

## Comportamiento colectivo en autómatas celulares

Ascelli Zamudio Vissuet

Universidad Nacional Autónoma de México, ENEP Acatlán

Lic. en Matemáticas Aplicadas y Computación

Se encontró que en algunos autómatas celulares ocurre un comportamiento colectivo no trivial, que contradice a la ley de los grandes números; el caso más interesante está representado por un período 3 o un pseudo-período 3. El objetivo de este trabajo es explicar este fenómeno, analizando los resultados obtenidos por diferentes investigadores (en especial, por Hugues Chaté y Paul Manneville).

### 1. Introducción

En la primera parte de éste reporte veremos que dos investigadores franceses, H. Chaté y P. Manneville presentaron en 1991 los resultados que obtuvieron numéricamente al experimentar con autómatas celulares de dimensión  $d \geq 2$ . El fenómeno que encontraron es contrario a lo que se esperaría observar según la ley de los grandes números; a este fenómeno lo llamaron comportamiento colectivo no trivial. Se han encontrado comportamientos colectivos de naturaleza similar en autómatas celulares y en redes de transformaciones acopladas, y por lo tanto, Chaté y Manneville dieron igual tratamiento a ambos [1].

En los autómatas celulares el espacio de estados es discreto, en este caso sólo utilizaremos dos estados: el 0 y el 1. La forma en que el autómata evoluciona está definida por una regla, que es una función que especifica a qué estado evolucionará cada célula, dependiendo de la configuración de la vecindad. En redes de transformaciones acopladas, el espacio de estados es continuo, y la regla de evolución es una función real de variable real:  $X_i^t \in R, 0 \leq X_i^t \leq 1$  es el estado de la célula  $i$  en el tiempo  $t$ .

En este caso se eligieron reglas de evolución totalísticas, i.e., aquellas en que se toma en cuenta

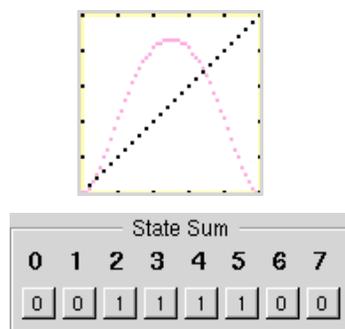


Fig. 1. Curva de una aproximación de campo promedio, con la estructura de "Life". Regla 60 en el autómata (2,3).

el valor de sus células; así se forma un número binario que luego es convertido en un número decimal que designa a la regla totalística. Se eligieron también vecindades grandes donde cada célula tiene igual número de vecinos en todas direcciones (vecindades isotrópicas); así, la probabilidad de que una célula pase del estado  $i, i \in \{0, 1\}$ , al estado 1 depende sólo de la suma de 1's que tiene dicha célula. Esta probabilidad de transición  $p_s$  puede ser:

- determinística:  $p_s \in \{0, 1\}$
- probabilística:  $0 < p_s < 1$

Los autómatas celulares estudiados por Chaté y Manneville originalmente fueron diseñados para investigar la validez de la aproximación de campo promedio, la cual busca la probabilidad de que un

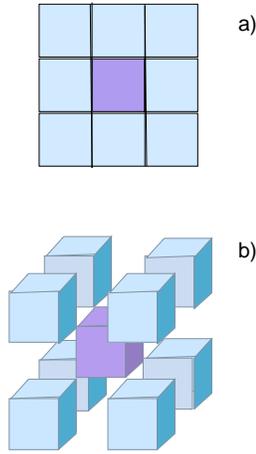


Fig. 2. a) Vecindad de Moore en  $d = 2$ ; b) vecindad centro-cúbica en  $d = 3$

estado aparezca en la siguiente generación. Las reglas de evolución consideradas tienen una estructura semejante al juego “*Life*” [6], ya que si todas las células de la vecindad son 0’s se evoluciona en un 0, y si son todas 1’s también se transforman en un 0. El tipo de vecindades que consideraron para sus investigaciones son von Neumann (en  $4 \leq d \leq 6$  y Moore (en  $d = 2$ ), y la vecindad centro-cúbica en  $d = 3$ .

