Teoría de gráficas en los Autómatas Celulares

Quevedo Bueno Jesús Enrique
Licenciatura en Informática
Universidad Autónoma de Sinaloa
Culiacán, Sinaloa, México.
e-mail: quevedo@info.uasnet.mx.

Coordinador del proyecto:
Dr. Harold V. McIntosh.

Agosto 16, 1996

Contenido

Capítulo 1

Introducción.

El estudio de las autómatas celulares comenzó cuando **John von Neumann** se interesó en la posibilidad de construir máquinas que pudieran autoreproducirse. La teoría de autómatas celulares se basa en una regla de evolución que se aplica a una grupo de células, la regla de evolución nos indica en que evoluciona cada grupo de celulas, es necesario mencionar que cada grupo de células evoluciona en una sola celula a la cual se le llama **mapeo**, al conjunto de posibles **estados** que puede tener una célula se le denomina K; al grupo de células al cual se le aplica la regla de evolución se le llama vecindad y la cantidad de células que puede tener una vecindad esta en relación al número de vecinos que tiene a cada lado la célula central a este numero se le llama R, entonces en tamaño de la vecindad es **2R + 1** y el número de vecindades será

$$K^{2R+1} \tag{1.1}$$

porque cada celula de una vecindad puede tener K estados, si hay

$$K^{2R+1} \tag{1.2}$$

vecindades cada una de estas puede evolucionar en K estados lo que nos da

$$K^{K^{2R+1}} \tag{1.3}$$

posibles reglas de evolución.

La teoría de gráficas juega un papel importante en los autómatas celulares porque podemos representar gráficamente la evoluci'on y describir algunas propiedades locales y relacionarlas a propiedades globales.[1]

Se mencionó que cada vecindad evoluciona en una sola célula, por lo que para encontrar la siguiente evolución completa es necesario que las vecindades traslapen.

Observar tal traslape a simple vista es un tanto confuso, pero es posible representarlo mediante gráficas que se utilizaron en primera instancia en la teoría de registros de corrimiento, en donde también se observan traslapes, tales gráficas son los diagramas de **de Bruijn**.[1]

Capítulo 2

Definiciones Básicas.

Aquí se pretende mencionar algunas definiciones que son importantes respecto a la teoría de autómatas celulares como lo son la configuración, computación, y autorreproducción.

2.1 Autómatas Celulares

Los autómatas celulares son mecanismos capaces de realizar una serie de acciones programadas con una secuencia, están incorporados en una red por lo que se puede planear tal secuencia de operaciones y cada célula decide sus actividades de acuerdo a sus vecinos.

Una definición mas formal de autómata celular es que son universos artificiales que consisten de un arreglo rectangular **n-dimensional**, un conjunto de valores iniciales para las células que forman a ese arreglo y una regla local mediante la cual esos valores seran actualizados. Cada célula contiene un valor de un número finito de posibles valores, y todos los valores de las células son actualizados en un intervalo de tiempo discreto.[3]

2.2 Configuración

Se le llama configuración a la asignación de estados que se hace a todas las células que forman al conjunto inicial y que tal asignación sea permitible por el autómata. También se define la regla que se va a aplicar al autómata.

La computación en los autómatas celulares son los cálculos que se hacen al aplicar la regla a las vecindades para así poder obtener una evolución.

2.3 Autoreproducción

La autorreproducción se refiere a que hay configuraciones capaces de computación que pueden producir a otras que también pueden ser capaces de computación entre las cuales pueden incluirse a sí mismas. Es decir, patrones que se pueden reproducir otra vez en el curso de la evolución donde estos son capaces de realizar computaciones y crear otros patrones que también hagan computación.

Autoreproducción es cerrar un ciclo, en donde se crean configuraciones capaces de hacer cálculos incluyéndose a sí mismas.

2.4 Sobreyectividad

La Sobreyectividad es cuando hay un mapeo de elementos de tal forma que cualquier elemento en la configuración en la cual evolucionó el autómata es la imagen de al menos un elemento del conjunto anterior al cual se le aplicó la regla, es decir que todas las células pueden ser producidas por alguna vecindad o que no hay Jardín del Edén.

Una regla de los autómatas celulares es sobreyectiva si cualquier configuración tiene un predecesor. Es inyectiva si este predecesor es único. Será sobreyectiva si y solo si tiene un jardín del edén vacío.[5]

Hay Jardín del Edén cuando hay al menos un elemento en un conjunto el cual no es la imagen de un elemento en otro conjunto, o sea que no puede ser producido por alguna de las vecindades que forman a ese autómata aplicando la regla de evolución.

