# Cálculo del diámetro de burbujas en autómatas celulares con el proceso de Poisson

Sergio A. García Santana
Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán, UNAM

March 25, 1999

**Resumen**

El presente artículo presenta una investigación, de las burbujas que se forman en los autómatas celulares, para esto se utilizaron reglas totalísticas en tres y cuatro dimensiones, en las cuáles se calcula tamaño, centro de nucleación y densidad de la burbuja.

# 1 Introducción

En 1991 los investigadores franceses H Chaté y P. Manneville presentaron resultados númericos que obtuvieron al experimentar con Autómatas Celulares (AC) con una dimensión menor o igual a 3, ellos obtuvieron un Comportamiento Colectivo No Trivial(NTCB).

De este punto de partida, análisis empíricos llevaron al descubrimiento de burbujas, éstas se forman de los espacios que se producen entre las células y son conjuntos de un mismo estado que van pasando en su mayoría de un estado a otro en cada evolución, es decir si en el estado n son unos, en el n+1 seran ceros.

El objetivo de este artículo es el calcular el diámetro la densidad de dichas burbujas en Autómatas Celulares con Comportamiento Colectivo No Trival. Para lo cual se empleará el proceso de Poisson en autómatas binarias de 3 y 4 dimensiones que presenten un periodo tres (P3) o cuasiperiodo (QP3).

# 2 El proceso de Poisson

## 2.1 Distribución de Poisson

Los experimentos que resultan en valores numéricos de una variable aleatoria X, misma que representa el número de resultados durante el intervalo de tiempo dado o una región específica, frecuentemente se llaman experimentos de Poisson. El intervalo de tiempo dado puede ser de cualquier duración de tiempo, por ejemplo un minuto, un día, una semana, un mes o inclusive un año. De aquí que un experimento de Poisson puede generar observaciones para la variable aleatoria X que representa el número de algún evento en un lapso de tiempo dado.

Un experimento de Poisson sugiere del proceso de Poisson y tiene las siguientas propiedades:

1. El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región específicos es independiente de el número que ocurre en cualquier otro intervalo disjunto de tiempo o región del espacio disjunto.

2. La probabilidad de que un resultado muy sencillo ocurra en un intervalo de tiempo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la

longitud del intervalo de tiempo o al tamaño de la región.

3. La probabilidad de que más de un resultado ocurra en un intervalo de tiempo tan corto o en esa región tan pequeña es despreciable.

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson X que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado, indicado por t es:

$$p(x;t) = \frac{e^{-t}(t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

### 2.2 Aplicación del método de Poisson para el cálculo de las burbujas en los Autómatas Celulares

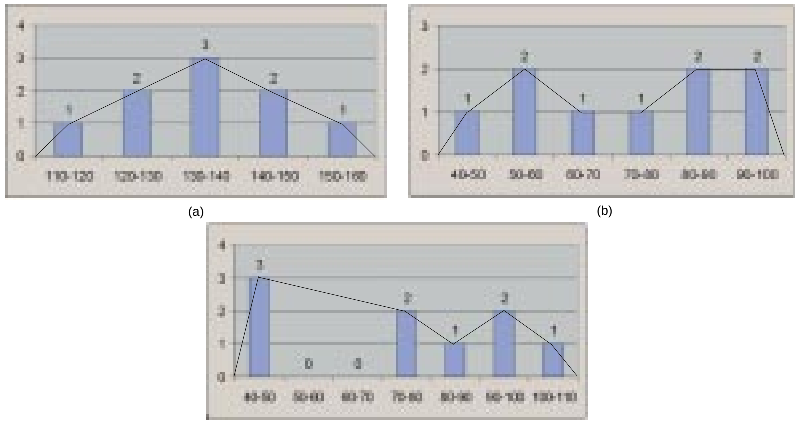
Como se mencionó anteriormente la variable aleatoria X de un proceso de Poisson representa la probabilidad de obtener algún tipo de evento, en determinado lapso de tiempo. Esto aplicádo a los autómatas Celulares para calcular la probabilidad de obtener una de las vecindades en las que se forma burbujas. Pero para saber si el proceso es eficiente se debe de realizar una prueba que consiste en que a una de las evoluciones de el mosaico(ver fig. más adelante) se divide en nueve cuadros y a cada uno de estos se le cuenta el número de células vivas (o puntos negros), para con estos datos elaborar un histograma, y ver si corresponde a una distribución de Poisson. En este artículo se analizará la regla 121 para cuatro dimensiones. A continuación se muestan los histogramas para las reglas.