En la segunda parte del reporte analizaremos la explicación que da J. Hemmingsson al fenómeno de Chaté y Manneville. Para Hemmingsson no se trata de un comportamiento colectivo, sino global, debido a la existencia de membranas que impiden la sincronización del comportamiento de todas las células del autómata celular. Además, Chaté y Manneville mencionan ciertos ingredientes que creen esenciales para que sea posible observar un comportamiento pseudo-periódico, por ejemplo, que la dimensión debe ser  $d \geq 4$ , sin embargo, en 1992 Hemmingsson publicó resultados diferentes. Él encontró una regla para un autómata celular en  $d = 1$  que presentaba un comportamiento con período 3. Lo interesante es que esta regla no tiene la estructura de “*Life*”, que es otro ingrediente importante para Chaté y Manneville.

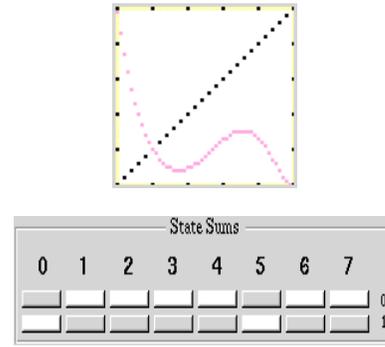


Fig. 3. Curva de una aproximación de campo promedio, con la estructura propuesta por Hemmingsson. Regla 33 en el autómata (2,3).

También en la segunda parte se expondrán los argumentos de Binder, quien en 1995 publicó que el comportamiento pseudo-periódico no se debe a la presencia de membranas y macrocélulas en el autómata celular.

Finalmente, en la tercera parte del reporte están las conclusiones de éste análisis de los resultados de los investigadores mencionados.

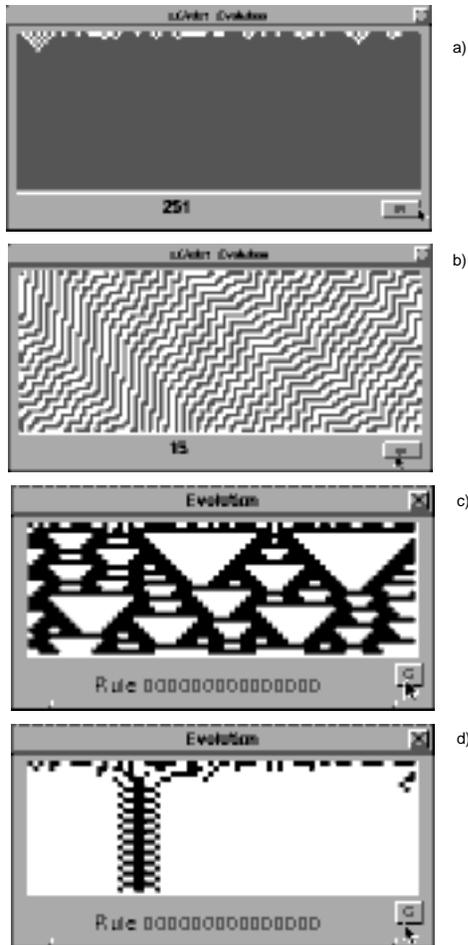


Fig. 4. a) Clase 1 de Wolfram, regla 251 en el autómata (2,1); b) Clase 2 de Wolfram, regla 15 en (2,1); c) Clase 3 de Wolfram, regla 120 en (2,3); d) Clase 4 de Wolfram, regla 200 en (2,3).

## 2. El comportamiento colectivo no trivial

Al decir “comportamiento” nos referimos a la manera en que evoluciona el autómata a través de las generaciones en el tiempo, este comportamiento se puede apreciar al graficar mediante puntos la densidad del autómata en el tiempo  $t$  (mapa de retorno). “Colectivo” se refiere a cantidades que dependen de todos los elementos o células del autómata, tal como la densidad o promedio de células en el estado 1. Un comportamiento colectivo no trivial ocurre cuando se observan varias densidades en la evolución del

