbf{I} \\ \\ \mathbf{I} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} & \frac{\partial \eta_j}{\partial p_i} \\ \\ \frac{\partial \xi_i}{\partial q_i} & \frac{\partial \eta_j}{\partial q_i} \end{bmatrix}$$

El último resultado se debe a que si las matrices A, B, C, D forman S, es decir.

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

entonces

$$S^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

y

$$S^T J + JS = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} & -\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} \\ \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} & -\frac{\partial \eta_i}{\partial p_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} & -\frac{\partial \eta_j}{\partial q_j} \\ \\ \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} & -\frac{\partial \eta_j}{\partial p_i} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \varepsilon S)^T J (\mathbf{I} + \varepsilon S) &= J \\ (\mathbf{I} + \varepsilon S^T) J (\mathbf{I} + \varepsilon S) &= J \\ (J + \varepsilon S^T J)(\mathbf{I} + \varepsilon S) &= J \end{aligned}$$

como

$$\varepsilon^2 \ll 1$$

$$J + \varepsilon JS + \varepsilon S^T J = J$$

Así

$$J + \varepsilon (S^T J + JS) = J$$

entonces

$$S^T J + JS = O$$

Y ésta es la condición que debe cumplir la matriz S con el objeto de que la transformación infinitesimal sea canónica, mejor dicho aproximadamente canónica y entre menor sea ε tendremos una mayor aproximación a una transformación canónica.

Escribiendo esto en términos de elementos de matriz

$$S^T J + JS = O$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} \\
\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} &= -\frac{\partial \xi_j}{\partial p_i} \\
\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} &= -\frac{\partial \eta_j}{\partial q_i} \\
\frac{\partial \eta_i}{\partial p_j} &= \frac{\partial \eta_j}{\partial p_i}
\end{aligned}$$

Escribamos las últimas ecuaciones con otra notación.

$$\frac{\partial X_i}{\partial \chi_j} = \frac{\partial X_j}{\partial \chi_i}$$

Pero estas son las condiciones necesarias y suficientes, cuando trabajamos en un dominio simplemente conexo. Para que exista una función cuya diferencial es exacta. Denotando esta función por V tenemos:

$$X_k = \frac{\partial V}{\partial \chi_k}$$

Regresando a nuestra notación anterior, lo que sabemos es que existe una función $S(p, q)$ tal que

$$\begin{aligned}
\xi_j &= \frac{\partial S}{\partial q_j} \\
\eta_j &= -\frac{\partial S}{\partial p_j}
\end{aligned}$$

Así la condición necesaria y suficiente en el jacobiano para una transformación infinitesimal sea canónica, es que las derivaciones en las coordenadas sean las derivadas de una función S, como la mencionada.

Es necesario y suficiente si tomamos en cuenta la continuidad y la no singularidad del jacobiano.

El jacobiano no es cero, para un ε suficientemente pequeño ya que los unos en la diagonal dominarán.

La existencia de una función S, a la cual llamaremos la generadora de la transformación infinitesimal, nos permite expresar el cambio de cualquier función $f(P, Q)$.

Ya que

$$f(P, Q) = f(p + \varepsilon\xi, q + \varepsilon\eta)$$

y si f admite un desarrollo en serie de Taylor

$$f(P,Q) = f(p,q) + \varepsilon \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \xi_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \eta_i \right) + \varepsilon^2 \sum \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2} \xi_i^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial q} \xi \eta + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \eta^2 + \varepsilon^3 \ldots \right)$$

Introduzcamos ahora las relaciones que tenemos para la función generadora.

Recordando la definición del paréntesis de Poisson, podemos escribir el término en ε como

$$\varepsilon \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial S}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial p_i} \right) = \varepsilon \{f, S\}$$

y hasta términos de orden ε podemos ver el cambio de cualquier función que depende en coordenadas canónicas cuando hacemos un cambio de éstas.

Si $f(p,q)$ se vé en otras coordenadas P, Q

$$f(p,q) \quad \rightarrow \quad f(P,Q) \quad = \quad f(p,q) + \varepsilon \{f, S\}$$

cuando

$$\begin{aligned} p &\quad \rightarrow \quad p + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial q} \\ q &\quad \rightarrow \quad q + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial p} \end{aligned}$$

Entonces podemos apreciar que cuando p, q varían un poco, también va a resultar un pequeño cambio en la función que dependa en p y q, y este cambio puede expresarse, hasta términos en orden ε, por los paréntesis de Poisson.

Esta es la segunda aplicación que encontramos para los paréntesis de Poisson.

El primer empleo fué el criterio para ver si una transformación finita y macroscópica es canónica. La tabla de paréntesis de Poisson entre variables y coordenadas tiene que representar la matriz antisimétrica J.

Veamos ahora un caso particular, pero que es muy interesante e importante

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \{f, h\} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

y cuando f no depende explícitamente en el tiempo $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ y por lo tanto

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}$$

y entonces la derivada de la función está expresada por un paréntesis de Poisson.

Hemos visto como podemos caracterizar una transformación infinitesimal para que sea canónica, y como esto implica la existencia de una función tal que los cambio entre las coordenadas antiguas y las nuevas pueden ser expresados como derivadas de esa función generadora.

El proceso contrario es completamente admisible, es decir, uno puede tomar una función arbitraria y con ésta generar una transformación infinitesimal canónica.

1.4 Axiomas de los paréntesis de Poisson

Debido a la gran importancia que tienen los paréntesis de Poisson en la mecánica clásica, así como su generalización en la mecánica cuántica que son los conmutadores, es conveniente axiomatizar el concepto de paréntesis de Poisson.

Axioma 1. Antisimetría
$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$
Axioma 2. Linealidad
$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$$
Axioma 3. Identidad de Jacobi
$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$
Axioma 4. "Derivada"
$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$$
Este es un momento apropiado para hablar acerca de nuestro sistema de axiomas.
En primer lugar mostramos una consecuencia inmediata de 1.
$$1^{'}) \qquad \{f, f\} = 0$$
ya que
$$\{f, f\} = -\{f, f\}; \qquad 2\{f, f\} = 0$$
así
$$\{f, f\} = 0$$
Inmediatamente se puede probar, usando 1, y 2 que
$$2^{'}) \quad \{h, \alpha f + \beta g\} \quad = \quad \alpha\{h, f\} + \beta\{h, g\}$$
y ahora es posible ver que podiamos haber usado como conjunto de axiomas $1^{'}$, 2, $2^{'}$, 3, 4.
El axioma tres es la propiedad que reemplazará a la asociatividad.
El hecho de que al axioma 4 le hallamos puesto el título de derivada se debe a que:

Una derivada D es un operador tal que

D1) $\quad D\alpha f = \alpha D f \quad , \quad \alpha$ escalar

D2) $\quad D(f + g) = D f + D g$

D3) $\quad D(fg) = fD g + (Df) g$

D4) $\quad D x = 1$

Los axiomas 1, 2, 3 nos dicen que los paréntesis de Poisson forman un álgebra de Lie.
El axioma 2 por si solo nos asegura que tenemos un operador lineal y los axiomas 2, 4 que tenemos casi definida una derivada.

Es conveniente hacer notar que el paréntesis de Poisson es un operador lineal, cuando dejamos fijo uno de los argumentos y esto mismo sucede cuando hablamos de que si es casi una derivada.

Al respecto hemos escrito anteriormente casi una derivada ya que el inciso D4 de la definición de derivada no se cumple, y esto es lo que nos va a traer como concecuencia es que no tendremos unicidad. Sin embargo de aquí en adelante diremos que los paréntesis de Poisson forman un álgebra de Lie con derivada.

Ahora es conveniente hacer notar que el paréntesis de Poisson definido como

$$\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

cumple con los cuatro axiomas enunciados anteriormente.

Hay que hacer notar aquí, que cualquier conjunto con una estructura tal que cumpla con esos axiomas se comportará como los paréntesis de Poisson definidos como una suma de productos de derivadas parciales.

Para ver que los paréntesis de Poisson cumplen con los axiomas escribamos f, g de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial g}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A1)

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial g}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\ &= \sum - \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\ &= -\sum \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\ &= -\{g,f\} \end{aligned}$$

A2)

$$\begin{aligned}
\{\alpha f+\beta g,h\} &= \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial q_i} & \frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\
&= \sum \begin{vmatrix} \alpha\frac{\partial f}{\partial q_i}+\beta\frac{\partial g}{\partial q_i} & \alpha\frac{\partial f}{\partial p_i}+\beta\frac{\partial g}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\
&= \sum \begin{vmatrix} \alpha\frac{\partial f}{\partial q_i} & \alpha\frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} + \sum \begin{vmatrix} \beta\frac{\partial g}{\partial q_i} & \beta\frac{\partial g}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\
&= \sum \alpha \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} + \sum \beta \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\
&= \alpha \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} + \beta \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial q_i} & \frac{\partial g}{\partial p_i} \\ \frac{\partial h}{\partial q_i} & \frac{\partial h}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\
&= \alpha\{f,h\}+\beta\{g,h\}
\end{aligned}$$

A4)

$$\begin{aligned}
\{f,gh\} &= \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \frac{\partial gh}{\partial q_i} & \frac{\partial gh}{\partial p_i} \end{vmatrix} \\
&= \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i} & \frac{\partial f}{\partial p_i} \\ g\frac{\partial h}{\partial q_i}+\frac{\partial g}{\partial q_i}h & g\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial p_i}h \end{vmatrix} \\
&= \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} & +\sum\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \\ g\frac{\partial h}{\partial q_i}g\frac{\partial h}{\partial p_i} & \frac{\partial g}{\partial q_i}h\frac{\partial g}{\partial p_i}h \end{vmatrix} \\
&= g\{f,h\}+\{f,g\}h
\end{aligned}$$

Otra cosa que es importante verificar es que $\{f,g\}$ con respecto a las variables canónicas p, y q, que denotaremos por $\{f,g\}_{p,q}$ es igual a $\{f,g\}$ con respecto a cualquier otra colección de variables canónicas. Esto justifica hasta cierto punto el hecho de haber definido los paréntesis de Poisson sin escribir las variables.

Así se prueba que

$$\{f,g\}_{p,q}=\{f,g\}_{P,Q}$$

En realidad podemos hacer esta afirmación si pasamos de las variables p, q por medio de una transformación canónica a las variables P, Q.

Si nuestra transformación no es canónica no podemos asegurar nada.

Capítulo 2

Los paréntesis de Poisson como una funcional bilineal alternante para el espacio fase

2.1 Definición de $\Phi_n^{(1)}$ y de conjugado canónico

Definimos el espacio vectorial $\Phi_n^{(1)}$ como todas las combinaciones lineales generadas por el conjunto de funciones $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ que cuando se evaluan nos dan la cantidad de movimiento o la coordenada. Notamos que

$$\dim\ (\Phi_n^{(1)}) = 2n$$

.

Es conveniente hablar de una sola variable para denotar los elementos de la base, así definimos:

$$x_j \quad = \quad \begin{cases} p_{-j} & j < 0 \\ q_j & j > 0 \end{cases}$$

Definimos una transformación $T_f(\cdot)$ de la siguiente manera:

$$T_f(g) \quad = \quad (\ \lambda(g)\ \ \{f, g\}\ )$$

Esto significa que mantendremos fija la función f, y el argumento será g.

El que $T_f(\cdot)$ es un operador lineal se deriva del hecho de que los paréntesis de Poisson son lineales, es decir,

$$\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha\{f, g\} + \beta\{f, h\}$$

Pero como ya sabemos, en un espacio vectorial para cada transformación existe una representación matricial de ella, así para toda f nosotros podemos tener una representación matricial de T_f.

Veamos algunos ejemplos, usando las reglas canónicas:

$$\begin{aligned} \{p_j, p_k\} &= 0 \\ \{p_j, q_k\} &= \delta_{jk} \\ \{q_j, p_k\} &= -\delta_{jk} \\ \{q_i, q_k\} &= 0 \end{aligned}$$

que en nuestra notación de $T_f^{'}S$ será:

$$\begin{aligned} T_{p_j}(p_k) &= 0 \\ T_{p_j}(q_k) &= \delta_{jk} \\ T_{q_j}(p_k) &= -\delta_{jk} \\ T_{q_j}(q_k) &= 0 \end{aligned}$$

Para clarificar ideas que serán desarrolladas posteriormente formamos la siguiente tabla

$T_x(y)$	$x =$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	q_1	q_2	$\ldots$	q_n
$y =$									
p_1		0	0	$\ldots$	0	-1	0	$\ldots$	0
p_2		0	0	$\ldots$	0	0	-1	$\ldots$	0
$\ldots$		.	.	$\ldots$	.	.	.	$\ldots$	.
p_n		0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	-1
q_1		1	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
q_2		0	1	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0
$\ldots$		.	.	$\ldots$	.	.	.	$\ldots$	.
q_n		0	0	$\ldots$	1	0	0	$\ldots$	0

Vemos que esta tabla es la matriz J, y que $\{T_x(\cdot)\}$ es un conjunto generador del espacio dual, ya que sólo difiere de la base dual, en que unas funciones tienen un factor de -1.

Denotamos el espacio dual por $\Phi_n^{(1)^+}$.

Ahora construyamos la base dual. Denotémosla por $\{\varphi_i\}$

Recordando que

$$x_j = \begin{cases} p_{-j} & j < 0 \\ q_j & j > 0 \end{cases}$$

vemos que tenemos que encontrar funciones φ_i tal que

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

si i = 1, debemos tener que

$$\varphi_1(x_1) = 1$$

es decir

$$\varphi_1(q_1) = 1$$

y que

$$\varphi_1(x_j) = 0 \quad , \quad j = 1$$

Si vemos nuestra tabla notamos que nuestra función T_{P_i} cumple con esta propiedad y además que para $i > 0$

$$\varphi_i = T_{p_i}$$

Ahora solo nos resta encontrar las $\varphi_i \quad , \quad i < 0$

Para $i = -1$ debemos tener

$$\varphi_{-1}(x_{-1}) = 1$$

o sea,

$$\varphi_{-1}(p_1) = 1$$

y

$$\varphi_{-1}(p_j) = 0 \quad \text{con} \quad j \neq -1$$

viendo nuestra tabla tenemos que T_{q_i} cumple con esta propiedad salvo por un signo. Recordando lo que significa $T_x(\cdot)$

$$T_{q_1}(p_1) = \{q_1, p_1\} = 1$$

y también que podemos sacar una constante del paréntesis, proponemos

$$\varphi_1 = T_{-q_1}$$

veamos si se satisfacen las condiciones

$$\varphi_1(x_j) = T_{-q_1}(x_j) = \{-q_1, x_j\} = -\{q_1, x_j\} = -T_{q_1}(x_j) = -(-\delta_{ij}) = \delta_{ij}$$

Así

$$\varphi_i = T_{-q_i}$$

En resumen la base dual es:

$$\{T_{p_1}, T_{p_2}, \ldots, T_{p_n}, T_{-q_1}, T_{-q_2}, \ldots, T_{-q_n}\}$$

Ahora definimos el conjugado canónico del vector x_i como aquel vector $\mathcal{Y}$ tal que

$$T_y(x_i) = 1$$

y

$$T_y(x_k) = 0 \qquad \text{si } k \neq i$$

Así vemos que el conjugado canónico de p_i es $-q_i$, y el de q_i es p_i.

Debido a $\{p_i, -q_i\}$ es también una base del espacio $\Phi_n^{(1)}$ vemos que en realidad el tomar el conjugado canónico es una función entre dos bases del mismo espacio. Denotemos esta función por M, así

$$\begin{aligned} M(p_i) &= -q_i \\ M(q_i) &= p_i \end{aligned}$$

2.2 Sobre el espacio dual $\Phi_n^{(1)^+}$

Recordando que el paréntesis de Poisson es una función bilineal, usando la linealidad en el primer argumento, tenemos que M es una función lineal, por lo tanto existe una matriz la cual nos va a representar a la transformación M. Y esta matriz es J.

Es importante notar que nuestra funcional lineal T_f, definida como

$$T_f(g) = \{f, g\}$$

cuando f y g pertenecen entonces tenemos que

$$T_f(g)$$

pertenece a $\Phi_n^{(0)} = \mathcal{C}$ o $\mathcal{R}$.

Gracias a la linealidad en el primer argumento en el paréntesis de Poisson:

$$\begin{aligned} T_{\alpha f+\beta g}(h) &= \{\alpha f + \beta g, h\} \\ &= \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} \\ &= \alpha T_f(h) + \beta T_g(h) \end{aligned}$$

lo cual quiere decir que podemos formar combinaciones lineales de las funciones en el espacio dual, por formar la misma combinación lineal con los índices.

Así tenemos que

$$\Phi_n^{(1)} \sim \Phi_n^{(1)^+}$$

Hagamos más explícito el hecho de este isomorfismo.

Definamos $\Psi : \Phi_n^{(1)} \to \Phi_n^{(1)^+}$ de la siguiente manera:

$$\Psi(f) = T_f$$

donde

$$T_f(g) = \{f, g\}$$

veamos ahora que $\quad \Psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g)$

$$\Psi(\alpha f + \beta g) = T_{\alpha f+\beta g} = \{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha T_f + \beta T_g = \alpha\Psi(f) + \beta\Psi(g)$$

El hecho de tener una base en un espacio, nos permite definir un producto interno lo cual denotaremos por (f, g). Si $f = \sum c_i x_i \quad , \quad g = \sum d_i x_i$,

$$(f, g) \overset{\text{def}}{=} \sum c_i d_i$$

donde $\{x_i\}$ es una base.

Este producto nos definirá una norma pitagoreana.

En el caso en que nuestro campo de escalares sean los complejos trabajaremos con una norma hermitiana dada por un producto interno definido de la siguiente manera:

$$(f, g) \overset{\text{def}}{=} \sum c_i^* \, d_i$$

donde c_i^* es el conjugado complejo de c_i.

Nosotros trabajaremos esta última definición.

En este punto es bueno recordar algunas propiedades de los espacios vectoriales cuando tienen definidos sobre ellos dos estructuras como son nuestra función lineal definida por;

$$\phi(x,y) = \sum c_i d_i$$

y nuestra funcional sesquilineal dada por

$$(x,y) = \sum c_i^* d_i$$

Sabemos por el teorema de Riesz que puede expresarse como;

$$(x,y) = \phi(Ax,y)$$

donde A es una transformación lineal sobre nuestro espacio.

Debido a esta igualdad si nosotros conocemos las propiedades que tiene el producto interior Pitagoreano con sólo tener la transformación A, es decir, una matriz, conoceremos las propiedades del producto Hermitiano.

En realidad lo importante de esto es que se cumple para cualesquiera dos productos internos.

Ahora regresemos al espacio $\Phi_n^{(1)}$ y a su espacio dual.

Por ser $\Phi_n^{(1)}$ un espacio de dimensión $2n$, sabemos que es isomorfo al espacio vectorial de 2n-adas $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ que son renglones. Su espacio dual ${\Phi_n^{(1)}}^+$ es isomorfo también a ese espacio, pero nosotros preferimos establecer la correspondencia con el espacio vectorial de 2n-adas,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

que son columnas.