## 3 Cómo calcular el Área de la Burbuja

Para calcular el área de las burbujas, primero se considerará las de dimensión 3 y la primera que presenta un P3 o QP3 es la regla totalística 33:

si sabemos que todas las vecindades son un total de 152, obtenemos primero su polinomio de Bernstein, de aquí lo que nos interesa son el total de vecindades que se transforman en uno y son

$$q^7 + 24q^2p^5 \tag{2}$$



(a) (b) (c)

Figura 1: Los histogramas pertenecen a las tres primeras generaciones de la regla totalistíca 121 en cuatro dimensiones: (a) la primera generación, es de media densidad y tuvo un total de 1371 células vivas, (b) la segunda es de alta densidad y tiene 2185, el (c) la tercera es de baja densidad, con 624 células vivas.

por lo tanto todas las vecindades que se transforman a uno son 24+1=25. Si este número lo dividimos por el total de vecindades posibles 25/152= 0.16, que es una proporción de las que se transforman a uno de todas las que existen, a el resultado lo representamos en términos de porcentaje (0.16)x100% =16% dicha cantidad la convertimos en fracción y resulta 1/6, esta última fracción representa la densidad total de las burbujas que están repartidas a lo largo del autómata.

Por otro lado el total de miembros que componen el mosaico es 34x34=1156 esto multiplicado por la densidad total de las burbujas produce los **centros de nucleación** que es la distancia que existe entre las vecindades que producen burbujas 1156 x (1/6)=192.3 esta es la proporción que existe en el mosaico de dos dimensiones, pero para saber el total de burbujas que se tienen se requiere pasarlo a una dimensión, por esto se le aplica raíz cuadrada y queda (192.3)ˆ(1/2) = 13.87, finalmente se divide por los elementos del mosaico (en una dimensión), esto para encontrar el tamaño aproximado de la burbuja 13.87/34 = 0.41.

De aquí en adelante sólo se pondrán los cálculos para los siguentes autómatas,

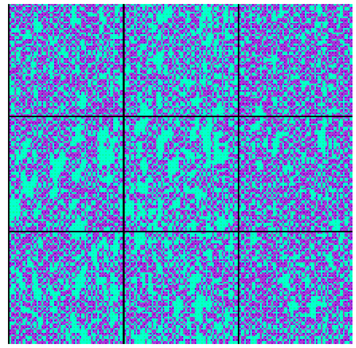


Figura 2: Regla totalística 33, vecindad de von Neumann

para la regla totalística 97.

Para la regla totalística 121, el total de vecindades que transforman a uno son 32, entonces la densidad total de la burbuja es:

32/152 =0.21, que es el 21%, aproximadamente 7/32
El centro de nucleación:
1156*(7/32) = 252.87
Finalmente el tamaño de la burbuja es:

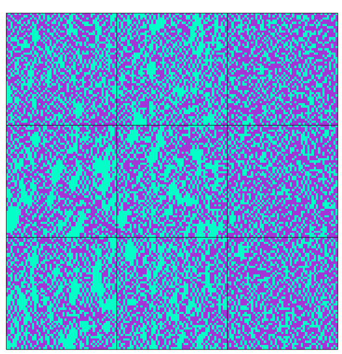


Figura 3: Regla totalística 97, vecindad de von Neumann

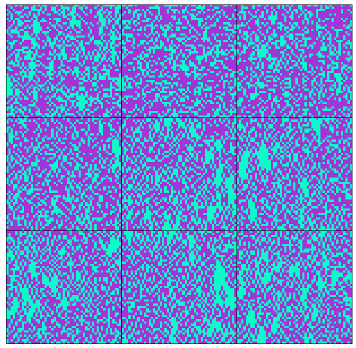


Figura 4: Regla totalística 121, vecindad de von Neumann

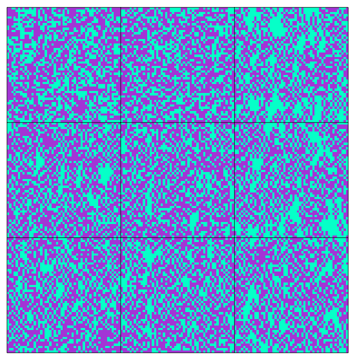


Figura 5: Regla totalística 123, vecindad de von Neumann

$(252.87)\hat{(}1/2)/34 = .47$

El total de vecindades que transforman a uno son 126 entonces la densidad total de la burbuja es: $126/152 = .82$, que es el 82%, aproximadamente 5/6. El centro de nucleación: $1156*(5/6) = 915.16$.