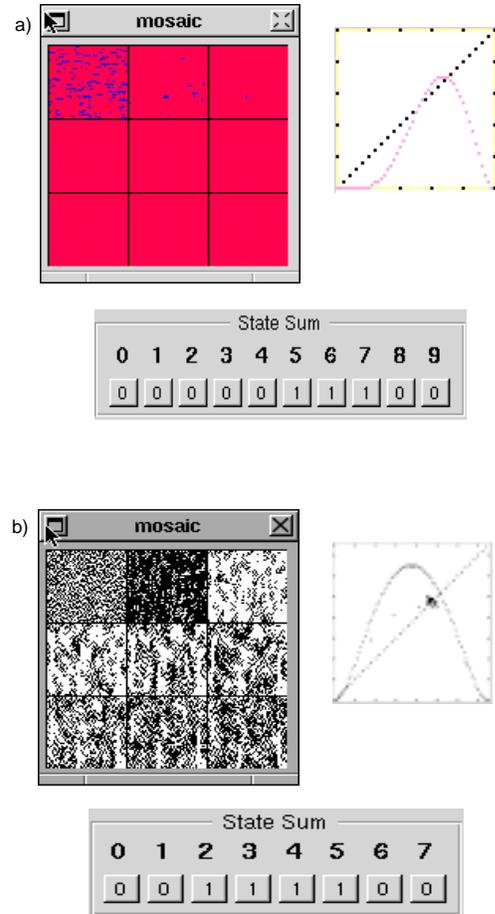


Fig. 5. a) Comportamiento localmente periódico con baja concentración final. Regla 224 en (2,4), vecindad de Moore en  $d = 2$ ; b) Comportamiento localmente periódico con alta concentración final. Regla 60 en (2,3), vecindad de von Neumann en  $d = 3$ . En ambos casos se muestra el plano con las primeras 9 generaciones, y el mapa de retorno.

autómata celular.

La evolución de los autómatas celulares estudiados tiene analogía con la clasificación hecha por Wolfram [6], que se comentará a continuación.

En las familias de reglas estudiadas, a partir de una configuración inicial aleatoria del autómata celular, con una densidad inicial  $c_0$ ,  $0 < c_0 < 1$  de células 1, se pueden observar 2 tipos de comportamiento: [1]

- (1) **Comportamiento localmente periódico**, para densidades muy grandes o muy pequeñas.

– **Con baja concentración final.** La concentración inicial  $c_o$  es muy alta, y rápidamente se llega a unas cuantas células en estado 1 en un mar de 0's, es decir, la concentración final es muy pequeña o nula. Este tipo de evolución tiene parecido con la clase 4 de Wolfram, ya que el autómata pasa por un estado transitorio largo, para finalmente quedar en algunas pequeñas estructuras periódicas.

– **Con alta concentración final.** La concentración inicial  $c_o$  es muy baja. Permanecen “vivas” (i.e., en el estado 1) más del 50 % de las células. Tiene parecido con la clase 2 de Wolfram, pues quedan estados transitorios cortos, ciclos periódicos cortos y pequeñas estructuras periódicas.

(2) **Comportamiento colectivo no trivial.** Se puede observar cuando el tamaño del autómata crece, es decir, cuando el número de células es muy grande. La evolución local de una célula o de un pequeño grupo de ellas tiene muchos cambios impredecibles en la densidad global del autómata celular ruido estadístico, i.e., dicha densidad llega a patrones caóticos. Por eso se podría decir que se parece a la clase 3 de Wolfram. Sin embargo, no se llega a un caos global (el caos global se da cuando a través de las evoluciones se encuentra que hay más de un valor para describir la densidad global del autómata). La densidad global no siempre es única, pueden ser varios puntos o nubes de puntos [1].

El teorema del límite central dice que “la media muestral  $\bar{Y}$  es asintóticamente normal con varianza  $s^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{n}$ ”, esto significa que la distribución de probabilidad de las  $n$  medias que se pueden obtener de una población se puede aproximar por medio de una distribución normal estándar, si  $n$  es grande [7]. (A la distribución normal también se le denomina distribución de Gauss o gaussiana).

De acuerdo con el teorema del límite central podemos decir que para un número grande  $n$  de células la estimación de la densidad de células “vivas”

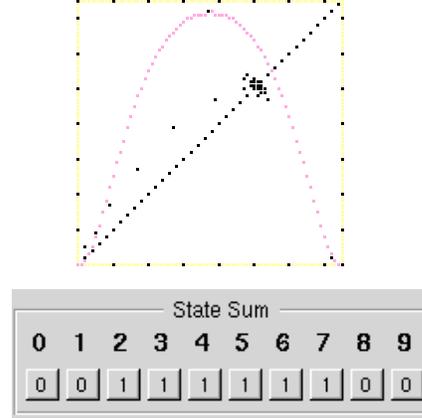


Fig. 6. Comportamiento colectivo con período 1. Mapa de retorno de la regla 252 en el autómata (2,4), vecindad de von Neumann en  $d = 4$ .

tiene una desviación estándar  $s = \frac{1}{\sqrt{n}}$  [6]. En otras palabras, el anillo o las nubes que se forman con los puntos en el mapa de retorno se definen mejor cuando crece el tamaño del autómata.