Las ideas de sobreyectividad y jardines del edén fueron introducidas en primera instancia por **Moore.**

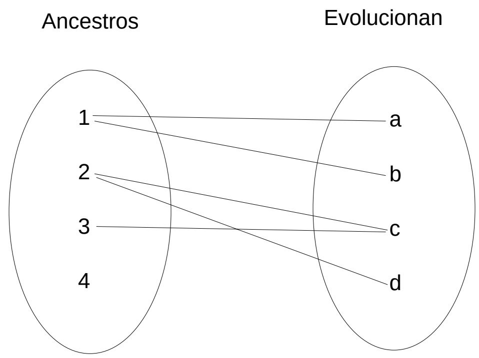

Figura 2.1: Representación gráfica de la sobreyectividad. Se observa que cada elemento en la evolución tiene al menos una imagen en los ancestros

Se le llama ancestro de una célula a aquella vecindad que la produjo al aplicársele la regla de evolución o que la puede producir en un momento dado, puede ser posible que varias vecindades producen a la misma célula por lo que esta tendrá múltiples ancestros.

Se han obtenido resultados de que el número total de pre-imagenes de ciertas secuencias bien definidas escalan con la longitud de la secuencia.

2.5 Inyectividad

La inyectividad es cuando cada mapeo tiene un solo ancestro. Cuando el predecesor es único.

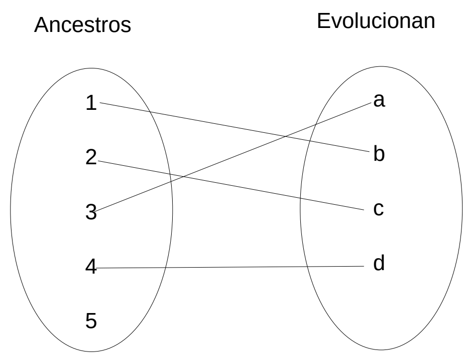

Figura 2.2: Representación gráfica de la inyectividad. Cada predecesor es único. Aunque no se ocupen todos los ancestros.

Se dice que hay biyectividad cuando hay mapeos de uno a uno entre ancestros y mapeos y viceversa. Cuando es **inyectivo** y **sobreyectivo** al mismo tiempo. Si hay biyectividad en un autómata, este es reversible.

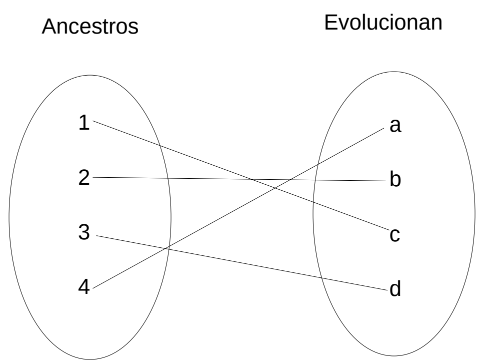

Figura 2.3: Representación gráfica de la biyectividad. Hay mapeos de uno a uno entre ambos conjuntos.

Capítulo 3

Teoría de gráficas.

Las aplicaciones de la teoría de gráficas han sido de gran importancia en las investigaciones de autómatas celulares.

Hay técnicas en la teoría de gráficas que sirven para el estudio de la sobreyectividad, centradas sobre los diagramas de de Bruijn.

3.1 Traslape.

El traslape que hemos mencionado anteriormente se refiere a que los nodos que seran encadenados en el diagrama de de Bruijn, si el primer nodo termina con una secuencia de dígitos de S-1 el segundo nodo, es decir el nodo al que se va a encadenar deberá de empezar con la misma secuencia de S-1 digitos; por ejemplo:

en un autómata celular de 2 estados con 2 vecinos a cada lado (2,2) la vecindad 10101 esta formada por los nodos 1(010) y (010)1, que es la parte de las vecindades que traslapan, y en donde se observa que forman la vecindad con la secuencia 010; que son las secuencias entre paréntesis, son secuencias S-1 al final del primer nodo y S-1 en el principio del segundo, son las que traslapan formando la vecindad 10101.

En el autómata (2,2) la vecindad esta formada de cinco vecinos por lo que se presenta un traslape de cuatro células de una vecindad y cuatro células de la otra vecindad teniendo en común a los tres vecinos centrales.