Es claro que hace una correspondencia entre estos dos espacios, de vectores columna y vectores renglón, a la correspondencia que mostramos se le llama Transposición

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{bmatrix}$$

Así con cada vector de $\Phi_n^{(1)}$ tendremos asociado un vector renglón. Y con cada funcional lineal que opere sobre $\Phi_n^{(1)}$ tendremos asociada un vector columna.

Nosotros asociaremos por el momento

$$
\begin{aligned}
p_1 &\quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
p_2 &\quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad \cdots \\
p_n &\quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
q_1 &\quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad \cdots \\
q_n &\quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Bajo esta asociación, el producto interno de dos vectores cualesquiera de $\Phi_n^{(1)}$ nos dará el mismo resultado que el producto interno de los vectores columna asociados. Basándonos en esto tenemos que si x, y pertenecen a $\Phi_n^{(1)}$ entonces

$$(x, y) = (c, c')$$

donde por las c's denotaremos los correspondientes vectores columna a x y y.

Como sabemos que una funcional lineal, es decir, un elemento de un espacio dual puede ser expresada como un producto interno entre elementos del espacio dual, tenemos:

$$\varphi(x) = (c, c')$$

donde φ es una función que le corresponde una vector columna c. O lo que es lo mismo habrá otra funcional lineal sobre el espacio de los vectores columna tal que

$$\xi(c) = \varphi(x) = (c, c') = (x, y)$$

Ahora en base a que φ puede representarse como una columna, nos preguntamos si habrá una operación entre renglones y columnas tal que produzca el mismo efecto de evaluar $\varphi(x)$.

La contestación es sí, y la operación es la operación de multiplicar matrices, así sí:

$$\varphi \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

y

$$\chi \to \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$\varphi(\chi) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_n \end{bmatrix}$$

pero sabemos que

$$\varphi(\chi) = (x, y)$$

entonces si y está representado por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$(x, y) = \sum \chi_i^* y_i = \sum \alpha_i x_i$$

cuando $x = y$

$$\sum \alpha_i y_i = \sum y_i^* y_i$$

Esto sucede para todo vector, en particular sucederá para un vector que sea representado por

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_j + ib_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces tendremos que

$$\alpha_j = \overline{y}_j$$

Así

$$\varphi \qquad (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)$$

y como

$$y \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Su asociado en el dual será el conjugado transpuesto.

Así tenemos una correspondencia entre el dual y el espacio, y esta es, que a cada vector renglón le asociamos un vector del dual el cual será, el transpuesto conjugado.

2.3 Extensión de la definición de conjugado canónico a todo $\Phi_n^{(1)}$

Ahora regresemos a nuestro mapeo conjugado canónico.

$$\begin{aligned} T_{q_i} &= p_i \\ T_{p_i} &= -q_i \end{aligned}$$

Si recordamos que $\{q_i, p_i\}$ es una base de $\Phi_n^{(1)}$ y los funcionales $\{T_{q_i}, T_{p_i}\}$ una base de ${\Phi_n^{(1)}}^+$ entonces podemos encontrar una matriz que nos representa a esta función. Esta matriz es J

$$J = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} &&&&&& -1 &&&&& \\ &&&&&& & -1 &&&& \\ &&&&&& && -1 &&& \\ &&&&&& &&& -1 && \\ &&&&&& &&&& -1 & \\ &&&&&& &&&&& -1 \\ \hline 1 &&&&& &&&&&& \\ & 1 &&&& &&&&&& \\ && 1 &&& &&&&&& \\ &&& 1 && &&&&&& \\ &&&& 1 & &&&&&& \\ &&&&& 1 &&&&&& \end{array}\right]$$

Así

$$\begin{aligned} p_i &= Jq_i \\ -q_i &= Jp_i \end{aligned}$$

Ahora lo que nos interesa es extender este mapeo a todo el espacio. Esto lo hacemos por medio de la siguiente definición:

$$f = \sum c_i x_i$$

entonces el conjugado canónico $\overline{f}$, de f es

$$\overline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \sum c_i^* T_{x_i}$$

donde los x_i son los elementos de la base.

Cabe hacer notar que el caso en que nuestro campo de escalares sea real, entonces la matriz J seguirá representando a nuestra transformación. En el caso complejo no sucede así, ya que el mapeo conjugado canónico no es un mapeo lineal, por aparecer un conjugado complejo.

Sin embargo, en cualquiera de estos dos campos es posible ver que

$$\{f, g\} = -(f^*, Jg)$$

Remarcando que f, g pertenecen a $\Phi_n^{(1)}$ entonces $\{f, g\}$ es un elemento de nuestro campo de escalares, cosa que puede no suceder si tenemos otro espacio vectorial.

Así hemos encontrado una matriz tal que en $\Phi_n^{(1)}$ el paréntesis de Poisson puede ser sustituido por un producto interno.

2.4 Un producto interno, en base a los paréntesis de Poisson

Nos preguntamos si podemos definir un producto interno como los paréntesis de Poisson directamente, es decir si

$$\phi(f, g) = \{f, g\}$$

cumple con los axiomas:

$$\begin{array}{llcll} 1) & \phi(f,f) & \geq & 0 & ; \quad \phi(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0 \\ 2) & \phi(f,g) & = & \phi(g,f)^* & \\ 3) & \phi(f,\alpha g+\beta h) & = & \alpha\phi(f,g)+\beta\phi(f,h) & \end{array}$$

La contestación es no, porque

$$\{p_i,p_i\} \quad = \quad \{q_i,q_i\} \quad = \quad 0 \quad ; \quad \forall p_i q_i$$

Pero si ahora definimos la funcional lineal ψ de la manera:

$$\psi(f,g)=\{f,\overline{g}\}^*$$

tendremos que ψ es un producto interno. La verificación de esto es muy fácil, tan solo por aplicar varias veces las propiedades de los paréntesis de Poisson a

$$\begin{array}{rcl} f & = & \sum c_i q_i + c_{-i} p_i \\ \overline{f} & = & \sum c_i^* p_i - c_{-i}^* q_i \\ g & \text{y} & \overline{g} \end{array}$$

y recordando que

$$\begin{array}{rcccl} \{p_i,p_k\} & = & \{q_i,q_k\} & = & 0 \\ \{p_i,q_k\} & = & \delta_{ij} & & \\ & = & -\{q_i,p_k\} & & \end{array}$$

Algo muy conveniente es averiguar la relación que guardan los productos internos, hasta ahora definidos, los cuales han sido denotados por $(,)$ y por $((,))$.

Pero antes veamos el siguiente lema

Lema 1.-

$$\overline{x}=Jx^*$$

tomemos

$$x=\sum c_i q_i + c_{-i} p_i$$

entonces x, como eneada está representada por

$$x=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \\ C_{-1} \\ C_{-2} \\ \vdots \\ C_{-n} \end{bmatrix}$$

$$\overline{x}=\sum {c_i}^* p_i - c_{-i}^* q_i$$

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} -C_{-1}^* \\ -C_{-2}^* \\ \vdots \\ -C_{-n}^* \\ C_1^* \\ c_2^* \\ \vdots \\ C_n^* \end{bmatrix}$$

Pero esto es lo mismo que buscar una matriz tal que a la mitad inferior de

$$\begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_n^* \\ C_{-1}^* \\ C_{-2}^* \\ \vdots \\ C_{-n}^* \end{bmatrix}$$

lo suba cambiándole el signo y a la parte superior simplemente la baje, pero esto hace una matriz de la forma

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} & & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & & & -1 \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & \end{array}\right]$$

que es precisamente J multiplicando a x, por lo tanto

$$\overline{x} = Jx^*$$

Corolario.- Si M es una transformación lineal, entonces

$$\overline{MX} = JM^*X^*$$

$$\overline{MX} = J(MX)^*$$

por el lema 1, entonces

$$\overline{MX} = JM^*X^*$$

Regresemos a los productos internos

$$((x,y)) \overset{\text{def}}{=} \{x, \overline{y}\}^*$$

pero

$$\overline{y} = Jy^*$$

por lo tanto

$$((x,y)) = \{x, Jy^*\}^*$$

pero

$$\{f,g\} = -(f^*, Jg)$$

Así

$$((x,y)) = -(x^*, JJy^*)^*$$

y como $j^2 = -I$.

$$((x,y)) = -(x^*, -y^*)^* = (x^*, y^*)^* = (x,y)$$

en resumen

$$((x,y)) = (x,y)$$

La operación de conjugar canónicamente, es una operación semi-involutoria ya que si

$$\begin{aligned}
f &= \sum c_i q_i + c_{-i} p_i \\
\overline{f} &= \sum c_i^* p_i - c_{-i}^* q_i \\
\overline{\overline{f}} &= \sum -c_i q_i + c_{-i}^* p_i \\
&= -\sum c_i q_i + c_{-i}^* p_i \\
&= -f
\end{aligned}$$

Así

$$\overline{\overline{f}} = -f$$

2.5 Construcción de una nueva base canónica

Ahora probaremos que dada una base canónica, podremos construir una nueva base canónica, es decir, una base que tiene la propiedad de que si un vector pertenece a ella, su conjugado también pertenece a ella. Pero esta nueva base canónica la construiremos de tal manera que si un vector arbitrario distinto de cero queremos que esté en la base esto será posible.

Lo que haremos es contruir una nueva base canónica a partir de un vector arbitrario distinto de cero.

En realidad no tendremos mucha libertad en escoger los demás vectores base, pero cualquier vector que sea una combinación de coordenadas y momenta pueda llegar a ser un elemento base.

Primero probaremos el siguiente lema:

Lema.- Si $\overline{v} = \alpha v$, entonces $v = 0$.

$$(v, v) = -\{\overline{v}, v\}^* = -\{\alpha v, v\}^* = -\alpha\{v, v\} = 0$$

por tanto

$$v = 0$$

Corolario.- El único vector autoconjugado es el cero.

Lema - v es ortogonal a $\overline{v}$.

$$(v, \overline{v}) = \{v, v\} = 0$$

Ahora sí, ya estamos en la posibilidad de construir nuestra nueva base.
Sea

$$\chi = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2n}\}$$

una base canónica y sea v el vector con el que queremos comenzar una nueva

$$v = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i \chi_i$$

por ser v distinto de cero, al menos un ξ_i es distinto de cero. Suponemos

$$\xi_k \neq 0$$

por tanto

$$\chi_k = \frac{v - \sum_{i \neq k} \xi_i x_i}{\xi_k}$$

Así tenemos escrito χ_k como una combinación de v y $\{\chi_i\}$ con $i \neq k$. Por tanto

$$Y' = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k-1}, v, \chi_{k+1} \ldots \chi_{2n}\}$$

es una base.
Ahora podemos escribir $\overline{v}$ con respecto a esta base

$$\overline{v} = \sum_{i \neq k} \eta_i \chi_i + \eta_k v$$

Sabemos que

$$(v, \overline{v}) = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
(v, \overline{v}) &= (v, \sum \eta_i x_i) + \eta_k (v, v) \\
&= \sum \eta_i (v, x_i) + \eta_k (v, v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{array}{rcl} (v,x_i) & = & 0 \quad \forall \ i \neq k \\ \eta_k(v,v) & = & 0 \end{array}$$

entonces

$$\eta_k = 0$$

Así

$$\overline{v} = \sum_{i\neq k} \eta_i x_i$$

pero

$$\overline{v} \neq 0$$

luego, para algun $l \neq k$

$$\eta_l \neq 0$$

Así podemos formar una nueva base

$$Y = \{x_i\}_{i\neq k,l} \cup \{v, \overline{v}\}$$

es decir

$$Y = \{x_1, x_2, \ldots, \overline{v}, \ldots, v, \ldots, x_n\}$$

y esta es la base la cual contiene el vector arbitrario V que además consiste exclusivamente de parejas conjugadas de vectores.

El unico problema que tenemos es que la base Y puede no ser ortogonal. Pero el proceso de Gram-Schmidt puede verse que preserva el hecho de tener solamente parejas conjugadas en la base.

Realmente este último teorema puede generalizarse, y queda así:

Dada una base arbitraria, y un vector arbitrario siempre podemos construir una nueva base tal que el vector este en ella y consista de puras parejas de vectores conjugados canónicamente.

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$ la base y v el vector.

Formamos el conjunto

$$\{x_1, \ldots, x_{2n}, v\}$$

$$v = \sum_{i=1}^{2n} \xi_i X_i$$

donde existe un k tal que

$$\xi_k \neq 0$$

por tanto

$$x_k = \frac{1}{\xi_k} v - \sum_{i\neq k} \xi_i x_i$$

El conjunto

$$\{x_1 x_2 \ldots x_k, v, x_{k+1}, \ldots, x_{2n}\}$$

es linealmente independiente ya que si formamos

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k v + \cdots + \alpha_{2n} x_{2n} = 0$$

entonces

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + \alpha_k \sum_{i=1}^{2n} \xi_i x_i + \cdots + \alpha_{2n}x_{2n} = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_k\xi_1)x_1 + \cdots + (\alpha_{k-1} + \alpha_k\xi_{k-1})x_{k-1} + (\alpha_k\xi_k + \cdots + (\alpha_{2n} + \alpha_k\xi_{2n}) = 0$$

y como x_i es linealmente independiente, entonces

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_1 + \alpha_k\xi_1 & = & 0 \\
\alpha_2 + \alpha_k\xi_2 & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_{k-1} + \alpha_k\xi_{k-1} & = & 0 \\
\alpha_k\xi_k & = & 0 \\
\alpha_{k+1} + \alpha_k\xi_{k+1} & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_{2n} + \alpha_k\xi_{2n} & = & 0
\end{array}$$

pero

$$\xi_k \neq 0 \qquad \text{implica} \qquad \alpha_k = 0$$

luego

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_{2n} = 0$$

Así tenemos una nueva base con nuestro vector formando parte de ella.

Ahora

$$\overline{v} = \sum c_i x_i + cv$$

Si todo c_i es igual a cero tenemos contradicción, por lo tanto tenemos uno de ellos, digamos c_1, distinto de cero.

Aplicando el razonamiento anterior podemos tomar el conjunto linealmente independiente.

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, v, x_{k+1}, \ldots, \overline{v}, \ldots, x_{2n}\}$$

donde hemos quitado ahora otro vector, digamos x_1 y tendremos

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{2n}, v, \overline{v}\}$$

Ahora tomamos cualquier u' tal que

$$u' = \sum_{i=1}^{2n} c_i x_i$$

$u' \neq o$ implica la existencia de $c_m \neq 0$ y formamos

$$u = u' - (u', v)v - (u', \overline{v})\overline{u}$$

y tendremos que

$$(u,v) = (u,\overline{v}) = 0$$

llamando

$$\alpha = (u',v) \qquad \text{y} \qquad \beta = (u',\overline{v})$$

como

$$u = \sum c_i x_i + \alpha v + \beta \overline{v}$$

entonces

$$x_m = \frac{1}{c_m} u - \alpha v - \beta \overline{v} - \sum_{i \neq m} c_i x_i$$

Formamos el conjunto

$$\{x_1, x_2, \ldots, u, \ldots, x_{2n-2}, v, \overline{v}\}$$

donde ya no aparece el vector x_m. Este conjunto es linealmente independiente ya que

$$\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_m u + \cdots + \xi_{2n-2} x_{2n-2} + \xi_{2n-1} v + \xi_{2n} \overline{v} = 0$$

$$\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_{m-1} x_{m-1} + \xi_m \sum c_i x_i + \xi_m \alpha v + \xi_m \beta \overline{v} + \cdots + \xi_{2n-2} x_{2n-2} + \cdots + \xi_{2n} \overline{v} = 0$$

por tanto

$$\begin{array}{rclcrcl}
(\xi_1 + \xi_m C_1) & = & 0 & \qquad & (\xi_{m+1} + \xi_m C_{m+1}) & = & 0 \\
(\xi_2 + \xi_m C_2) & = & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & (\xi_{2n-2} + \xi_m C_{2n-2}) & = & 0 \\
(\xi_m + \xi_m C_{m-1}) & = & 0 & & \xi_{2n-1} + \xi_m \alpha & = & 0 \\
\xi_m C_m & = & 0 & & \xi_{2n} + \xi_m \beta & = & 0
\end{array}$$

entonces $\xi_i = 0$ y esto prueba la independencia lineal.

Lo que tenemos que hacer ahora es introducir u en nuestra base, para eso nos fijamos en que

$$\overline{u} = \sum_{i \neq m} c_i x_i + \alpha v + \beta \overline{v} + \gamma u$$

si todo c_i es igual a cero entonces

$$\overline{u} = \alpha v + \beta \overline{v} + \gamma u$$

$$\begin{aligned}
(u,\overline{u}) &= 0 \\
&= \alpha(u,v) + \beta(u,\overline{v}) + \gamma(u,u) \\
&= \gamma(u,u)
\end{aligned}$$

entonces $\quad \gamma = 0.$

Por tanto $\quad \overline{u} = \alpha v + \beta \overline{v}.$

Así al menos uno de los coeficientes α, β es distinto de cero, conjugando este vector nuevamente tenemos

$$\overline{u} = -\alpha^* \overline{v} + \beta^* v$$

lo cual no puede ser puesto que

$$(u,v)=(u,\overline{v})=0$$

Así tenemos que existe r tal que c_r es distinto de cero, quitando este vector de la base y poniendo en su lugar u tendremos una nueva base

$$\{x_1,x_2,\ldots,x_{2n-4},v,\overline{v},u,\overline{u}\}$$

la demostración de que es base se hace repitiendo el argumento usado anteriormente para v.

Este es un proceso finito, al término del cual tendremos una base conjugada y ortogonal. Lo cual prueba nuestro teorema.

Una pregunta natural que uno se hace, es si podemos formar una base con puros vectores que tengan la propiedad de que ninguno sea el conjugado de algún otro elemento de la base.

Para contestarla probaremos el siguiente:

Teorema.- La mayor sub-base ortogonal de nuestro espacio que no contenga un conjugado cuenta con n elementos, es decir, con la mitad de los elementos que forman una base para el espacio. Una sub-base de este tipo se llama isotrópica.

Lema 1.-

$$(u,v)=(\overline{v},\overline{u})$$

Demostración

$$\begin{aligned}(u,v) &= \{u,\overline{v}\}^*=-\{\overline{v},u\}^*\\ &= \{+\overline{v},-u\}=\{\overline{v},\overline{\overline{u}}\}\\ &= (\overline{v},\overline{u})\end{aligned}$$

Lema 2.- Si

$$(u,v)=(u,\overline{v})=0$$

entonces

$$(\overline{u},v)\quad=\quad(\overline{u},\overline{v})\quad=\quad 0$$

Demostración

$$\begin{aligned}(v,u) &= (\overline{v},u)=0\\ (\overline{u},v) &= -(\overline{v},u)=0\end{aligned}$$

entonces falta ver el valor de

$$(\overline{u},\overline{v})$$

pero

$$(\overline{u},\overline{v})=(v,u)=0.$$

Demostración del teorema.

