

# Una Mirada General a los Autómatas Célulares Lineales.

Libertad Rivera Larqué  
Arturo Chávez Quintana  
Juan Carlos Seck Tuoh Mora  
Genaro Juárez Martínez

Matemáticas Aplicadas y Computación  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Campus Acatlán

Investigador:

Harold V. McIntosh

Departamento de Aplicación de Microcomputadoras  
Universidad Autónoma de Puebla

Verano,1998

## Contenido

<b>1</b>	<b>Una Mirada General a los Autómatas Célulares Lineales.</b>	<b>3</b>
1.1	Antecedentes Históricos. . . . .	3
1.2	Conceptos Básicos. . . . .	7
1.3	Reversibilidad. . . . .	12
<b>2</b>	<b>Diagramas en los Autómatas Celulares</b>	<b>17</b>
2.1	Diagramas de de Bruijn . . . . .	17
2.2	Construcción de los Diagramas de de Bruijn . . . . .	19
2.3	<b>Diagrama de de Bruijn</b> para el autómata (4,h) regla F5A0F5A0 . . . . .	24

2.4	<b>Diagrama de de Bruijn</b> para el autómata (2,1) regla 51	28
2.5	Construcción de los <b>Diagramas de Subconjuntos</b> . . .	31
2.6	Construcción del Diagrama de Subconjuntos autómata (2,1), regla 51 . . . . .	33
2.7	Construcción de los <b>Diagramas de Parejas</b> . . . . .	33
2.8	Construcción del diagrama de parejas para el autómata (4,h) regla F5A0F5A0 . . . . .	34
2.9	Construcción de el Diagrama de Parejas para el au- tomata (2,1) regla 51 . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Campos de Atracción</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>Reversibilidad en Autómatas Celulares en una Dimensión</b>	<b>46</b>
4.1	Autómatas Celulares y Reversibilidad. . . . .	46
4.2	Multiplicidad Uniforme e Indices de Welch . . . . .	47
4.3	Indices de Welch y diagramas de Subconjuntos y Parejas	54

# 1 Una Mirada General a los Autómatas Célulares Lineales.

La mayoría de los sistemas dinámicos, tienen tanto estructura como conducta muy complejas, que no pueden ser siempre analizadas cualitativamente. En algunos casos podemos simular su conducta numéricamente, tomando en cuenta a algunos de sus componentes, sin embargo para algunos casos no siempre son suficientes y algunas simulaciones requieren más componentes. Una estructura matemática común para estos sistemas son los Autómatas Celulares.

## 1.1 Antecedentes Históricos.

Los autómatas celulares han aparecido a través de la historia con diferentes nombres (espacios celulares, estructuras celulares, arreglos iterativos), pero bajo el mismo concepto fundamental. La teoría de estos autómatas, se comprende en diferentes épocas, debidas a las aportaciones de sus principales autores. La primera comienza con John von Neumann y la idea de las máquinas autorreproducibles; posteriormente Martin Gardner [1] publica *Life*, un juego para computadora planeado por John Horton Conway y finalmente, la última etapa es comprendida por una clasificación que proporciona Stephen Wolfram para los autómatas celulares.

### Etapa de von Neumann. (1950)

A principios de los años 50's, von Neumann se preguntaba si era posible una máquina que fuera capaz de autorreproducirse en una máquina más compleja o si habría una contradicción lógica a esta idea, como eran tiempos de postguerra se carecía del material para hacerla [8]. A sugerencia de Stanislaw M. Ulam, matemático que ideaba juegos para computadora, von Neumann construyó un modelo matemático abstracto, en dos dimensiones, para el análisis de la máquina, ya que de esta forma sería más susceptible a la demostración; consistía en un tablero de damas, donde cada casilla podría estar en cualquiera de los 29 estados diferentes definidos por von Neumann. El estado de cada célula de la siguiente generación, dependía de los cuatro estados más

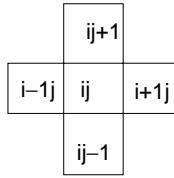


Figura 1: Vecindad de von Neumann

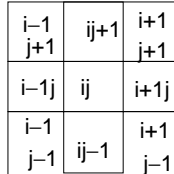


Figura 2: Vecindad de Moore

cercanos de las células vecinas en forma ortogonal.

El juego iniciaba con un patrón inicial y la regla determinaría todas las configuraciones siguientes. Von Neumann probó que la máquina autorreproducible era posible en un mundo lógico e imaginario. El resultado fue publicado en 1966, como *Teoría de Autómatas Autorreproducibles*. Posteriormente, el teorema de Edward F. Moore del *Jardín del Edén*, que demostraba que si había configuraciones que no tuvieran ancestros, entonces habría otras que tendrían múltiples ancestros. Por último el trabajo abstracto de Hedlund con algunos resultados de la lógica simbólica, aplicables a los autómatas.

### **Etapa de Gardner. (1970)**

El éxito que tuvo la publicación de *Life* en los 70's, un fantástico juego ecológico de computadora, inventado por Conway hizo posible el conocimiento público de los autómatas [4]. *Life*, es un autómata en dos dimensiones, donde cada célula puede tomar uno de cada dos estados, *activo* o *quieto*, y su evolución siguiente depende de su propio estado y el de sus ocho estados vecinos, en forma ortogonal y diagonal. Esta es la vecindad de Moore.

El criterio de Conway era que la regla no causara ninguna de las dos

consecuencias siguientes, morir rápidamente o expandirse sin límite.

Las computadoras comenzaron a tener gran popularidad y muchos programadores pusieron interés en el juego de Conway; los dispositivos de las computadoras permitían desplegar en forma visual las evoluciones e inclusive algunas fueron interactivas. La falta de computadoras no fue obstáculo para los que carecían de ellas, ya que con lápiz y papel llegaron a obtener resultados significantes.

### **Etapa de Wolfram. (1984)**

En los estudios experimentales con autómatas, se han encontrado comportamientos complejos en estructuras cíclicas y en estructuras muy largas [4].

La evolución de los autómatas, con condiciones iniciales aleatorias, parecen ser tan diferentes unas con otras; sin embargo al observarlas con detalle parecen tener un comportamiento característico en forma general.

En 1984, aparecieron tres artículos referidos a una nueva investigación en los autómatas; dos de estos fueron escritos por Wolfram y el otro hacia referencia a él. En los que exponía el estudio de un gran número de autómatas, que le permitió clasificarlos dentro de cuatro clases, después de comparar sus historias evolutivas con muchas reglas. Esta clasificación muestra que muchos detalles de la construcción de los autómatas, son irrelevantes respecto a su conducta cualitativa. La clasificación hecha por Wolfram [11] es la siguiente:

*Clase I. Autómatas que evolucionan rápidamente a un estado único homogéneo.*

*Clase II. Autómatas que evolucionan en estructuras cíclicas simples de periodos cortos.*

*Clase III. Autómatas que evolucionan en conductas caóticas y estructuras caóticas.*

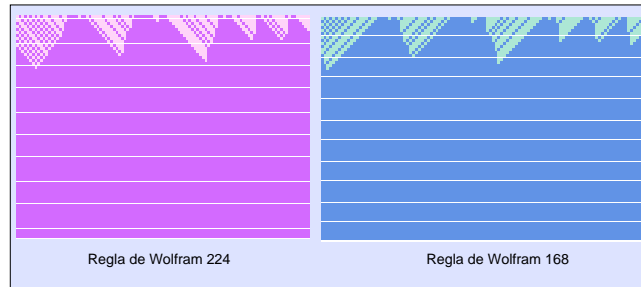


Figura 3: Para cualquier condición inicial, esta clase evoluciona en pocas generaciones a un estado uniforme.

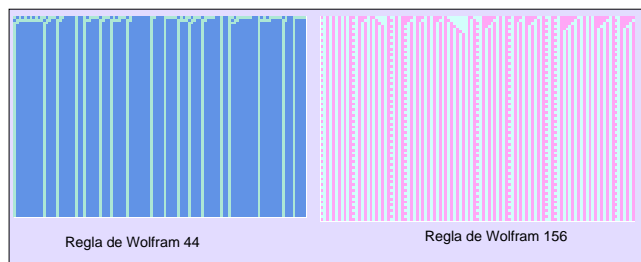


Figura 4: Alcanzan algún estado y todo lo que queda son estados cíclicos aislados.

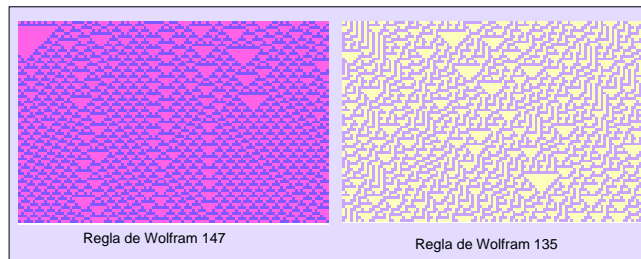


Figura 5: Más de la mitad de las reglas de Wolfram muestran este comportamiento.

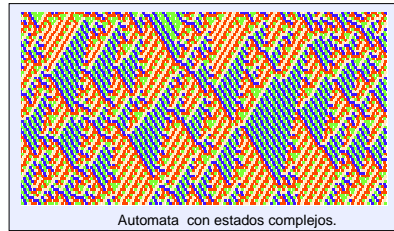


Figura 6: Esta es la clase más estudiada, es generada por reglas en las cuales el diagrama de de Bruijn contiene ciertos ciclos.

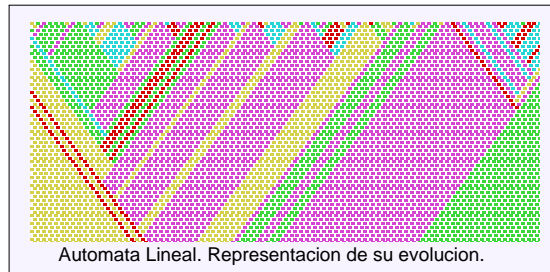


Figura 7: El autómata sigue siendo unidimensional.(No debe pensarse que es en dos dimensiones,el t-ésimo renglón representa la configuración del autómata en el tiempo t.)

**Clase IV. Autómatas que evolucionan en conductas complejas aisladas.**

## 1.2 Conceptos Básicos.

Los *Autómatas Celulares* son sistemas dinámicos discretos, que evolucionan por reglas determinísticas y sus variables cambian en forma sincrónica, en función de sus valores actuales. Las palabras claves para describir a los autómatas son, *discreto, determinístico, local y sincrónico*. Los *autómatas lineales* son versiones en una dimensión de los autómatas de Conway. Aunque son el caso más simple, actualmente son los más investigados, su ventaja es que su evolución puede ser representada en una pantalla de computadora dos dimensiones, el arreglo estará limitado por el número de pixeles de la pantalla.

Estos autómatas consisten en un espacio de configuración discreto de células conectadas, cada célula tiene asignado un valor de un con-

junto finito de estados y una regla de evolución que actualiza los valores en pasos de tiempo discreto, a partir de una condición inicial. En general los autómatas se denotan como  $(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ , donde  $k$  representa el número de estados y  $r$ , el número de vecinos [4].



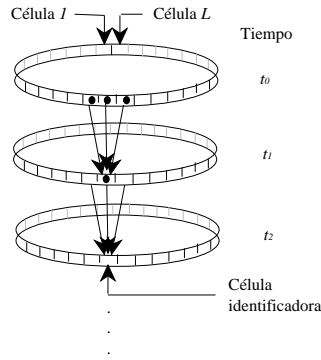


Figura 8: Este autómata es llamado cilíndrico, ya que su evolución puede ser vista como un cilindro.

**Arreglos.** Es el espacio de configuración discreto de células conectadas, que puede estar delimitado o no de la siguiente forma [10]:

*Doblemente infinito.* El arreglo es infinito por ambos lados.

$$\overline{\dots | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \dots} \quad (1)$$

*Medianamente infinito.* El arreglo es infinito por alguno de sus lados.

$$\overline{\dots | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square} \quad (2)$$

$$\overline{\square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \dots} \quad (3)$$

*Finito.* El arreglo es finito por ambos lados.

$$\overline{\square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square | \square} \quad (4)$$

Cuando un arreglo es finito podemos cerrarlo en forma de anillo para completar la vecindad de sus extremos del arreglo.

**Vecinos.** Todas las células de una generación se actualizan al mismo tiempo, para cada célula, su valor en el siguiente paso del tiempo, dependerá de su propio valor y del de las  $r$  células más cercanas, (*vecinos*), es decir un bloque de  $r$  vecinos por cada lado.

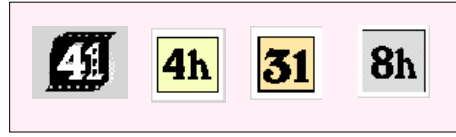


Figura 9: Autómatas con diversos radios de vecindad

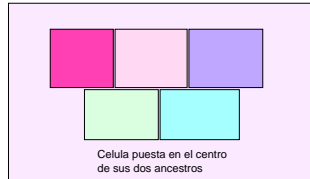


Figura 10: Ejemplo de una vecindad fraccionaria

El número de vecinos puede variar, lo más conveniente es tomar el mismo número de vecinos para ambos lados de la célula, sin tomar vecindades irregulares, sin embargo esto no siempre es posible, como veremos en los casos de los autómatas  $(k, h)$ ,  $(k, t)$ .