Finalmente el tamaño de la burbuja es $(915.16)\hat{(}1/2)/34 = .89$.

Para la regla totalística 123.

El total de vecindades que transforman a uno son 127 entonces la densidad total de la burbuja es: $127/152 = .83$, que es el 83%, aproximadamente 5/6.

El centro de nucleación: $1156*(5/6) = 915.16$

Finalmente el tamaño de la burbuja es:
$915.16)\hat{(}1/2)/34 = .88$

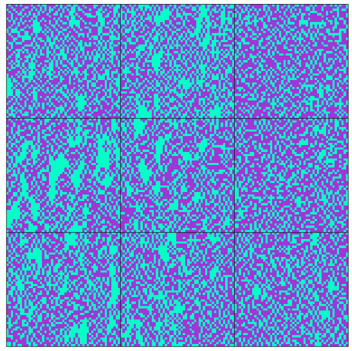


Figura 6: Regla totalística 161, vecindad de von Neumann

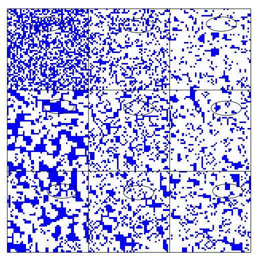


Figura 7: Regla totalística 57, vecindad de von Neumann

Para la regla totalística 161 El total de vecindades que transforman a uno son 26 entonces la densidad total de la burbuja es:
$26/152 = .17$, que es el 17% , aproximadamente 5/6

El centro de nucleación: $1156*(3/17) = 204$

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

$(204)\hat{}(1/2)/34 = .45$

Para cuatro dimensiones los cálculos son los mismos, sólo que ahora el tamaño del mosaico es de 50 por 50 esto hace un total de 2500 miembros en todo el mosaico y el número de vecindades totales es de 608.

Para la regla totalística 57

El total de vecindades que transforman a uno son 412 entonces la densidad total de la burbuja es:

$412/608 = .67$ que es el 67%, aproximadamente 2/3

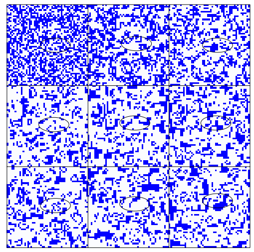


Figura 8: Regla totalística 97, vecindad de von Neumann

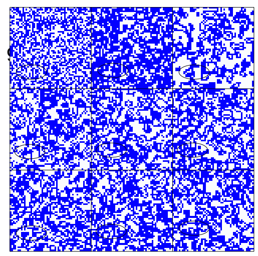


Figura 9: Regla totalística 114, vecindad de von Neumann

El centro de nucleación:
2500*(2/3) = 1666.66
Finalmente el tamaño de la burbuja es:
(1666.66)^(1/2)/50 =.82

Para la regla totalística 97
El total de vecindades que transforman a uno son 256 entonces la densidad total de la burbuja es:
256/608 = .42 que es el 42%, aproximadamente 17/40.
El centro de nucleación:
2500*(17/40) = 1062.5
Finalmente el tamaño de la burbuja es:
(1062.5)^(1/2)/50 =.65

Para la regla totalística 114
El total de vecindades que transforman a uno son 500 entonces la densidad total de la burbuja es:
500/608 =.82, que es el 82%, aproximadamente 5/6

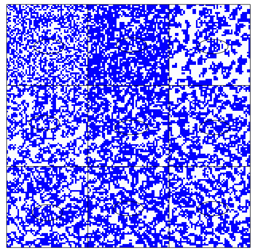


Figura 10: Regla totalística 116, vecindad de von Neumann

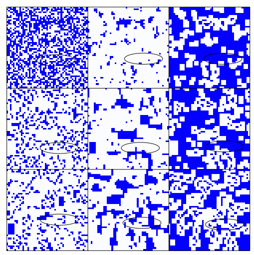


Figura 11: Regla totalística 120, vecindad de von Neumann

El centro de nucleación
2500*(5/6)=2083.33
Finalmente el tamaño de la burbuja es:
(2083.33)^(1/2)/50 =.91

Para la regla totalística 116
El total de vecindades que transforman a uno son 450 entonces la densidad total de la burbuja es:
450/608 = .74 que es el 74%, aproximadamente 23/31
El centro de nucleación:
2500*(23/31) = 1854.83
Finalmente el tamaño de la burbuja es:
(1854.83)^(1/2)/50 =.86

