

La medida del caos en autómatas celulares que presentan comportamiento colectivo no trivial

A. Cáceres González

-Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N.,
Sección de Computación-Departamento de Ingeniería Eléctrica,
acaceres@alpha.cs.cinvestav.mx

-Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
División Académica de Ciencias Básicas
abdiel@dacb.ujat.mx

En este reporte se muestran un par de modelos para estimar el grado de caos en la evolución de los autómatas celulares, estos modelos son la entropía y el exponente característico de Liapunov. Se obtienen resultados comparativos, usando cada modelo para algunas reglas específicas, con el fin de conjeturar alguna relación entre estas dos medidas de caos en el comportamiento colectivo que muestran las evoluciones de las reglas estudiadas.

1. Antecedentes

A principios de la década de los años 1990's, dos científicos franceses, Huges Chaté y Paul Manneville, descubrieron que al hacer evolucionar sistemas dinámicos caóticos, el promedio de la densidad de las células "vivas" tendía hacia tres densidades bien definidas, lo que contradecía algunos postulados de mecánica estadística que habían sido hechos con anterioridad, a este fenómeno lo llamaron *comportamiento colectivo no trivial*[11].

En este reporte se abordan un par de métodos que se utilizan para medir el grado de caos de la evolución de un autómata celular: el exponente característico de Liapunov en la sección 3 y la medida de entropía en la sección 4. Después de introducir ambos conceptos, en la sección 6 se conjetura acerca de la relación entre ambos. Finalmente en la sección 7 se hacen algunas conclusiones acerca del resultado de aplicar estos métodos a las reglas de evolución que sabemos producen el llamado comportamiento colectivo no trivial.

2. Generalidades de caos

En 1887 el rey Oscar II de Suecia, ofreció un premio a la persona que respondiera formalmente a la pregunta: *Es estable el sistema solar?* ya que él estaba preocupado por lo que pasaría si los planetas llegasen a chocar.

Henri Poincaré, matemático francés, padre de la topología que nació en abril de 1854, acudió a la convocatoria y demostró que la interacción de dos cuerpos no presenta problemas, sin embargo con tres o más cuerpos no se podía saber qué es lo que ocurriría si los cuerpos chocasen entre sí.

Lo anterior no respondía la pregunta hecha por el rey, pero al ver los árbitros que no había una mejor solución y satisfechos con esa respuesta, le fue concedido el premio [6].

Poincaré hizo contribuciones importantes a la nueva ciencia, los sistemas dinámicos, entre las que destaca lo que ahora se conoce como *Sección de Poincaré* o mapa de retorno, como también se le conoce; que es un plano imaginario (no complejo) que corta transversalmente es espacio de la

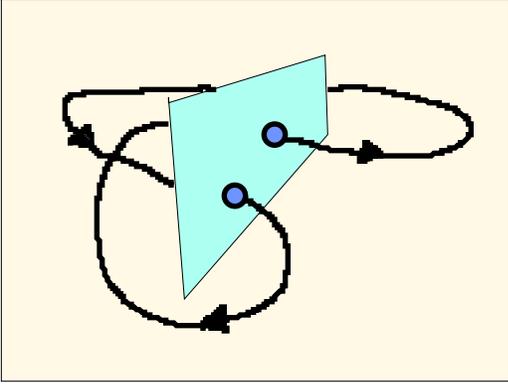


Fig. 1. El polígono muestra la sección de Poincaré, que señala el sitio donde la trayectoria atraviesa el plano imaginario, en este caso se muestra una trayectoria periódica de ciclo 2

trayectoria de un cuerpo, llamado también espacio de fases. Si este cuerpo siempre atraviesa la sección en un único punto, entonces la trayectoria es periódica; si atraviesa en varios puntos bien definidos, entonces la trayectoria es periódica con ciclo definido; si no se puede determinar alguna periodicidad, estamos en presencia del caos.

Eduard Lorenz, un metereólogo del Instituto Tecnológico de Massachusetts, a principios de la década de los 60's publicó un artículo que se llamó *Deterministic Nonperiodic Flow* [7] en donde propone sistemas finitos de ecuaciones diferenciales para modelar flujos hidrodinámicos disipativos (como la dinámica de las nubes), y encontró que sus soluciones eran no estables y casi todas no periódicas, concluyendo una posible aplicación para la predicción del estado del clima a largo plazo.