**Estados.** Los *estados* son los diferentes valores que puede tomar cada célula en un autómata. El caso más simple es el binario, (sólo dos estados). Generalmente son representados por números o colores.

**Vecindad.** En general, al número total de células, formado por la célula y sus vecinos por ambos lados se le llama *vecindad*, y está dado por  $2r+1$ , (donde el producto  $2r$  representa los  $r$  vecinos de cada uno de los dos lados). Para todo autómata  $(k, r)$ , el número total de vecindades diferentes es  $k\hat{(2r+1)}$

No siempre el número de vecinos  $r$  es entero, en algunas ocasiones podemos tomar cada medio vecino de cada lado,  $(k, h)$ , (donde  $h$  significa  $1/2$ ), para cada vecino de la célula no podemos tomar mitad y mitad, entonces es conveniente unir las dos mitades y completar un vecino de un solo lado, que puede ser el del lado derecho o del izquierdo, y la célula de la siguiente generación será puesta en el centro de sus dos ancestros. Para el caso  $(k, t)$ , (donde  $t$  significa  $3/2$ ), el procedimiento es el mismo.

**Reglas de Evolución.** La *Regla de Evolución* en un autómata es una función que especifica a que estado evolucionará cada vecindad.

Existen dos maneras diferentes de formar las reglas de evolución.

Si tomamos el caso más simple de los autómatas, los  $(2,1)$ , sabemos que son

$$k^{2r+1} = 2^{2(1)+1} = 8, \quad (5)$$

posibles combinaciones de vecindades, se ordenan de mayor a menor tomándose como números binarios, en un segundo renglón se coloca cada estado al que evoluciona una vecindad, si este es convertido a decimal empezando por la derecha, se encuentra la *Regla de Wolfram* [4].

$$\begin{array}{cccccccc} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array} \quad (6)$$

Esta es la regla 15, leyendo el segundo renglón al revés, se encuentra en número binario 11110000.

A partir de estas vecindades se puede saber el número total de *Reglas de Wolfram* que hay; ya que cada vecindad puede evolucionar en uno de dos estados hay  $2^8 = 256$  diferentes. Estas reglas son numeradas del 0 a la 255.

$$\begin{array}{cccccccc} \text{vecindades} & 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ \text{valores} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \quad (7)$$

Existe otra forma de determinar reglas evolutivas que son llamadas *Reglas Determinísticas*, son formadas por el resultado de alguna operación, (como la suma, resta) con cada una de las vecindades. Estas reglas producen resultados muy extraños.

Supóngase la siguiente regla:

$$\begin{array}{cccc} \text{suma} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \text{siguiente estado} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad (8)$$

esta regla, se conforma por la suma binaria de las vecindades para saber el siguiente estado evolutivo. Esta regla también es una *Regla de Wolfram*, es la regla 22. Algunas otras reglas que cumplen esto son la 0, 1, 127, 150, 255.

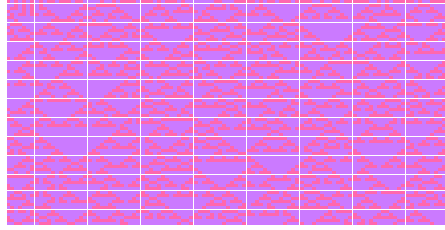


Figura 11: Regla de Wolfram 22

### 1.3 Reversibilidad.

Existen actualmente dos campos de investigación para los autómatas, estos son debidos a la dirección de la evolución del autómata, es decir, el problema de la evolución hacia adelante y el problema de la *Evolución Reversible*.

El problema hacia adelante, analiza características en la conducta de la evolución de los autómatas como son ciclos, puntos fijos etc; con desarrollo de técnicas para el análisis de los autómatas.

Por otro lado, el problema *Reversible*, tiene gran importancia en la modelación para simular características de sistemas vivos, (como *Life*). Se busca determinar una *reversibilidad* en el tiempo, de tal forma que configuraciones pasadas puedan ser recuperables desde cualquier otra configuración posterior a ellas, el sistema debe de ser capaz de guardar la información [9]. Esto es, determinar autómatas que satisfagan restricciones como generar configuraciones inalcanzables, denominadas *Jardín del Edén*.

Un aspecto importante en este estudio es que los conceptos inherentes a la *reversibilidad*, son muy sencillos y el nombre de cada uno de estos conceptos proporciona ideas intuitivas.

**Sistema Invertible o Reversible.** Es un sistema determinístico, en ambas direcciones del tiempo, futuro y pasado.

**Regla Inversa.** Regla que hace posible regresar en el tiempo.

**Ancastro.** Es una configuración, que por la aplicación de una regla de evolución, ha generado una configuración siguiente.



Figura 12: Autómata (2,1) regla 15 la cual es reversible.

**Mapeo Local.** Es el que asigna sucesores a las vecindades.

**Mapeo Global.** Es el que produce la sucesión de configuraciones de una generación a la siguiente.

El concepto de *reversibilidad*, no se aplica al mapeo local sino al mapeo global.

El estudio de los autómatas *reversivos*, tiene muchos problemas abiertos; no es conocida actualmente una forma sistemática para determinar la existencia de la *reversibilidad*, que se aplique a todos los autómatas, sin importar el número de estados o de vecinos.

Estas son las tres diferentes configuraciones que se pueden generar en los autómatas:

1. *Jardín del Edén.* Son configuraciones que no pueden ser generadas por la evolución, (no tienen ancestros) y sólo pueden aparecer al principio de la evolución.
2. *Ancestros Múltiples.* Configuraciones que pueden ser generadas por diferentes ancestros.
3. *Ancestros Únicos.* Configuraciones que pueden ser generadas por un solo ancestro. Este tipo de configuraciones son las necesarias para la *reversibilidad*.

A estos tipos de configuraciones, están muy ligadas a tres propiedades de los autómatas.

4. *Suryectividad*. Implica que todas las configuraciones deben tener al menos un ancestro. Con esto se elimina el *Jardín del Edén*.
5. *Inyectividad*. Implica que todas las configuraciones deben de tener a lo más un ancestro. Con esto se eliminan los *ancestros múltiples*.
6. *Biyectividad*. Esta propiedad es en realidad una consecuencia de la intersección de las dos anteriores e implica que todas las configuraciones deben tener un solo ancestro.

Existen conceptos fundamentales en el estudio de la reversibilidad, uno de ellos es el concepto de la Multiplicidad Uniforme, que indica que cada cadena debe de tener tantas formas de reproducirse como nodos en el *Diagrama de de Bruijn* haya. Otro concepto muy importante es el de los *Índices de Welsh*, que dan una descripción de como se comportan los ancestros.

Gustav A. Hedlund, en 1969 expuso su trabajo acerca de las propiedades de endomorfismos y automorfismos de los sistemas dinámicos, en un lenguaje matemático muy abstracto con muchas características topológicas. En 1978, Masakazu Nasu, describió estos resultados en una forma más amigable utilizando la *Teoría de Gráficas*, para incorporar unas ideas a la *Teoría de Autómatas*.

Para facilitar el análisis de estas propiedades, la *Teoría de Gráficas*, puede convertirse en una poderosa herramienta, ya que permite describir la evolución del autómata en forma gráfica, mostrando también la transición de las propiedades locales a las propiedades globales [5].

Las gráficas más importantes son:

1. *Diagrama de de Bruijn*. Proporciona toda la información de las propiedades de los autómatas, aunque no en forma muy evidente. Principalmente muestra el traslape de las vecindades y los estados a los que evolucionan secuencias que forman ciclos en el diagrama de *de Bruijn*.
2. *Diagrama de Subconjuntos*. Se obtiene a partir del diagrama de *de Bruijn*, y proporciona información acerca de los índices de Welsh y de la existencia del *Jardín del Edén*.
3. *Diagrama de Parejas*. Se obtiene del diagrama de *de Bruijn* y proporciona información acerca de *ancestros múltiples*.

Actualmente se estudian otro tipo de diagramas, llamados *Diagramas de Welsh*, los cuales serán vistos con detalle más adelante.

Se presenta la siguiente cuestión filosófica, si la máquina constructora universal de von Neumann hubiera sido posible, por ejemplo en un autómata que tuviera implementado una máquina de Turing, llevaría implícitas las mismas limitaciones de la máquina de Turing, entonces un autómata celular debe superara estas limitaciones. Si un autómata celular puede ser modelado por una máquina de Turing, la unión de estos dos hará que sus capacidades sean compatibles.

Lo inverosímil de esta afirmación (que pareciera verdad), surge cuando se encontró que había autómatas que tenían configuraciones que no podían ser originadas por la evolución. (*Jardín del Edén*). La relación de estas configuraciones con el constructor universal estaba en que, en la realización del constructor no se requería llenar espacios con diseños arbitrarios, por el contrario creaba objetos específicos de acuerdo a instrucciones que había recibido. La universalidad es referida a si descripciones arbitrarias pueden ser seguidas y no si construcciones arbitrarias pueden ser construidas.

Este análisis permite evaluar la conducta de los autómatas, ya que la reversibilidad es una de las características universales de las leyes físicas y en los autómatas celulares no se da automáticamente. Se cree que puede ser introducida pero el sistema perderá otras propiedades

importantes, para la modelación.



## 2 Diagramas en los Autómatas Celulares

La Teoría de Gráficas es una herramienta útil para el estudio de los autómatas, ya que una gráfica representa una pareja  $(N,L)$  que consiste de  $N$  nodos y  $L$  ligas. Como los símbolos de los nodos son manejados como enteros consecutivos se facilita el uso de sus propiedades aritméticas o algebraicas, haciendo uso de matrices. Entre las gráficas más importantes, para el estudio de los *autómatas* están los siguientes diagramas:

**Diagrama de de Bruijn**

**Diagrama de subconjuntos**

**Diagrama de parejas**

Para auxiliarnos en la construcción de los diagramas usamos el software elaborado por McIntosh, en la Universidad Autónoma de Puebla, el NXLCAU.

### 2.1 Diagramas de de Bruijn

El diagrama de de Bruijn es una gráfica cuyos nodos (secuencias de símbolos de algún alfabeto) son secuencias de un conjunto de estados y sus ligas describen las secuencias que se traslapan revelando las posibles sucesiones. Dichas secuencias tienen la misma longitud y son vecindades parciales.

Para un autómata  $(k,r)$  el número de nodos, en el diagrama, está dado por

$$k^{2r} \tag{9}$$

y el número de ligas por

$$k^{2r+1}. \tag{10}$$

Ya que los nodos representan fracciones de vecindades saldrá una liga del nodo  $i$  al nodo  $j$  si y sólo si la fracción de vecindad de el nodo  $i$  junto con la del nodo  $j$  forman una vecindad completa. Cada fracción de vecindad para cada nodo está dada por  $2r$  [5].

La matriz de conectividad que como sigue,

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = ki \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} = \begin{cases} ki & \\ ki + 1 & \pmod{k^2} \\ \dots \\ ki + k - 1 & \end{cases} \quad (11)$$

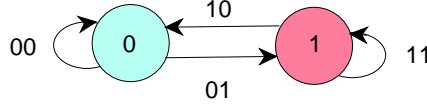


Figura 13: Diagrama de de Bruijn asociado a un autómata (2,h)

## 2.2 Construcción de los Diagramas de de Bruijn

Para cualquier *autómata*  $(\mathbf{k}, \mathbf{h})$ , en donde  $h$  significa que tiene vecindad de radio igual a un medio, la fracción de vecindad para cada nodo será de una célula, ya que  $2r = 2(1/2) = 1$ .

Para el autómata  $(\mathbf{2}, \mathbf{h})$  se tendrán dos estados:

$$2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (12)$$

vecindad de radio igual a un medio.

$$vecindades = \begin{cases} 1100 \\ 1010 \end{cases} \quad (13)$$

Independientemente de la tregla de evolución, *el diagrama de de Bruijn* estará definido por:

$$\begin{aligned} k^{2r} &= 2^{2(1/2)} = 2 \text{ nodos en el diagrama.} \\ k^{2r+1} &= 2^{2(1/2)+1} = 4 \text{ ligas en el diagrama.} \end{aligned} \quad (14)$$

Y como se había mencionado se tendrá una fracción de vecindad de una célula.

Entonces la gráfica está dada por:

Para el autómata  $(\mathbf{3}, \mathbf{h})$  se tendrán tres estados,

$$3 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \quad (15)$$

$$vecindades = \begin{cases} 222111000 \\ 210210210 \end{cases} \quad (16)$$

El *Diagrama de de Bruijn* tendrá:

$$\begin{aligned} k^{2r} &= 3^{2(1/2)} = 3 \text{ nodos en el diagrama.} \\ k^{2r+1} &= 3^{2(1/2)+1} = 9 \text{ ligas en el diagrama.} \end{aligned} \quad (17)$$

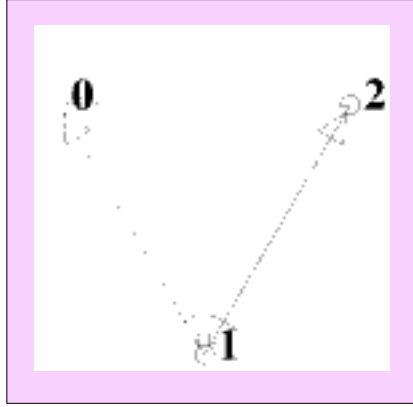


Figura 14: Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (3,h).