Si tenemos una base isotrópica ortogonal tal que

$$\{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+p}\}$$

entonces

$$(x_i,x_j)\quad=\quad 0\quad i\neq j\quad\text{por hipótesis}$$

y

$$(x_i, \overline{x_j}) \quad = \quad 0 \quad \forall j$$

ya que

$$(x_i, \overline{x_j}) \quad = \quad +\{x_j, x_i\} \quad = \quad 0$$

por la definición de conjugado canónico.

Así por el lema 2

$$\overline{x_i} \quad \text{es ortogonal a} \quad x_j \quad \text{y a} \quad \overline{x_j}$$

Por tanto además de que

$$\Psi = \{x_1, \ldots, x_{n+p}\}$$

es linealmente independiente, también

$$\overline{\Psi} = \{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x}_{n+p}\}$$

es linealmente independiente y además $\Psi \cup \overline{\Psi}$ es linealmente independiente, entonces la dimensión de nuestro espacio es $2n + 2p$.
Pero debe ser $2n$ por lo tanto $p = O$. Así queda probado nuestro teorema.

¿Que sucederia si en nuestro teorema acabado de probar quitamos la condición de ortogonalidad?

La respuesta a esta pregunta es que el teorema sigue siendo válido.

En resumen si denotamos por $\overline{\Psi}$ el conjunto de vectores los cuales son conjugados de los vectores que pertenecen a un subespacio Ψ, y si por $\{A, B\}$ denotamos al conjunto de todos los paréntesis de Poisson de la forma $\{a, b\}$ tal que a pertenezca a A y b pertenezca a B. Entonces hemos visto que si

$$\Psi \cap \overline{\Psi} \neq \phi, \quad \left[\Psi, \overline{\Psi}\right] \neq \{0\}$$

Como una consecuencia de esto cuando deseamos encontrar un subespacio para el cual

$$\{\Psi, \Psi\} = \{0\}$$

siempre que tengamos un vector v debemos excluir $\overline{v}$.

Por lo tanto un subespacio maximal isotrópico tiene dimensión n y

$$\Phi = \Psi \oplus \overline{\Psi}$$

2.6 Espacios de polinomios homogéneos de grado mayor que uno

Ahora discutiremos otros espacios, de polinomios homogéneos de grado mayor. Así hablaremos de $\Phi_n^{(k)}$
cuando $k = 2$

$$\Phi_n^{(2)} = \left\{q_1^2, q_1 q_2, \ldots, q_i q_j, \ldots p_i p_j, \ldots p_n^2\right\}$$

cuando $k = 3$

$$\Phi_n^{(3)} = \left\{q_1^3, q_1 q_2 q_3, \ldots, q_i q_j q_l, \ldots p_i p_j p_l, \ldots p_n^3\right\}$$

Definimos un monomio homogéneo de grado k como el siguiente producto

$$q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_n^{\alpha_n} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

donde α_i, β_i pueden ser elementos de $\{0, 1, 2, \dots\}$, con la condición:

$$\sum_i (\alpha_i + \beta_i) = k$$

y un polinomio de grado k será una combinación lineal de monomios homogéneos de grado k.

$\Phi_n^{(k)}$ es un espacio vectorial y trataremos de definir en él un producto interno, utilizando el paréntesis de Poisson.

Para esto nos fijamos en que si φ^j es un polinomio de grado j y φ^k un polinomio de grado k

$$\{\varphi^j, \varphi^k\}$$

da como resultado un polinomio de grado $j + k - 2$ así

$$\{\varphi^j, \varphi^k\} = \varphi^{j+k-2}$$

Entonces si escogemos $j = 1$ tenemos

$$\{\varphi, \varphi^k\} = \varphi^{k-1}$$

es decir, si pensamos en que el polinomio de grado uno opera sobre el polinomio de grado k, gracias al paréntesis de Poisson el resultado es un nuevo polinomio pero de grado menor al que se tenía.

Así repitiendo k veces la misma operación,

$$\{\varphi, \{\varphi, \{\varphi \dots \{\varphi, \varphi^k\} \dots\}\}\}$$

el resultado será un escalar.

Hay que hacer notar que haciendo las operaciones con distintos $\varphi\prime_s$ el resultado sigue siendo un escalar.

$$\{\varphi_1, \{\varphi_2, \{\dots \{\varphi_k, \varphi^k\} \dots\}\}\} \quad = \quad \text{escalar}$$

donde

$$\varphi_i \in \Phi_n^{(1)}$$

En esta manera podemos definir funcionales lineales para los espacios homogéneos de grado k mayor que uno.

Si podemos definir un $\Phi_n^{(k)}$ una funcional bilineal, utilizando los paréntesis de Poisson casi hemos definido un producto interno.

Supongamos que $[\cdot\ , \cdot]$ representa una funcional bilineal operando sobre $\Phi_n^{(k)}$ por lo tanto tiene la forma

$$[\varphi'^k, \varphi^k]$$

donde φ^k, φ'^k pertenecen a $\Phi_n^{(k)}$ o $\varphi^{(k)}$ es una combinación lineal de monomios homogéneos. Así

$$\left[\varphi'^k, \varphi^k\right]$$

será una combinación lineal de elementos de la forma $[m_i, \varphi^k]$ donde por m_i hemos denotado al i-ésimo monomio homogéneo que forma a $\Phi_n^{(k)}$. Pero recordemos que m_i es un producto de polinomios homogéneos de grado uno.

Por lo tanto

$$\left[\varphi'^k, \varphi^k\right] = \sum c_i \left[m_i, \varphi^k\right] = \sum c_i \left[\prod_{i=1}^{n} q_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i}, \varphi^k\right]$$

tal que

$$\sum \alpha_i^* \beta_i = k$$

Por lo tanto basta con definir la funcional para los monomios.

Queremos que:

$$\left[p_1 p_1 p_1 \ldots p_n p_n \ldots p_n q_1 \ldots q_1 \ldots q_n q_n \ldots q_n \varphi^k\right]$$

sea un escalar, recordando que la repetición de los paréntesis de Poisson con elementos de $\Phi_n^{(k)}$ nos dá un escalar se ocurre definir

$$\left[p_1 p_1 \ldots q_n q_n, \varphi^k\right] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{p_1 \left\{p_1 \ldots \left\{q_n \left\{q_n, \varphi^k\right\}\right\} \ldots\right\}\right\}$$

y así ya tenemos una función bilineal siempre y cuando este bien definida. Esta última duda nace del hecho de que la descomposición de los monomios homogéneos en productos no es única ya que intercambiando algunos factores se tiene mismo monomio homogéneo de grado k, pero quizas un escalar distinto. Pero el hecho de que tenemos una operación bien definida la probaremos por inducción sobre el grado de homogeneidad de nuestro espacio y utilizando la identidad de Jacobi.

Si $k = 2$

$$\left[\varphi^2, \varphi'^2\right] = [xy, uv]$$

Pero

$$\varphi^2 = xy = yx$$

$$\left[\varphi^2, \varphi'^2\right] = [yx, uv]$$

probaremos que

$$[xy, uv] = [yx, uv]$$

$$[xy, uv] = \{x, \{y.uv\}\}$$

Pero por Jacobi

$$\{x, \{y, uv\}\} = -\{y, \{uv, x\}\} - \{uv, \{x, y\}\}$$

pero $\{x, y\} = \text{constante}$, entonces $\{uv, \text{cte}\} = 0$. por lo tanto

$$\{x, \{y, uv\}\} + \{y, \{uv, x\}\} = 0$$

$$\begin{aligned} \{x, \{y, uv\}\} &= -\{y, \{uv, x\}\} = \{y, \{uv, x\}\} \\ &= \{y, \{x, uv\}\} = [yx, uv] \end{aligned}$$

por lo tanto
$$[xy, uv] = [yx, uv]$$

Con esta funcional bilineal definiremos la operación de conjugar canónicamente.

Con objeto de ilustrar la definición lo haremos primero en $\Phi_n^{(2)}$.

Recordemos que una funcional bilineal siempre define una funcional lineal.

Así definiremos una transformación lineal $T : \Phi_n^{(2)} \rightarrow \mathcal{C}$ de la siguiente manera:

$$T_{\varphi^2}(\varphi'^2) = \left[\varphi^2, \varphi'^2\right]$$

Tomemos la base de $\Phi_n^{(2)}$ formada por los productos de la base Φ, es decir;

$$\{p_1p_1, \ldots, p_1p_n, \ldots, q_nq_n\}$$

Definimos el conjugado canónico de cualquiera de estos elementos x_ix_j como el elemento x_kx_l de la base tal que
$$T_{x_k}T_{x_l}(x_ix_j) = 1$$

y
$$T_{x_k}T_{x_l}(x_rx_s) = 0$$

si
$$x_rx_s \neq x_ix_j$$

Averiguaremos ahora cuales son los conjugados de los distintos elementos.

Para esto veamos que si fg, uv son dos monomios homogéneos de segundo grado

$$\begin{aligned} [fg, uv] &= \{f, \{g, uv\}\} \\ &= \{f, u\{g, v\}\} + \{f, \{g, u\}v\} \\ &= \{f, u\{g, v\}\} + \{f, \{g, u\}v\} \end{aligned}$$

Pero $\{g, v\}$ y $\{g, u\}$ son escalares, entonces

$$[fg, uv] = \{g, v\}\{f, u\} + \{g, u\}\{f, v\}$$

Si consideramos ahora los elementos base de ϕ tenemos

$$\begin{aligned} T_{x_ix_j}(x_kx_l) &= [x_ix_j, x_kx_l] \\ &= \{x_i, x_k\}\{x_j, x_l\} + \{x_i, x_l\}\{x_j, x_k\} \end{aligned}$$

consideremos el caso en que tengamos p's y q's.

Definiendo $x_kx_l = p_kq_l$

$$T_{x_ix_j}(p_kq_l) = \{x_i, p_k\}\{x_j, q_l\} + \{x_i, q_l\}\{x_j, p_k\}$$

pueden suceder dos casos:
$$x_i = p_i$$

o
$$x_i = q_i$$

Consideremos $x_i = q_i$ entonces

$$\begin{aligned} T_{q_i x_j}(p_k q_l) &= \{q_i, p_k\}\{x_j, q_l\} + \{q_i, q_l\}\{x_j, p_k\} \\ &= \delta_{ik}\{x_i, q_l\} + 0 \end{aligned}$$

Si $x_j = q_j$ obtendremos 0, en cambio si $x_j = p_j$

$$\begin{aligned} T_{q_i p_j}(p_k q_l) &= \delta_{ik}\{p_j, q_l\} \\ &= -\delta_{ik}\delta_{jl} \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned} T_{q_k p_l}(p_k q_l) &= -1 \\ &= T_{-\bar{q}_l \bar{p}_k}(p_k q_l) \end{aligned}$$

Esto nos induce a probar con el producto de los conjugados en el subíndice.

$$\begin{aligned} T_{\bar{p}_k \bar{q}_l}(p_k q_l) &= \{\bar{p}_k, p_k\}\{\bar{q}_l, q_l\} + \{\bar{p}_k, q_l\}\{\bar{q}_l, p_k\} \\ &= -\{q_k, p_k\}\{p_k, q_l\} + (-1)\{q_k, q_l\}\{p_l, p_k\} \\ &= -(1)(-1) + (-1)0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora veamos los elementos de la forma $q_i q_j$

$$\begin{aligned} T_{\bar{q}_i q_j}(q_i q_j) &= \{\bar{q}_i q_i\}\{\bar{q}_j q_j\} + \{\bar{q}_i q_j\}\{\bar{q}_j q_i\} \\ &= +1 \end{aligned}$$

Para $p_i p_j$ obtenemos:

$$\begin{aligned} T_{\bar{p}_i \bar{p}_j}(p_i p_j) &= \{\bar{p}_i p_i\}\{\bar{p}_j p_j\} + \{\bar{p}_i p_j\}\{\bar{p}_j p_i\} \\ &= +1 \end{aligned}$$

Hasta el momento hemos asumido $i \neq j$, ¿Qué pasa si $i = j$?
Tomemos $p_i p_i$

$$\begin{aligned} T_{\bar{p}_i \bar{p}_i}(p_i p_i) &= \{\bar{p}_i, p_i\}\{\bar{p}_i, p_i\} + \{\bar{p}_i, p_i\}\{\bar{p}_i, p_i\} \\ &= 2\{\bar{p}_i, p_i\}\{\bar{p}_i, p_i\} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Para $q_i q_i$, también se obtiene lo mismo.

De aquí podemos ver que salvo para los elementos de la forma ${x_i}^2$ ya tenemos los elementos de la base dual, Pero si escogemos como base de $\Phi_n^{(2)}$

$$\left\{ \frac{p_1^2}{\sqrt{2}}, p_1 p_2, \ldots, \frac{p_i^2}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{q_n^2}{\sqrt{2}} \right\}$$

ya no tendremos ningún problema.

Después definimos por extensión lineal, exactamente de la misma manera que en $\Phi_n^{(1)}$, el conjugado canónico de cualquier elemento de $\Phi_n^{(2)}$.

Hay que notar que aquí la diferencia de $\Phi_n^{(1)}$, el conjugar canónicamente es una operación involutoria y no anti-involutoria.

En una manera similar podemos demostrar que para $\Phi_n^{(3)}$ la funcional

$$[x_i x_j x_k, x_p x_q x_r] = \{x_i, \{x_j, \{x_k, x_p x_q x_r\}\}\}$$

es conmutativa y entonces puede servir como un producto interior; resultados análogos pueden ser definidos para cualquier espacio $\Phi_n^{(k)}$. Donde por el producto interno tendremos

$$\begin{aligned}(x_i x_j \, \ldots \, x_n, x_p x_q x_r \, \ldots \, x_s) &= [x_i x_j \, \ldots \, x_n, \bar{x}_p \bar{x}_q \bar{x}_r \, \ldots \, \bar{x}_s] \\ &= \{x_i, \{x_j, \{\ldots \, \{x_n, \bar{x}_p \bar{x}_q \bar{x}_r \ldots \, \bar{x}_s\} \ldots\}\}\}\end{aligned}$$

si escogemos como elementos de una base a las cantidades

$$\frac{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \, \ldots \, x_n^{a_n}}{\sqrt{a_1! \, a_2! \, \ldots \, a_n!}}$$

la base dual estará compuesta de

$$\frac{\bar{x}_1^{a_1} \bar{x}_2^{a_2} \ldots \bar{x}_n^{a_n}}{\sqrt{a_1! \, a_2! \, \ldots \, a_n!}}$$

y la conjugación estará definida por

$$\overline{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}} = (-1)^{a_1 + a_2 + \cdots + \, a_n} \bar{x}_1^{a_1} \bar{x}_2^{a_2} \ldots \bar{x}_n^{a_n}$$

Habiendo visto como los paréntesis de Poisson pueden ser usados para definir un producto interno, una operación de conjugación y un sistema de bases duales tanto en el espacio fase $\Phi_n^{(1)}$ como en los espacios de mayor orden, de polinomios homogéneos $\Phi_n^{(k)}$.

Ahora veremos como pueden ser usados para definir un espacio de transformaciones lineales, las cuales actuarán sobre los espacios arriba mencionados, estas transformaciones serán definidas por medio del espacio de polinomios homogenéos de segundo grado $\Phi_n^{(2)}$.

Capítulo 3

Operadores definidos, sobre el espacio fase, por los paréntesis de Poisson

3.1 $\Phi_n^{(2)}$ operando sobre $\Phi_n^{(k)}$

Tomaremos el conjunto de transformaciones lineales del espacio fase, conoceremos condiciones sobre sus eigenvalores y eigenvectores, definiremos el transpuesto de un operador y en base a esto el concepto de normalidad. En el caso del grupo simplectico, veremos que la matriz que representa a un vector autoadjunto tiene sus eigenvalores en parejas negativas. Esta es la propiedad que sustituye a la que tienen los operadores hermiteanos de que sus eigenvalores son reales.

El que los eigenvalores se agrupen en parejas negativas implicará que los respectivos eigenvectores, se agrupen en parejas conjugadas canónicamente.

Empecemos por hacer notar que si f pertenece a $\Phi_n^{(k)}$ y g pertenece a $\Phi_n^{(l)}$ entonces $\{f,g\} \in \Phi_n^{(k+l-2)}$.

Así

$$\left\{\Phi_n^{(k)}, \Phi_n^{(l)}\right\} \subset \Phi_n^{(k+l-2)}$$

Ponemos una sola contención, porque no es posible decir que cada elemento de $\Phi^{(k+l-2)}$ pueda ser representado como el paréntesis de Poisson de un elemento de $\Phi^{(k)}$ y uno de $\Phi^{(l)}$.

En el caso en que $k = 2$ tenemos

$$\left\{\Phi_n^{(2)}, \Phi_n^{(l)}\right\} \subset \Phi_n^{(l)}$$

es decir, el paréntesis de Poisson de un polinomio de $\Phi_n^{(2)}$ y uno de $\Phi_n^{(l)}$ nos dá nuevamente un polinomio de $\Phi_n^{(l)}$.

Cuando $k = l = 1$

$$\left\{\Phi_n^1, \Phi_n^1\right\} \subset \Phi_n^0$$

que fué el caso con que empezamos nuestro trabajo, y hemos visto que esto nos llevó a encontrar las funciones lineales.

Por el momento prestaremos nuestra atención, al caso en que $l = 1$. Así

$$\left\{\Phi_n^2, \Phi_n^1\right\} \subset \Phi_n^1$$

Sabemos que

$$\Phi^{(2)} = \{p_i p_j, p_i q_j, q_i q_j\}$$

y será un espacio vectorial que tiene $(2n + I)n$ productos, los cuales son una base.

Así en el caso de $\Phi_3^{(2)}$, su dimensión será 2I.

Debido a que $\Phi^{(2)}$ nos dá un mapeo de $\Phi^{(k)}$ en $\Phi^{(k)}$ por medio de paréntesis de Poisson, será conveniente nuevamente utilizar la notación

$$T_f(g) = \{f, g\}$$

donde f es fijo y pertenece a $\Phi^{(2)}$ y g es variable y pertenece a $\Phi^{(k)}$.

Los elementos matriciales de T_f están dados por

$$(\, u, T_f(v)\,) = \{\bar{u}, T_f(v)\}$$

donde u y v son elementos de la base de $\Phi^{(I)}$.