Una regla de evolución f en un espacio métrico X , es caótica o exhibe caos en el conjunto de todas las configuraciones globales G si:

- f es cerrada en G
- f tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales en G [14]

En la primera parte de la definición se menciona que bajo una regla de evolución, la imagen de una configuración global que pertenece al conjunto de todas las posibles configuraciones globales (de longitud finita) pertenece también al mismo conjunto. Denotado aquí por la letra G . En una sección posterior se define un espacio métrico para estos autómatas celulares.

La segunda parte dice que el hacer pequeños cambios en la configuración inicial, la evolución a través del tiempo del autómata celular es diferente (ver figuras 4 y 5).

Un problema al cual se enfrentan los estudiosos de la materia, es predecir o más propiamente dicho, suponer por adelantado el comportamiento de la evolución del autómata tomando en cuenta únicamente la configuración inicial y la regla de evolución en el caso de los autómatas celulares determinísticos; a la fecha se han desarrollado algunos modelos para predecir el comportamiento a largo plazo de los autómatas celulares utilizando únicamente con estos datos, estos modelos son revisados brevemente en [8].

Ahora se cuenta con un esquema que clasifica el comportamiento de la evolución del autómata en 4 categorías [3].

Varios modelos matemáticos han surgido por separado para medir la cuota de caos que presentan las evoluciones de los autómatas celulares, dos de ellos son la medida de entropía como el grado de desorden y el exponente característico de Liapunov como una medida de la velocidad de propagación de los patrones generados por un autómata celular.

3. El exponente característico de Liapunov

Esta medida de caos, fue introducida por el célebre matemático ruso Alexander Mijailovic Liapunov a principios del siglo XX, los exponentes de Liapunov, como ahora se les conoce, son un

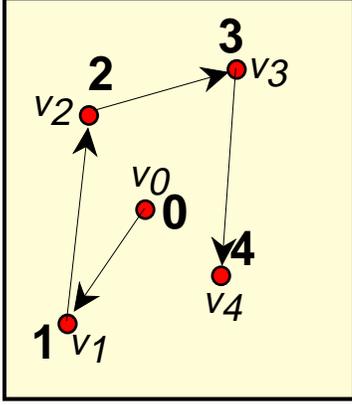


Fig. 2. El mapa de retorno muestra las velocidades instantáneas en el punto de retorno de las trayectorias. El promedio de las velocidades indica el exponente característico de Liapunov.

conjunto de números que se emplean usualmente para detectar la presencia del caos en sistemas dinámicos.

La idea en general es medir qué tan rápido se alejan o diferencian las configuraciones globales contiguas con respecto al tiempo.

El exponente característico de Liapunov está definido para una función dinámica F con una configuración inicial x_0 de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(|(f^j)'(x_0)|) \quad (1)$$

Donde $|(f^n)'(x_0)|$ es el valor absoluto de la primera derivada de la n -ésima iteración de f a partir de x_0 [14]

En otras palabras, la expresión (1) es el máximo valor que alcanza el promedio del orden exponencial de la velocidad, con la cual las configuraciones globales se alejan (o se acercan) de sus configuraciones globales inmediatas siguientes. Después de n pasos en el tiempo.

Para comprender lo anterior y tener un punto de referencia, es necesario primero definir un espacio métrico que relacione dos configuraciones globales en base a una medida de distancia.

Como es definido en topología, un espacio métrico debe cumplir con tres condiciones [10] para cualesquiera tres puntos diferentes x, y, z en el mismo espacio de representación:

$$1. -d(x,x) = 0 \quad (2)$$

La distancia que separa un punto de él mismo es nula.

$$2. -d(x,y) = d(y,x) \quad (3)$$

La distancia que separa a dos puntos distintos, es la misma sin importar el orden en que se tomen los puntos.

$$3. -d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \quad (4)$$

Obedece la desigualdad del triángulo.

Sea E el espacio de representación de todas las configuraciones globales de tamaño n . Con $n < \infty$. Sea también $X, Y \in E$, no es necesario que $X \neq Y$. Sea la medida de distancia:

$$d(X, Y) = \sum_{i \in n} \frac{|x_i - y_i|}{k^{|i|}} \quad (5)$$

El subíndice i se coloca en forma creciente desde $-n$ hasta 0 y de izquierda a derecha sobre todas las células de la configuración global. Significa que la diferencia en el estado de las células del extremo derecho es más significativa para estimar la distancia.