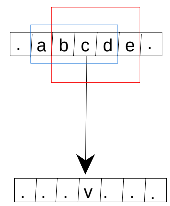

Figura 3.1: Se observa un traslape para formar la vecindad **abcde**

3.2 Diagramas de de Bruijn

Un diagrama de de Bruijn es una gráfica en donde los nodos son secuencias de símbolos de algun alfabeto y las ligas de los nodos describen como tales secuencias pueden traslapar para formar otras secuencias.

Los diagramas de de Bruijn surgen cuando N. G. de Bruijn plantea estos diagramas para los procedimientos de los problemas combinatoriales en donde lo que se pretende es encontrar rutas en las que no se repita ninguna conexión. Debido a que las vecindades de los autómatas celulares se presentan en combinaciones que traslapan es posible utilizar estos diagramas para representar el comportamineto de estos.

En el caso de los autómatas celulares los nodos de los diagramas de de Bruijn se construyen a partir de la parte de las vecindades que traslapan con otras, y las ligas entre estos nodos represenatarian a las vecindades que se estan formando entre estos. El número de nodos esta determinado por

$$K^{2R} \tag{3.1}$$

y el número de ligas posibles es igual al número de vecinos debido a la forma en que traslapan estos nodos.[4]

El diagrama de de Bruijn es particularmente útil para el propósito del extendimiento de las propiedades de un vecindario en un autómata celular a las propiedades de las cadenas de celulas porque proporcionan una forma gráfica al tratar con el traslape de las vecindades. Las ligas en los diagramas corresponden a las vecindades, los nodos a los intervalos por los cuales ellas traslapan, y las rutas a traves de los diagramas a las vecindades extendidas o a la secuencia de células en las cuales pueden evolucionar.

Tomaremos como ejemplo al autómata (2,1) donde los nodos posibles son 00, 01, 10 y 11 (0,1,2 y 3 en decimal), el diagrama generico para este automata es:

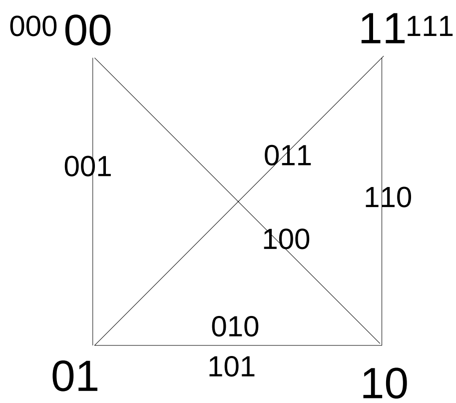

Figura 3.2: Diagrama genérico para el autómata dos-uno que posee 4 nodos, formando a las ocho posibles vecindades

Donde: 00 traslapa con 00 para formar 000
00 traslapa con 01 para formar 001
01 traslapa con 10 para formar 010
01 traslapa con 11 para formar 011
10 traslapa con 00 para formar 100
10 traslapa con 01 para formar 101
11 traslapa con 10 para formar 110
11 traslapa con 11 para formar 111

que son todas las posibles vecindades que hay en el autómata (2,1).

Como se trata de teoría de gráficas es posible representar un diagrama de de Bruijn por medio de una matriz de conexión tal que si hay conexión el elemento de la matriz es 1 y si no hay es 0.

Para un mejor entendimiento del comportamiento de los autómatas las ligas del diagrama de de Bruijn se dibujan con los colores del estado en el que evolucionan.

Asi tendriamos que para la regla 18 de el autómata (2,1) el diagrama de de Bruijn seria:

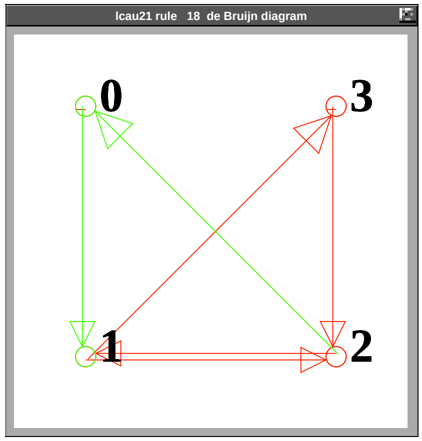

Figura 3.3: Diagrama de de Bruijn para la regla 18

y la siguiente matriz es en la cual los elementos con cero evolucionan en cero los de uno en uno y los que tienen un punto es que no evolucionan para esta regla.