Y el diagrama queda como sigue:

Para el autómata (4,h) se tienen 4 estados:

$$4 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} \quad (18)$$

$$vecindades = \begin{cases} 3333222211110000 \\ 3210321032103210 \end{cases} \quad (19)$$

El *Diagrama de de Bruijn* tendrá:

$$\begin{aligned} k^{2r} &= 4^{2(1/2)} = 4 \text{ nodos en el diagrama.} \\ k^{2r+1} &= 4^{2(1/2)+1} = 16 \text{ ligas en el diagrama.} \end{aligned} \quad (20)$$

El diagrama de **de Bruijn** queda como sigue:

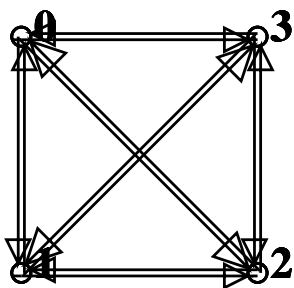


Figura 15: Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (4,h).

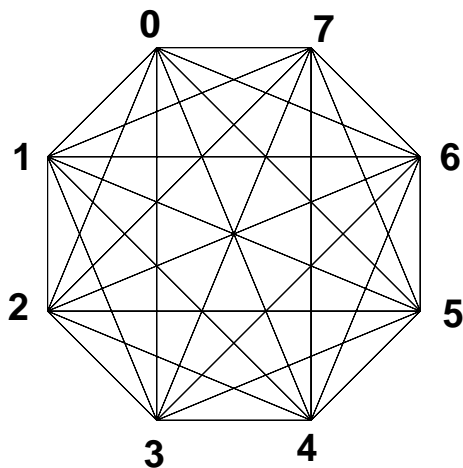


Figura 16: Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (8,h).

Podríamos seguir aumentando el número de estados y la complejidad del diagrama aumentaría por lo que sólo mencionaremos el *autómata* (8,h), que tiene 8 nodos y 64 ligas como se muestra en la siguiente figura:

Para cualquier *autómata*  $(k,1)$ , o sea que tiene una vecindad de radio uno, la fracción de vecindad para el diagrama será de dos células, ya que  $2r = 2(1) = 2$ .

Para el **autómata** (2,1) se tendrán:

$$2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (21)$$

y radio de vecindad igual a uno.

$$vecindades = \begin{cases} 11110000 \\ 11001100 \\ 10101010 \end{cases} \quad (22)$$

Igualmente no importa la regla de evolución, el diagrama tendrá:

$$\begin{aligned} k^{2r} &= 2^{2(1)} = 4 \text{ nodos en el diagrama.} \\ k^{2r+1} &= 2^{2(1)+1} = 8 \text{ ligas en el diagrama.} \end{aligned} \quad (23)$$

Entonces las fracciones de vecindad quedan determinadas por

$$\begin{aligned} \text{nodo } 0 &\rightarrow 00 \\ \text{nodo } 1 &\rightarrow 01 \\ \text{nodo } 2 &\rightarrow 10 \\ \text{nodo } 3 &\rightarrow 11 \end{aligned} \quad (24)$$

Para el **autómata (3,1)** se tendrán:

$$3 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \quad (25)$$

y radio de vecindad igual a uno.

$$vecindades = \begin{cases} 222222222111111111000000000 \\ 222111000222111000222111000 \\ 210210210210210210210210 \end{cases}. \quad (26)$$

$$\begin{aligned} k^{2r} &= 3^{2(1)} = 9 \text{ nodos en el diagrama.} \\ k^{2r+1} &= 3^{2(1)+1} = 27 \text{ ligas en el diagrama.} \end{aligned} \quad (27)$$

Entonces las fracciones de vecindad quedan determinadas por

$$\begin{aligned} \text{nodo } 0 &\rightarrow 00 \\ \text{nodo } 1 &\rightarrow 01 \\ \text{nodo } 2 &\rightarrow 02 \\ \text{nodo } 3 &\rightarrow 10 \\ \text{nodo } 4 &\rightarrow 11 \\ \text{nodo } 5 &\rightarrow 12 \\ \text{nodo } 6 &\rightarrow 20 \\ \text{nodo } 7 &\rightarrow 21 \\ \text{nodo } 8 &\rightarrow 22 \end{aligned} \quad (28)$$

El diagrama de **de Bruijn** queda como sigue:

### 2.3 Diagrama de de Bruijn para el autómata (4,h) regla F5A0F5A0

La regla de evolución está definida por:

$$\begin{array}{r} 3333222211110000 \\ \underline{3210321032103210} \\ 3311220033112200 \end{array} \quad (29)$$



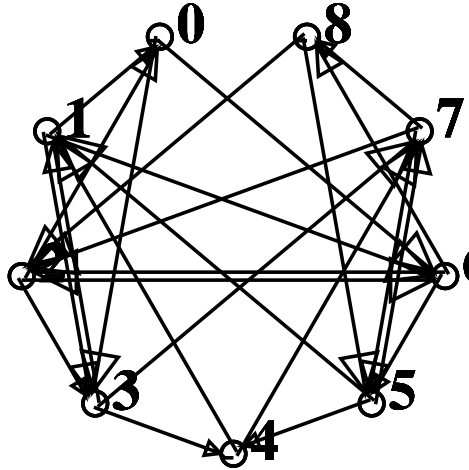


Figura 17: Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (3,1).

Para una configuración inicial, aleatoria, y sea  $t$  un momento en el tiempo, la evolución del autómata sería

$$\begin{array}{ll}
 032110012331 & t \\
 1230110032311 & t + 1 \\
 321011023211 & t + 2 \\
 3301011223013 & t + 3 \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot
 \end{array} \tag{30}$$

Tomando por parejas, la regla de evolución, se puede codificar a base hexade-cimal

$4^14^0$	$4^14^0$	$4^14^0$	$4^14^0$	$4^14^0$	$4^14^0$	$4^14^0$	$4^14^0$
33	11	22	00	33	11	22	00
$F$	5	$A$	0	$F$	5	$A$	0

(31)

El diagrama de *de Bruijn* queda como sigue:

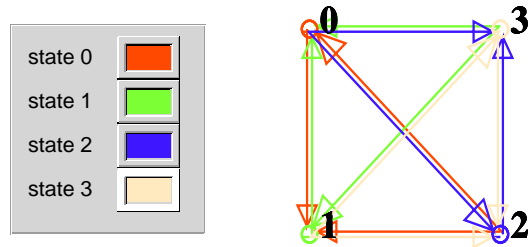


Figura 18: Diagrama de de Bruijn para el autómata (4,h) regla F5A0F5A0

La matriz de evolución en el *diagrama de de Bruijn* es

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Evolución en el estado 0.

$$A = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \quad (33)$$

Evolución en el estado 1.

$$B = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . \end{bmatrix} \quad (34)$$

Evolución en el estado 2.

$$C = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (35)$$

Evolución en el estado 3.

$$D = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

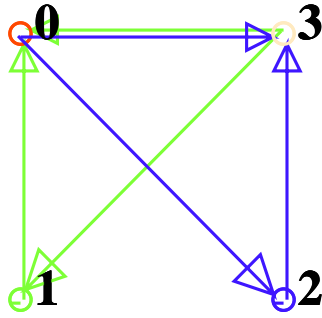


Figura 19: Evolución de la cadena de estados **0310** observada desde el diagrama de de Bruijn

Siendo los nodos configuraciones y las ligas las sucesiones, tomaremos la configuración inicial, compuesta por los nodos 0310 (en este orden) se tiene la siguiente sucesión.

$$\begin{array}{ll} 0310 & \rightarrow \text{ nodos} \\ 211 & \rightarrow \text{ ligas} \end{array} \quad (37)$$

Y tomando otro orden de los nodos tenemos que la configuración 022310 (nodos) evoluciona en 22211 (ligas).

$$\begin{array}{ll} 022310 & \rightarrow \text{ nodos} \\ 22211 & \rightarrow \text{ ligas} \end{array} \quad (38)$$

## 2.4 Diagrama de de Bruijn para el autómata (2,1) regla 51

La regla de evolución está definida por

$$\begin{array}{r} 00001111 \\ 00110011 \\ \hline 01010101 \\ \hline 11001100 \end{array} \quad (39)$$

La regla 51 de Wolfram se contruye de la siguiente manera,

$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	
1	1	0	0	1	1	0	0	
1	2	0	0	16	32	0	0	51

(40)

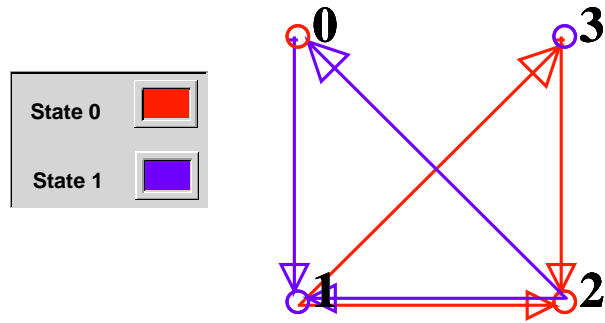


Figura 20: Diagrama de de Bruijn para el autómata (2,1) regla 51.

Para una configuración inicial, aleatoria, y sea  $t$  un momento en el tiempo, la evolución del autómata sería

$$\begin{array}{ll}
 011011000111010 & t \\
 100100111000101 & t + 1 \\
 011011000111011 & t + 2 \\
 100100111000101 & t + 3 \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot \\
 \dots & \cdot
 \end{array} \tag{41}$$

Nota: tiene periodicidad igual a uno.

El diagrama de *de Bruijn* queda como sigue

Tomando la configuración inicial 01101001, cuyos nodos son 1321201, evoluciona en 10010110.

$$\begin{array}{ll}
 01101001 & \rightarrow \text{ nodos} \\
 10010110 & \rightarrow \text{ ligas}
 \end{array} \tag{42}$$

Matriz de evolución

$$\begin{array}{l}
 0 \\
 1 \\
 2 \\
 3
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 0 & 0 \\
 1 & 1 & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Evolución en el estado 0.

$$A = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Evolución en el estado 1.

$$B = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (45)$$

## 2.5 Construcción de los Diagramas de Subconjuntos

El diagrama de Subconjuntos se desprende del diagrama de de Bruijn. Al etiquetar ligas, en el diagrama, da la apariencia de que existen funciones, por que asocia unos objetos con otros, sin embargo si dos ligas con la misma etiqueta surgen de un mismo vértice difícilmente pueden representar una función [6]. La inclusión del conjunto vacío asegura que cada punto tiene una imagen, permitiendo definir funciones. La información que se puede obtener de este diagrama son todas las configuraciones que puedan evolucionar en una configuración deseada (encontrar ancestros). Pero podemos encontrar configuraciones que no tengan ancestros por lo que dichas configuraciones son conocidas como Jardines del Edén. En el diagrama se pueden ver este tipo de configuraciones, porque si existe una ruta del conjunto universal al conjunto vacío es evidencia suficiente de que existe Jardín del Edén.

Si las clases unitarias carecen de ligas al conjunto vacío, ningún otro subconjunto tendrá tales ligas y no existirá el Jardín del Edén. Similarmente, todo el subconjunto no ligará con otros subconjuntos,

no permitiendo la existencia de un Jardín del Edén, si cada nodo tiene una liga entrante para cada tipo de célula [6].

Hay un cierto residuo de la conectividad del diagrama de de Brijn en el sentido que, dada cualquier fuente y cualquier destino, siempre habrá un subconjunto conteniendo el destino accesible desde cualquier subconjunto conteniendo la fuente, pero el destino puede tener nodos adicionales [4].

El diagrama de *Subconjuntos* puede no ser conectado; aún si esto sucede, es interesante conocer el subconjunto más grande accesible desde algún subconjunto dado, así como el más pequeño.



El número de nodos en el diagrama de *subconjuntos* está dado por  $2^{\hat{k}\hat{r}}$ .

## 2.6 Construcción del Diagrama de Subconjuntos autómata (2,1), regla 51

$2^{\hat{k}\hat{r}} = 2^4 = 16$  nodos para el diagrama de *Subconjuntos*

Los nodos en el diagrama de subconjuntos van a ser tomados de la siguiente manera:

<i>Subconjuntos</i>	<i>Binario</i> 3210	<i>decimal</i>	<i>clases</i>
$\emptyset$	0000	0	
0	0001	1	<i>unitaria</i>
1	0010	2	<i>unitaria</i>
2	0100	4	<i>unitaria</i>
3	1000	8	<i>unitaria</i>
01	0011	3	<i>binaria</i>
02	0101	5	<i>binaria</i>
03	1001	9	<i>binaria</i>
12	0110	6	<i>binaria</i>
13	1010	10	<i>binaria</i>
23	1100	12	<i>binaria</i>
012	0111	7	<i>terciaria</i>
013	1011	11	<i>terciaria</i>
123	1110	14	<i>terciaria</i>
023	1101	13	<i>terciaria</i>
0123	1111	15	<i>cuaternaria</i>

(46)

Entonces el diagrama de subconjuntos queda como sigue:

## 2.7 Construcción de los Diagramas de Parejas

El diagrama *de parejas* (producto cartesiano) entre sus aplicaciones existen rutas entre dos diferentes diagramas o de dos rutas en el mismo diagrama. No siempre es necesario hacer la distinción de entre los

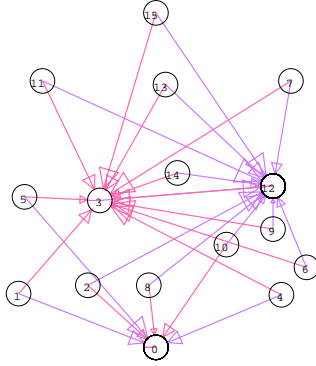


Figura 21: Diagrama de Subconjuntos para el autómata (2,1) regla 51.

miembros de una pareja; las flechas en la gráfica requieren que las ligas sean definidas como nodos de parejas ordenadas, pero no necesariamente se requiere que la pareja de ligas sean tomadas en algún orden en particular [5].