La letra k denota la cardinalidad del conjunto de estados que definen al autómata celular. En el caso de un autómata binario, $k = 2$.

Esta medida de distancia y esta definición de exponente de Liapunov presentan dificultades. En primer lugar, la definición (1) está expresada para

funciones dinámicas de variable real de tipo C^1 .

Es posible aplicar la definición anterior usando la derivada de una función booleana, ya que la regla de evolución puede ser considerada como una función bivaluada, sin embargo en este documento no se aborda esta posibilidad.

La medida de distancia expresada anteriormente, también presenta dificultades, ya que la fracción $1/2^x$ es prácticamente 0 cuando x es mayor que 30, siendo que el espacio de evolución del autómata normalmente es de mucho más que 30 células.

Sin embargo se ha publicado otra definición que está más de acuerdo con los términos usados en la teoría de autómatas celulares con el fin de valorar el exponente característico de Liapunov [3]. Si la regla básica de la evolución de un autómata celular es:

$$a_i^t = F(a_{i-r}^{t-1}, \dots, a_i^{t-1}, \dots, a_{i+r}^{t-1}) \quad (6)$$

Es decir, el estado que adquiera la célula a_i^t en el paso de tiempo t es dependiente del estado que tengan un conjunto de células en un radio máximo de r células en el paso de tiempo anterior $t - 1$. Ahora, después de T pasos de tiempo, la célula a_i^T depende ahora de a lo más $2rT$ células de la configuración global inicial, como se muestra en la figura 3.

Lo que significa que, los patrones generados por la evolución del autómata se pueden propagar a velocidades mayores que r células por paso de tiempo debido a la correlación existente con las células vecinas y su dependencia con la vecindad que las generó. Aunque hay reglas que su velocidad de propagación de patrones es más lenta. En general, denotemos por $\|F^T\|$ a un número R que es el mínimo número de células que tienen influencia sobre el estado que una célula a_i tome en el paso de tiempo T .

Entonces, la máxima velocidad de propagación asociada con la regla de evolución F es:

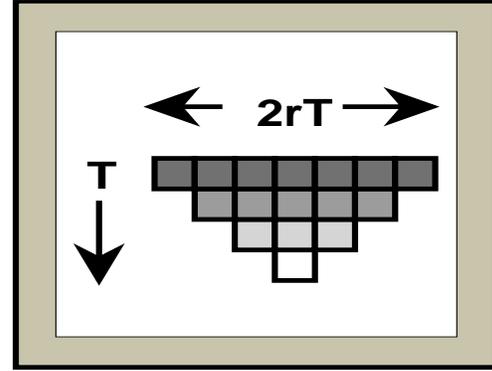


Fig. 3. El estado de una célula en el tiempo T depende no sólo de su vecindad inmediata, sino de a lo más $2rT$ células en la configuración inicial

$$\lambda_+ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\|F^T\|}{T} \quad (7)$$

Sin embargo sólo se aplica a reglas simétricas, para las reglas que no son simétricas se pueden definir los exponentes característicos de Liapunov de izquierda y de derecha, denotados por λ_L y λ_R respectivamente.

La figura 4 muestra una la evolución del autómata celular lineal (2,1) R30, durante 8 instantes de tiempo. Esta regla en especial muestra diferentes velocidades de transferencia de información, y se puede observar modificando ligeramente la configuración inicial.

La velocidad de transferencia, es el exponente de Liapunov, que es la velocidad con la que se “separan” las configuraciones globales, como lo ilustra la figura 5.

Concluimos que el exponente de Liapunov puede ser:

- $\lambda(F) > 0$
- $\lambda(F) \leq 0$

En el primer caso, se verifica que la regla de evolución genera una velocidad de transferencia positiva, es decir, se puede garantizar que al menos la distancia que separa dos configuraciones globales contiguas en el tiempo permanece constante.