Ahora daremos la definición de la transpuesta de una transformación T, la cual denotaremos por T^T y será;

$$(T^T(g), h) \quad = \quad (g, T(h)) \qquad\qquad \forall g, h \in \Phi^1$$

Veremos si podemos averiguar algo más de T^T

$$(T_f^T(g), h) \stackrel{\text{def}}{=} (g, T(h)) = \{\bar{g}, T_f(h)\}$$

por lo tanto en vista de que

$$T_f(h) = \{f, h\}$$

tenemos

$$(T_f(g), h) = \{\bar{g}, \{f, h\}\}$$

pero la identidad de Jacobi nos dice que:

$$\{\bar{g}, \{f, h\}\} + \{f, \{h, \bar{g}\}\} + \{h, \{\bar{g}, f\}\} = 0$$

Recordando el hecho de que g y h pertenecen a $\Phi^{(1)}$ entonces

$$\{h, \bar{g}\} \in \Phi^0$$

por lo tanto

$$\{f, \{h, \bar{g}\}\} = 0$$

y así

$$\{\bar{g}, \{f, h\}\} = -\{h, \{\bar{g}, f\}\}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
(T_f^T(g),h) &= -\{h,\{\bar{g},f\}\} \\
&= -\{h,-\{f,\bar{g}\}\} \\
&= \{h,\{f,\bar{g}\}\} \\
&= -\{\{f,\bar{g},h\}\} \\
&= -\left\{-\overline{\overline{\{f,\bar{g}\}}},h\right\} \\
&= \left\{\overline{\overline{\{f,\bar{g}\}}},h\right\} \\
&= (\overline{\{f,\bar{g}\}},h)
\end{aligned}$$

Así hemos encontrado que

$$(T_f^T(g),h) = (\overline{\{f,\bar{g}\}},h)$$

por lo tanto

$$T_f^T(g) = \overline{\{f,\bar{g}\}} = \overline{T_f(\bar{g})}$$

Entonces es posible tomar la definición de T^T como :

$$T_f^T(u) = (\lambda(u)\overline{\{f,\bar{u}\}}) = \overline{T_f(u)}$$

Recordando que cada elemento de $\Phi_n^{(2)}$ es un polinomio homogéneo de grado 2, lo cual significa que es una combinación lineal de productos de monomios, es decir, si f pertenece a $\Phi_n^{(2)}$ entonces

$$f = \sum_{i\leq j} f_{ij}x_ix_j$$

y si tenemos una base ortonormal de $\Phi_n^{(2)}$, es decir,

$$(x_i,x_j) = \{\bar{x}_i,x_j\} = \delta_{ij}$$

tendremos que

$$\begin{aligned}
T_f^T(x_k) &= \overline{\{f,\bar{x}_k\}} \\
&= \left\{\overline{\sum_{i\leq j} f_{ij}x_ix_j,\bar{x}_k}\right\} \\
&= \overline{\sum_{i\leq j}\{f_{ij}x_ix_j,\bar{x}_k\}} \\
&= \overline{\sum_{i\leq j} f_{ij}\{x_ix_j,\bar{x}_k\}} \\
&= \sum_{i\leq j} f_{ij}^*\overline{\{x_ix_j,\bar{x}_k\}} \\
&= \sum_{i\leq j} f_{ij}^*\overline{(x_i\{x_j,\bar{x}_k\}} + \overline{\{x_i,\bar{x}_k\}x_j)} \\
&= \sum_{i\leq j} f_{ij}^*(\bar{x}_i\{x_j,\bar{x}_k\}^* + \bar{x}_j\{x_i,\bar{x}_k\}^*)
\end{aligned}$$

intercambiando el orden:

$$\begin{aligned}
T_f^T(x_i) &= \sum_{i\leq j} f_{ij}^*(\bar{x}_i(-\{\bar{x}_k, x_j\})^* + x_j(-\{\bar{x}_k, x_i\})^*) \\
&= \sum_{i\leq j} -f_{ij}^*(\bar{x}_i\{\bar{x}_k, x_k\}^* + \bar{x}_j\{\bar{x}_k, x_i\}^*) \\
&= \sum_{i\leq j} -f_{ij}^*(\bar{x}_i(x_k, x_j)^* + \bar{x}_j(x_k, x_i)^*) \\
&= \sum_{i\leq j} -f_{ij}^*(\bar{x}_i(x_j, x_k)^{**} + \bar{x}_j(x_i, x_j)^{**}) \\
&= \sum_{i\leq j} -f_{ij}^*(\bar{x}_i(x_j, x_k) + \bar{x}_j(x_i, x_k)) \\
&= \sum_{i\leq j} -f_{ij}^*(\bar{x}_i\{x_j, x_k\} + \bar{x}_j\{\bar{x}_i, x_k\}) \\
&= \sum_{i\leq j} -f_{ij}^*\{\bar{x}_i\bar{x}_j, x_k\} \\
&= \left\{\sum_{i\leq j} -f_{ij}^*\bar{x}_i\bar{x}_j, x_k\right\}
\end{aligned}$$

Si definimos, en términos de una base el conjugado de un elemento, f de $\Phi_n^{(2)}$ como

$$\bar{f} = \sum_{i\leq j} -f_{ij}^*\bar{x}_i\bar{x}_j$$

donde $\bar{x_i}$ debe recordarse que es el conjugado de x_i, concepto que ya ha sido definido para elementos de $\Phi_n^{(1)}$.

En base a esta nueva definición tenemos:

$$\left\{\sum -f_{ij}^*\bar{x}_i\bar{x}_j, x_k\right\} \quad = \quad \{\bar{f}, x_k\}$$

Por tanto vemos que el transpuesto de T puede ser definido también, por la siguiente expresión:

$$T_f^T(u) = \left(\lambda(u)\left\{\bar{f}, u\right\}\right) = T_{\bar{f}}(u)$$

3.2 Sobre los eigenvectores

Un eigenvector de T_f se define de la manera usual, un $u \neq 0$ tal que

$$T_f(u) = \lambda u$$

donde λ es un escalar.

Nótese que $T_f(u) = \lambda u$ es equivalente por definición a:

$$\{f, u\} = \lambda u$$

La determinación de tales eigenvectores, se reduce al hecho de diagonalizar la matriz T_f.

Si tomamos el conjugado canónico en ambos lados de la última igualdad.

$$\overline{\{f,u\}} = \overline{\lambda u}$$

tenemos que:

$$\overline{\{f,u\}} = \lambda^* \bar{u}$$

Pero como

$$T_f^T(u) = \overline{\{f,\bar{u}\}}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\{f,u\}} &= \overline{\{f,-\bar{\bar{u}}\}} \\
&= -\overline{\{f,\bar{\bar{u}}\}} \\
&= -T_f^T(\bar{u})
\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$-T_f^T(\bar{u}) = \lambda^* \bar{u}$$

por lo tanto

$$T_f^T(\bar{u}) = -\lambda^* \bar{u}$$

o lo que es lo mismo

$$\left\{\bar{f},\bar{u}\right\} = -\lambda^* u$$

Lo que nos dice esta ecuación, es que si u es un eigenvector de T_f con eigenvalor λ, entonces u es eigenvector de T_f^T con eigenvalor $-\lambda^*$.

Así, si podemos determinar los eigenvalores y eigenvectores de un operador transpuesto, los del operador mismo serán conocidos.

Definimos un operador normal, de la manera usual, como aquel que conmuta con su transpuesto, donde, porque dos operadores T_f y T_g conmuten se entiende que:

$$T_f(T_g(u)) = T_g(T_f(u)) \qquad \forall u$$

es decir,

$$\{f,\{g,u\}\} = \{g,\{f,u\}\}$$

En vista de la identidad de Jacobi

$$\{f,\{g,u\}\} + \{g,\{u,f\}\} + \{u,\{f,g\}\} = 0$$

pero

$$\{g,\{f,u\}\} = \{g,-\{u,f\}\} = -\{g,\{u,f\}\}$$

por tanto

$$\{f,\{g,u\}\} = -\{g,\{u,f\}\}$$

sustituyendo en el identidad

$$-\{g,\{u,f\}\} + \{g,\{u,f\}\} + \{u,\{f,g\}\} = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} \{u\,\{f,g\}\} &= 0 \\ \{\{f,g\}\,,u\} &= 0 \qquad\qquad \forall u \end{aligned}$$

Notemos que

$$\{f,g\} = h \in \Phi_n^{(2)}$$

y que nos está definiendo un operador $T_h(u)$.

Así tenemos

$$T_h(u) = 0 \qquad\qquad \forall u$$

Pero esto significa que

$$T_h \equiv 0$$

entonces

$$\{f,g\} = 0$$

Así la conmutatividad de dos operadores en $\Phi_n^{(2)}$, T_f, T_g quiere decir que el paréntesis de Poisson de los elementos de $\Phi_n^{(2)}$ asociados a ellos sea cero, y esta es una condición necesaria y suficiente.

Entonces en el caso de un operador normal T_N, se satisface

$$\left\{\bar{N}, N\right\} = 0$$

ya que

$$T_N^T = T_{\bar{N}}$$

Hasta el momento las últimas definiciones se han hecho sobre el espacio de operadores, ahora vamos a dar una definición sobre el espacio $\Phi_n^{(2)}$ mismo.

Así diremos que si f pertenece a $\Phi_n^{(2)}$ es hermitiano

$$f = \bar{f}$$

Como corolario de la definición tenemos que el operador T_f, asociado con f es normal. Como

$$T_f T_{\bar{f}} = T_{\bar{f}} T_f$$

porque

$$f = \bar{f}$$

y como

$$T_{\bar{f}} = T_f^T$$

entonces

$$T_f T_f^T = T_f^T T_f$$

El recíproco no siempre es cierto.

También diremos en el caso en que $f = \bar{f}$ con $f \in \Phi_n^{(2)}$ que f es hermitiano.

Probaremos que los eigenvalores de un operador T_f, donde $f = \bar{f}$, aparecen en parejas conjugadas y lo son de vectores conjugados canónicamente con signos opuestos.

Sabemos que si

$$T_f(u) = \lambda u$$

entonces

$$T_f^T(u) = -\lambda^* u$$

o lo que es lo mismo

$$T_{\bar{f}}(\bar{u}) = -\lambda^* \bar{u}$$

Pero $f = \bar{f}$, por tanto

$$T_f(\bar{u}) = -\lambda \bar{u}$$

Ahora estudiaremos la forma canónica de un operador normal.

Primero recordemos que la forma canónica de una matriz M se entiende por

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i \,|\, i >< i \,|$$

donde

$$|\, i >< i \,| = G_i$$

son operadores idempotentes, es decir, tales que

$$G_i^2 = G_i$$

y además son ortogonales, lo cual significa que

$$G_i G_j = 0 \qquad\qquad i \neq j$$

Trataremos de averiguar que forma toma el teorema espectral en el contexto en que estamos trabajando.

Si tomamos como hipótesis que existe un conjunto completo ortonormal de eigenvectores, entonces es posible escribir

$$f = \sum f_{ij} g_i g_j$$

ya que

$$f = \sum c_i \eta_i$$

en donde

$$\eta_j \in \Phi_n^{(2)}$$

es decir

$$\eta_i = \sum d_{jj'} g_j g_{j'}$$

con

$$g_j \in \Phi_n^{(1)}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j,j'=1}^{n} d_{jj'} g_j g_{j'} \\
f &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,j'=1}^{n} c_i d_{jj'} g_j g_{j'} \\
f &= \sum_{j,j'=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_i d_{jj'} g_i g_{j'} \\
f &= \sum_{j',j=1}^{n} f_{jj'} g_i g_{j'}
\end{aligned}$$

cambiando notación

$$f = \sum f_{ij} g_i g_j$$

Ahora apliquemos f al producto $g_i g_j$ por medio de paréntesis de Poisson.
Notando que ahora la transformación definida por f va de $\Phi_n^{(2)}$ en $\Phi_n^{(2)}$.
Recordando que g_i y g_j son eigenvectores de f

$$\begin{aligned}
\{f, g_i g_j\} &= g_i(\lambda_j g_j) + (\lambda_i g_i) g_j \\
&= \lambda_j g_i g_j + \lambda_i g_i g_j \\
&= (\lambda_i + \lambda_j) g_i g_j
\end{aligned}$$

Lo cual nos está diciendo que si g_i y g_j son eigenvectores de f su producto también lo es, y que va a tener como eigenvalor a la suma de los eigenvalores. Este resultado puede ser extendido a cualquier espacio $\Phi_n^{(k)}$ sobre el cual f actue.

Así los eigenvectores de los elementos de $\Phi_n^{(2)}$, que operan sobre $\Phi_n^{(1)}$, dan eigenvectores en todos los demás espacios $\Phi_n^{(m)}$.

Es conveniente trabajar con una base $\{g_i\}$ que sea cerrada bajo la conjugación. Este es un resultado que siempre se tiene si f es un operador normal.

De cualquier manera es posible formar una base, de eigenfunciones, canónicas. Esta base que es cerrada bajo conjugación puede ser numerada de la siguiente manera:

$$g_{-i} = \bar{g}_i \qquad i > 0 \qquad (i = 1, 2......n)$$

Pero

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij}$$

o en forma equivalente

$$\{\bar{g}_i, g_j\} = \delta_{ij}$$

y por la convención de arriba

$$\{g_{-i}, g_j\} = \delta_{ij} \qquad\qquad i > 0$$

Para llevar a cabo esta ortonormalización, se sigue el proceso de "Gram-Schmidt". El proceso que hemos descrito para formar una base canónica.

3.3 Propiedades de los operadores normales y hermitianos

Ahora demostraremos que para operadores normales y hermitianos sus eigenfunciones son ortogonales.

Sean u y v eigenfunciones de T_f, es decir,

$$T_f(u) = \lambda u$$

$$T_f(v) = \mu v$$

Tomemos el producto interior de $T_f(u)$ y v.

$$(T_f(u), v) = (\lambda u, v) = \lambda(u, v)$$

Pero por otro lado

$$(T_f(u), v) = (u, T_f^T(v)) = (u, T_{\bar{f}}(v)) = (u, T_f(v)) = (u, \mu v) = \mu^*(u, v)$$

por lo tanto

$$\lambda(u, v) - \mu^*(u, v) = 0$$

Así, sí

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu^* \\ (u, v) &= 0 \end{aligned}$$

Es posible probar que los eigenvalores de un operador hermitiano son reales

$$(T_f(u), u) = (u, T_f^T(u)) = (u, T_{\bar{f}}(u)) = (u, T_f(u)) = (u, \lambda^* u) = \lambda^*(u, u)$$

así

$$\lambda(u, u) - \lambda^*(u, u) = 0$$

por lo tanto

$$(\lambda - \lambda^*)(u, u) = 0$$

Pero $(u, u) > 0$, entonces

$$\lambda = \lambda^*$$

que nos dice que λ es real entonces podemos decir que si $f = \bar{f}$ sus eigenvalores son reales y los eigenvectores asociados con eigenvalores distintos son ortogonales.

Probaremos para un operador T_f arbitrario que

$$T_f = A_f + iB_f$$

donde A_f y B_f son hermitianos, tomemos

$$A = \frac{T_f + T_f^T}{2}$$

$$B = \frac{T_f - T_f^T}{2i}$$

entonces

$$\frac{T_f - T_f^T}{2} + i\frac{T_f - T_f^T}{2i} = \frac{T_f + T_f^T + T_f - T_f^T}{2} = \frac{2T_f}{2} = T_f$$

B hermitiano ya que

$$\begin{aligned}
B^T(u) &= \overline{\frac{1}{2i}(T_f(u) - T_f^T(\bar{u}))} \\
&= (\frac{1}{2i})^* \overline{[T_f(\bar{u}) - T_f^T(\bar{u})]} \\
&= \frac{1}{2i}\left[\overline{T_f(\bar{u})} - \overline{T_f^T(\bar{u})}\right] \\
&= -\frac{1}{2i}\left(T_f^T(u) - \overline{\overline{\overline{T_f(\bar{u})}}}\right) \\
&= -\frac{1}{2i}\left(T_f^T(u) - T_f(u)\right) \\
&= B(u)
\end{aligned}$$

y A hermitiano ya que

$$A^T = \frac{T_f + T_f^T}{2}$$

$$\begin{aligned}
A^T &= \bar{A}(\bar{u}) \\
&= \overline{\frac{T_f(\bar{u}) + T_f^T(\bar{u})}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{T_f(\bar{u})} + \overline{T_f^T(\bar{u})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(T_f^T(u) + \overline{T_f^T(\bar{u})}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(T_f^T(u) + \overline{\overline{T_f(\bar{\bar{u}})}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(T_f^T(u) + T_f(u)\right) \\
&= A
\end{aligned}$$

entonces

$$T_f = A_f + iB_f$$

Ahora probaremos que T_f es normal si y solo si sus partes real e imaginaria conmutan. Si T_f es normal

$$T_f^T T_f = T_f T_f^T$$

pero

$$A_f = \frac{1}{2}(T_f + T_f^T)$$

y

$$B_f = \frac{1}{2i}(T_f - T_f^T)$$

$$\begin{aligned}
A_f B_f &= \frac{1}{2}(T_f + T_f^T)\frac{1}{2i}(T_f - T_f^T) \\
&= \frac{1}{4i}(T_f + T_f^T)(T_f - T_f^T) \\
&= \frac{1}{4i}(T_f T_f - T_f T_f^T + T_f^T T_f - T_f^T T_f^T) \\
&= \frac{1}{4i}(T_f T_f + T_f T_f^T - T_f^T T_f - T_f^T T_f^T) \\
&= \frac{1}{4i}(T_f - T_f^T)(T_f - T_f^T) \\
&= \frac{1}{2i}(T_f - T_f^T)\frac{1}{2}(T_f + T_f^T) \\
&= B_f A_f
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $AB = BA$, entonces probemos que

$$T_f^T T_f = T_f T_f^T$$

$$T_f^T = (A + iB)^T = A^T - iB^T = A - iB$$

$$T_f = A + iB$$

$$\begin{aligned}
T_f T_f^T &= (A + iB)(A - iB) \\
&= AA - iAB + iAB + BB \\
&= AA - iBA + iAB + BB \\
&= AA + iAB - iBA + BB \\
&= (A - iB)(A + iB) \\
&= T_f^T T_f
\end{aligned}$$

Ahora probaremos que si un operador es normal, entonces las eigenfunciones que pertenecen a eigenvalores distintos son ortogonales.

Consideremos.

$$\begin{aligned}
T_f(u) &= \lambda u \\
& \qquad\qquad\qquad \text{con } \lambda \neq \mu \\
T_f(v) &= \mu v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_f(u) &= A_f(u) + iB_f(u) \\
T_f(v) &= A_f(v) + iB_f(v)
\end{aligned}$$

Como A, B y T conmutan es posible encontrar una base en la cual tienen los mismos eigenvectores, digamos

$$\begin{aligned} A_f(u) &= \lambda_1 u \\ A_f(v) &= \mu_1 v \\ B_f(u) &= \lambda_2 u \\ B_f(v) &= \mu_2 v \end{aligned}$$

entonces

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$$

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2$$

Si suponemos lo contrario a lo que queremos probar, o sea que λ y μ distintos pero u y v no son perpendiculares y llegamos a una contradicción habremos probado nuestro teorema.

$$\lambda \neq \mu \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 \neq \mu_1 \\ \quad \text{o} \\ \lambda_2 \neq \mu_2 \end{cases}$$

si

$$\lambda_1 \neq \mu_1$$

entonces por ser eigenvalores distintos de A_f , operador hermitiano, tenemos que los eigenvectores asociados son ortogonales, es decir, $(u, v) = 0$. Y esta es la contradicción que buscabamos, la cual también se obtiene si el caso es que $\lambda_2 \neq \mu_2$

Como un corolario tenemos que las eigenfunciones, g_i, de un operador hermitiano forman una base canónica, es decir,

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij}$$

o lo que es lo mismo

$$\{\bar{g}_i, g_j\} = \delta ij$$

Tomemos la identidad de Jacobi:

$$\{f_i\{g_{-i}, g_i\}\} + \{g_{-i}, \{g_i, f\}\} + \{g_i, \{f, g_{-i}\}\} = 0$$

como g_i y g_j son eigenfunciones

$$\begin{aligned} \{g_i, f\} &= -\lambda_i g_i \\ \{f, g_{-i}\} &= \lambda_{-i} g_{-i} \end{aligned}$$

y

$$\{g_{-i}, g_i\} = 1$$

por lo tanto

$$\{f, \{g_{-i}, g_i\}\} = 0$$

así tenemos

$$\begin{aligned} -\lambda_i\{g_{-i}, g_i\} + \lambda_{-i}\{g_i, g_{-i}\} &= 0 \\ -\{g_{-i}, g_i\}(\lambda_i + \lambda_{-i}) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\lambda_i + \lambda_{-i}) = 0$$

entonces

$$\lambda_i = -\lambda_i$$

y tenemos que los eigenvalores ocurrren en parejas negativas.