.	00	01	10	11
00	0	1	.	.
01	.	.	0	0
10	1	0	.	.
11	.	.	0	0

(3.2)

Los diagramas de de Bruijn se diferencian de los diagramas de evolución en el aspecto de que estos solo poseen ciclos y hay tantas ligas permitidas dentro de un nodo como las que salen de él, un número el cual es uniforme para cada nodo. Desde luego que este fino balance puede ser deformado cuando un subdiagrama del diagrama de de Bruijn se cambia, y se presentaria un problema importante el cual seria localizar los ciclos en los cuales han sobrevivido el "podado" con el cual se creo el subdiagrama. Tal diagrama es el diagrama de subconjuntos.

Por lo anterior describiremos a los diagramas de ciclos y a los diagramas de subconjuntos.

3.3 Ciclos.

En cualquier autómata finito se observará evuntualmente una evolución periodica, en la cual presentarán ciclos que pueden ser cortos o largos. Los ciclos nos representan un comportamiento repetitivo en la evolución

Hay dos formas de obtener ciclos para un autómata dado. La primera es enumerar todos los anillos de la longitud deseada, y seguir la evolución para cada uno de ellos. La segunda es una gráfica en la cual las ligas estan deteminadas por una evolución preparada siguiendo las rutas y teniendo un proceso para localizar los ciclos.[4]

3.4 Diagrama de Subconjuntos.

El diagrama de subconjuntos se forma a partir de los mapeos que hay en el diagrama de de Bruijn, agrupando clases en este diagrama, ya sean clases unitarias, de parejas y las demas que se puedan formar. Es por eso que se le llama diagrama de subconjuntos. En estos diagramas podemos observar que si hay un elemento en la clase unitaria que mapeaba a dos elementos con el mismo estado, en este diagrama mapeará a la pareja que esten formando los dos elementos a los que mapeaba. Aunque pudiera presentarse una confusión porque una pareja de elementos podría mapear a un trío de elementos sin que todos los elementos esten conectados. Aunque las clases pudieran tener matrices individuales de conectividad. Sin embargo, lo antes mencionado implicaría muchos calculos o un congestionamiento bastante grande en el diagrama, lo que lo haría difícil de entender, tomando en cuenta de que se trata de la forma ”recortada” del diagrama de subconjuntos puesto que en la forma ”completa” se necesitarían mas cálculos y resultaría un diagrama mas comlejo pero mas exacto.[1]

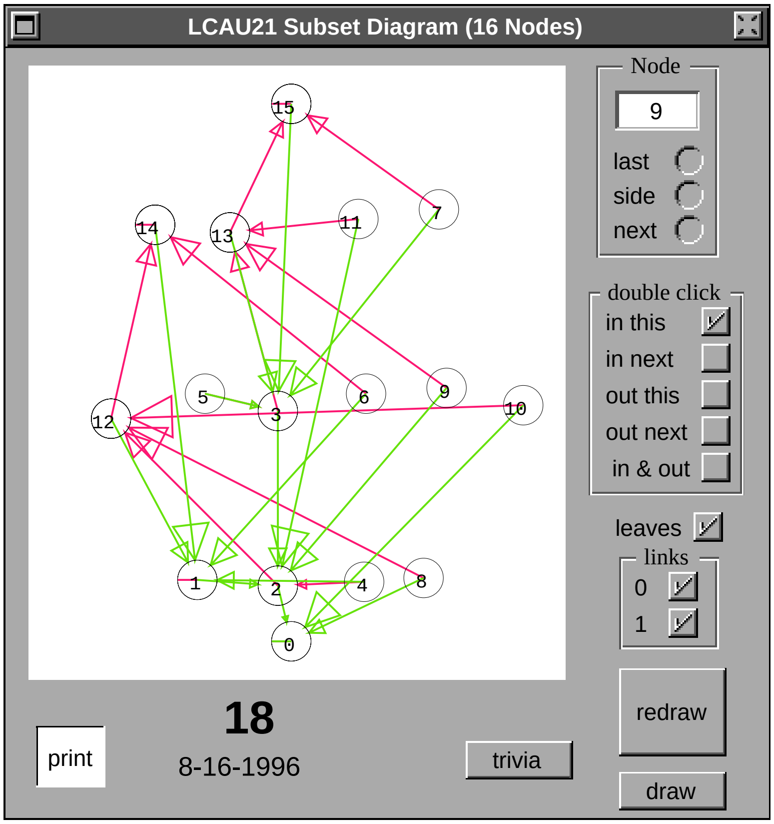

Figura 3.4: Diagrama de subconjuntos para la regla 18 del autómata (2,1)

Para ver si un autómata es sobreyectivo será necesario observar las conexiones que hay entre los subconjuntos, en especial las conexiones del conjunto total con el conjunto vacío. Porque si el subconjunto que contiene a todos los elementos conecta con el conjunto Vacío esto quiere decir que hay al menos un elemento que no tiene ancestros.