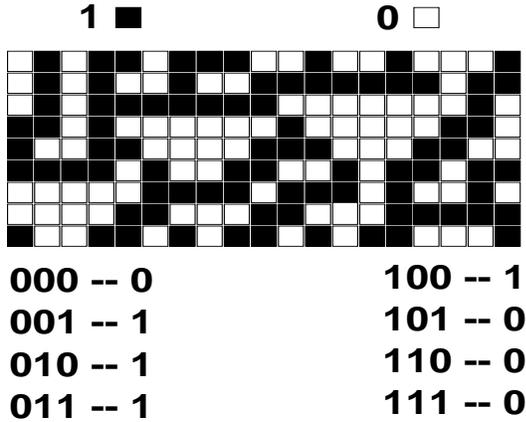


Fig. 4. 8 generaciones a partir de una configuración global aleatoria bajo la regla de evolución 30 en un autómata celular lineal (2,1) con condiciones periódicas en las fronteras.

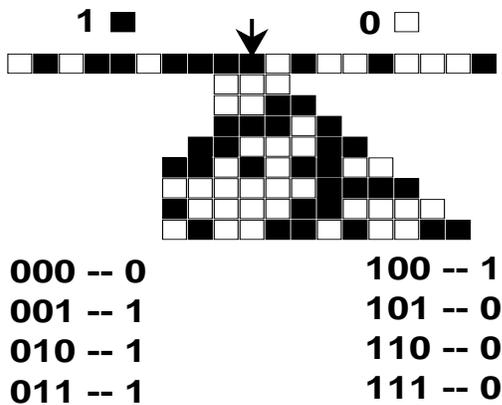


Fig. 5. La velocidad de propagación de los patrones de diferencia que presenta la evolución al modificar una célula (señalada con una flecha) es diferente por ambos lados; por la derecha es $\lambda_R = 1$ y por la izquierda es $\lambda_L = 0.2$

Si es así, la evolución tendrá más oportunidad de mostrar fases distintas a cada paso del tiempo; exhibiendo un comportamiento caótico.

Entonces, una regla de evolución tiene un comportamiento más caótico que otra, si el exponente característico de Liapunov de la primera regla de evolución es mayor que el de la segunda.

Aún se pueden verificar casos interesantes cuando el exponente de Liapunov es positivo:

- $\lambda(F) = 1$ se deduce de este valor un comportamiento estable, cada configuración global que es generada, dista de su configuración ancestral una medida constante, logrando ciclos atractores grandes (en dependencia del tamaño del espacio celular).

- $\lambda(F) > 1$ cuando ocurre esto la regla de evolución presenta un comportamiento caótico, y presenta esta característica más rápido a medida que el valor del exponente es mayor.

El segundo caso se puede interpretar como la existencia de un punto atractor, ya que la velocidad de transferencia disminuye a cada generación, lo que significa que a cada paso de tiempo la distancia entre dos configuraciones globales se reduce. Se esperaría que después de algunas evoluciones, el comportamiento global sea trivial.

4. Entropía

La entropía es un concepto que se aplicó inicialmente a sistemas de termodinámica para tener una idea de la cantidad de calor disipado por un cuerpo.

La idea general es que un cuerpo cuando libera mayor cantidad de energía calorífica es que las moléculas que lo componen se mueven a mayor velocidad chocando unas con otras, y en cada choque de moléculas se libera alguna cantidad de energía en forma de calor.

Entonces, una alta medida de entropía significaría más calor liberado por el cuerpo y una baja medida de entropía hace pensar que el cuerpo libera poco calor.

Más tarde se hicieron algunas analogías del comportamiento de las moléculas con algunas características de fenómenos propios de otras áreas del conocimiento, como las comunicaciones [9].

En autómatas celulares también se ha adoptado este término para indicar el grado de desorden en que las configuraciones de alguna longitud específica puedan ocurrir; o el grado de desorden en que las configuraciones globales aparezcan; o la variación de valores de estados que una sola célula presenta a lo largo de un número determinado de pasos del tiempo.