De acuerdo con Chaté y Manneville, hay ciertos ingredientes esenciales para que ocurra un comportamiento colectivo no trivial [1]:

- La **actualización sincronizada** de todas las células es muy importante. “Sincronizada” significa que todas las células del autómata evolucionan al mismo tiempo en cada una de las iteraciones. Para lograr la sincronización, es necesario que en todo el autómata haya comunicación instantánea. Al iterar asincrónicamente el comportamiento de cada célula o grupo de células reflejará el comportamiento de todo el autómata: un comportamiento trivial, de período igual a 1 (P1).
- Es necesaria la **dimensión**  $d \geq 4$ . A partir de  $d=4$  este tipo de comportamiento se hace frecuente. La dimensión debe ser finita para poder observar en el mapa de retorno la aproximación de campo promedio.
- La **evolución local** debe ser del tipo de “Life”, aunque no es necesaria una evolución local específica.
- Que el autómata celular sea **determinístico**, en vez de probabilístico, no es indispensable.

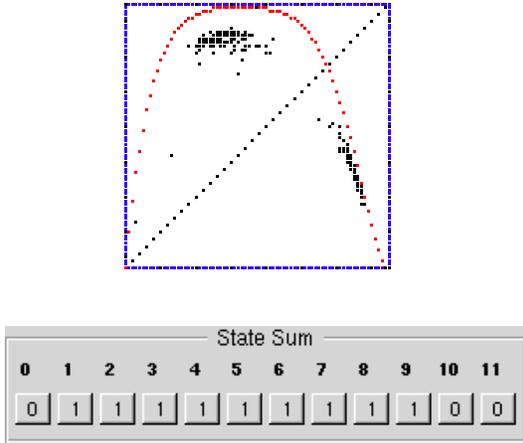


Fig. 7. Comportamiento colectivo con período 2. Mapa de retorno de la regla 1022 en (2,5), vecindad de von Neumann en  $d = 5$ .

Si las estimaciones de la densidad de células “vivas” siguen una distribución gaussiana [7], entonces la densidad en la configuración del autómata celular obedece a la ley de los grandes números [6]. Esto quiere decir que si la distribución de probabilidad de la media muestral tiene una varianza que disminuye conforme crece el número  $n$  de células, entonces la estimación de la media poblacional será muy cercana a su valor real, cuando  $n$  sea muy grande. Y por lo tanto, estaremos haciendo un buen cálculo de la densidad de células 1 del autómata.

La ley de los grandes números nos dice que la media muestral  $\bar{Y}$  converge en probabilidad a la media poblacional  $\mu$  cuando el tamaño  $n$  de la muestra crece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{Y} - \mu| \leq \xi) = 1$$

para cualquier número positivo  $\xi$ . Es por esto que en muchas investigaciones se obtiene el promedio de las mediciones, esperando obtener una mayor precisión en la estimación de la media poblacional [7].

En el caso de autómatas celulares y de redes de transformaciones acopladas, al crecer el número de células con que se experimenta, se esperaría

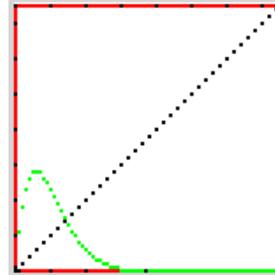


Fig. 8. Chaté y Manneville reportan un comportamiento colectivo con período 4 en la regla 2 en el autómata (2,6), vecindad de von Neumann en  $d = 6$ . En la figura no se observa, tal vez por ser diferente el número de células empleadas.

obtener un buen estimador de la densidad global (análoga a la media poblacional). Lo sorprendente es que en estas simulaciones se obtuvieron comportamientos periódicos y pseudo-periódicos en los que no hay una única densidad, sino varias. Esto es precisamente lo que caracteriza a un comportamiento no trivial. Cuando se presenta un comportamiento colectivo no trivial con período 3 en el mapa de retorno, se observan 3 nubes de puntos, es decir, 3 densidades diferentes. En el caso de pseudo-período 3, los vértices del toro triangular también indican 3 densidades. El interior de éste anillo o toro suele quedar vacío, es decir, la evolución del autómata no tiende a una densidad única, como se esperaría en base a la ley de los grandes números.