3.5 Diagramas de parejas.

A las gráficas también podemos multiplicarlas por otras gráficas y obtener un producto cartesiano que a su vez formará una gráfica mas grande. Si multiplicamos la gráfica de de Bruijn consigo misma entonces se obtendrá una gráfica de doble tamaño llamada diagrama de parejas; en donde las ligas conectan a parejas ordenadas de nodos.[1]

Los diagramas de parejas nos sirven para observar si hay ciclos conectandose con la diagonal para ver si es posible que un momento dado una celula pueda tener multiples ancestros, en este diagrama podemos observar si es inyectivo o no el autómata.

En el diagrama de parejas se presenta una liga si existe para ambos pares ordenados con el mismo valor y desde luego en la misma dirección.

La siguiente matriz de conectividad es para los diagramas de parejas del autómata 21, de la regla 18.

$$
\begin{array}{|cccc|cccc|cccc|cccc|}
\hline
1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\
\hline
. & 1 & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\tag{3.3}
$$

No siempre es necesario distinguir entre los miembros de un par, las flechas en las gráficas requieren ligas que esten definidas como pares ordenados de nodos, pero no necesariamente se reqiere que un par de ligas se tome en algún orden en particular.

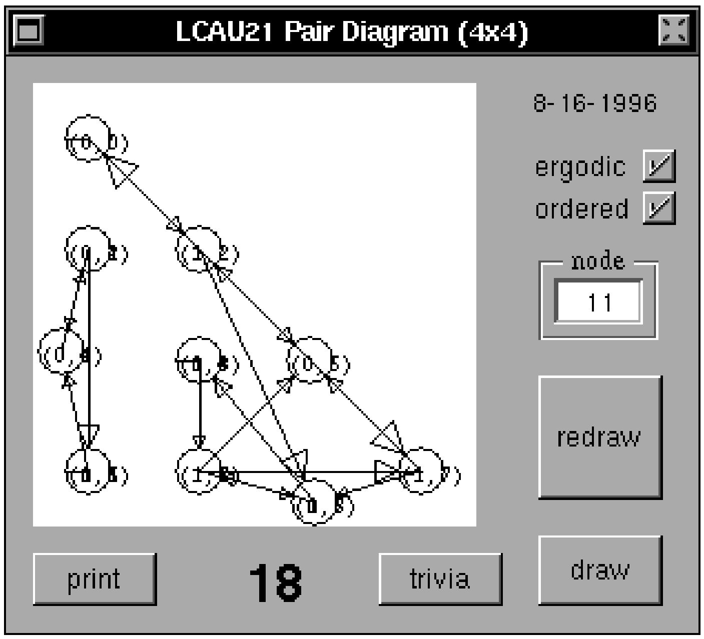

Figura 3.5: Diagrama de parejas de la regla 18 del autómata (2,1)

Capítulo 4

Tipos de reglas.

En los autómatas celulares tenemos varios tipos de reglas como los son las totalísticas, semitotalísticas, xenofóbicas, xenofílicas, reversibles, entre otras.

4.1 Reglas Xenofóbicas

Xenofobico se refiere a que se le tiene miedo a los extranos. Entonces en una regla xenofobica observaremos grupos de celulas en donde no hay una mezcla con celulas de diferentes estados.

4.2 Reglas Xenofílicas

Xenofílico, por el contrario, es cuando hay afinidad por los extraños. Por lo que se observará que hay mezclas entre células de diferente estado.

Una regla reversible es aquella regla que aplicándose hacia atrás (en sentido inverso) es posible obtener la misma evolución pero en sentido opuesto. En la actualidad existe una tendencia hacia las reglas reversibles de parte de quienes desarrollan investigaciones en esta rama, a causa de que pueden ser útiles en muchas cosas como criptografía, o para simular algunas reacciones químicas y poder observar mejor su

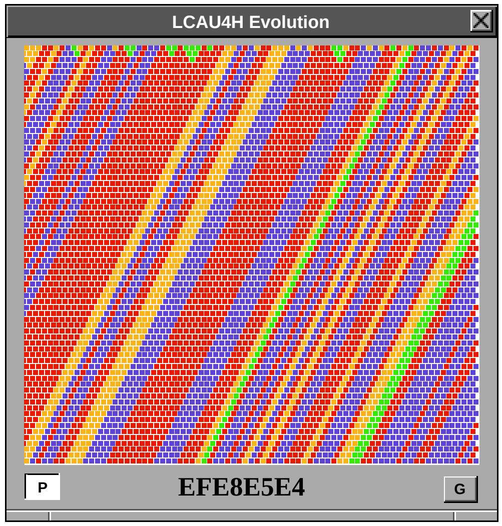

Figura 4.1: Evolución de una regla xenofobica

comportamiento.