4.1. Entropía espacial

Es de mucha utilidad para caracterizar las reglas de evolución, saber el grado de caos de una fase de la evolución general de un autómata, desde el punto de vista topológico se puede definir la entropía espacial de conjunto como:

$$h^{(x)}(X) = \frac{1}{X} \log_K \left(\sum_{j=1}^{K^X} \theta(p_j^{(x)}) \right) \tag{8}$$

Donde el superíndice (x) indica que se trata de secuencias espaciales de células, donde el tamaño de las secuencias es de X, p_i es la probabilidad de que ocurra la secuencia en turno y θ(p) es una función θ : [0, 1] → {0, 1} definida como:

$$\theta(p) = 0 \text{ si } p = 0 \text{ y}$$

$$\theta(p) = 1 \text{ en otro caso}$$

Esta función θ(p) cuenta el orden exponencial de todas las secuencias que es posible que ocurran.

A esta entropía espacial de conjunto también se le conoce como entropía topológica y va a compañada de una medida de entropía que se conoce también como métrica para la entropía, y

x_i	p	$\theta(p)$
0000	0	0
0001	3/32	1
0010	1/32	1
0011	1/32	1
0100	11/128	1
0101	11/128	1
0110	11/128	1
0111	11/128	1
1000	11/128	1
1001	11/128	1
1010	11/128	1
1011	11/128	1
1100	1/32	1
1101	1/32	1
1110	3/32	1
1111	0	0

Tabla.....(T1)

Tabla que muestra todos los bloques de tamaño 4 con su probabilidad de ocurrencia y con la θ -evaluación. Nota: Los valores para las probabilidades se tomaron de manera arbitraria

está definida como sigue:

$$h_{\mu}^{(x)}(X) = -\frac{1}{X} \sum_{j=1}^{K^X} p_j^{(x)} \log_k p_j^{(x)} \tag{9}$$

Para ilustrar el modo de operar de esta medida de entropía, así como la entropía espacial de conjunto, tómense bloques de tamaño 4 y sustitúyanse los valores correspondientes en las ecuaciones (8) y (9).

Hay que hacer notar que en la entropía espacial de conjunto lo que se observa es, en promedio, cuál es el orden exponencial de las ocurrencias de bloques de longitud X.

En el caso de la medida de entropía, lo observado es el promedio de la razón exponencial de que un bloque de longitud fija X aparezca en cualquier parte de la evolución de un autómata celular en un tiempo fijo t.

En el ejemplo mostrado en la tabla 1, la entropía espacial de conjunto es:

$$h^{(x)}(4) = \frac{1}{4} \log_2 \left(\sum_{j=1}^{2^4=16} \theta(p_j^{(x)}) \right) = \frac{\log_2 14}{4}$$

Y la medida de entropía, tomando secuencias de células de tamaño 4 es:

$$h_{\mu}^{(x)}(4) = -\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{2^4=16} p_j^{(x)} \log_k p_j^{(x)}$$

$$h_{\mu}^{(x)}(4) \approx 0.924865$$

Hemos de notar que el máximo valor de entropía se logra cuando todos los posibles K^X bloques de longitud X tienen igual probabilidad de ocurrir. El máximo valor de entropía es 1.

Otro aspecto importante a la hora de asignar probabilidades de ocurrencia es que las secuencias que son “Jardines de edén” sólo ocurren una vez y jamás podrán aparecer de nuevo como imagen de una configuración global, así que la probabilidad de ocurrencia que le sea asignada debe ser muy pequeña si se empieza con una configuración aleatoria.

Ahora supóngase una configuración global x_t al tiempo t de un autómata celular (2,1) de acuerdo a [8], en donde (k, r) indica que se trata de un autómata celular lineal de k estados y un radio de vecindad r , teniendo como vecindad un subconjunto de células contiguas de cardinalidad $2r + 1$.

$$x_t = 1 \mid 01011011000101011001 \mid 0$$

Los dígitos a los extremos indican las condiciones periódicas de las fronteras.

Para calcular la entropía topológica de esta configuración, tomamos bloques de 3, ya que 3 es el número de células que interactúan como vecindad, para intervenir en la asignación de los estados para cualquier célula en transición, y aprovechando la facilidad de tomar secuencias de tamaño arbitrario.

De esta manera, en x_t se tienen 18 bloques de longitud 3, distribuidas como sigue:

1.-	000	1/18
2.-	001	2/18
3.-	010	4/18
4.-	011	2/18
5.-	100	2/18
6.-	101	4/18
7.-	110	3/18
8.-	111	0/18

Que de acuerdo a (9)

$$h_{\mu}^{(x)}(3) = -\frac{1}{3} \sum_{j=1}^8 p_j^{(x)} \log_2 p_j^{(x)}$$

$$h_{\mu}^{(x)}(3) \approx 0.894497$$

Que muestra una medida de entropía aproximadamente de 0.8, lo que significa que en una medida razonable, aparecen todos los bloques de longitud 3, dentro de la configuración global x_t .