Para la regla totalística 120
El total de vecindades que transforman a uno son 510 entonces la densidad total de la burbuja es:
510/608 = .83 que es el 83% , aproximadamente 5/6

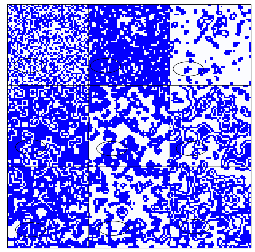


Figura 12: Regla totalística 121, vecindad de von Neumann

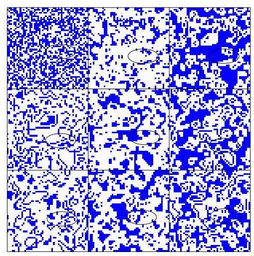


Figura 13: Regla totalística 195, vecindad de von Neumann

El centro de nucleación:
2500*(5/6) = 2083.33
Finalmente el tamaño de la burbuja es:
$(2083.33)\hat{(}1/2)/50 = .91$

Para la regla totalística 121
El total de vecindades que transforman a uno son 511 entonces la densidad total de la burbuja es:
511/608 = .84 que es el 84%, aproximadamente 5/6
El centro de nucleación: 2500*(5/6) = 2083.33
Finalmente el tamaño de la burbuja es:
$(2083.33)\hat{(}1/2)/50 = .91$

Para la regla totalística 195
El total de vecindades que transforman a uno son 147 entonces la densidad total de la burbuja es:
147/608 = .24, que es el 24%, aproximadamente 1/4 El centro de nucleación

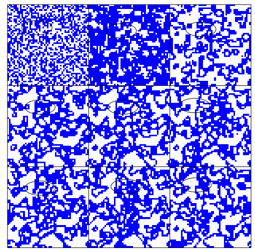


Figura 14: Regla totalística 240, vecindad de von Neumann

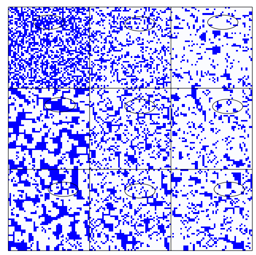


Figura 15: Regla totalística 289, vecindad de von Neumann

2500*(1/4) = 625

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

(625)$\hat{(}$1/2)/50 =.5

Para la regla totalística 240

El total de vecindades que transforman a uno son 450 entonces la densidad total de la burbuja es:

450/608 = .74, que es el 74%, aproximadamente 23/31

El centro de nucleación

2500*(23/31) = 1854.83

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

(1854.83)$\hat{(}$1/2)/50 =.86

Para la regla totalística 289

El total de vecindades que transforman a uno son 160 entonces la densidad total de la burbuja es: 160/608 = .26, que es el 26%, aproximadamente 1/4

El centro de nucleación

2500 *(1/4) = 625

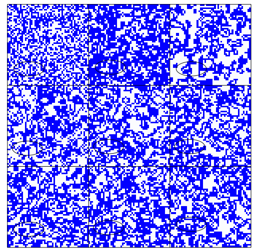


Figura 16: Regla totalística 321, vecindad de von Neumann

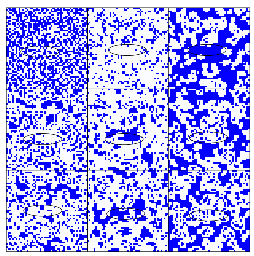


Figura 17: Regla totalística 323, vecindad de von Neumann

Finalmente el tamaño de la burbuja es:
$(625)\hat{(}1/2)/50 = .5$

Para la regla totalística 321
El total de vecindades que transforman a uno son 109 entonces la densidad total de la burbuja es:
$109/608 = .18$, que es el 18%, aproximadamente $7/40$
El centro de nucleación
$2500^*(7/40) = 437.5$
Finalmente el tamaño de la burbuja es:
$(437.5)\hat{(}1/2)/50 = .42$

Para la regla totalística 323
El total de vecindades que transforman a uno son 118 entonces la densidad total de la burbuja es:
$118/608 = .19$, que es el 19% , aproximadamente $1/5$
El centro de nucleación
$2500^*(1/5) = 500$