En un diagrama de subconjuntos se puede observar si una configuración tiene ancestros múltiples, pero es más fácil de interpretar en el diagrama de parejas, ya que si hay ciclos fuera de la diagonal principal es evidencia de que existen múltiples ancestros [6].

Los nodos de un diagrama de parejas son pares de nodos en el diagrama de de Bruijn, las parejas están unidas, por ligas etiquetadas siempre que ambos miembros de el par esten unidos por ligas de la misma etiqueta. Rutas en el diagrama de parejas corresponden a pares de rutas en el diagrama de de Bruijn. El diagrama de parejas tiene  $k^2r$  nodos.

Existe simetría en el diagrama de parejas.

## 2.8 Construcción del diagrama de parejas para el autómata (4,h) regla F5A0F5A0

Existen  $k^2r = 4^2 = 16$  nodos en el diagrama.

El diagrama de *parejas* queda como sigue

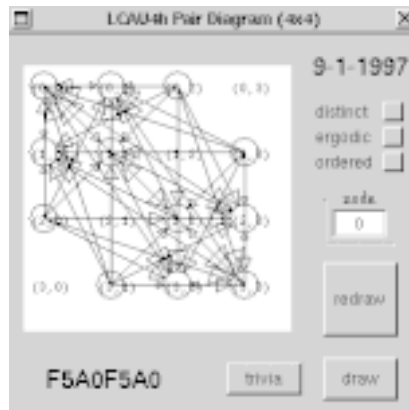


Figura 22: Diagrama de parejas del autómata (4,h) regla F5A0F5A0.

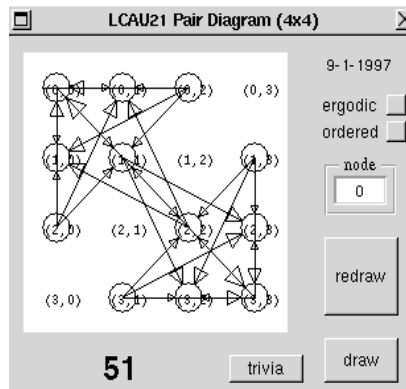


Figura 23: Diagrama de parejas del autómata (2,1) regla 51.

## 2.9 Construcción de el Diagrama de Parejas para el automata (2,1) regla 51

Existen  $k\hat{4}r = 2\hat{4} = 16$  nodos en el diagrama.  
 El diagrama de *parejas* queda como sigue

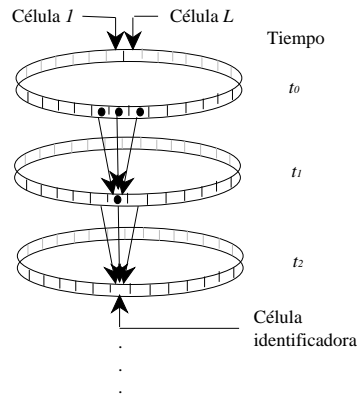


Figura 24: Anillos con condiciones de límite periódico, arreglo de longitud  $L$  y vecindades de tamaño 3, iterando hasta un tiempo  $t_i$ , ( $k=2, r=1$ ).

### 3 Campos de Atracción

*Topología.* Las estructuras de células y organismos vivos son organizados ampliamente en un camino que puede ser descrito como topología, caracterizado para especificar sus posiciones como patrones de conectividad y a su vez puede obtenerse su representación matricial. La aplicación más importante de la matriz topológica consiste en su capacidad para describir caminos entre nodos conteniendo múltiples ligas de acuerdo a su evolución, por lo tanto los elementos de tales matrices son enteros y son útiles para contar el número total de caminos, pero no clasifican los caminos en diferentes categorías. Los elementos de la diagonal de la matriz cuentan los ciclos; la traza produce el número total de ciclos y cuenta cada uno de ellos una vez por cada nodo que ellos contienen.

El arreglo es ordenado como un círculo (anillo) donde la célula inicial concatena con la célula final, tal arreglo circular tiene condiciones de límite periódico y de esta forma establecemos la simetría dentro del autómata. La evolución del autómata puede ser representada como una secuencia de estados globales, es decir, iteramos el estado global inicial hasta un tiempo  $t$  determinado y cuantificamos cada uno de los anillos hasta formar un conjunto de estos en un diagrama de evoluciones (llamados también patrones de *espacio-tiempo*).

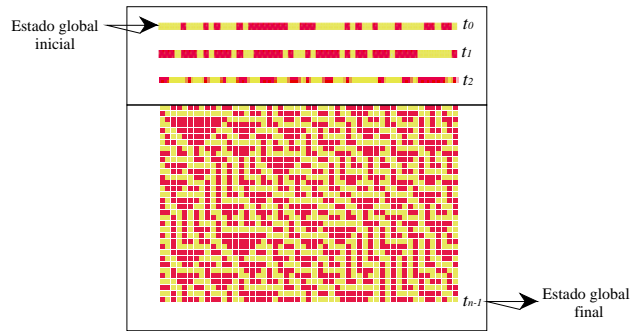


Figura 25: Diagrama de estado-tiempo, mostrando el comportamiento (patrón) de los estados globales (anillos) de la regla 30.

Los patrones de espacio-tiempo representan las trayectorias del autómata de cualquier estado global inicial dado. Dadas estas sencillas propiedades para cualquier autómata podremos ver como diferentes reglas producen patrones de espacio-tiempo característicos para una regla dada, los patrones de diferentes estados globales iniciales aleatorios son claramente reconocidos a primera vista. Los patrones de espacio-tiempo en términos muy amplios son construidos para mostrar el comportamiento ya sea estático, periódico, complejo o caótico, es decir, las cuatro clases de Wolfram [11]. La clasificación de reglas para un autómata celular parecen estar hechas de acuerdo a su fenomenología de tales patrones en el diagrama de espacio-tiempo.

El *espacio-estado* es el conjunto de todos los posibles estados globales en un tiempo dado, consecuentemente en un autómata celular finito el espacio-estado es finito; de esta manera alguna trayectoria debe encontrar eventualmente un estado global repetido que ocurra en un tiempo dado y como el sistema es determinístico la trayectoria debe llegar a ser localizada en una secuencia de estados repetitivos, de esta forma se llega a formar un ciclo atractor con un período específico mayor o igual a uno.

Los estados son parte del atractor o corresponden a una transición, por lo tanto una secuencia de estados corresponden al atractor. Si las transiciones existen deben existir estados en los extremos llama-

dos *Jardín del Edén*, esto es, una evolución-inalcanzable para cualquier otro estado. El conjunto de todas las posibles transiciones corresponden al atractor más el atractor mismo, esto es el *basin* de atracción. Estos basins de atracción constituyen el flujo dinámico sobre el espacio-estado dados por la función de transición del autómata.

El basin [12] de un campo de atracción de un autómata finito es el conjunto de los basins de atracción donde todos los posibles estados y trayectorias deben ser organizados por la función de transición del autómata. La topología o estructura de un sólo basin de atracción puede ser descrito por un diagrama, la gráfica de estados transición. Esto es el conjunto de gráficas construyendo el campo específico para un comportamiento global del sistema. Algunos otros nombres serían usados: fragmentos de estado-transición, contracción de mapas, comportamiento topológico, red de trabajo de atracción y componentes.

Una gráfica de estado-transición liga todos los estados con un sólo basin de atracción, de acuerdo a su evolución específica; de esta manera debemos tener una topología de árboles con raíces como ciclos de atracción. Los estados globales son representados por nodos que son ligados por arcos dirigidos, cada nodo debe tener cero o más arcos de entrada desde nodos previos en un tiempo-paso, o sea, obtener su pre-imagen; dado que el sistema es determinístico debe existir un arco de salida a un sólo nodo (el estado sucesor) en el siguiente tiempo-paso, los nodos que no contienen arcos de entrada representan los estados conocidos como Jardín del Edén. El número de arcos de entrada son referenciados como el grado de pre-imagenes sobre un nodo sucesor.

Para un conjunto de parámetros dados, el espacio-estado debe en esencia cristalizarse dentro de un conjunto de uno o más basins de atracción, el basin del campo de atracción es el conjunto de gráficas de estado-transición representando todos los basins dentro del espacio-estado. Generalmente la mayoría de los nodos en los basins o un sólo basin de atracción se localizan sobre los árboles de transiciones, fuera del ciclo atractor; un árbol de transiciones es el conjunto de todos los caminos desde los nodos Jardín del Edén hacia un nodo sobre el ciclo atractor (un nodo atractor); una rama del árbol de transiciones es llamada rama transición y es el conjunto de todos los caminos desde los

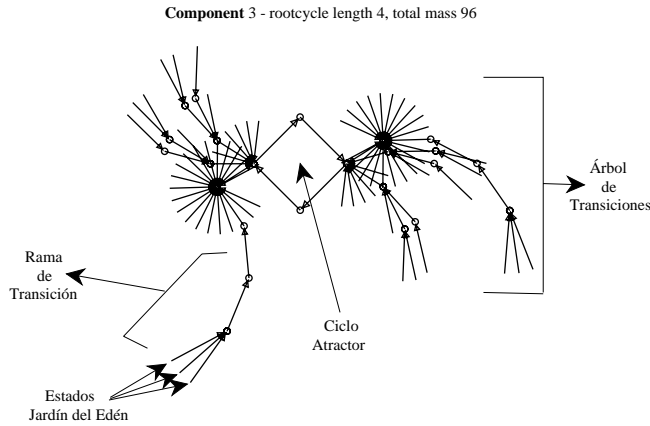


Figura 26: Gráfica de estado transición, regla 18,  $L = 10$ , basins = 5, ciclo con período = 4, altura máxima = 5 y altura mínima = 0.

nodos Jardín del Edén, que corresponden a un estado sobre el árbol de transiciones. Una transición es un camino particular de algún nodo arbitrario dentro del árbol que corresponde a cualquier otro nodo, en todos los casos el nodo atractor por sí mismo es excluido de estas definiciones.

Para determinar la topología de un sólo basin de atracción conteniendo un estado global en particular, el ciclo atractor es aislado y entonces se obtiene la topología de cada árbol que es especificado. Para aislar el ciclo atractor el autómata es iterado hacia adelante en el tiempo, desde un estado global inicial seleccionado (la semilla), hasta encontrar estados repetidos en un período dado. El número de pasos para alcanzar la longitud encontrada es igual a las transiciones más el período del ciclo.

El período del atractor está generalmente entre 1 y algún múltiplo de  $L$ , o sea la longitud del arreglo; pero en algunos casos puede diverger exponencialmente con  $L$  para reglas con pre-imagenes limitadas. El período del atractor no puede exceder de

$$2^L - M \tag{47}$$

donde  $M$  es igual al número de estados dentro del espacio-estado logrados sobre los segmentos repetidos del anillo. Si un atractor es conocido

es representado como un círculo de nodos evolucionando en sentido de las agujas del reloj. Para construir estos árboles de transiciones es necesario tener un método que contenga el conjunto de pre-imagenes de algún nodo, en otras palabras, para evolucionar hacia atrás en el tiempo y de esta forma determinar todas las transiciones existentes.

La construcción de árboles y ramas de transición es simplificada a tomar ventaja del cambio invariante, esto es, existen estados globales que se diferencian sólo por una rotación dentro de los anillos; tal rotación equivalente debe tener pre-imagenes equivalentes girando a una misma posición y esto debe ocupar posiciones equivalentes dentro del mismo basin o algún otro basin equivalente. Si las pre-imagenes de sus rotaciones equivalentes son conocidas y su extensión es el árbol de transiciones total (o ramas de transición), no necesita ser recalculado. Si la rotación de los estados equivalentes corresponden a basins separados, los basins deben ser equivalentes como se ilustra a continuación:

Ahora bien, analizemos el caso en el cual el autómata a analizar sea *reversible*, un autómata es reversible cuando sus configuraciones tienen uno y sólo un ancestro en el tiempo  $t-i$ , donde la función de transición original tiene su regla inversa que describe su comportamiento evolucionando hacia atrás en el tiempo y este comportamiento es totalmente descifrado por la regla inversa. Dentro de los campos de atracción es fácil determinar cuando un autómata es reversible, pues dentro de un basin o componente no existirán arboles, ni ramas y por consecuencia la inexistencia absoluta de configuraciones Jardín del Edén. De esta manera obtendremos únicamente ciclos de atracción donde la masa total del árbol va a ser igual en todo momento a la longitud del ciclo. La masa de un árbol indica el número total de estados globales que pertenecen al componente en estudio.