Los dos resultados más interesantes son que las eigenfunciones ocurren en parejas conjugadas canónicas y que los eigenvalores se presentan en parejas negativas.

Regresando a la función f, sabemos que debe ocurrir

$$\{f, f\} = 0$$

es decir

$$\begin{aligned} \sum_{i\le j} f_{ij}\{f, g_i g_j\} &= 0 \\ \sum_{i\le j} f_{ij}(\lambda_i + \lambda_j) g_i g_j &= 0 \end{aligned}$$

como los $g_i g_j$ forman una base, tenemos

$$f_{ij}(\lambda_i + \lambda_j) = 0$$

cuando

$$\lambda_i \neq -\lambda_j$$

$$f_{ij} = 0$$

Ahora podemos escribir esto como

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_{-i,i} g_{-i} g_i$$

Supongamos que los eigenvalores son todos distintos.

Calculemos

$$\begin{aligned} \{f, g_k\} &= \lambda_k g_k \\ \sum_{i=1}^{n} f_{-i,i}\{g_{-i} g_i, g_k\} &= \sum_{i=1}^{n} f_{-i,i}[g_{-i}\{g_i, g_k\} + \{g_{-i}, g_k\} g_i] = \lambda_k g_k \end{aligned}$$

cuando $i \neq k$, no hay conclusión con respecto a $f_{-i,i}$ y en caso contrario vemos que

$$f_{k,-k}(g_k\{g_{-k},g_k\}+g_{-k}\{g_k,g_k\})=\lambda_k g_k$$

pero

$$\{g_k,g_k\}=0$$

entonces tenemos que

$$f_{k,-k}=\frac{\lambda_k}{\{g_{-k},g_k\}}$$

Por tanto

$$f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_1}{\{g_{-i}g_i\}}g_{-i}g_i$$

y este es el resultado análogo a la teoría de matrices

$$M=\sum\frac{\lambda_i}{<i\,|\,i>}|\,i><i\,|$$

Aunque para llegar a este resultado hemos hecho la suposición de que los eigenvalores son distintos, esto fué hecho para ver el resultado con toda claridad y simplificar los cálculos. Ahora daremos la demostración en el caso general, es decir, que ahora admitiremos que haya degeneración.

Supongamos que hay eigenvalores iguales

$$\lambda_v=\lambda_\mu$$

entonces $\{f,f\}$ implica

$$f=\sum_{i=1}^{n}f_{-i,i}g_{-i}g_i+\sum_{m,k=1}^{n}f_{-m,k}g_{-m}g_k$$

Pero

$$[f,g_v]=\lambda_v g_v$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lambda_v g_v &= \sum_{i=1}^{n}f_{-i,i}[g_{-i}g_i+g_v]+\sum_{k,m=1}^{n}f_{-m,k}[g_{-m,k},g_v]\\
\lambda_v g_v &= \sum_{i=1}^{n}f_{-i,i}(g_{-i}\{g_i,g_v\}+g_i\{g_{-i},g_v\})+\\
&\quad+\sum_{k,m=1}^{n}f_{-m,k}(g_{-m}\{g_k,g_v\}+g_k\{g_{-m},g_v\})
\end{aligned}$$

En el segundo sumando del término de la derecha debemos notar que $k\neq m$, porque los términos que ocurren cuando $k=m$ ya están tomados en cuenta en el primer sumando.

Y así obtenemos la misma relación que antes.

Capítulo 4

$\Phi_n^{(2)}$ como un álgebra de Lie

4.1 Algunas definiciones y propiedades

En este capítulo estudiaremos las transformaciones del tipo

$$\left\{\phi_n^{(2)}, \phi_n^{(2)}\right\} \subset \phi_n^{(2)}$$

en donde el paréntesis de Poisson define una operación en dos variables, es decir, una forma bilineal.

Debido a los axiomas que cumplen, se tiene que $\phi_n^{(2)}$ es una álgebra de Lie.

El ser una álgebra de Lie implica muchas propiedades, no discutiremos todas, pero si aquellas que necesitemos aplicar.

Un álgebra de Lie cumple con:

i) Ser un espacio vectorial

ii) Hay definida sobre este espacio, una operacion bilineal, llamada conmutación denotada por $[f, g]$ que cumple con los siguientes axiomas.

(a)	$[f, g] = -[g, f]$	antisimetría
(b)	$[f + \alpha g + \beta h] = \alpha[f, g] + \beta[f, h]$	linealidad
(c)	$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$	identidad de Jacobi

Como espacio vectorial,un álgebra de Lie puede tener dimensión finita o infinita, y en estos casos se habla de álgebras de Lie de dimensión finita ó infinita respectivamente.

Algunos tipos de estructuras algebraicas que son estudiados generalmente, se tienen dentro de esta teoría, por ejemplo:

Si L es un álgebra de Lie y si M es un subconjunto de L, $M \subset L$, diremos que M es una subálgebra de L si M mismo es un álgebra de Lie.

Un criterio para verificar si un subconjunto M es un álgebra, es que M sea subespacio vectorial (es decir, cerrado respecto a combinaciones lineales de elementos de M) y que

$$[M, M] \subset M$$

Ya que iia, iib y iic se cumplen para cualesquiera elementos de L, por tanto se cumplirán para los de M.

Así para M sólo hay que verificar la cerradura respecto a combinaciones lineales y respecto a la conmutación.

Existe otro tipo de subálgebra más restringida, en la cual se exige que se cumpla.

$$[M, L] \subset M$$

Así además de que M es cerrado respecto a las combinaciones lineales, se tiene que el conmutador, de un elemento de M y cualquier elemento de L, está en M. En este caso el subespacio M se le llama un ideal. No existe ninguna diferencia entre ideal izquierdo y derecho ya que $[L, M]$ es $[M, L]$ pues solo hay un cambio de signo y este no afecta el espacio vectorial. Por lo tanto cualquier ideal izquierdo es ideal derecho. Debido a esto sólo se hablará de ideal.

De la definición se ve que L es un ideal, lo mismo que $\{0\}$.

En el conjunto de ideales se puede definir una relación de orden, por medio de la inclusión de conjuntos.

Así diremos que el ideal M_1 es menor que el ideal M_2 si $M_1 \subset M_2$

Si M_1 no es menor que M_2 ni M_2 es menor que M_1, diremos que son incomparables.

En este sentido L es el ideal máximo y $\{0\}$ es el ideal mínimo.

La interseccion de dos ideales $L_1 \cap L_2$, es también un ideal, ya que la intersección de espacios vectoriales es espacio vectorial y si $x \in L_1 \cap L_2$ entonces

$$x \in L_1 \qquad y \qquad x \in L_2$$

por lo tanto

$$[l, x] \in L_1, \qquad \forall\, l \in L$$

$$[l, x] \in L_2, \qquad \forall\, l \in L$$

por lo tanto

$$[l, x] \;\in\; L_1 \cap L_2, \qquad \forall\, l \in L$$

entonces

$$[L, L_1 \cap L_2] \;\subset\; L_1 \cap L_2$$

Así vemos que la intersección es cerrada con respecto a la operación de conmutación. Pero $L_1 \cap L_2$ es el mayor conjunto contenido en L_1 y en L_2 a la vez, por tanto será la mayor de las cotas inferiores.

Tomemos dos subespacios L_1 y L_2 y definamos su suma, $L_1 + L_2$, como el conjunto de todas las combínaciones lineales finitas que podamos formar con elementos de L_1 y de L_2.

Que $L_1 + L_2$ es un subespacio vectorial se demuestra directamente de la definición, lo que demostraremos en mayor detalle es que también es ideal.

Sea $x \in L_1 + L_2 \Rightarrow x = \sum \alpha_i x_i$
donde $x_i \in L_1 \cup L_2$

Sea $l \in L$ Tomemos

$$[l, x] = [l, \sum \alpha_i x_i] = \sum [l, \alpha_i x_i] = \sum \alpha_i [l, x_i]$$

Pero $[l, x_i]$ pertenece a L_1 o a L_2 dependiendo en que x_i sea un elemento de L_1 o un elemento de L_2 por lo tanto

$$\sum \alpha_i [l, x_i]$$

es una combinación lineal de elementos que están en L_1 o en L_2

Por tanto

$$[l, x] \in L_1 + L_2$$

Así

$$[L, L_1 + L_2] \subset L_1 + L_2$$

$L_1 + L_2$ es el menor subespacio que contiene a L_1 y a L_2, a la vez, como subespacios, y siendo un ideal, también es el menor ideal que cumple con esta propiedad.

Si recordamos la definicion de Red, vemos que los ideales de una álgebra, bajo el orden dado por la inclusión define una Red.

Veamos esto con un poco más de cuidado.

Una red está definida como un conjunto parcialmente ordenado en el cual, cada pareja de elementos tiene tanto una mínima cota superior como una máxima cota inferior.

Aquí tenemos que la mínima cota superior de L_1 y L_2 será $L_1 + L_2$ y la máxima cota inferior será $L_1 \cap L_2$.

Un diagrama acerca de estas ideas siempre es de utilidad

$$\begin{array}{ccccccc} & L & & & L_1 & & L_2 \\ & \downarrow & & & & \searrow\swarrow & \\ & L_1 + L_2 & & & & L_1 \bigcap L_2 & \\ & \swarrow\searrow & & & & \downarrow & \\ L_1 & & L_2 & & & \{0\} & \end{array}$$

Una propiedad muy interesante acerca de estas álgebras es:

$$[L_1, L_2] \subset L_1 \cap L_2$$

Esto es debido a que como L_1 y L_2 son ideales entonces

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &\subset L_1 \\ [L_1, L_2] &\subset L_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[L_1, L_2] \cap [L_1, L_2] = [L_1, L_2] \subset L_1 \cap L_2$$

No podemos afirmar que $[L_1, L_2]$ sea un espacio vectorial, esto es debido a que la suma de dos conmutadores no es siempre otro conmutador, pero sabemos del álgebra lineal que con cualquier subconjunto C de un espacio vectorial podemos formar un espacio vectorial, este espacio es llamado el espacio vectorial generado por C, la expansión lineal de C, $L(C)$; también es llamado la cáscara de C y es denotado por $((C))$.

$((C))$ es el conjunto de todas la combinaciones lineales finitas formadas con elementos de C.

Ahora probaremos que $(([L_1, L_2])) = L_0$ es un ideal.

Sea $x \in L_0$ entonces

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [l_1^i, l_2^i] \qquad \text{donde} \quad l_1^i \in L_1 \ \text{ y } \ l_2^i \in L_2$$

Probaremos que es una álgebra y de una vez que es un ideal si

$$[L, L_0] \subset L_0$$

Sea $l \in L$

$$[l, x] = \Big[\, l \,, \sum \alpha_i \,[\, l_i^i \,,\, l_2^i]\Big] = \sum \alpha_i \ \big[l, [\, l_1^i \,, l_2^i\,]\big]$$

Pero por la identidad de Jacobi

$$\big[l, [l_1^i, l_2^i]\big] + \big[l_1^i, [l_2^i, l]\big] + \big[l_2^i, [l, l_1^i]\big] = 0$$

$$\big[l, [l_1^i, l_2^i]\big] = -\,\big[l_1^i, [l_2^i, l]\big] - \big[l_2^i, [l, l_1^i]\big]$$

por lo tanto

$$[l, x] = \sum \alpha_i \ \big(-[l_1^i, [l_2^i, l]] - [l_2^i, [l, l_1^i]]\big)$$

Pero

$$[l_2^i, l] \in L_2$$

y

$$[l, l_1^i] \in L_1$$

llamandoles l_2^{i*} y l_1^{i*} respectivamente

$$\begin{aligned} [l, x] &= \sum \alpha_i \left(-[l_1^i, l_2^{i*}] - [l_2^i, l_1^{i*}]\right) \\ &= \sum -\alpha_i [l_1^i, l_2^{i*}] + \sum \alpha_i [l_2^{i*}, l_2^i] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$[l, x] \quad \in \quad (([L_1, L_2]))$$

Así

$$[L, L_0] \subset L_0$$

De esta manera hemos verificado que $(([L_1, L_2]))$ es un ideal.

Es fácil probar que $(([L_1, L_2]))$ es el mínimo ideal que contiene a $[L_1, L_2]$.

Ya que si I es un ideal que contiene a $[L_1, L_2]$ entonces cualquier elemento $x \in (([L_1, L_2]))$ será de la forma $x = \sum \alpha_i C_i$ donde $C_i \in [L_1, L_2]$ por lo tanto

$$C_i \in I \Rightarrow \alpha_i C_i \in I \Rightarrow X = \sum \alpha_i C_i \in I$$

Así I contiene a la cáscara de $[L_1, L_2]$

Ahora veremos que si $R \subset L$ es una subálgebra, existe una subálgebra $N(R)$, tal que $R \subset N(R)$ y $N(R)$ será la mayor subálgebra en que R es un ideal. En el caso en que R es un ideal, $N(R)$ tendrá que coincidir con L. A la subálgebra $N(R)$ le llamaremos el normalizador de R.

Definimos $N(R)$ como

$$N(R) = \{l \in L | [l, r] \in R, \forall r \in R\}$$

Que es un subespacio vectorial lo vemos de que si x, $y \in N(R)$ entonces

$$\begin{aligned} [\alpha x + \beta y, r] &= [\alpha x, r] + [\beta y, r] \\ &= [x, \alpha r] + [y, \beta r] \in R \end{aligned}$$

donde r es cualquier elemento de R por lo tanto

$$\alpha x + \beta y \in N(R)$$

Ahora veremos que el normalizador es cerrado bajo la conmutación.

Sean η y η' dos elementos arbitrarios de $N(R)$, veremos que

$$[\eta, \eta'] \in N(R)$$

Llamemos z al conmutador de η y η', es decir,

$$z = [\eta, \eta']$$

para que $z \in N(R)$ debe cumplirse que

$$[z, r] \in R \qquad \forall\ r \in R$$

Ahora

$$[z, r] = [[\eta, \eta'], r]$$

y por la identidad de Jacobi

$$[z, r] = -[[\eta', r], n] - [[r, \eta], \eta']$$

Pero

$$[\eta', r] = r_1 \in R$$

y

$$[r, \eta] = r_2 \in R$$

por lo tanto

$$[z, r] = -[r, \eta] - [r_2, \eta'] \in R$$

ya que

$$[r_1, \eta] \in R$$

y

$$[r_2, \eta'] \in R$$

Ya solo nos falta ver que R es un ideal en $N(R)$, es decir, que se cumple

$$[R, N(R)] \subset R$$

Pero esto es una consecuencia directa de la definición de normalizador.

Que $N(R)$ es la mayor subálgebra en la que R es normal, se obtiene de ver que si R es normal en M, entonces $[m, r] \in R$ lo cual implica que $m \in N(R)$ por lo tanto $M \subset R$.

En este punto vale la pena resumir los resultados que hemos obtenido:

Dados dos ideales L_1 y L_2:

$$L_1 \cap L_2, \qquad L_1 + L_2 \qquad \text{y} \qquad [L_1, L_2]$$

son también ideales.

Además dado un subespacio l de L, existe un ideal $((R))$ que contiene a R y es el más pequeño con esta propiedad. Y si R es una subálgebra existe una subálgebra máxima en al que R esta contenida como un ideal.

Esta subálgebra es llamada el normalizador de $R, N(R)$.

Ahora introduciremos dos conceptos algebraicos muy usados en teoría de grupos.

Dada una subálgebra R es posible formar una cadena de subálgebras, tal que esta, sea decreciente. tomemos

$$\begin{array}{rcl} R \supset R' &=& (([R, R])) \\ R' \supset R'' &=& (([R', R'])) \\ R'' \supset R''' &=& (([R'', R''])) \\ \vdots && \vdots \\ R^{(k-1)} \supset R^{(k)} &=& (([R^{(k-1)}, R^{(k-1)}])) \end{array}$$

Esta cadena es llamada la serie derivada, y si después de un número finito de términos obtenemos el idal (O), diremos que R es soluble.

Es posible demostrar que $R^{(i-1)}$ es un ideal en $R^{(i)}$ para toda i.

Otra manera de definir una cadena decreciente de subálgebras es:

$$\begin{array}{rcl} L \supset L^2 &=& (([L, L])) \\ L^2 \supset L^3 &=& (([L^2, L])) \\ \vdots && \vdots \\ L^k \supset \mathrm{L}^{k+1} &=& (([L^k, L])) \end{array}$$

Si después de un número finito de términos obtenemos el ideal (O), diremos que R es una subálgebra nilpotente.

Debido a que (O) es un ideal soluble en cualquier álgebra de Lie, tenemos que toda álgebra contiene ideales solubles.

Por tanto tiene sentido hablar del máximo ideal soluble y a esto se le llama el radical.

Si el radical resulta ser el (O) diremos que el álgebra es semisimple.

Ahora daremos la definición de álgebra simple, ésta será una cuyos únicos ideales sean ella misma y (O).

A continuación mencionamos un teorema, cuya demostración está fuera de nuestro alcance, (para una demostración ver Jacobson [2]). La importancia del teorema radica en que nos permite restringir nuestra atención a las álgebras simples, pues las semisimples se estudiarán en función de aquellas. Ya que el teorema dice lo siguiente:

L es una álgebra semisimple si y solo si es la suma directa de ideales que como álgebras de Lie son simples.

Ahora daremos un ejemplo de álgebra de Lie el cual será de gran utilidad más adelante.