Para el caso de reversibilidad, no se depende de la configuración de la línea inicial, esta línea puede ser periódica, arbitria o tranquila en el infinito y es aquí donde se manejan los términos de **Inyectividad** y **Sobreyectividad**.[2]

Una regla totalística es aquella en la cual la transición depende de la suma de los valores que tienen todos los n vecinos que forman la vecindad.

En las reglas semitotalísticas la transición depende de la suma de n-1 vecinos de una vecindad.

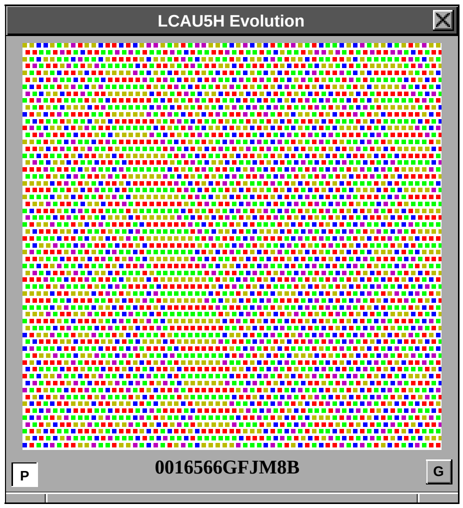

Figura 4.2: Evolución de una regla xenofílica

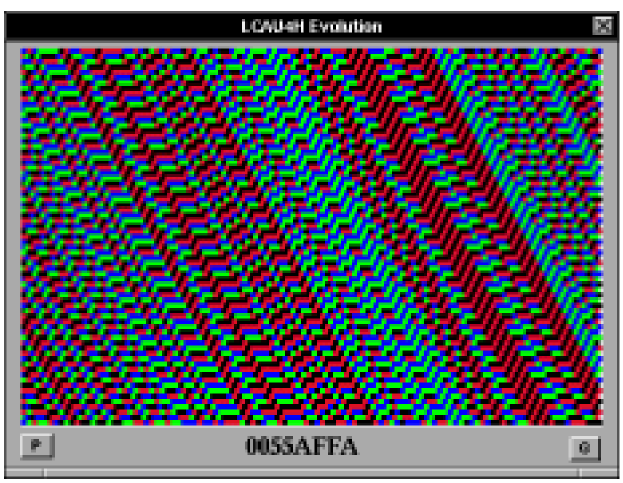

Figura 4.3: Evolución de una regla reversible para el autómata 4h

Capítulo 5

Conclusiones

Como conclusiones acerca de la teoría de gráficas en los autómatas celulares es que esta ha tenido un papel bastante importante y lo seguirá teniendo porque **Una imagen dice más que mil palabras**. Las gráficas sirven para tener modelos, para representarnos datos o conjuntos de datos, para proporcionarnos información en una forma más rápida.

Para beneficio de las investigaciones que se están realizando se cuenta con varias gráficas que se pueden aplicar a ellas. Es el caso de los diagramas de de Bruijn, subconjuntos y parejas que se estan aplicando en la actualidad en la teoría de autómatas celulares y sirven para comprender mejor las características y el comportamiento de ellos.

Bibliografía

[1] Harold V. McIntosh **Linear Cellular Automata via de Bruijn Diagrams.** Por Publicar.

[2] Harold V. McIntosh **Reversible Cellular Automata.** Physica D 999 (1991) 100-130. North-Holland, Amsterdan.

[3] Hillman David **The structure of reversible one-dimensional cellular automata.** Physica D 52 (1991) 277-292. North-Holland, Amsterdan.

[4] Harold V. McIntosh **Linear Cellular Automata.** Universidad Autónoma de Puebla (1990). Puebla, Puebla, Amsterdan.

[5] Burton H. Voorhees. **Computational Analysis of One-Dimensional Cellular Automata.** World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.(1996). Singapur, Singapur.