En un comportamiento colectivo no trivial la evolución local puede llegar a presentar casi cualquier configuración, es decir, es caótica; por lo tanto hay al menos un exponente de Lyapunov positivo (un número que indica el grado de caos local) [1]. “Los exponentes de Lyapunov miden la tasa de transmisión de información dentro de un autómata celular, y son un límite superior para la entropía, la cual mide el contenido de información de los patrones generados al evolucionar

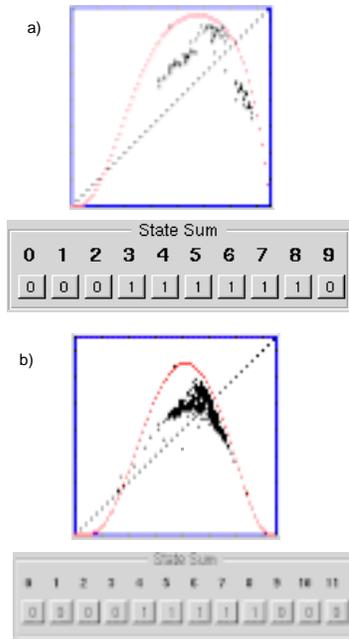


Fig. 9. Mapa de retorno que muestra comportamiento colectivo. a) Período 3, regla 504 en (2,4), vecindad de von Neumann en  $d = 4$ ; b) Pseudo-período 3, regla 496 en (2,5), vecindad de von Neumann en  $d = 5$ .

el autómata. La existencia de exponentes de Lyapunov positivos es una característica importante de los autómatas celulares de clase 3 ”[6].

Otra forma de medir el caos es ver al autómata como un conjunto de subsistemas con cierta correlación entre sí. El caos global del autómata debe crecer con el número de subsistemas, y por lo tanto, debería ser proporcional al número de células que forman el autómata. En un autómata celular caótico la densidad de células “vivas” no se estabiliza alrededor de uno o algunos valores, sino que toma muchos valores distintos.

No se originan cambios significativos en el comportamiento global de redes de transformaciones acopladas o de autómatas celulares cuando se hacen pequeñas modificaciones de la regla de evolución local, por eso se puede decir que el comportamiento colectivo no trivial es robusto. Basta con que  $d$  sea suficientemente grande para poder observar un comportamiento de este tipo.

La mayoría de las reglas de autómatas celulares

son robustas, pues su comportamiento se mantiene ante pequeños cambios hechos a dicha regla.

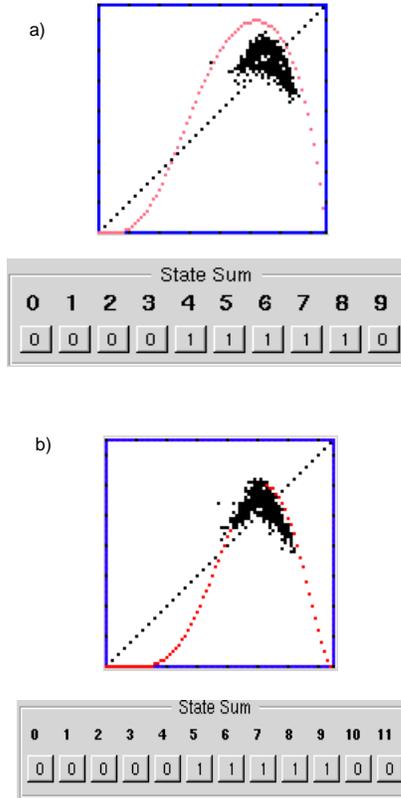


Fig. 10. Mapa de retorno que muestra el comportamiento colectivo con pseudo-período 3 a) de la regla 496 en (2,4), vecindad de von Neumann en  $d = 4$ ; b) de la regla 992 en (2,5), vecindad de von Neumann en  $d = 5$ .