Consideremos el conjunto de matrices cuadradas de orden n. Que las matrices forman un álgebra de Lie facilmente se prueba si definimos

$$[F, G] = FG - GF$$

ya que

1.- Antisimetría

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= -BA + AB \\ &= -(BA - AB) \\ &= -[B, A] \end{aligned}$$

2.- Linealidad

$$\begin{aligned} [A, \alpha B + \beta C] &= A(\alpha B + \beta C) - (\alpha B + \beta C)A \\ &= \alpha(A, B) + \beta(AC) - \alpha(BA) - \beta(CA) \\ &= \alpha(AB - BA) + \beta(AC - CA) \\ &= \alpha[A, B] + \beta[A, C] \end{aligned}$$

3.- Identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} &[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = \\ &= A[B, C] - [B, C]A + B[C, A] - [C, A]B + C[A, B] - [A, B]C \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB + CAB - CBA - ABC + BAC \\ &= (ABC - ABC) + (CBA - CBA) + (BCA - BCA) + (ACB - ACB) + (CAB - CAB) + (BAC - BAC) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Los resultados algebraicos usuales tienen validez, es decir, la imagen y contraimagen de un ideal es un ideal.

La contraimagen del (O) es el nucleo del homomorfismo y es un ideal.

4.2 Representación de Algebras de Lie

La teoría de las álgebras de Lie desarrolla, además de los conceptos enunciados en la sección anterior, una clasificación de las álgebras simples y la herramienta principal para llevar a cabo esta labor es la representación regular o representación adjunta.

Comenzamos por dar unas definiciones.

Por un homomorfismo entre dos álgebras L_1 y L_2, entendemos una función

$$\varphi, \varphi : L_1 \to L_2$$

tal que se cumplen los dos siguientes axiomas:

1) $\varphi(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para toda x y para todo y elementos de L_1

2) $\varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2$

donde por t_i y $[\,,\,]_i$ entendemos las suma y la conmutación en L_i , con $i = 1, 2$

De ahora en adelante ya no usaremos los subíndices para diferenciar las operaciones de las distintas álgebras.

Si nosotros pedimos que el espacio L_2 sea un espacio de transformaciones lineales, entonces diremos que φ es una representación de L_1.

Regresemos a la representación adjunta. Esta representación se basa en el hecho de que un álgebra de Lie es un espacio vectorial, y que la función

$$T_g(f) = (\lambda(g)\ [f, g])$$

es un operador lineal para este espacio, y que por tanto puede ser representado por medio de una matriz, con respecto a una base dada. Estos conceptos los utilizaremos nosotros solo en el caso en que tengamos dimensión finita.

Así lo que tendremos será la representación del conmutador con un argumento fijo.

$$\begin{tikzcd} \text{f} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & T_f \arrow[r] & \text{F} \end{tikzcd}$$

La figura de arriba nos dice que a un elemento f del álgebra, le podemos asociar un operador T_f, y a este operador una matriz F, a final de cuentas hemos asociado con cada elemento f una matriz F.

Describiremos más detalladamente ahora lo que es la representación adjunta.

Si el álgebra de Lie tiene una base $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, es decir,

$$L = ((x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

entonces para cada $x \in L$

$$x = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i$$

Si aplicamos T_f a x_i, tendremos

$$T_f(x_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_j \qquad (1 \leq i \leq n)$$

La matriz asociada a T_f será la matriz

$$T_f \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = F$$

La importancia de este representación, yace en el hecho de que cualquier álgebra de Lie puede ser ahora reemplazada por una álgebra, la cual es asociativa.

Hasta ahora hemos estado hablando de la representación adjunta y sin embargo todavía no hemos probado que en realidad tenemos un homomorfismo. Esto será lo que haremos a continuación.

Por ψ representemos el mapeo tal que

$$f \xrightarrow{\psi} T_f$$

y por θ el que hace que

$$T_f \xrightarrow{\theta} F$$

a la composición $\theta\psi$ la llamaremos φ

Sean f y g dos elementos cualesquiera del álgebra de Lie, probaremos que

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

Pero esto es cierto ya que hemos probado que ψ es un isomorfismo que preserva la suma, en la §2.2 , y lo mismo se puede decir de θ (y la demostración se puede ver en Halmos, Gelfand). Pero θ además preserva la composición de transformaciones.

Así tenemos

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

ya nada más nos falta probar que

$$\varphi[f,g] = [\varphi(f), \varphi(g)]$$

Tenemos que

$$\varphi[f,g] = \theta T_{[f,g]}$$

Pero

$$T_{[f,g]}(h) = [[f,g],h]$$

Y por la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} T_{[f,g]}(h) &= [f,[g,h]] - [g,[f,h]] \\ &= T_f(T_g(h)) - T_g(T_f(h)) \\ &= (T_f T_g - T_g T_f)(h) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$T_{[f,g]} = T_f T_g - T_g T_f$$

entonces $T_{[f,g]}$ es mapeado en $FG - GF$
Así

$$\theta(T_{[f,g]}) = \theta(T_f T_g - T_g T_f) = \theta(T_f)\theta(T_g) - \theta(T_g)\theta(T_f)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \varphi([f,g]) &= FG - GF \\ &= [F,G] \\ &= [\varphi(f), \varphi(g)] \end{aligned}$$

Así vemos que φ preserva la conmutación y que con el conmutador de f y g tenemos asociado el conmutador de F y G

Habiendo notado que las matrices cuadradas forman un espacio vectorial, uno se pregunta si es posible hacerlo un espacio con producto interno.

En este espacio se tiene definida una forma bilineal $((\cdot\,,\cdot))$ llamada la forma de Killing, la cual está definida de la siguiente manera:

$$((A,B)) = T_r(A^* B)$$

En donde $T_r(A)$, denota la Traza de A

$$T_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

En el caso en que nuestras matrices están formadas por números reales

$$((A,B)) = T_r(AB)$$

Los axiomas de producto interno

$$\begin{aligned} (x,y) &= (y,x)^* \\ (x,\lambda y) &= \lambda(x,y) \\ (x_1 + x_2, y) &= (x_1,y) + (x_2,y) \\ (x,x) &\geq 0 \end{aligned}$$

se pueden probar a partir de las dos siguientes propiedades de la traza de una matriz

$$T_r(A+B) = T_rA + T_rB$$

y

$$T_r(A^*B) = T_r(B^*A)^*$$

Así que solo faltaría ver que

$$(x,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

y tendriamos que la forma de Killing nos define un producto interno. Pero lamentablemente esto no sucede así, ya que si tomamos

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X \neq 0$$

pero

$$XX = 0$$

por tanto

$$T_r(XX) = 0$$

Esto nos podría insinuar el abandonar la forma de Killing, pero resulta que su propiedad más importante tiene que ver con conmutadores, y esta es que

$$(([A,B],C)) = ((A,[B^*,C]))$$

es decir

$$T_r([A,B]^*C) = T_r(A^*[B^*,C])$$

Esta igualdad se basa en el hecho de que

$$T_r(XYZ) = T_r(ZXY)$$

ya que

$$T_r([A,B]^*C) = T_r(A^*[B^*,C])$$

si y solo si

$$\begin{aligned}
T_r((A^*B^* - B^*A^*)C) &= T_r(A^*(B^*C - CB^*)) \\
T_r(A^*B^*C - B^*A^*C) &= T_r(A^*B^*C - A^*CB^*) \\
T_r(A^*B^*C) - T_r(B^*A^*C) &= T_r(A^*B^*C) - T_r(A^*CB^*) \\
T_r(B^*A^*C) &= T_r(A^*CB^*)
\end{aligned}$$

en realidad se cumple que

$$T_r(AB\cdots QL) = T_r(LAB\cdots Q)$$

es decir, si hacemos una permutación cíclica en los factores, la traza del producto no se altera.

La demostración de este hecho se puede hacer facilmente de la siguiente manera. Para $n = 2$ basta con ver como se define el producto de matrices y la definicion de traza, y después si tenemos $AB\cdots QL$ asociar $(AB...Q)L$ aplicar lo probado para $n = 2$ y vemos que su traza es la de $L(AB...Q)$.

El problema que tenemos ahora es hacer positiva esta forma cuadrática, pero esto se logra si definimos

$$(A, B) = ((A^T, B)) = T_r(A^{*T}B) = T_r(A^+B)$$

Se puede probar que ahora si (A, B) es un producto interno.

De nuevo la relación entre la semimétrica definida por la forma de Killing y la métrica definida por este producto interno, nos lleva a la definición de conjugación, y al teorema de parejas en los eigenvalores que poseen estas matrices como operadores sobre el álgebra de Lie (Considerada como espacio vectorial).

Un eigenvector f de T_h satisface, dentro del álgebra de Lie, L, la siguiente ecuación:

$$T_h(f) = \lambda f$$

es decir,

$$[h, f] = \lambda f$$

Si en la representación de L el asociado de h es H y el de f es la matriz F, tendremos que bajo el homomorfismo que nos da la representación

$$[H, F] = \lambda F$$

o lo que es lo mismo

$$HF - FH = \lambda F \qquad (12)$$

Aquí podemos pedir la normalidad de H para asegurarnos la existencia de un conjunto completo ortonormal de eigenvectores, pues las matrices normales son las únicas que cumplen con este requisito.

Consideremos un eigenvector de H, al cual llamaremos ψ, para este se cumple que

$$H\psi = \mu\psi$$

multiplicando esta igualdad por F

$$FH\psi = \mu F\psi$$

Pero de (12)

$$HF - \lambda F = FH$$

Por tanto tendremos que

$$\begin{aligned} (HF - \lambda F)\psi &= \mu F\psi \\ HF\psi - \lambda F\psi &= \mu F\psi \end{aligned}$$

y así

$$HF\psi = (\mu + \lambda)F\psi$$

De aquí vemos que si ψ es un eigenvector de H con eigenvalor μ y si F es un eigenvector de H en L, entonces o $F\psi = 0$ ó $F\psi$ es otro eigenvector de H y cuyo eigenvalor es $\mu + \lambda$.

Ahora consideremos

$$H(F\psi) = (\mu+\lambda)F\psi$$

multiplicando por F

$$FHF\psi = (\mu+\lambda)F^2\psi \qquad (13)$$

Si multiplicamos la ecuación (12), a la derecha, por F tendremos

$$\begin{aligned} HF^2 - FHF &= \lambda F^2 \\ HF^2 - \lambda F^2 &= FHF \end{aligned}$$

sustituyendo en (13)

$$\begin{aligned} HF^2\psi - \lambda F^2\psi &= (\mu + \lambda)F^2\psi \\ H(F^2\psi) &= (\mu + \lambda)F^2\psi + \lambda F^2\psi \\ H(F^2\psi) &= (\mu + 2\lambda)F^2\psi \end{aligned}$$

y con esto observamos que en este caso $F^2\psi$ también es eigenvector de H y que su eigenvalor es $\mu + 2\lambda$.

Si seguimos de esta manera, encontraremos una cadena de eigenvalores y eigenvectores.

$$\begin{array}{cl} \psi & \mu \\ F\psi & \mu + \lambda \\ F^2\psi & \mu + 2\lambda \\ \cdots & \cdots \\ F^k\psi & \mu + k\lambda \end{array}$$

$$0 = F^l\psi$$

hasta que finalmente encontraremos un entero l tal que $F^l\psi$ sea linealmente dependiente de los vectores que forman el conjunto

$$B = \left\{ F^k \psi \ \mid \ k < l \right\}$$

ya que la matriz H solo tendrá un conjunto finito de eigenvectores linealmente independientes, y el conjunto B es linealmente independiente puesto que todos los eigenvalores serán diferentes (con $\lambda \neq 0$).

Como el eigenvalor de $F^l\psi$ es diferente de todos los demás entonces $F^l\psi$ debe ser cero puesto que de otra manera la matriz H tendría otro eigenvector linealmente independiente

De esta manera vemos que si $\lambda \neq 0$ la única manera de que termine la cadena es que $F^l\psi = 0$. Hay que hacer notar que lo único que sabemos es que existe una cadena, pero no podemos asegurar que no existan otras, ya que el argumento utilizado se puede volver a aplicar en el caso en que H tenga otro eigenvector ψ' que sea independiente de los mencionados anteriormente.

Todas estas consideraciones pueden ser aplicadas a L misma.

Supongamos que h tiene dos eigenvectores

$$\begin{aligned} [h, f] &= \lambda f \\ [h, g] &= \mu g \end{aligned}$$

entonces, aplicando la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} [h, [f, g]] &= [f, [h, g]] + [[h, f], g] \\ &= [f, \mu g] + [\lambda f, g] \\ &= \mu[f, g] + \lambda[f, g] \\ &= (\mu + \lambda)[f, g] \end{aligned}$$

Aquí la conclusión es que si tenemos dos eigenvectores con eigenvalores λ y μ, entonces el conmutador es otro eigenvector cuyo eigenvalor es la suma de λ y μ y si $\lambda + \mu$ no es un eigenvalor, entonces $[f, g] = 0$.

Hasta aquí hemos considerado dos cosas

1a) $\lambda \neq 0$, ya que $\lambda = 0$ implica eigenvalores repetidos.
2a) H es un operador normal.

Dado que los eigenvectores de un operador normal forman un conjunto completo ortonormal, se nos presenta la posibilidad de utilizarlos para representar a todos los demás.

Así, si todos los eigenvalores del operador A son diferentes, todos sus eigenvectores pueden ser diferenciados por medio de sus eigenvalores; es decir, el eigenvector ψ con eigenvalor λ será llamado $\mid \lambda >$.

Pero si hay multiplicidad de eigenvalores, es decir, si tenemos al menos dos eigenvectores linealmente independientes, ψ , ψ' con el mismo eigenvalor λ, entonces el símbolo $\mid \lambda >$ no es suficiente para caracterizar el vector. Un nuevo símbolo de distinción debe ser introducido por ejemplo podríamos escribir $\mid \lambda 1 >$, $\mid \lambda 2 >$. Basádos en el hecho de que dos operadores normales conmutativos tienen un conjunto común de eigenvectores, podemos utilizar otra notación. Si encontramos un segundo operador B que conmute con A tal que

$$\begin{aligned} \beta\psi &= \mu\psi \\ \beta\psi' &= \mu'\psi', \qquad \mu \neq \mu' \end{aligned}$$

entonces los eigenvalores de B pueden servir para distinguir los eigenvectores y podriamos escribir

$$| \lambda 1 > = | \lambda\mu >$$

$$| \lambda 2 > = | \lambda\mu' >$$

En caso dado en que este segundo operador no baste para identificar todos los eigenvectores, entonces se introduce otro, etc.. Así la idea de buscar una "especie de conjunto maximal" de operadores que conmuten entre sí.

4.3 Subálgebras de Cartan

En el párrafo anterior hemos escrito la frase especie de conjunto maximal, entre comillas porque realmente se presentan algunas dificultades las cuales son resueltas por hacer mucho más precisa, pero un poco más complicada, la definición del conjunto de operadores que queremos.

Debido a lo anterior introducimos el concepto de subálgebra de Cartan $\mathcal{A}$

1. $\mathcal{A}$ será una subálgebra nilpotente.
2. $\mathcal{A}$ debe ser su propio normalizador.
3. Todos los elementos de $\mathcal{A}$ conmutan entre sí.
4. Todos los elementos de $\mathcal{A}$ son normales.

Aquí podemos menciónar que en nuestra definición el inciso 3 es redundante ya que si vemos el libro de Jacobson [2] veremos que el tercero es una implicación del primero ya que la nilpotencia implica que $i(\mathcal{A}) = 2$. Donde $i(\mathcal{A})$ significa, índice de $\mathcal{A}$, el cual es el menor natural m tal que

$$\mathcal{A}^m = (0)$$

es decir, m es el primer natural que nos asegura que $\mathcal{A}$ es nilpotente.

El que $i(\mathcal{A}) = 2$ a su vez implica $[x, y] = 0$ para toda x, y que pertenecen $\mathcal{A}$. Lo cual no es más que el tercer inciso.

El primer inciso es también una consecuencia de los dos primeros. Que el conjunto maximal de operadores conmuten entre si no es lo mismo que la subálgebra de Cartan nos lo prueba el ejemplo dado en el apéndice B.

El que $\mathcal{A} = N(\mathcal{A})$ nos asegura que tenemos el conjunto apropiado, ya que si dos operadores conmutan

$$[a, b] = 0$$

podemos pensar de uno de ellos que es eigenfunción del otro con eigenvalor cero. Por tanto si $c \notin \mathcal{A}$, no puede ser eigenfunción de todos los elementos de **a** con eigenvalor cero, porque si así fuera **c** pertenecería a $\mathcal{A}$, en este sentido será "maximal".

Demos un ejemplo, los operadores de momentum angular.

$$L = ((l_x, l_y, l_z))$$

los cuales tienen la siguiente tabla de conmutacíon:

$[\,,]$	l_x	l_y	l_z
l_x	0	l_z	$-l_y$
l_y	$-l_z$	0	l_z
l_z	l_y	$-l_y$	0

$$\dim(L) = 3$$

Notamos que si fijamos l_z, ningún otro elemento conmutará con este. De aquí que nos preguntemos si $((l_z))$ es la subálgebra de Cartan de L.

Primero tenemos que ver si $((l_z))$ es nilpotente. Llamemos L' a $((l_z))$, tomando dos elementos arbitarios, αl_z y βL_z en L'

$$[\alpha l_z, \beta l_z] = \alpha\beta[l_z, l_z] = 0$$

De aquí que

$$[L', L'] = 0$$

por tanto $((l_z))$ es nilpotente.

Ahora probaremos que $N(L') = L'$

$$N(L') = \{\, l \in L \mid [\,l, r] \in L' \quad \forall\; r \in L'\}$$

un $l \in L$ es de la forma

$$l = a\, l_x + b\, l_y + c\, l_z$$

Así que, si L' no fuera su propio normalizador existiría un l con a y $b \neq 0$ tal que

$$[\alpha l_z, l\,] \in L', \qquad \forall\; \alpha;$$

con $\alpha = 1$ debe cumplirse

$$[\,l_z, l\,] \in L'$$

por lo tanto

$$[\,l_z, l\,] = \mu\; l_z \qquad \text{para algún}\;\; \mu$$

$$[l_z, al_x + bl_y + cl_z] = a[l_z, l_x] + b[l_z, l_y] + c[l_z, l_z] = al_y - bl_x = \mu\, l_z$$

por lo tanto

$$al_y - bl_x - \mu l_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = b = \mu = 0$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $N(L') = L'$

De aquí que $((l_z))$ sea la subálgebra de Cartan.

En el álgebra de Lie, de los operadores de momentum angular, ¿cuales son los eigenvalores de l_z ?.

Definamos

$$l_+ = l_x + il_y$$

$$l_- = l_x - il_y$$

y estos junto con l_z son los eigenvectores y los eigenvalores son $-i$, $+i$ y 0 respectivamente.

La subálgebra de Cartan, como espacio vectorial, tiene una dimensión

$$\dim \mathcal{A} = k \leq n = \dim(L)$$

Así existe una base tal que

$$\mathcal{A} = ((h_1, h_2, \ldots, h_k))$$

y tal que

$$[h_i, h_j] = 0, \qquad \forall\ i, j$$

Como los h_i son normales, existe una base común de eigenvectores para los h_i los cuales denotaremos por

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$$

y por

$$\mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots, \mu_n$$

el resto de la base de L.