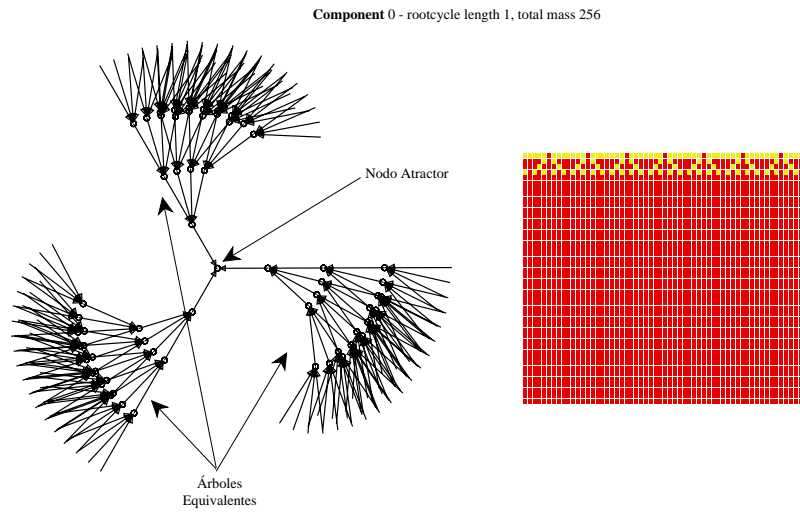


Figura 27: Un basin regla 90,  $L = 10$ , ilustrando árboles equivalentes así como ramas equivalentes y todo el basin a su vez puede formar parte de un conjunto de basins o componentes equivalentes (este no es el caso). Esto nos lleva a obtener una simetría dentro del basin que mostrado en el diagrama de espacio-tiempo nos indicaría los diferentes corrimientos de los estados globales, empezando desde un nodo arbitrario. En este caso el patrón constante que vemos en el diagrama de espacio-tiempo nos indica que llegó a un ciclo atractor de longitud uno.

### Regla FF55AA00

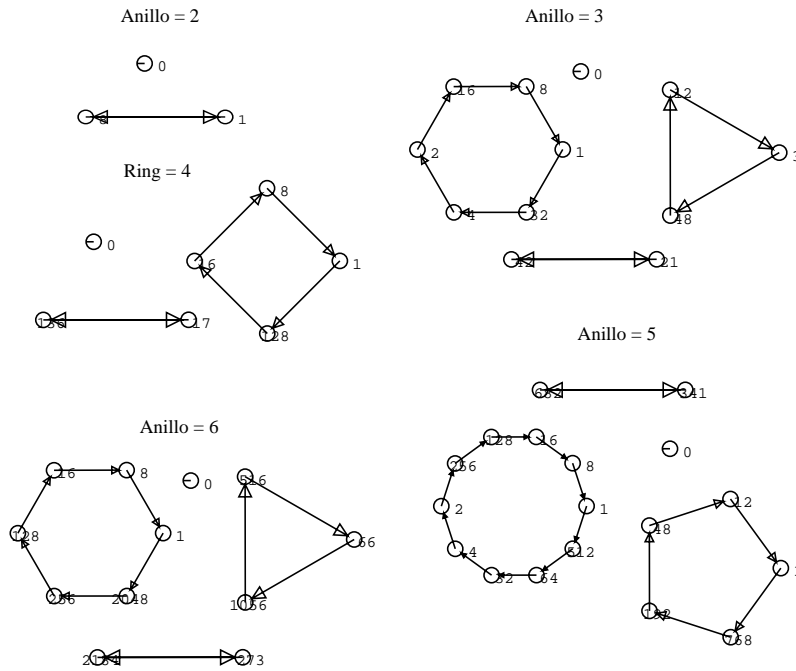


Figura 28: Autómata celular (4,h), regla FF55AA00 reversible, aquí se muestra de manera muy clara que dado cualquier anillo de longitud  $L$  mayor o igual a 2 siempre obtendremos ciclos tractores mayores igual que 1. Desde un punto de vista general, se observa que se puede descifrar el comportamiento del autómata hacia atrás en el tiempo a través de los componentes, esto es, uno puede seleccionar un estado global inicial aleatorio y encontrar su pre-imagen en un tiempo-paso e iterar hacia atrás hasta un tiempo  $t-i$  y de esta manera descifrar el comportamiento del autómata totalmente. Los números de los nodos en el componente indican la notación equivalente en decimal de la suma de todas las células que forman cada uno de los estados globales o anillos.

Se puede proponer en estos momentos el estudio de los componentes como una poderosa herramienta más para describir el comportamiento de los autómatas en forma global, además de inducir un cierto grado de reversibilidad dentro de los autómatas sobreyectivos, es decir, que a través de una cuantificación, se pueden decifrar configuraciones hacia atrás en el tiempo desde un estado global dado. Esto es, evitando los múltiples ancestros; dentro de los componentes se puede apreciar como el número de pre-imágenes en un estado global, quiere decir que para un nodo dado debemos tener a los más una sola pre-imagen. Los componentes también pueden decifrar en un momento dado la complejidad del autómata, mostrada en los campos de atracción.

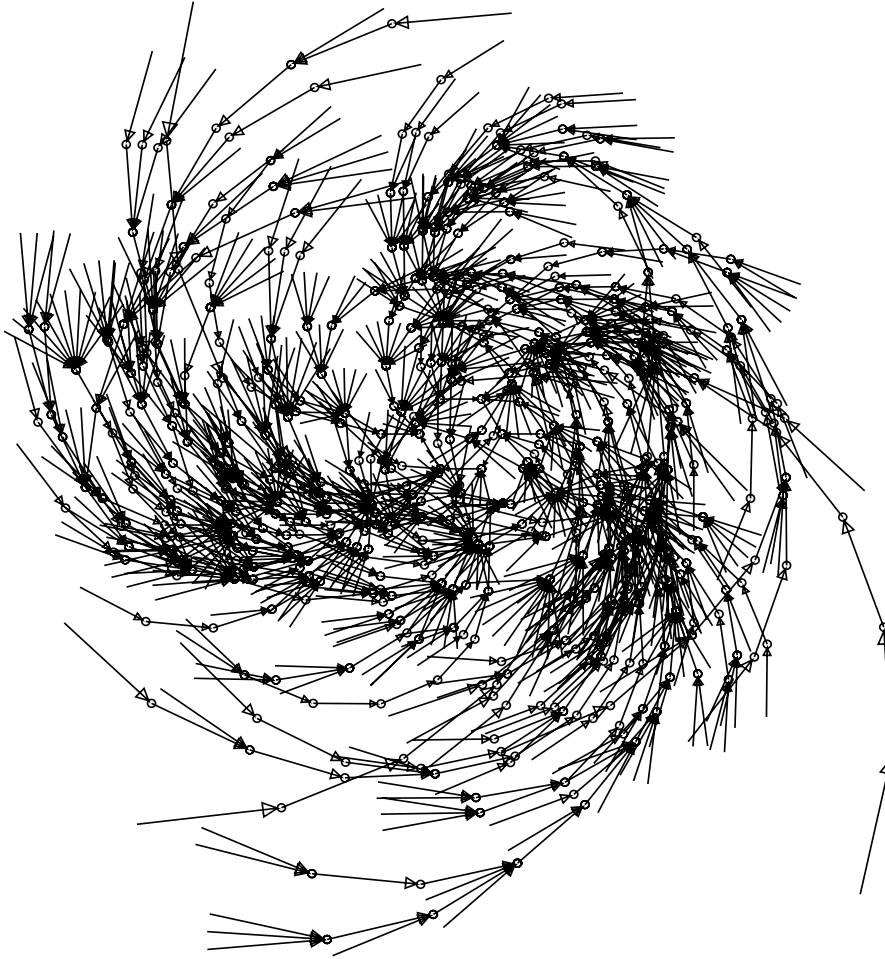


Figura 29: En este autómata (4,h) regla FA9098C2, ciclo atractor = 6; podemos observar la inestabilidad de los estados globales a través de todas las transiciones existentes y es laborioso descifrar tales comportamientos.

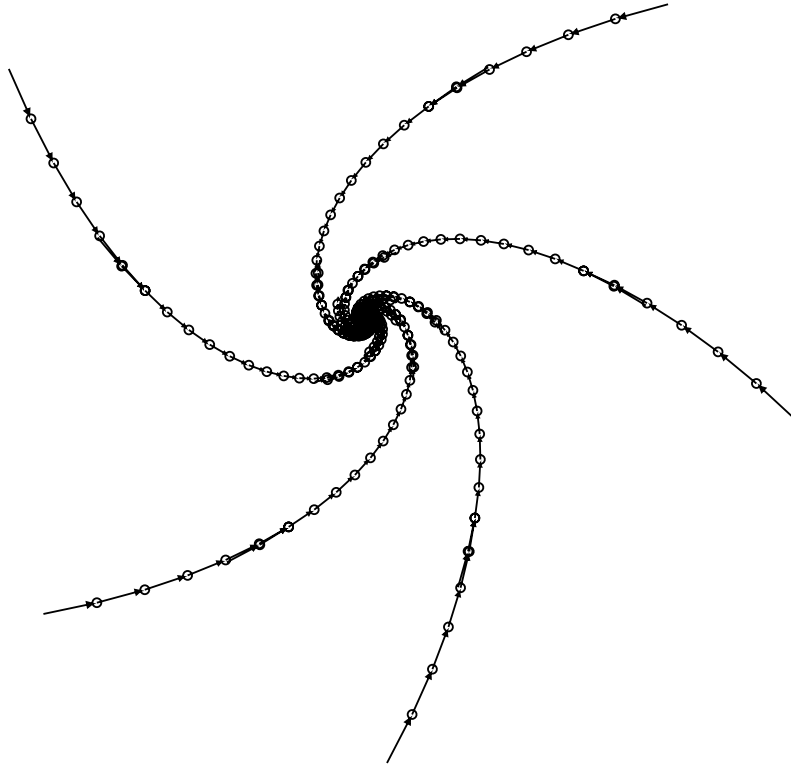


Figura 30: Autómata (2,1), regla 30,  $L = 10$ , altura máxima = 46.

Podemos concluir que para un autómata arbitrario, los componentes con anillos pequeños muestran un comportamiento no tan trivial para autómatas no-reversibles, pero si incrementamos el tamaño de los anillos, el comportamiento del componente muestra un cierto patrón no tan evidente en configuraciones globales pequeñas y podremos de esta forma tratar de describir el patrón del autómata. Esto es, para un autómata (2,1) sobreyectivo, tal como la regla 30; encontramos que para sus estados globales cada vez más grandes en un tiempo  $t$  también lo suficientemente grande; un basin con árboles de altura considerable, consecuentemente para poder obtener el ciclo atractor será cada vez más difícil de calcular. Sin embargo, con esto podremos darnos cuenta que para una configuración global dada (en este caso de la regla 30), siempre obtendremos la misma configuración cada vez que incrementemos el tamaño de los anillos sobre todo el basin, es decir en todos los árboles.

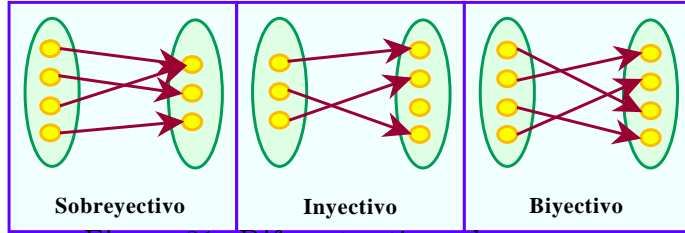


Figura 31: Diferentes tipos de mapeos.

## 4 Reversibilidad en Autómatas Celulares en una Dimensión

### 4.1 Autómatas Celulares y Reversibilidad.

Un sistema se dice *reversible* si en cada etapa del mismo uno puede conocer y ser capaz de regresar a la etapa anterior, este concepto tiene aplicaciones inmediatas dentro de la computación ya sea en la creación de sistemas encriptadores de datos o en la codificación de información para su almacenado en dispositivos físicos.

Un ACL se dice **reversible** si para cada configuración global existe un único ancestro capaz de generarla; en realidad podemos decir que por si misma la regla de evolución nunca define un mapeo local reversible pues siempre existe un desequilibrio entre el número total de vecindades posibles y el número de estados del ACL, es decir, en la regla de evolución de un  $ACL(k,r)$  existen  $k(2r + 1)$  vecindades diferentes que generan  $k$  estados, sin embargo este mapeo puede ser tal que induzca un mapeo global el cual si pueda ser reversible.

El punto interesante al hablar de ACL reversibles es que la regla de evolución del mismo, que es de influencia local, genera un comportamiento global del sistema el cual tiene la cualidad de preservar la información del mismo sin disiparla, por lo que un estado global en el tiempo  $t$  sólo tiene un único estado global ancestro en el tiempo  $t-1$  y a su vez es el único que pueda evolucionar en el estado global del tiempo  $t+1$ , sin importar el tamaño que tenga el anillo de células del estado global.

Dado que estamos hablando de mapeos, podemos decir que un ACL reversible define un mapeo global que es sobreyectivo dado que cada estado global tiene al menos un ancestro y a la vez es inyectivo pues cada estado global tiene a lo más un ancestro; es decir se define un mapeo global biyectivo entre estados globales.

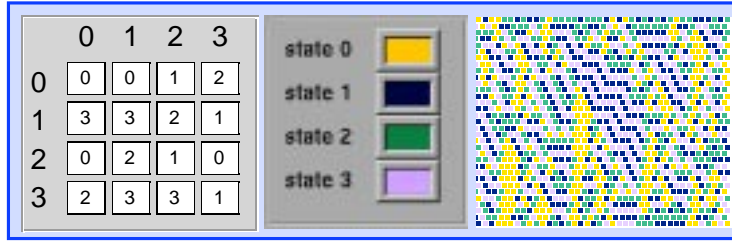


Figura 32: ACL(4,h) regla **7E186F90**.