En cambio, un valor de entropía bajo, indica que algunos bloques de tamaño X no aparecen, o la probabilidad de que aparezcan es muy pequeña.

4.2. Entropía temporal

Es posible definir una entropía temporal; esta entropía en el transcurso del tiempo proporciona información acerca de una secuencia de los estados que son tomados por una célula en particular, después de muchos pasos en la evolución del autómata celular.

Es necesario contar con la probabilidad de que una secuencia de longitud T ocurra, dentro de un espacio de k^T posibles secuencias de la misma longitud. Y esto es posible asignando una probabilidad de acuerdo al número de ocurrencias de una misma secuencia en todas las secuencias que se observaron.

De esta manera $p_i^{(t)}$ será la probabilidad de ocurrencia de la secuencia i dentro de todas las k^T posibles secuencias de estados asignados a una célula en T pasos de tiempo sucesivos.

Se define una entropía de conjunto “temporal” análoga a (8):

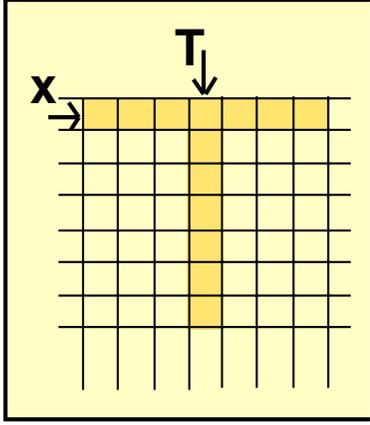


Fig. 6. La zona sombreada en sentido horizontal muestra el espacio sobre el cual se define la entropía “espacial”, y la zona sombreada en sentido vertical muestra el espacio en el cual esta definida la entropía “temporal”.

$$h^{(t)}(T) = \frac{1}{T} \log_K \left(\sum_{j=1}^{K^T} \theta(p_j^{(t)}) \right) \quad (10)$$

También, y con analogía a la definición de la medida de entropía “espacial” etiquetada con (9), se define una medida de entropía “temporal” como sigue:

$$h_{\mu}^{(t)}(T) = -\frac{1}{T} \sum_{j=1}^{K^T} p_j^{(t)} \log_k p_j^{(t)} \quad (11)$$

Para ilustrar el uso de estas nuevas entropías tomemos una secuencia aleatoria, al aplicar una regla (aquí se usa la regla 90, escogida arbitrariamente) y obtener algunas configuraciones globales, es posible estudiar el grado de caos que presenta a lo largo de su historia.

De nuevo, los valores de estados que se muestran a los extremos, indican unicamente que las condiciones de la frontera son periódicas.

La regla 90 en un autómata celular (2,1) es:

000 → 0	100 → 1
001 → 1	101 → 0
010 → 0	110 → 1
011 → 1	111 → 0

Tomando una configuración inicial (arbitraria) $x_0=0100110011$ y haciendo evolucionar el autómata durante 7 generaciones, se tiene:

- $t_{0.-} 1] 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 [0$
- $t_{1.-} 1] 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 [0$
- $t_{2.-} 1] 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 [1$
- $t_{3.-} 1] 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 [0$
- $t_{4.-} 1] 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 [1$
- $t_{5.-} 0] 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 [0$
- $t_{6.-} 0] 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 [0$

Ahora, la entropía de conjunto “temporal” es, de acuerdo a la 10:

$$h^{(t)}(7) = \frac{1}{7} \log_2 \left(\sum_{j=1}^{2^7=128} \theta(p_j^{(t)}) \right) \approx 0.401$$

Donde $p_j^{(t)}$ es 10/128 para cada configuración que aparece en la evolución, y 0 para las que no aparecen.

El resultado anterior refleja un nivel de entropía medio, lo que hace pensar que al transcurrir T pasos en la evolución aproximadamente la mitad de las configuraciones podrían ocurrir.