Apliquemos los h_i a u_j con $1 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned} [h_1, \mu_j] &= \lambda_1^{(j)} \mu_j \\ [h_2, \mu_j] &= \lambda_2^{(j)} \mu_j \\ \vdots & \quad \vdots \\ [h_k, \mu_j] &= \lambda_k^{(j)} \mu_j \end{aligned}$$

Formemos ahora el vector

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{(j)} \\ \lambda_2^{(j)} \\ \vdots \\ \lambda_k^{(j)} \end{bmatrix}$$

de esta menera podemos construir k vectores de dimensión k.

Estos vectores son llamados vectores raíz.

En el caso de los operadores de momentum angular sólo tendremos un vector raíz, a saber

$$\begin{pmatrix} -i \\ +i \end{pmatrix}$$

Utilizando la representación adjunta, debido a que los H's serán normales, sucede que

$$\begin{aligned} H_1\psi &= \lambda_1\psi \\ H_2\psi &= \lambda_2\psi \\ \vdots &\quad \vdots \\ H_k\psi &= \lambda_k\psi \end{aligned}$$

Formamos el vector

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

y lo llamaremos un vector de peso.

Nuestros resultados enunciados utilizando estos últimos conceptos son que las eigenfunciones de la subálgebra de Cartan ocurren en parejas conjugadas, los miembros de la pareja pertenecen a pesos negativos, los elementos de la subálgebra de Cartan son autoconjugados; y si la suma de dos pesos no es un peso, el conmutador de las correspondientes eigenfunciones es cero, y en caso contrario es una eigenfunción con la suma como un peso.

Una definición más que daremos es la del rango de Lie L, el cual será la dimensión de una subálgebra de Cartan.

Es conveniente notar que esta definición puede no tener sentido, ya que subálgebras de Cartan no siempre hay una sola, sino que puede haber varias en un álgebra de Lie, por tanto el rango dependerá de la subálgebra de la que se este hablando. Afortunadamente existe un teorema que nos asegura que dada un álgebra de Lie, todas sus subálgebras de Cartan son isomorfas y que tienen la misma dimensión.

4.4 Diagramas de peso y algunos ejemplos

La teoría de las álgebras de Lie clasifica las mismas, en terminos de los posibles diagramas de raíces que puedan existir, y también demuestra que los vectores raíz pueden tomar sólo ciertos valores racionales y que para los ángulos entre los vectores, también sólo son permitidos algunos valores. Sin embargo, a nosotros sólo nos interesan las posibles aplicaciones de esta teoría a la mecánica hamiltoniana, y nuestro interés se debe en parte a que esta teoría nos permite, algunas veces, construir sistemas de coordenadas canónicas.

En este trabajo nos es imposible, debido a la brevedad del espacio con el que contamos, desarrollar formalmente los hechos necesarios para demostrar nuestras afirmaciones, así que sólo mencionaremos las referencias, las cuales son: Jacobson [2] y el libro de Rowlatt [21]

Si uno acepta la teoría, es posible entender algunos ejemplos que daremos a continuación.

Tomemos a $\Phi_2^{(2)}$ operando sobre $\Phi_2^{(1)}$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)} &= ((q_1, q_2, p_1, p_2)) \\ \Phi_2^{(2)} &= ((q_1^2, q_1q_2, q_1p_1, q_1p_2, q_2p_1, q_2p_2, q_2^2, p_1^2, p_1p_2, p_2^2)) \end{aligned}$$

La tabla de conmutación es:

0	q_1	q_2	p_1	p_2
q_1^2	0	0	$2q_1$	0
q_1q_2	0	0	q_2	q_1
q_1p_1	$-q_1$	0	p_1	0
q_1p_2	0	0	p_2	0
q_2p_1	$-q_2$	0	0	p_1
q_2p_2	0	$-q_2$	0	p_2
q_2^2	0	0	0	$2q_2$
p_1^2	$-2p_1$	0	0	0
p_1p_2	$-p_2$	$-p_1$	0	0
p_2^2	0	$-2p_2$	0	0

Una subálgebra de Cartan es la generada por los elementos "diagonales".

$$\mathcal{A} = ((p_1q_1s, p_2q_2))$$

Veamos sus eigenvectores comunes

Operador	Operando	Resultado	Eigenvalor
p_1q_1	q_1	$-q_1$	-1
p_2q_2		$0q_1$	0
p_1q_1	q_2	$0q_1$	0
p_2q_2		$-q_2$	-1
p_1q_1	p_1	p_1	1
p_2q_2		$0p_1$	0
p_1q_1	p_2	$0p_2$	0
p_2q_2		p_2	1

los vectores raíz son por tanto

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

su diagrama de raíces es.

Ahora tomemos a $\Phi_2^{(2)}$ operando sobre $\Phi_2^{(2)}$

$$\Phi_2^{(2)} = ((q_1^2, q_1q_2, q_1p_1, q_1p_2, q_2^2, q_2p_1, q_2p_2, p_1^2, p_1p_2p_2^2))$$

$$\mathcal{A} = ((p_1q_1, p_2q_2))$$

ahora se encuentra los eigenvectores comunes de p_1q_1 y p_2q_2 y vemos de la tabla de conmutación

	q_1^2	q_1q_2	q_1p_1	q_1p_2	q_2^2	q_2p_1	q_2p_2	p_1^2	p_1p_2	p_1^2
q_1^2	0	0	$-2q_1^2$	0	0	$2q_1q_2$	0	$4p_1q_1$	$2q_1p_2$	0
q_1q_2	0	0	q_1q_2	q_1^2	0	q_2^2	q_1q_2	$2p_1q_2$	$p_1q_1+p_2q_2$	$2p_2q_1$
q_1p_1	$-2q_1^2$	$-q_1q_2$	0	$-p_2q_1$	0	q_2p_1	0	$2p_1^2$	p_1p_2	0
q_1p_2	0	$-q_1^2$	q_1p_2	0	$-2q_1q_2$	$-p_1q_1+p_2q_2$	$-q_1p_2$	$2p_1p_2$	p_2^2	0
q_2^2	0	0	0	$2q_2q_1$	0	0	$2q_2^2$	0	$2p_1q_2$	$4p_2q_2$
q_2p_1	$-2q_1q_2$	$-q_2^2$	$-q_2p_1$	$p_1q_1-p_2q_2$	0	0	q_2p_1	0	p_1^2	$2p_1p_2$
q_2p_2	0	$-q_1q_2$	0	q_1p_2	$-2q_2^2$	$-q_2p_1$	0	0	p_1p_2	$2p_2^2$
p_1^2	$-4p_1q_1$	$-2p_1q_2$	$-2p_1^2$	$-2p_1p_2$	0	0	0	0	0	0
p_1p_2	$-2q_1p_2$	$-p_1q_1-p_2q_2$	$-p_2p_1$	$-p_2^2$	$-2p_1q_2$	$-p_1^2$	$-p_1p_2$	0	0	0
p_2^2	0	$-2q_1p_2$	0	0	$-4p_2q_2$	$-2p_2p_1$	$-2p_2^2$	0	0	0

los eigenvalores y eigenvectores son:

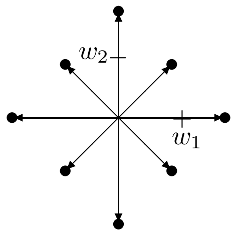
Operando	Eigenvector	Eigenvalor
p_1q_1	q_1^2	-2
p_2q_2		0
p_1q_1	q_1q_2	-1
p_2q_2		-1
p_1q_1	p_1q_1	0
p_2q_2		0
p_1q_1	q_1p_2	-1
p_2q_2		1
p_1q_1	q_2^2	0
p_2q_2		-2
p_1q_1	q_2p_1	1
p_2q_2		-1
p_1q_1	q_2p_2	0
p_2q_2		0
p_1q_1	p_1^2	2
p_2q_2		0
p_1q_1	p_1p_2	1
p_2q_2		1
p_1q_1	p_2^2	0
p_2q_2		2

Los vectores son por tanto

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

los cuales pueden ser representados en un diagrama



Con un poco de reflexión, o bien usando la teoría completamente elaborada, uno encuentra ciertos vectores (w_1,w_2 en estos casos), en términos de los cuales los vectores de peso se escriben simplemente como sumas y diferencias, las cuales podemos usar como etiquetas para los vectores del espacio de los diagramás.

Si definimos un mapeo de $\Phi_2^{(2)}$ en el espacio de vectores de peso de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
w_1 - w_2 &\rightarrow p_1 q_2 \\
w_2 - w_1 &\rightarrow p_2 q_1 \\
-w_1 - w_2 &\rightarrow p_1 p_2 \\
w_1 + w_2 &\rightarrow q_1 q_2 \\
-2w_1 &\rightarrow \frac{1}{2} p_1^2 \\
-2w_2 &\rightarrow \frac{1}{2} p_2^2 \\
2w_1 &\rightarrow \frac{1}{2} q_1^2 \\
2w_2 &\rightarrow \frac{1}{2} q_2^2
\end{aligned}$$

y denotamos este mapeo, por e_x con argumento x tendremos

$$\begin{array}{lll}
e_{w_j - w_i} & = p_i q_j & i \neq j \\
e_{-w_i - w_j} & = p_i p_j & i < j \\
e_{w_i + w_j} & = q_i q_j & i < j \\
e_{-2wj} & = \frac{1}{2} p_j^2 & \\
e_{-2wj} & = \frac{1}{2} q_j^2 &
\end{array}$$

Ahora definimos

$$[e_x, e_y] = e_{x+y}$$

si $x + y \neq 0$ y $x + y$ es un punto en el diagrama

$$[e_x, e_y] = 0$$

si $x+y$ no es un punto del diagrama y si

$$x + y = 0$$

$$[e_x, e_y] = \sum \alpha_i h_i$$

donde las α_i son constantes que quedan por calcular

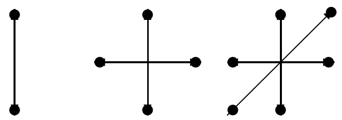
En general para $\Phi_n^{(2)}$, los generadores del álgebra de Lie quedan escritos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_i &= p_i q_i & \\ e_{wj-wi} &= p_i q_j & i \neq j \\ e_{-w_i-w_j} &= p_i p_j & i < j \\ e_{w_i+w_j} &= q_i q_j & i < j \\ e_{-2wj} &= \frac{1}{2} p_j^2 & \\ e_{2wi} &= \frac{1}{2} q_i^2 & \end{aligned}$$

Los elementos h_i son los generadores de la subálgebra de Cartan.

Estas definiciones establecen que $\Phi_n^{(2)}$ es una álgebra de Lie simple C_k de matrices simplécticas:

Para el caso de $\Phi_n^{(1)}$ se obtienen los siguientes diagramas de peso



$\phi_1^{(1)}$ $\phi_2^{(1)}$ $\phi_3^{(1)}$

En un diagrama de raíces hay ciertas raíces de interés particular. Por ejemplo, dado que la suma de dos raíces corresponde a otra raíz la cual tiene por eigenfunción al conmutador de las eigenfunciones que pertenecen a los sumandos, podemos entonces distinguir a las llamadas *raíces primitivas*.

Estas son las raíces, que no pueden ser escritas como la suma de otras raíces. Sus eigenfunciónes asociadas son entonces, un conjunto degenerado para el ágebra de Lie. En este sentido de todos los demás elementos pueden ser reducidos a partir de las raíces primitivas por medio de conmutadores y combinaciones lineales.

Otros hechos de interés para la mecánica hamiltoniana son las *raíces de máximo peso*, estas serán las raíces que yacen sobre las caras exteriores del octaedro, que define el diagrama de raíces. La suma de estas raíces, no son raíces a su vez y por tanto sus eigenfunciones asociadas conmutan. Un ejemplo de esto último, es el conjunto formado por

$$((p_i q_i, \frac{1}{2} q_i^2))$$

Las reglas de conmutación son:

$$\begin{aligned}
[p_i q_i, p_j q_j] &= 0 \\
[p_i q_i, \tfrac{1}{2} q_j^2] &= \delta_{ij} q_i^2 \\
[q_i^2, q_j^2] &= 0
\end{aligned}$$

Las cuales no son canónicas, pero hay varias maneras de derivar unas reglas de conmutación, canónicas para ellas; por ejemplo:
si

$$\begin{aligned}
[f, g] &= \lambda g \\
[f, \frac{\ln\ g}{\lambda}] &= 1
\end{aligned}$$

Un esquema similar fué usado por McIntosh y Dulock [5] para construir coordenadas canónicas relacionadas con la degeneración accidental de oscilador armónico. A este respecto podemos decir que el conjunto $\Phi_n^{(2)}$ no solamente forma un álgebra de Lie, sino además contiene varias subálgebras de interés. Por ejemplo, tomando en cuenta la identidad de Jacobi, todos los elementos que conmutan con un elemento fijo forman una subálgebra. Una subálgebra de este tipo tiene interés en conección con el oscilador armónico, por que el hamiltoniano de este es un elemento de $\Phi_1^{(2)}$ y consecuentemente los elementos que conmutan con él son constantes de movimiento para el oscilador armónico, y ellos forman un álgebra de Lie isomorfa a $SU(n)$.

Capítulo 5

Algunos resultados y consideraciones

Trataremos de ver que forma necesitan tener los elementos g para que conmuten con un elemento fijo f, el cual es normal.

Como f es normal, tiene un sistema de eigenvectores $g_i = \Psi_n^{(i)}$, para los cuales

$$[f, g_i] = \lambda_i g_i$$

g puede ser expandido en términos de los g_i

$$g = \sum_{ij\ldots n} a_{i,j\ldots n} g_1^{\alpha_i} g_2^{\alpha_j} \ldots g_m^{\alpha_m} g_{-1}^{\alpha_i'} g_{-2}^{\alpha_j'} \cdots g_{-m}^{\alpha_m'}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} [f, g] &= \sum a_{i,j,\ldots,n}[f, g_1^{\alpha_i} g_2^{\alpha_j} \ldots g_n^{\alpha_n} g_{-1}^{\alpha_i'} g_{-2}^{\alpha_j'} \cdots g_{-m}^{\alpha_n'}] \\ &= \sum a_{ij\ldots n}((\alpha_i - \alpha_i')\lambda_1 + (\alpha_j - \alpha_j')\lambda_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')\lambda_m) g_1^{\alpha_i}, \ldots, g_{-m}^{\alpha_n'} \end{aligned}$$

Si queremos que $[f, g] = 0$ entonces

$$a_{ij..n}((\alpha_i - \alpha_i')\lambda_1 + (\alpha_j - \alpha_j')\lambda_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')\lambda_m) = 0$$

Para que este producto sea cero, o los coeficientes $a_{i,j\ldots n}$ son cero, o lo son los otros factores.

En el caso en que $(\alpha_i - \alpha_i')\lambda_1 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')\lambda_m \neq 0$ el coeficiente correspondiente,

$$a_{ij..n} = 0$$

Por tanto

$$g = \sum_{\alpha\cdot\lambda=0} a_{ij\ldots n} g_1^{\alpha_i} g_2^{\alpha_j} \ldots g_m^{\alpha_n} g_{-1}^{\alpha_i'} \cdots g_{-m}^{\alpha_n'}$$

donde

$$\alpha \quad = \quad (\alpha_i, \alpha_j, \ldots \alpha_n, \alpha_i^{'}, \ldots, \alpha_n^{'})$$

y

$$\lambda \quad = \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, -\lambda_1, \ldots, -\lambda_m)$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ son mutuamente inconmensurables

$$\alpha \cdot \lambda = 0$$

sólo puede ser satisfecho si

$$\alpha_r = \alpha_r^{'}$$

de donde g será un polinomio en los monomios de segundo grado $g_{-i}g_i$

$$g = \sum a_{ij\ldots n}(g_{-1}g_1)^{\alpha_i}(g_{-2}g_2)^{\alpha_j}, \ldots, (g_{-m}g_m)^{\alpha_n}$$

Por otro lado si los $\lambda_s^{'}$ son conmensurables, otro tipo de polinomios conmutan con f, y no hay mucho que decir.

Hemos visto en el primer capítulo que una transformación canónica, T, cumple con

$$[T(x_i), T(x_j)] = [x_i, x_j]$$

En el caso en que

$$[T(x_i), T(x_j)] = -[x_i, x_j]$$

diremos que T es anticanónica.

Hay tres transformaciones, las cuales tienen una gran importancia en la mecánica, y caen en alguna de las categorías acabadas de mencionar. Estas transformaciones se definen relativas a una base fija.

i) El mapeo dual, M

$$\left.\begin{array}{rcl} M(f_i) & = & f_{-i} \\ M(f_{-i}) & = & -f_i \end{array}\right. \qquad i \; > \; 0$$

ii) El intercambio de coordenadas y momenta, X

$$X(f_i) = f_{-i}$$

iii) El mapeo, inversión del tiempo, R

$$\left.\begin{array}{rcl} R(f_i) & = & f_i \\ R(f_{-i}) & = & -f_{-i} \end{array}\right. \qquad i \; > \; 0$$

La primera de estas tranformaciones satisface la ecuación

$$\{M(f_i), M(f_j)\} = \{f_i, f_j\}$$

y de aquí que sea una transformación canónica.

Las otras dos transformaciones cumplen con:

$$\begin{aligned}
\{X(f_i), X(f_j)\} &= -\{f_i, f_j\} \\
\{R(f_i), R(f_j)\} &= -\{f_i, f_j\}
\end{aligned}$$

y por tanto son mapeos anticanónicos.

Para definir estos mapeos para cualquier elemento sólo hay que extrapolarlos linelamente.

Algo que podemos hacer con estas transformaciones es representarlas por operadores de la forma $T_f(u) = (\lambda(u)\{f, u\})$ y expanderlos en términos de sus eigenfunciones.

Se puede verificar que las expresiones cuadráticas correspondientes son:

$$\begin{aligned}
m &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i f_i + f_{-i} f_{-i}}{2\{f_{-i}, f_i\}} \\
x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i f_i - f_{-i} f_{-i}}{2\{f_{-i}, f_i\}} \\
r &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{f_{-i} f_i}{\{f_{-i}, f_i\}}
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
M(u) &= (\lambda(u)\{m, u\}) \\
X(u) &= (\lambda(u)\{x, u\}) \\
R(u) &= (\lambda(u)\{r, u\})
\end{aligned}$$

Los paréntesis de Poisson que ocurren en los denominadores son para normalización.

Podemos calcular la composición de estos operadores, por ejemplo:

$$X(R(f_k)) = \begin{cases} f_{-k}, & k > 0 \\ -f_{-k}, & k < 0 \end{cases}$$

$$= M(f_k)$$

Las combinaciones posibles están en la siguiente tabla.

	M	X	R
M	-I	-R	X
X	R	I	M
R	-X	-M	I

donde I es el mapeo identidad.

El mapeo identidad I, no puede ser escrito como un operador por medio de los paréntesis de Poisson. Sin embargo los otros tres operadores tienen la siguiente tabla de paréntesis de Poisson.

$$\{X, R\} = 2M$$

$$\{M, R\} = 2X$$

$$\{X, M\} = 2R$$

Así vemos que estos operadores se comportan como si fueran un conjunto de cuaterniones.