## 4.2 Multiplicidad Uniforme e Indices de Welch

Los trabajos de [2] y [7] definen que un ACL es sobreyectivo si cada posible cadena de estados tiene un número de ancestros igual a  $k^{\hat{2}r}$  (Teorema de Multiplicidad Uniforme).

Tomemos el siguiente ACL(4,h) regla **7E186F90**.

Como se puede observar en la matriz de evolución cada estado aparece el mismo número de veces que el resto, siendo este número igual a  $k^{\hat{2}r}$  o al número de nodos en el diagrama de de Bruijn; formemos ahora los ancestros de las cadenas **0**, **01**, **013** y **0132**.

La figura ilustra que estas cadenas tienen el mismo número de ancestros cada una, lo que continua sucediendo no importa cuanto crezca la cadena en longitud (Teorema 5.2 en [2]); si ésto sucede para toda cadena posible de estados, entonces se define un mapeo global sobreyectivo, es decir, el autómata carece de Jardín del Edén.

Para saber que el número de ancestros es igual a  $k^{\hat{2}r}$  o al número de nodos en el diagrama de de Bruijn, tomemos del ejemplo anterior los ancestros de la cadena **01**, utilizemos éstos para formar nuevas cadenas que evolucionan en una secuencia constituida por los estados **01X01** en donde **X** es el conjunto de secuencias de estados de tamaño **2r**.

Si el número de ancestros es **a**, entonces la nueva cadena **01X01** tendrá  $a^{\hat{2}}$  de posibles antecesores; ahora bien, como se mostró anteriormente toda secuencia en un mapeo sobreyectivo tiene **a** posibles ancestros lo que también ocurre para cada posible secuencia

$$x_i \in X \tag{48}$$

y debido a que existen  $k^{\hat{2}r}$  diferentes tipos de esta secuencia, tenemos que del mismo modo el número de posibles ancestros de la secuencia **01X01** está dado por  $ak^{\hat{2}r}$ .

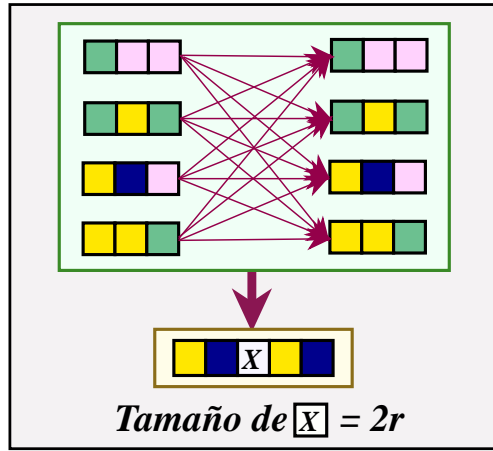


Figura 33: Ancestros de la cadenas 01X01.

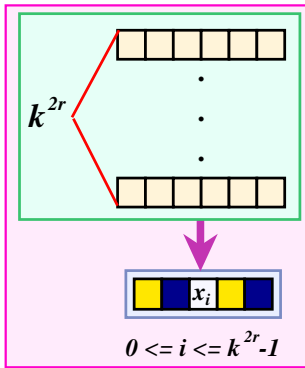


Figura 34: Los ancestros de cada posible cadena de estados es igual a  $k^{2r}$ .

Al final obtenemos que  $\mathbf{a}\hat{\mathbf{2}} = \mathbf{a}\mathbf{k}(\hat{\mathbf{2r}})$  ó que  $\mathbf{a} = \mathbf{k}(\hat{\mathbf{2r}})$ , es decir, que el número de ancestros de cada posible cadena de estados es igual a  $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{2r}})$  ó al número de nodos en el diagrama de de Bruijn (Teorema 5.3 en [2]).

Ahora definamos 3 índices multiplicativos para describir como se conforma esta multiplicidad, estos son  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{L}$  (sección 14 en [2]); ejemplifiquemos ésto con un autómata (4,h) regla B46363B4.

El índice  $\mathbf{R}$  enumera el máximo de extensiones que se le pueden hacer a una cadena a la derecha las cuales evolucionen en la misma secuencia.



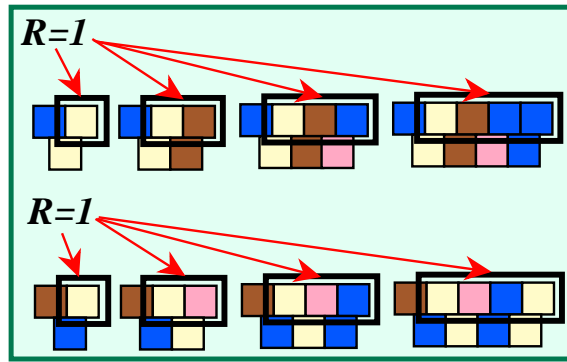


Figura 35: Ejemplo del índice  $R$  en el autómata  $(4,h)$  regla B46363B4.

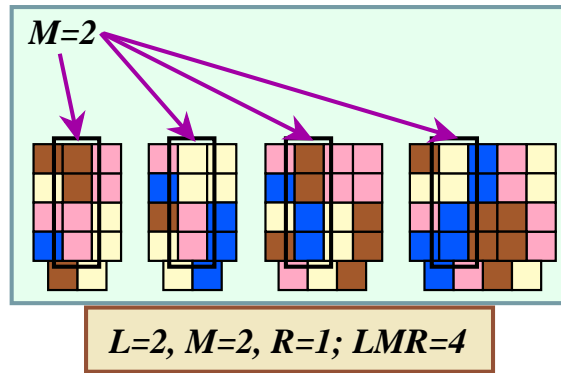


Figura 36: Ejemplo del índice  $M$  en el autómata  $(4,h)$  regla B46363B4.

El índice  $L$  cuantifica el máximo de extensiones hacia la izquierda que puede tener una secuencia y tengan la misma evolución.

Por último  $M$  señala cual es el mínimo de secuencias a las que se les puede hacer dichas extensiones por ambos lados para evolucionar en una misma cadena.

Si estos valores cumplen que el resultado de su producto es igual a  $k(\hat{2r})$ , se define entonces un mapeo global sobreyectivo inducido por la regla de evolución; una forma en que se puede conocer cuales son los valores de  $L$  y  $R$  es haciendo uso de las matrices de conectividad de cada estado que se obtienen del diagrama de de Bruijn, en donde la suma de valores de cada renglón muestra el número de extensiones compatibles empezando desde la célula representada por el renglón  $i$  con

$$0 \leq i \leq k \quad (49)$$

y la suma de valores de cada columna enumera las extensiones com-

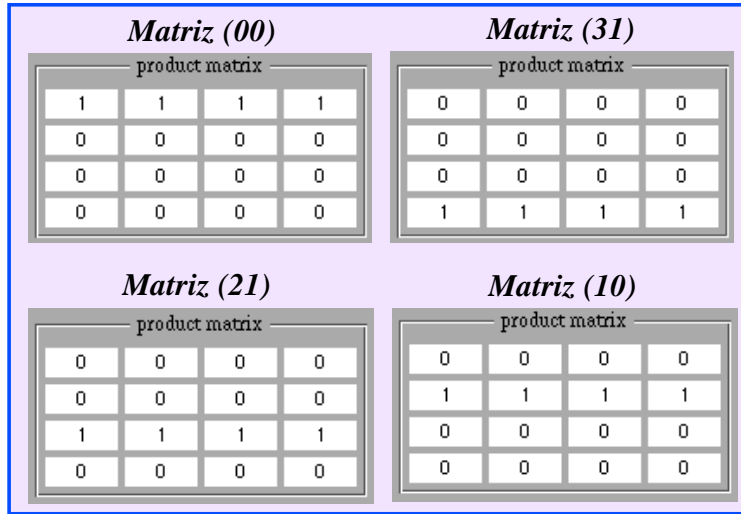


Figura 37: Multiplicación de las matrices de conectividad del autómata (4,h) regla BF6A15C0.

patibles por la izquierda terminando en la célula representada por la columna  $\mathbf{j}$  con

$$0 \leq j \leq k. \quad (50)$$

Sin embargo, las matrices de conectividad solo nos muestran por sí solas cuales son los diferentes ancestros para las cadenas de longitud  $\mathbf{1}$ , dado que los valores de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$  se pueden presentar en cadenas de mayor longitud, debemos buscar un proceso el cual nos permita leer estos índices para dichas secuencias, ésto se logra haciendo la multiplicación de las matrices de conectividad consigo mismas para así obtener los posibles ancestros para cadenas de longitud mayor que  $\mathbf{1}$ ; utilizemos para ejemplificar ésto un ACL(4,h) regla BF6A15C0.

Podemos observar que por sí solas las matrices de conectividad definen valores de  $\mathbf{R}=\mathbf{3}$  y  $\mathbf{L}=\mathbf{1}$  teniendo que  $\mathbf{R}*\mathbf{L}=\mathbf{3}$  que no es igual a  $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{2r}})$  o a algún submúltiplo del mismo con el cual se pueda deducir un valor de  $\mathbf{M}$  tal que  $\mathbf{LMR} = \mathbf{k}(\hat{\mathbf{2r}})$ ; sin embargo, haciendo algunas de las posibles multiplicaciones de matrices obtenemos otras nuevas matrices de conectividad para secuencias de estados mayores que  $\mathbf{1}$  como las siguientes:

Aquí las matrices definen el valor de  $\mathbf{R}=4$  y el de  $\mathbf{L}=1$ ; ya que estas matrices conservan sus cuatro elementos en multiplicaciones sucesivas, tenemos que la multiplicidad de este autómata es  $\mathbf{4}$  por lo que estas matrices definen el valor de  $\mathbf{M}=1$  para estas cadenas; sin embargo, en este caso encontramos matrices las cuales nunca alcanzan esta forma, por ejemplo:

Si se continua haciendo la multiplicación de las matrices de conectividad de los estados  $\mathbf{2}$  y  $\mathbf{3}$  alternando, encontraremos que jamás obtendremos un valor de  $\mathbf{R}=4$ , sin embargo, debemos recordar que los índices  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{L}$  son máximos y  $\mathbf{M}$  es un mínimo, por lo que no es necesario que todas las matrices de conectividad o sus multiplicaciones cumplan con estos valores, con que se presenten una vez cumpliendo que  $\mathbf{RML} = \mathbf{k}(\mathbf{2r})$  y sean máximos y mínimo respectivamente, entonces se define un mapeo global sobreyectivo.

En realidad el uso de los índices  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{M}$  para detectar los posibles autómatas sobreyectivos no es necesario, simplemente se puede observar las matrices de conectividad y las multiplicaciones sucesivas de las mismas, si llegado un momento estas matrices siguen conservando su suma de elementos igual a  $\mathbf{k}(\mathbf{2r})$  entonces podemos decir que la multiplicidad uniforme se conserva y el mapeo global es sobreyectivo (es decir, carece de Jardín del Edén); si tal mapeo en realidad no es sobreyectivo, rápidamente genera cadenas con más ancestros que  $\mathbf{k}(\mathbf{2r})$  y otras con menos que este valor, lo que se refleja en la suma de elementos de las matrices de conectividad de dichas cadenas.

No obstante, el uso de los índices es útil para detectar autómatas reversibles, el proceso se basa en encontrar los valores de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$ ; si estos valores al multiplicarse producen un resultado igual a  $\mathbf{k}(\mathbf{2r})$  para la matriz de conectividad de toda cadena de una longitud dada, se infiere que  $\mathbf{M}=1$  concluyendo que sólo existe una célula para la cual es posible hacer las extensiones  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$  que evolucionen en una misma secuencia y por lo tanto el autómata sea reversible (Sección  $\mathbf{5}$  en [7]).

Tomemos como ejemplo un autómata(4,h) regla FFA91640 y la matriz de conectividad para la secuencia  $\mathbf{01}$ .