La medida de entropía es según (11):

$$h_{\mu}^{(t)}(7) = -\frac{1}{7} \sum_{j=1}^{2^7=128} p_j^{(t)} \log_k p_j^{(t)} \approx 0.4378$$

En general, la entropía de conjunto, y la medida de entropía aportan información para estimar de una manera aproximada (hay que recordar que se tratan de probabilidades de ocurrencia) la proporción del número de secuencias que pueden ocurrir.

A medidas de entropía mayor, ocurren más secuencias. Medidas de entropía menores significa que aparecen menos secuencias, todas ellas dentro del espacio invariante de todas las secuencias posibles del tamaño que se ha decidido medir.

5. Resultados de la medida de caos en las evoluciones de autómatas celulares con comportamiento colectivo no trivial

En la siguiente tabla se muestran algunos resultados usando reglas de evolución definidas sobre autómatas celulares lineales de $k = 2$ estados y un radio de vecindad $r = 1$:

En la columna dedicada al exponente característico de Liapunov, en algunos casos, se muestran los exponentes λ_L y λ_R separados por un guión. En ese orden.

REGLA	$\lambda(F)$	$h_\mu^{(X)}$
18	1	0.5
30	.24 - 1	1
90	1	1
22	0.795	.7660

Un listado de las reglas de evolución para los autómatas celulares (2,1) se encuentra en [5]

En la tabla que a continuación se muestra aparecen los resultados correspondientes a la regla 33 totalística definida sobre los autómatas celulares lineales de $k = 2$ estados y $r = 4$. Se ha escogido esta regla dado su comportamiento colectivo no trivial [11] [12] ver la figura 8.

REGLA	$\lambda(F)$	$h_\mu^{(X)}$
33	2.75 - 1.75	0.127

Los resultados obtenidos son razonables al ver la evolución del autómata, que se muestra en la figura 7, primero, el exponente característico de Liapunov es justificado notoriamente al observar los patrones crecientes a cada evolución. Con lo que se concluye que la regla tiene un alto grado de caos.

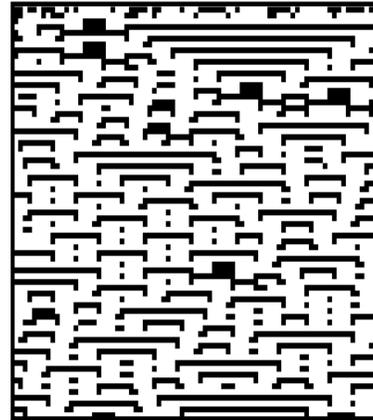


Fig. 7. Fragmento de la evolución del autómata celular definido por la regla totalística 33, en un espacio de 2 estados y un radio de vecindad 4

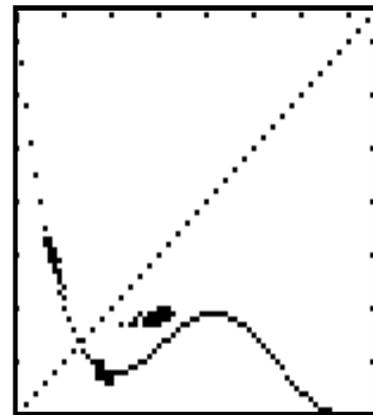


Fig. 8. Mapa de retorno que señala el comportamiento colectivo no trivial mostrado por el autómata R33 totalística, haciendo un levantamiento a 4 dimensiones con la vecindad de von Neumann e iterando 250 veces

Por otro lado, la medida de entropía es baja ya que como también se observa en la evolución, es más probable que sólo se generen secuencias de estados iguales de tamaño variable, y es casi imposible que aparezca una secuencia de tamaño 9 (el tamaño de la vecindad) con células de ambos estados, pero intercaladas en toda la vecindad, es decir la secuencia "101010101" tiene una probabilidad muy baja de ocurrir, es posible que únicamente aparezca como secuencia inicial.

6. Conjeturas acerca de la relación entre el exponente característico de Liapunov y la entropía

Es posible que la medida de entropía espacial con secuencias del tamaño de la vecindad tenga una relación con la densidad esperada, que se puede obtener en base a la teoría del campo promedio, de hecho, la predicción del campo promedio puede servir para estimar la probabilidad de ocurrencia de los bloques del tamaño de la vecindad para calcular el nivel de caos por medio de la entropía.