Si tomamos un operador normal arbitrario $h \in \phi^{(2)}$ el cual, tiene una expansión, en términos de sus eigenfunciones,

$$h = \sum \frac{\lambda_i f_{-i} f_i}{\{f_{-i}, f_i\}}$$

y se aplican los tres operadores X, M, R, definidos con respecto a la base de sus eigenfunciones, tenemos

$$T_h(T_r(u)) = T_r(T_h(u))$$

mientras que

$$\begin{array}{rcl} T_h(T_x(u)) & = & -T_x(T_h(u)) \\ T_h(T_m(u)) & = & -T_m(T_h(u)) \end{array}$$

de tal manera que en el sentido matricial h y r conmutan, mientras que h y x al igual que h y m anticonmutan. La existencia de estos dos últimos operadores debería haber sido suficiente para asegurar que los eigenvalores ocurren en parejas negativas.

Es bueno hacer notar que los mapeos lineales definidos en $\phi^{(1)}$ pueden ser extendidos a $\phi^{(k)}$, en la misma manera que se definió canónico conjugado. Por ejemplo el mapeo M puede ser definido sobre $\phi^{(2)}$ de la siguiente manera:

$$M(f_i f_j) = M(f_i) M(f_j)$$

y cumple con

$$\{M(f_i f_j), M(f_k f_l)\} = -\{f_i f_j, f_k f_l\}$$

Mientras que X satisface

$$\{X(f_i f_j), X(f_k f_l)\} = \{f_i f_j, f_k f_l\}$$

Uno de los posibles temas relacionados, con estos resultados, es la extensión de la definición de mapeo canónico a espacios $\phi_n^{(k)}$. Cosa que parece ser llevada a cabo con algún sentido si se sigue la idea de $\phi_n^{(1)}$ y el concepto de producto interno en $\phi^{(k)}$.

Análogamente, el concepto de automorfismo es un concepto con interés, y debido a que ciertos tipos de transformaciones en las álgebras de Lie simples sólo son cambios de base, sería interesante averiguar si nuestro $\phi^{(2)}$es simple.

Un hecho muy importante, al que no hemos dedicado tiempo es el concepto de álgebra conmutativa con un elemento fijo.

Su importancia radica en el hecho de que esta puede ser representada por el grupo de simetrías $SU(n)$, [17,18,19].

Otro resultado que hemos pasado por alto es la representación del grupo simpléctico, S_{p_n}, por $\phi^{(2)}$

Capítulo 6

Resumen

Hemos investigado, considerablemente, en mayor detalle que el justificado en un libro de texto de mecánica clásica alguna de las propiedades geométricas y algebraicas del espacio fase. El interés es ocasionado por aspectos interesantes y no muy discutidos debidos al hecho de que el espacio fase es un espacio simpléctico en vez de un espacio ortogonal. Las propiedades de un espacio simpléctico son ocasionadas por una forma bilineal antisimétrica, de la misma manera que las propiedades del más familiar, espacio ortogonal son ocasionadas por una métrica debida a una forma simétrica.

La forma antisimétrica de la que se ha hablado debe su existencia a las ecuaciones de Hamilton de movimiento, y refleja de esta manera el hecho de que las ecuaciones de Newton son ecuaciones diferenciales de segundo orden.

La ventaja de una exposición sistemática de ciertas partes de la mecánica clásica en estos términos es que permite ver con mayor profundidad algunas definiciones y resultados que ha primera vista pueden simplemente parecer técnicas incidentales en el proceso de una derivación matemática. Por ejemplo, en lugar de hablar de una manera muy vaga de la "forma" hamiltoniana de un conjunto de ecuaciones de movimiento, el concepto puede darse de una manera muy precisa. Primero que todo, tenemos un vector velocidad el cual determina el movimiento del sistema mecánico. Propiamente dicho se tiene un campo de tales vectores, ya que uno podría determinar la velocidad del sistema en cualquier parte que estuviese del espacio fase. De acuerdo a la mecánica hamiltoniana, la determinación del campo de velocidades es hecha con la ayuda de una función auxiliar, la función hamiltoniana del sistema. Especificamente hay una relación lineal entre el campo gradiente de el hamitoniano y el campo de velocidad. La "forma" hamiltoniana de las ecuaciones del movimiento consiste en el hecho de que la matriz de coeficientes es una matriz específica, la matriz antisimétrica unitaria. Es entonces natural clasificar las transformaciones de coordenadas en el espacio fase de acuerdo a que preserven la relación lineal entre velocidad y gradiente, a que preserven la matriz particular de coeficientes o a que preserven el hamiltoniano mismo. Al variar los grados de generalidad se obtienen entonces transformaciones arbitrarias de coordenadas, transformaciones canónicas o simétricas.

El que las ecuaciones de movimiento originalmente involucran una matriz antisimétrica debe ser aceptado como una consecuencia de la validez experimental de las ecuaciones de Newton y el hecho de que la forma hamiltoniana es la más conveniente para estudiar sistemáticamente transformaciones de coordenadas. Una vez que uno llega a este punto, hechos tales como la existencia de dos grupos de coordenadas (las coordenadas del espacio de configuración y su momenta conjugada) son una consecuencia natural de la geometría simpléctica, y se puede ver que persisten cuando se ha llevado a cabo una transformación canónica de coordenadas.

No solamente el espacio fase exhibe las características de la geometría simpléctica, las funciones definidas sobre el espacio fase también lo hacen. La forma bilineal que nos brinda esta estructura, es el paréntesis de Poisson. Ya que una función bilineal nos define una función lineal, al fijar uno de sus argumentos, el paréntesis de Poisson nos permite definir transformaciones lineales sobre las funciones del espacio fase. Algunas de estas funciones han atraido nuestro interés.

En el espacio de los polinomios homogéneos, el mencionado paréntesis define una métrica la cual da como resultado una geometría simpléctica y la definición de conjugado canónico.

Los polinomios homogéneos de segundo grado son utilizados para definir automorfismos lineales sobre los espacios de polinomios homogéneos. Tales transformaciones tienen eigenvalores y eigenvectores y con estos se obtienen resultados muy interesantes como por ejemplo que sus eigenvalores siempre se presentan en parejas negativas y que sus correspondientes eigenvectores son parejas conjugadas, además de que se obtiene una forma canónica para tales transformaciones, otro resultado es que cada operador normal tiene un conjunto asociado de cuaterniones cuya existencia está muy relacionada con la existencia de las parejas negativas de eigenvalores.

Todos los resultados anteriores tienen algunas aplicaciones a hamiltonianos bilineales, tales como los que se presentan en el oscilador armónico, el movimiento de una partícula cerrada en un campo magnético uniforme y algunos otros problemas similares. En estos casos el hamiltoniano puede ser tratado como un operador lineal sobre el espacio fase y se encuentra que posee eigenfunciones, y otra vez, que pertenecen a parejas negativas de eigenvalores. Los productos de las eigenfunciones son polinomios homogenéos de grado superior, y nuevamente son eigenfunciones, pero ahora sus eigenvalores serán la suma de los correspondientes eigenvalores de las eigenfunciones factores. Por lo tanto, si consideramos una pareja negativa de eigenvalores, la correspondiente pareja de eigenfunciones al ser multiplicada tendrá eigenvalor cero, lo cual es otra manera de decir que el paréntesis de Poisson del producto con el hamiltoniano es cero.

Lo anterior nos indica una manera de construir constantes cuadráticas de movimiento, las cuales tendrán la propiedad de formar un conjunto cerrado con respecto al paréntesis de Poisson. En otras palabras tenemos una nueva manera de generar constantes de movimiento para hamiltonianos cuadráticos y de esta manera podemos generar grupos de simetría para esta clase de hamiltonianos. Este método fué utilizado por Torres [22] para encontrar el grupo de simetría del problema de un monopolo electromagnético.

Apéndice A

Geometrías Simpléctica y Ortogonal

El objetivo de este apéndice es listar los principales resultados de la geometría simpléctica, y hacer algunas comparaciones con los análogos de la geometría ortogonal. En ningun momento se ha tratado de demostrar algunas de las afirmaciones, ya que este material se encuentra claramente expuesto, en su totalidad, en el libro de Artin [1].

Sea V un espacio vectorial, tanto por la izquierda como por la derecha, de dimensión n sobre un campo K, tal que

$$a\mathbf{x} = \mathbf{x}a; \quad a \in K, \quad \mathbf{x} \in V$$

Supongamos que se tiene definida una función de $V \times V$ en K, denotada por XY tal que cumpla con las siguientes reglas:

$$\begin{array}{rcll} (X_1 + X_2)Y & = & X_1Y + X_2Y & \\ X(Y_1 + Y_2) & = & XY_1 + XY_2 & \\ (aX)Y & = & a(XY) & \qquad (A.1) \\ X(aY) & = & a(XY) & \end{array}$$

Pensaremos intuitivamente, que $X^2 = X\ X$ es algo que así como "la longitud" del vector X, y de XY pensaremos que es el "el ángulo" entre X y Y.

Diremos que un producto de este estilo define una "estructura métrica" sobre V e investigaremos primero, como una estructura de este tipo puede ser descrita por una base $A_I, A_2, \cdots, A_n$ de V.

Sean

$$\begin{array}{lrll} (A.2) & A_iA_j = & g_{ij} \in K, & 1 \leq i, j \leq n \\ (A.3) & X = & \sum_{v=1}^{n} X_vA_v, & Y = \sum_{u=1}^{n} Y_uA_u \\ (A.4) & XY = & \sum_{v,u=1}^{n} g_{vu}X_vY_u & \end{array}$$

De aquí vemos que si conocemos las constantes g_{ij}, entonces conoceremos $X\ Y$.

Si, reciprocamente, ahora seleccionamos un conjunto de constantes arbitrarias g_{ij} en K, y definimos un producto $X\ Y$, (de los factores dados por (A.3)), por medio de (A.4), este producto satisface las reglas dadas en (A.1).

Si en (A.4) tomamos A_i por X y A_j por Y, obtendremos nuevamente (A.2).

De todo lo anterior vemos que el estudio de las funciones biliniales es equivalente al estudio de las estructuras métricas de V.

Dado que las constantes g_{ij} sólo dependen de la selección de la base, ahora veremos como un cambio de ésta, las puede afectar.

Sea $B_I, B_2, \ldots, B_n$ una nueva base de V, entonces

$$B_j = \textstyle\sum_{v=1}^{n} a_{vj} A_v, \qquad a_{ij} \in \kappa$$

Los B_j formarán una base si y solamente si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Con la nueva base construimos las nuevas constantes g'_{ij}

$$\begin{aligned} g\prime_{ij} = \quad B_i B_j = & \textstyle\sum_{v,u} a_{vi} A_v a_{ui} A_u \\ = & \textstyle\sum_{v,u} a_{vi} g_{vu} a_{uj} \end{aligned}$$

Lo cual en forma matricial quiere decir:

$$\begin{array}{lrl} & (g'_{ij}) = & (a_{ji})(g_{ij})(a_{ij}) \\ (A.5) & (g'_{ij}) = & (a_{ij})^T (g_{ij})(a_{ij}) \end{array}$$

Diremos que A es ortogonal a B si $AB = 0$.

¿En que estructuras métricas $AB = 0$ implica $BA = 0$?

La respuesta es que hay dos tipos de estructuras métricas con esta propiedad:

1) La geometría simpléctica

$$\begin{array}{rrrl} & i) & X^2 = & 0 \qquad \forall x \in V \\ \Rightarrow & ii) & XY = & -YX \end{array}$$

(ii) no es equivalente a (i)

como lo muestra el caso especial $Y = X$ con característica de K igual a 2.

Para las constantes g_{ij} obtenemos:

$$\begin{array}{lrll} & g_{ij} = & -g_{ji} \quad , \quad g_{ii} = 0 & \\ (A.6) & X^2 = & 0 \quad \text{si y sólo si} & g_{ij} = -g_{ji} \end{array}$$

(A.6) es la condición necesaria y suficiente para una geometría simpléctica y de aquí que una geometría de este tipo es equivalente al estudio de las formas bilineales anti-simétricas.

2) La geometría ortogonal.

$$XY = YX$$

El kernel izquierdo de una funcion XY se define como

$$V_I = \{X \in V \mid XY = 0, \ \forall Y \in V\}$$

El kernel derecho es

$$V_D = \{Y \in V \mid XY = 0 \ , \ \forall X \in V\}$$

Con una geometría simpléctica o una ortogonal

$$V_D = V_I$$

De aquí que definamos kernel de V como el radical de V, para estas geometrías.

Definición.- Un espacio es llamado isotrópico si todos los productos entre vectores del espacio son cero. Los subespacios 0 y el radical son ejemplos de espacios isotrópicos. Un vector A es isotrópico si $A^2 = 0$. De aquí que en una geometría simpléctica cada vector es isotrópico.

Definición.- Llamaremos a un espacio vectorial V, con una estructura métrica, no singular si los <u>kernels</u> de su producto son 0.

El determinante $(g_{ij}) = G$ será llamado el discriminante de V. La condición necesaria y suficiente para que V sea no-singular es que $G \neq 0$.

Definición.- Un plano no-singular que contenga un vector isotrópico será llamado un plano hiperbólico y este siempre puede ser expandido por una pareja N, M de vectores los cuales satisfacen

$$N^2 = M^2 = 0 \quad , \quad NM = 1$$

Para la geometría cotidiana tenemos el siguiente.

Teorema.- Un espacio con geometría ortogonal es una suma ortogonal de líneas

$$V =< A_1 > + < A_2 > + \cdots + < A_n >$$

Los A_i son llamados una base ortogonal de V. V es no-singular si y sólo si ninguno de los A_i es isotrópico.

Y el análogo en la geometría simpléctica es el siguiente.

Teorema.- Un espacio simpléctico no-singular es una suma ortogonal de planos hiperbólicos, en otras palabras es un espacio hiperbólico, su dimensión siempre es par.

Definición.- Un subespacio isotrópico U es llamado isotrópico maximal si U no es un subespacio propio de algun subespacio isotrópico de V.

Teorema.- Todos los subespacios isotrópicos maximales de un espacio no-singular V tienen la misma dimensión r.

El invariante r de V es llamado el índice de V.

Teorema.- La dimensión de un subespacio hiperbólico maximal es $2r$ donde r es el índice de V, dim $V = n \ \geq \ 2r$ y el máximo valor para r, $\frac{1}{2}n$, se alcanza si y sólo si, V mismo es hiperbólico (Por ejemplo en el caso simpléctico).

Cada espacio simpléctico no-singular es hiperbólico

$$\begin{aligned} V \ = \ \ H_{2r} &= \ P_1 \perp P_2 \perp \ldots . . \perp P_r \\ &= \ < N_1, M_1, N_2, M_2, \ldots, N_r, M_r > \end{aligned}$$

donde $P_i =< N_i, M_i >$ es un plano hiperbólico.

Los N_i, N_j satisfacen: $\quad N_iM_j = M_iM_j = 0 \quad , \quad N_iM_j = \delta_{ij}$

Definición.- Una base $\{N_i, M_j\}$ del tipo anterior es llamada una base simpléctica de V.

El discriminante G de una base simpléctica es 1.

Definición.- El grupo de isometrías de un espacio simpléctico no-singular $V = H_{2r}$ de dim $V = 2r = n$ es llamado el grupo simpléctico y denotado $S_{p_n}(k)$.

Teorema.- Si V es no-singular y σ una isometría de V sobre V, entonces det $\sigma = \pm 1$

Definición.- Si det $\sigma = +1$ entonces σ es llamada una rotación; si det $\sigma = -1$, es llamada una reflexión.

Teorema.- Cada elemento de $S_{p_n}(k)$ es una rotación.

Apéndice B

Tomemos el álgebra de Lie formada por $\phi_2^{(2)}$.

Consideremos el subespacio

$$\begin{aligned}
H &= ((q_1^2, q_1q_2, q_2^2)) \\
\dim H &= 3 \\
[q_1^2, q_1q_2] &= 0 \\
[q_1^2, q_2^2] &= 0 \\
[q_1q_2, q_2^2] &= 0
\end{aligned}$$

pero una subálgebra de Cartan es

$$\begin{aligned}
a =& \quad ((p_1q_1, p_2q_2)) \\
\text{y} \qquad \dim a =& \quad 2
\end{aligned}$$

de aquí vemos que el concepto de conjunto maximal de operadores que conmutan entre si no coincide con el de subálgebra de Cartan.

Es bueno hacer ver que H no es una subálgebra de Cartan. Para esto, supongamos que sí lo fuera, entonces el conmutador del elemento del álgebra de Lie

$$q_1p_1 + q_2p_1 + p_1^2 + p_1p_2$$

con el elemento de H, q_1^2 nos debe dar nuevamente un elemento de H, es decir, una combinación lineal de q_1^2 , q_1q_2 y q_2^2.

$$[q_1p_1 + q_2p_1 + p_1^2 + p_1p_2, q_1^2] \quad = \quad -2q_1^2 - 2q_1q_2 - p_1q_1 - 2q_1p_2$$

y este elemento claramente no pertenece a H.

Bibliografía

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York, (1957).

[2] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Publishers, Inc., New York, (1962).

[3] P. Halmos,*Finite Dimensional Vector Spaces*, Second edition. Van Nostrand Company, Princeton, (1958)

[4] I. M. Gel'fand, *Lectures on Linear Algebra*, Interscience Publishers, Inc., New York, (1961).

[5] V. A. Dulock y H. V. McIntosh, *American Journal of Physics*, **33** 109, (1965).

[6] H. Poincare, *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*, Gautier Villars, Paris, (1892).

[7] G. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. IX. (1927)

[8] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press. Fourth edition. Reimpresion (1961).

[9] E. D. Courant y H. S. Snyder, Annals of Physics. New York **3** 1-48 (1958).

[10] H. C. Corben y P. Stehle, *Classical Mechanics*, Second edition. J. Wiley and Sons Inc., New York (1960).

[11] C. L. Siegel, em Vorlesungen Über Himmelsmechanik. Springer-Verlag, Berlin (1956).

[12] H. V. McIntosh, Journal of Molecular Spectroscopy **8** 169-192 (1962).

[13] G. W. Mackey, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W.A Benjamin, Inc., New York (1963).

[14] R. Jost, Reviews of Modern Physics **36** 572-579 (1964).

[15] H. Pollard, *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., (1966).

[16] G. S. S. Lundford y D. W. Yannitell, American Journal of Physics **36** 231-233 (1968).

[17] F. Ansbacher, American Journal of Physics **34** 1020-1024 (1966).

[18] V. A. Dulock y H. V. McIntosh, *Pacific Journal of Mathematics*, **19** 39-55 (1966).

[19] V. A. Dulock y H.V. McIntosh, Journal of Mathematical Physics, **7** 1401-1412 (1966).

[20] V. A. Dulock, *Tesis Doctoral*, University of Florida (1966).

[21] P. A. Rowlatt, *Group Theory and Elementary Particles*, American Elsevier Publishing, New York (1966).

[22] J. L. Torres Hernández, Tesis Profesional, Instituto Politécnico Nacional, E.S.F.M. (1971)

[23] H. V. McIntosh , *The Geometry of Phase Space* (notas sin publicar).