En la ilustración se observa que los ancestros de esta cadena conforman índices  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{4}$  para  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$  respectivamente, aunque el valor de  $\mathbf{M}$  es  $\mathbf{3}$  para esta secuencia en particular; suponiendo que este valor de  $\mathbf{M}$  fuera el mínimo encontrado significaría que  $\mathbf{LMR}$  no es igual a  $\mathbf{k}(\mathbf{2r})$ ; pero si extendemos la revisión de  $\mathbf{M}$  para secuencias de

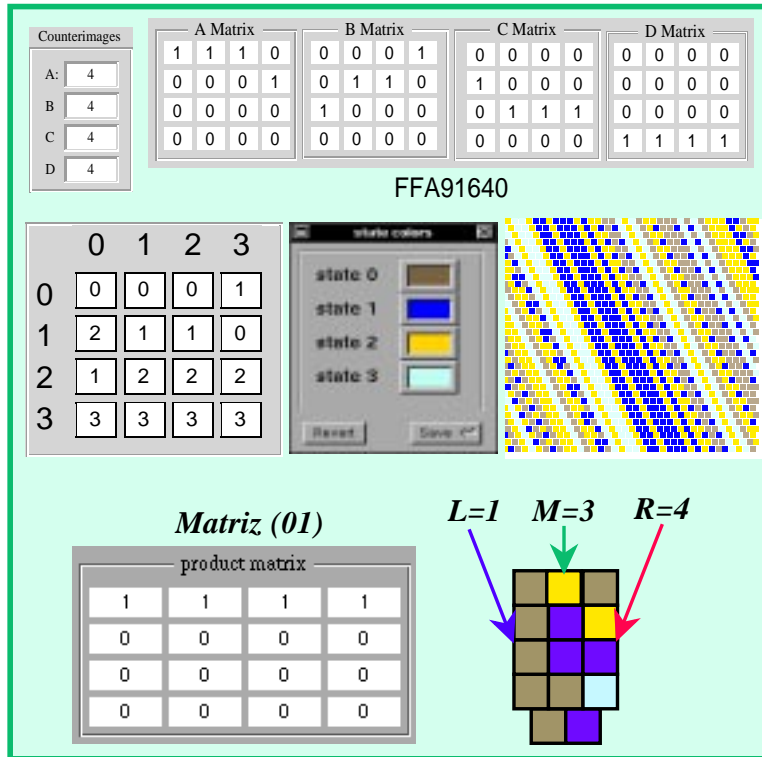


Figura 38: Autómata(4.h) regla FFA91640.

mayor longitud observamos lo siguiente:

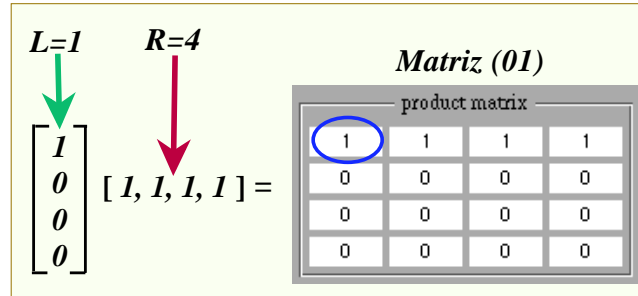


Figura 39: Matriz de conectividad como producto de un producto cartesiano.

Para que las matrices de conectividad alcancen la forma establecida en donde los valores de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$  establezcan un mapeo global sobreyectivo, necesitan que sus productos cumplan ser el producto cartesiano de dos vectores, tales vectores definen los índices de Welch; por otro lado requieren también que en su diagonal principal aparezca solo un  $\mathbf{1}$ , ya que éste define un único ciclo permitido para formar tal secuencia.

### 4.3 Índices de Welch y diagramas de Subconjuntos y Parejas

Podemos utilizar las herramientas gráficas que describen el comportamiento de un autómata para conocer los valores de estos índices; por medio del diagrama de subconjuntos podemos conocer los valores de  $\mathbf{R}$  observando hasta que nivel llegan las rutas empezando desde las clases unitarias sin salir del mismo y sin que existan ciclos intermedios que impidan a las rutas llegar a este nivel.

Para conocer el índice  $\mathbf{L}$  uno puede reflejar la regla de evolución original, es decir, trasponer el orden en que están formadas las vecindades conservando su evolución; de esta manera la nueva regla de evolución tendrá las extensiones compatibles por la izquierda de la regla original como extensiones por la derecha y de este modo el valor de  $\mathbf{L}$  puede obtenerse directamente del diagrama de subconjuntos como se obtuvo  $\mathbf{R}$  en la regla original, cumpliendo también que cada ruta empezando desde las clases unitarias lleguen a un nivel y no salgan del mismo, sin que existan ciclos intermedios que impidan alcanzar este nivel.

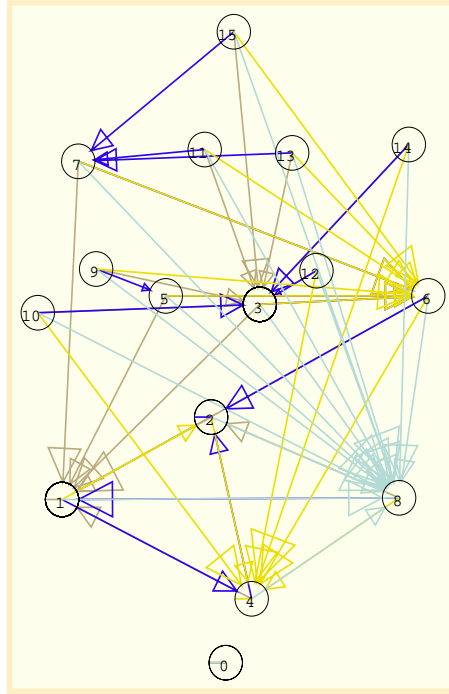


Figura 40: Valor del índice L observado en el diagrama de subconjuntos de la regla reflejada.

Dada la naturaleza del diagrama de parejas que permite identificar secuencias originadas por varios ancestros distintos, resulta una herramienta directa para detectar cuando un autómata es reversible; si no existen ciclos más que en la diagonal principal del diagrama (que es el diagrama de de Bruijn original) entonces el mapeo global inducido por la regla de evolución es reversible.

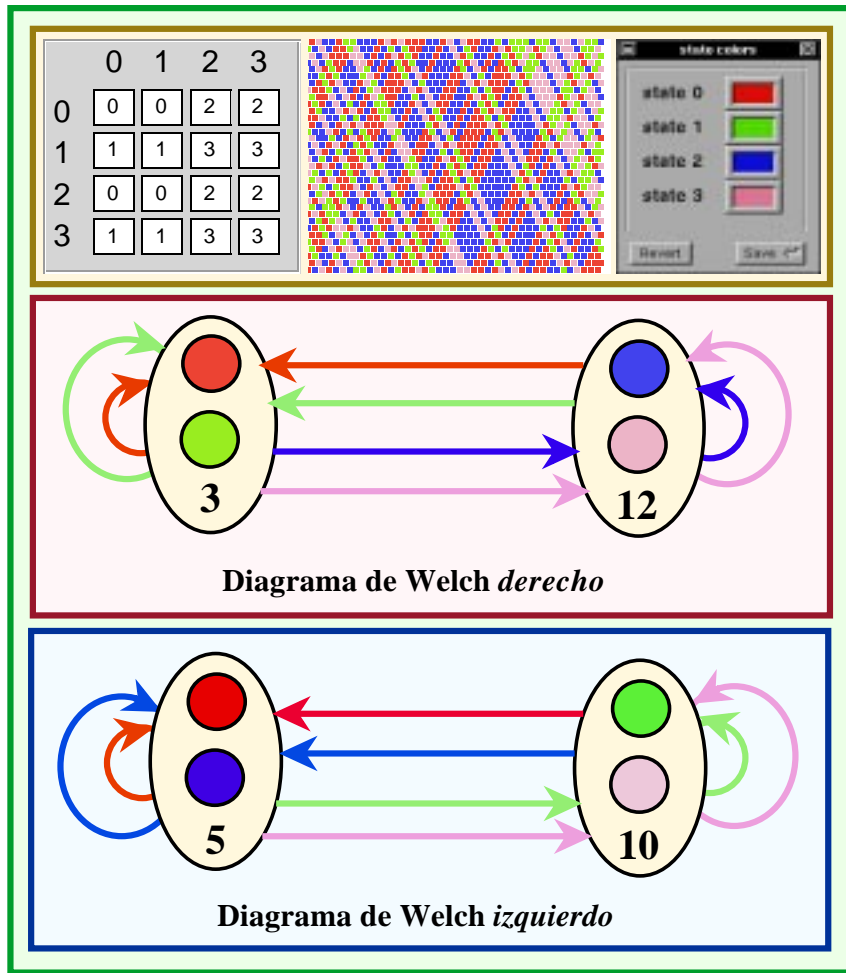


Figura 41: Diagramas de Welch del autómata  $(4,h)$  regla F5A0F5A0.

Podemos tomar los nodos del nivel máximo a donde llegan las rutas que empiezan desde las clases unitarias para ambos índices  $L$  y  $R$ ; los nuevos diagramas que conforman estos nodos con rutas autocontenidas se denominarán *Diagramas de Welch* izquierdo o derecho respectivamente, tomemos un autómata  $(4,h)$  regla F5A0F5A0 y tomemos sus diagramas de Welch.

En el trabajo de [7] encontramos que un mapeo global sobreyectivo define un diagrama de de Bruijn en donde cada estado forma árboles con raíz en los ciclos, sin impedir que existan ligas sueltas, pero en el diagrama de Welch cada ruta forma un árbol con raíz en un ciclo podemos utilizar estos diagramas para obtener la regla inversa a la original; en primera la ruta con el número mayor de niveles define el tamaño de



vecindad mínimo de la regla inversa, una vez que sabemos el largo de la vecindad a buscar, busquemos en el diagrama de Welch derecho cada posible secuencia del mismo largo tomando el nodo intermedio que sea común a cada ruta; por otra parte busquemos del diagrama de Welch izquierdo la misma ruta pero en orden inverso ya que este diagrama se obtuvo de la regla reflejada y guardemos también el nodo intermedio común a la misma ruta, ya que tenemos estos dos nodos tomemos el elemento en común en ambos nodos, este estado será el que defina en que evoluciona la regla inversa para dicha vecindad; por ejemplo, de los diagramas anteriores vemos que el largo máximo de cada ruta antes de caer en un ciclo es dos, de este modo tomemos todas las posibles formas para construir cada secuencia de dos estados, mostremos esto para la secuencia de ligas **02**, en el diagrama de Welch por la derecha el nodo intermedio común a cada posible modo de formar tal secuencia es **3** (estados **0** y **1**); para el diagrama de Welch izquierdo formemos de todas las maneras posibles la secuencia **20**, encontramos que el nodo intermedio para cada posible opción es **5** (estados **0** y **2**), por último tenemos que el estado en común en ambos nodos es **0** por lo que en la regla inversa la vecindad **02** evoluciona en **0**; haciendo esto para cada secuencia posible de longitud dos se construye la regla inversa EEEE4444.

Tomando ahora el autómata (4,h) regla F5A0B5E0 se observa el siguiente comportamiento:

En el diagrama derecho de Welch uno observa que la máxima longitud de cualquier ruta para que tenga un mismo nodo medio en común es **2** pero en el diagrama izquierdo esta longitud es **3**; es decir, la regla inversa tiene un tamaño de vecindad igual a este valor, por ejemplo, en el diagrama derecho la ruta **02** tiene en común el nodo medio **12** mientras que en el izquierdo para la ruta **20** estos nodos son **5** y **6**, esta terna de vértices no tienen un único elemento en común y por lo tanto no se puede definir un mapeo local inverso a la vecindad **02**, pero extendamos más esta secuencia tomando ahora la cadena **022**, encontramos que en el diagrama derecho el nodo medio en común es **12** mientras que en el diagrama izquierdo para la cadena **220** es el nodo **5**, el elemento en común entre ambos vértices es **2** y se puede establecer un mapeo local inverso para tal vecindad.

Conforme aumenta el número de estados y/o el tamaño de vecindad, por supuesto también aumenta la complejidad de los diagramas de Welch, tomemos el ejemplo de un autómata (6,h) regla ZWESP7LI0ZWESP7LI0 el cual es un producto cartesiano de un autómata (2,h) regla **10** y un autómata (3,h) regla 19305.

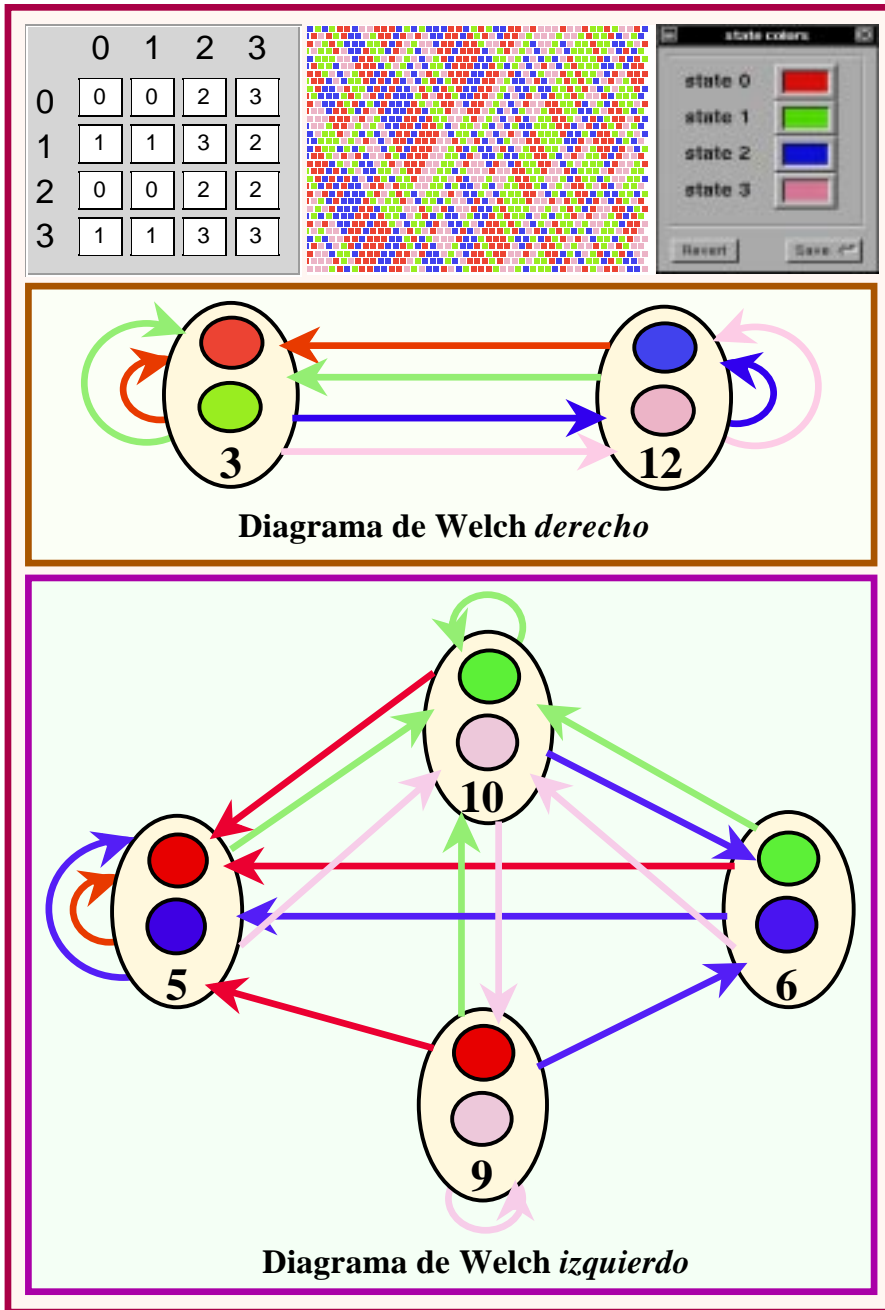


Figura 42: Autómata (4,h) regla F5A0B5E0 y sus diagramas de Welch.