Las dimensiones del espacio de las configuraciones están estrechamente relacionadas con la máxima velocidad de propagación de los patrones generados por la regla de evolución.

En [4] se observa que la proporción del tamaño del arreglo con respecto al tiempo que se evoluciona el autómata es menor o igual que 2 veces la máxima velocidad de propagación, que cae dentro de las características estáticas de la historia de la evolución del autómata, luego, lo anterior está involucrado con la proporción de la entropía espacial con respecto a la entropía temporal.

7. Conclusiones

El exponente característico de Liapunov puede clasificar únicamente dos tipos de evoluciones, las que son caóticas ($\lambda > 0$) y las que no lo son.

La medida de entropía proporciona una estimación un tanto subjetiva sobre el número de con-

figuraciones globales que ocurren en la evolución del autómata, ya que los valores que devuelve están en el rango 0 a 1, y decidir que una evolución es "muy" caótica o "poco" caótica es a criterio del observador. Usando como medida de caos la medida de entropía, se concluye que todas las reglas son caóticas en distintos grados, que van desde caos nulo, cuando la entropía es 0, hasta el caos total, cuando la medida de entropía es 1.

Para decidir si una regla de evolución es caótica no es suficiente atender únicamente a la medida de entropía o bien sólo al valor del exponente característico de Liapunov.

Una interpretación conjunta del exponente característico de Liapunov con la medida de entropía proporcionan una visión más amplia del comportamiento caótico de la evolución del autómata.

Finalmente, aún hay que mencionar el problema de relacionar la teoría de autómatas con los sistemas dinámicos continuos, recordando que los autómatas celulares están definidos sobre un espacio y tiempo discretos. Logrando esta relación se podrá aplicar algunas (posiblemente todas) las definiciones hechas para los sistemas continuos.

Reconocimientos

Agradezco la valiosa dirección del Dr. Harold V. McIntosh durante el desarrollo de este trabajo, los comentarios de José M. Gómez Soto y las atinadas observaciones de Lilia E. Rodríguez Quilantán, así también a las autoridades administrativas del Departamento de Aplicaciones de Microcomputadoras de la Universidad Autónoma de Puebla por facilitar los recursos necesarios en la tipografía, impresión y distribución de este documento.

De la misma manera agradezco a las autoridades administrativas de la Universidad "Juárez" Autónoma de Tabasco por el patrocinio de este proyecto de investigación.

Referencias

- [1] John von Neuman, edited and completed by Arthur W. Burks "Theory of selfreproducing automata", *University of Illinois Press* (1966).
- [2] Stephen Wolfram, "Statical mechanics of cellular autómatas", *Reviews of Modern Physics* **55** 601-644 (July 1983).
- [3] Stephen Wolfram, "Universality and complexity in cellular automata", *Physica D* **10** 1-35 (1984).
- [4] Stephen Wolfram, "Twenty problems in the theory of cellular automata", *Physica Scripta* **T9** 170-183 (1985).
- [5] Stephen Wolfram, "Cellular automata and complexity: Collected papers", *Addison-Wesley Publishing Company* (1994).
- [6] Ian Stewart "Juega Dios a los dados?, la nueva matemática del caos", *Ed. Grijalbo Modadori* (1991 edición en español)
- [7] Eduard Lorenz "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of Atmospheric Sciences* **20** 130-141 (1963)
- [8] Harold V. McIntosh "Linear Celular Automata", *Universidad Autónoma de Puebla* (1970 y revisado en 1990)
- [9] Claude Shannon "Communications and mesure", *MIT Press* (1966)
- [10] Max Garzon "Models of massive perallelism: Analysis of cellular automata and neural networks", *Springer* (1995)
- [11] H. Chaté and P. Manneville, "Evidence of Collective Behaviour in Cellular Automata," *Europhysics Letters* **14** 409-413 (1991).
- [12] H. Chaté and P. Manneville, "Collective Behaviour in Spatially Extended Systems with Local Interactions and Synchronous Updating" *Progress of Theoretical Physics* **87** January (1992).
- [13] J.Demongeot, E. Golés, M.Tchuente (Editors) "Dynamical systems and cellular automata" *Academic Press* (1985)
- [14] Clark Robinson "Dynamical systems, stability, symbolic dynamics, and chaos" *CRC Press* (1995)