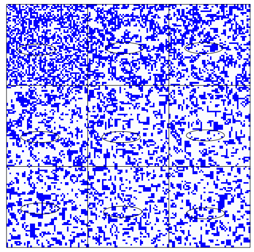


Figura 18: Regla totalística 353, vecindad de von Neumann

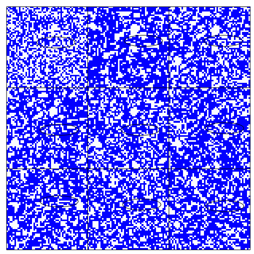


Figura 19: Regla totalística 368, vecindad de von Neumann

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

$(500)\hat{(}1/2)/50 = .45$

Para la regla totalística 353

El total de vecindades que transforman a uno son 265 entonces la densidad total de la burbuja es:

265/608 = .43, que es el 43%, aproximadamente 17/40

El centro de nucleación

2500*(17/40) = 1062.5

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

$(1062.5)\hat{(}1/2)/50 = .65$

Para la regla totalística 368

El total de vecindades que transforman a uno son 420 entonces la densidad total de la burbuja es:

420/608 = .7, que es el 7% , aproximadamente 22/31

El centro de nucleación

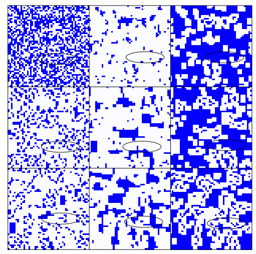


Figura 20: Regla totalística 385, vecindad de von Neumann

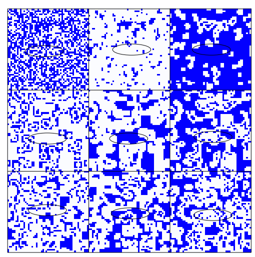


Figura 21: Regla totalística 387, vecindad de von Neumann

2500*(22/31) = 1774.2

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

(1774.2)^(1/2)/50 =.84

Para la regla totalística 385

El total de vecindades que transforman a uno son 49 entonces la densidad total de la burbuja es:

49/608 =.08, que es el 8%, aproximadamente 1/12

El centro de nucleación

2500*(1/12) = 208.33

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

(208.33)^(1/2)/50 =.29

Para la regla totalística 387

El total de vecindades que transforman a uno son 58 entonces la densidad total de la burbuja es:

58/608 = .09, que es el 9% , aproximadamente 1/10

El centro de nucleación

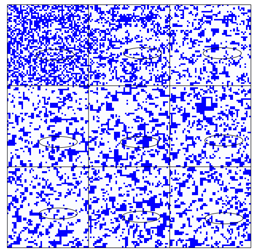


Figura 22: Regla totalística 417, vecindad de von Neumann

2500*(1/10) = 250

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

(250)$\hat{}$(1/2)/50 =.32

Para la regla totalística 417

El total de vecindades que transforman a uno son 205 entonces la densidad total de la burbuja es:

205/608 = .33, que es el 33% , aproximadamente 1/3

El centro de nucleación

2500*(1/3) = 833.33

Finalmente el tamaño de la burbuja es:

(833.33)$\hat{}$(1/2)/50 =.58

# 4 Conclusiones

Debido a los resultados obtenidos puedo concluir, primeramente que el proceso de Poisson es útil para el cálculo de la probabilidad de aparición de burbujas en autómatas celulares y que el tamaño de las burbujas disminuye entre más grande sea la dimensión con la que se este trabajando, esto lo podemos ver en el ejemplo de la reglas totalística 121 ya que el tamaño de la burbuja en tres dimensiones es .95 y en cuatro dimensiónes es .91.

Esto se entiende si sabemos que las burbujas son producto del error, que existe en las evoluciónes del autómata, y este se reduce cuando se incrementa la dimensión debido a que el traslape se reduce tal y como lo han mencionado en sus artículos los investigadores Hugues Chaté y Paul Manneville.

**Agradecimientos**

Quiero agradecer a mis padres, familia, al Dr. McIntosh, amigos, en especial a Genaro por su ayuda, a todos ellos gracias...

# Bibliografía

[1] Hemmingsson, Herrmann "On oscillations in C.A.," *Europhysics lett.* **23** 1-n (1993).

[2] Hemmingsson, Herrmann,Sorensen, Flyvberg, "What sinchronization," *Europh lett.* 1-n (1993).

[3] Hemmingsson, "A totalistic 3-D CA with quasiperiodic behavor," *Physica A.* 1-n (1992).

[4] Walpole y Mayers "Distribuciones discretas de probabilidad ," *Probabilidad y estadíistica* **tercera ed.** 1-n (1992).