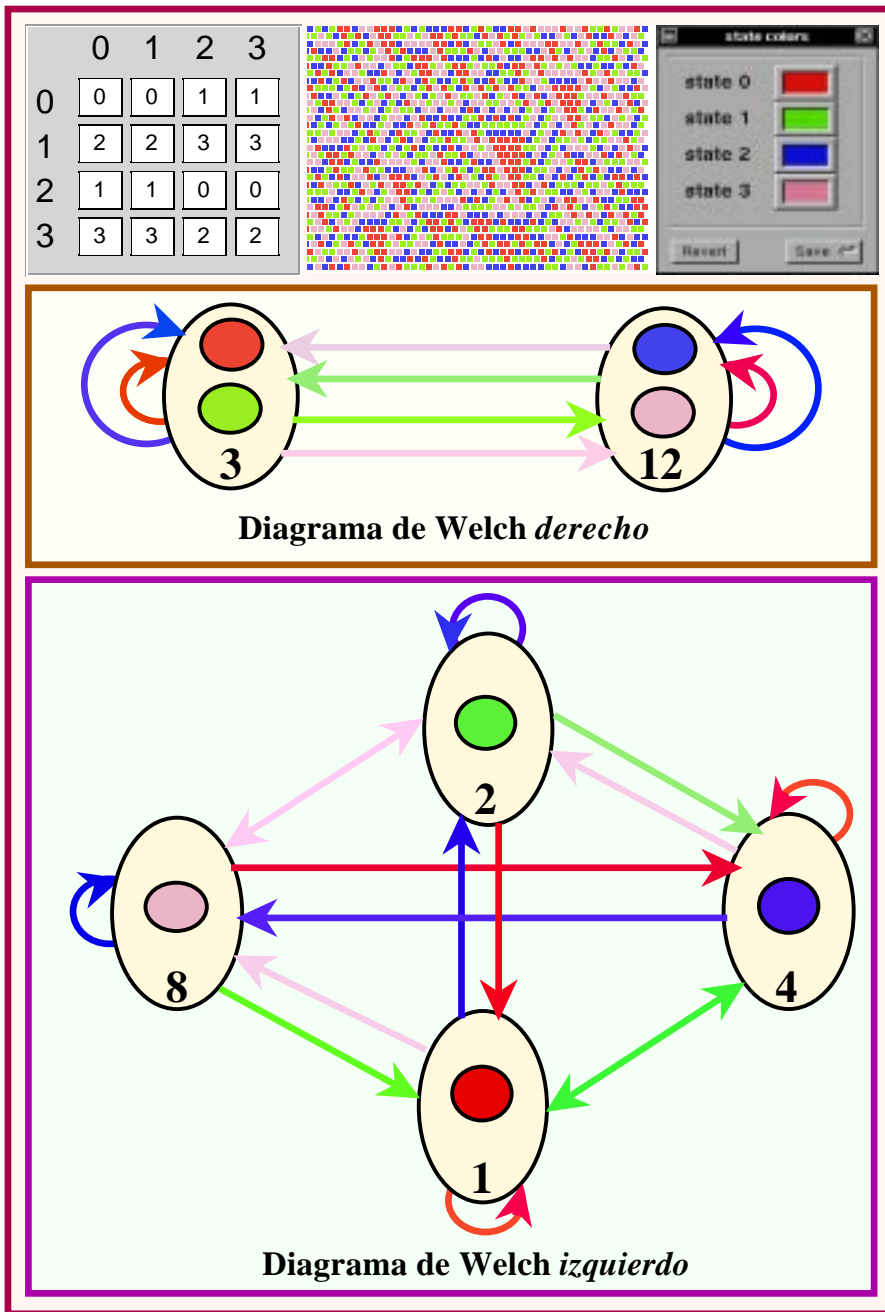


Figura 43: Autómata (4,h) regla AF05FA50 y sus diagramas de Welch.

Este autómata reversible también tiene como máximo rutas de longitud **2** en ambos diagramas, por lo que su inversa será un (6,h) también y puede ser obtenida de la misma manera que se ha explicado anteriormente.

Qué pasa con los diagramas de Welch en el caso de autómatas no reversibles, para visualizar ésto tomemos un autómata (4,h) regla AF05FA50.

Este autómata tiene un mapeo global sobreyectivo mas no reversible, es decir, carece de Jardín del Edén pero es imposible encontrar un mapeo local inverso único para una secuencia de estados dada, esto se observa claramente en los diagramas de Welch:

1. La cardinalidad de cada conjunto para el caso de la derecha es **2** y para el caso izquierdo es **1**, teniendo que  $\mathbf{LR}=\mathbf{2}$  el cual es un submúltiplo del número de nodos del diagrama de de Bruijn, por lo que el valor de  $\mathbf{M}$  es diferente de **1** (en este caso **2**) y el autómata no es reversible.
2. No es posible encontrar y fijar un nodo intermedio para cada posible cadena de estados ya sea en el diagrama derecho o en el diagrama izquierdo, ni se observa que las rutas convergan en árboles con una raíz única como en el caso de los reversibles, por ejemplo, si tratamos de encontrar un mapeo local inverso para la cadena **13** encontramos que para el diagrama derecho ambos nodos cumplen con ser intermedios para dicha ruta y en el caso izquierdo los nodos **2** y **8** son los que cumplen; si intersectamos los elementos comunes en ambos casos encontramos que la secuencia **13** tiene como célula central en su pasado ya sea el estado **1** ó el estado **3**, lo que se mantiene para cualquier cadena en este autómata.

## Bibliografía

- [1] Martin Gardner, *Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game Life*, Scientific American, October 1970, pp 120-123.

- [2] Gustav A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Mathematical Systems Theory 3, pp 320-375, 1969.
- [3] David Hillman, *The structure of reversible one-dimensional cellular automata*, Physica D 52, pp 277-292, 1991.
- [4] Harold V. McIntosh, *Linear Cellular Automata*, Universidad Autónoma de Puebla, 1990.
- [5] Harold V. McIntosh, *Linear Cellular Automata via de Bruijn Diagrams*, por publicarse.
- [6] Harold V. McIntosh, *Reversible Cellular Automata*, por publicarse.
- [7] Masakazu Nasu, *Local Maps Inducing Surjective Global Maps of One Dimensional Tessellation Automata*, Mathematical Systems Theory 11, pp 327-351, 1978.
- [8] William Poundstone, *The Recursive Universe*, William Morrow and Company Inc., 1985.
- [9] Tommaso Toffoli, Norman Margolus, *Cellular Automata Machines*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1987.
- [10] Burton H. Voorhees, *Computational Analysis of One Dimensional Cellular Automata*, World Scientific, Sigapore, 1995.
- [11] Stephen Wolfram, *Universality and Complexity in Cellular Automata*, Physica D10, pp 1-35, 1984.
- [12] Andrew Wuensche, Mike Lesser, *The Global Dynamics of Cellular Automata*, Santa Fe Institute, 1992.

## Lista de Figuras

1	Vecindad de von Neumann . . . . .	4
2	Vecindad de Moore . . . . .	4
3	Para cualquier condición inicial, esta clase evoluciona en pocas generaciones a un estado uniforme. . . . .	6

4	Alcanzan algún estado y todo lo que queda son estados cíclicos aislados. . . . .	6
5	Más de la mitad de las reglas de Wolfram muestran este comportamiento. . . . .	6
6	Esta es la clase más estudiada, es generada por reglas en las cuales el diagrama de de Bruijn contiene ciertos ciclos.	7
7	El autómata sigue siendo unidimensional.(No debe pensarse que es en dos dimensiones,el t-ésimo renglón representa la configuración del autómata en el tiempo t.) .	7
8	Este autómata es llamado cilíndrico, ya que su evolución puede ser vista como un cilindro. . . . .	9
9	Autómatas con diversos radios de vecindad . . . . .	10
10	Ejemplo de una vecindad fraccionaria . . . . .	10
11	Regla de Wolfram 22 . . . . .	12
12	Autómata (2,1) regla 15 la cual es reversible. . . . .	13
13	Diagrama de de Bruijn asociado a un autómata (2,h) .	19
14	Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (3,h).	21
15	Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (4,h).	22
16	Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (8,h).	22
17	Diagrama genérico de de Bruijn para un autómata (3,1).	25
18	Diagrama de de Bruijn para el autómata (4,h) regla F5A0F5A0 . . . . .	26
19	Evolución de la cadena de estados <b>0310</b> observada desde el diagrama de de Bruijn . . . . .	28
20	Diagrama de de Bruijn para el autómata (2,1) regla <b>51</b> .	30
21	Diagrama de Subconjuntos para el autómata (2,1) regla <b>51</b> . . . . .	34
22	Diagrama de parejas del autómata (4,h) regla F5A0F5A0.	35
23	Diagrama de parejas del autómata (2,1) regla <b>51</b> . . . .	35
24	Anillos con condiciones de límite periódico, arreglo de longitud <b>L</b> y vecindades de tamaño 3, iterando hasta un tiempo <b>ti</b> , ( <b>k=2,r=1</b> ). . . . .	36
25	Diagrama de estado-tiempo, mostrando el comportamiento (patrón) de los estados globales (anillos) de la regla 30.	37
26	Gráfica de estado transición, regla 18, <b>L = 10</b> , basins = 5, ciclo con período = 4, altura máxima = 5 y altura mínima = 0. . . . .	39

27	Un basin regla 90, $L = 10$ , ilustrando árboles equivalentes así como ramas equivalentes y todo el basin a su vez puede formar parte de un conjunto de basins o componentes equivalentes (este no es el caso). Esto nos lleva a obtener una simetría dentro del basin que mostrado en el diagrama de espacio-tiempo nos indicaría los diferentes corrimientos de los estados globales, empezando desde un nodo arbitrario. En este caso el patrón constante que vemos en el diagrama de espacio-tiempo nos indica que llegó a un ciclo atractor de longitud uno. . .	41
28	Autómata celular (4,h), regla FF55AA00 reversible, aquí se muestra de manera muy clara que dado cualquier anillo de longitud $L$ mayor o igual a 2 siempre obtendremos ciclos tractors mayores igual que 1. Desde un punto de vista general, se observa que se puede descifrar el comportamiento del autómata hacia atrás en el tiempo a través de los componentes, esto es, uno puede seleccionar un estado global inicial aleatorio y encontrar su pre-imagen en un tiempo-paso e iterar hacia atrás hasta un tiempo $t-i$ y de esta manera decifrar el comportamiento del autómata totalmente. Los números de los nodos en el componente indican la notación equivalente en decimal de la suma de todas las células que forman cada uno de los estados globales o anillos. . . .	42
29	En este autómata (4,h) regla FA9098C2, ciclo atractor = 6; podemos observar la inestabilidad de los estados globales a través de todas las transiciones existentes y es laborioso descifrar tales comportamientos. . . . .	44
30	Autómata (2,1), regla 30, $L = 10$ , altura máxima = 46.	45
31	Diferentes tipos de mapeos. . . . .	46
32	ACL(4,h) regla <b>7E186F90</b> . . . . .	47
33	Acestros de la cadenas 01X01. . . . .	48
34	Los ancestros de cada posible cadena de estados es igual a $k(2r)$ . . . . .	48
35	Ejemplo del índice R en el autómata (4,h) regla B46363B4.	49
36	Ejemplo del índice M en el autómata (4,h) regla B46363B4.	49
37	Multiplicación de las matrices de conectividad del autómata (4,h) regla BF6A15C0. . . . .	50



38	Autómata(4,h) regla FFA91640. . . . .	52
39	Matriz de conectividad como producto de un producto cartesiano. . . . .	53
40	Valor del índice L observado en el diagrama de subcon- juntos de la regla reflejada. . . . .	55
41	Diagramas de Welch del autómata (4,h) regla F5A0F5A0.	56
42	Autómata (4,h) regla F5A0B5E0 y sus diagramas de Welch. . . . .	59
43	Autómata (4,h) regla AF05FA50 y sus diagramas de Welch. . . . .	60