### 2.1. Clasificación de los resultados

El comportamiento colectivo no trivial observado se puede clasificar en cuatro tipos: [1]

(1) **Comportamiento periódico**. Chaté y Manneville observaron comportamientos con período 1 hasta 4, representados por nubes de puntos en el mapa de retorno:

- **Período 1 (P1)** es el caso más usual; en él se presenta una sola nube de puntos.
- En el caso de **período 2 (P2)** se observan 2 nubes de puntos. Ocurre en  $d = 4, 5, 6$ .
- **Período 3 (P3)** es el comportamiento periódico más interesante, pues se observan 3 nubes de puntos. Ocurre pocas veces en  $d = 4$ , y con mayor frecuencia en  $d = 5, 6$ .

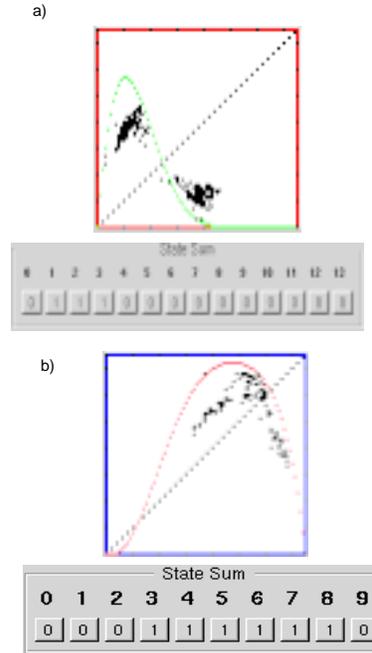


Fig. 11. Mapa de retorno que muestra el comportamiento colectivo a) comportamiento mixto (P2 x PP3i) de la regla 14 en (2,6), vecindad de von Neumann en  $d = 6$ ; b) intermitencia de período 3 (PP3i), regla 504 en (2,4), vecindad de von Neumann en  $d = 4$ .

- El **período 4 (P4)** es el caso menos frecuente, en él se pueden observar 4 nubes de puntos. Ocurre en  $d = 6$ .

(2) **Comportamiento pseudo-periódico**. Este comportamiento de pseudo-período 3 (PP3) empieza a ocurrir en  $d = 3$ , y su frecuencia aumenta conforme crece la dimensión  $d$  desde 4 hasta 6. Se observa gráficamente por un toro o anillo triangular, que tiene una mejor definición cuando el tamaño del autómata crece. Puede ser que éste toro triangular presente un contorno redondeado, o distorsionado.

(3) **Comportamiento mixto**. Aquí es posible observar que una misma regla en dimensión  $d = 6$  evoluciona con comportamientos diferentes que se alternan, y que pueden ser periódicos y/o pseudo-periódicos. Un caso frecuente es período 2 con un pseudo-período 3 (P2xPP3). También es posible observar un período 2 con un período 2 intermitente (P2xP2i) y período 2 con un período 3 in-

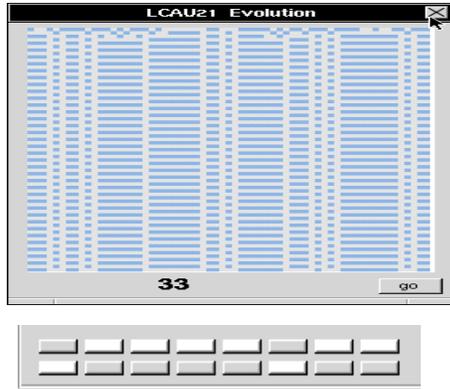


Fig. 12. Membranas (*paredes de Bloch*) que forman macrocélulas dentro del autómata celular, regla 33 en  $d = 1$ .

termitente (P2xPP3i).

(4) **Comportamiento intermitente.** La intermitencia se da cuando un período o pseudo-período sufre repentinas variaciones en su comportamiento, es decir, cuando un comportamiento se transforma en otro. En la intermitencia el estado irregular aparece por contaminación, i.e., nunca surge espontáneamente en medio de una región regular llena de 1's ó de 0's, sino por el progresivo efecto que sobre ella ejercen las regiones irregulares [6]. Puede ocurrir en  $d = 3, 4, 5$  un pseudo-período 3 que de pronto se convierte en P1 (PP3i), ó un período 2 intermitente (P2i) en  $d = 6$ . También hay intermitencia cuando dos comportamientos se presentan en la evolución P3/PP3 en  $d = 6$ , ó P1/P2 en  $d = 5$ .

Es posible que ocurra un **Comportamiento marginal** en  $d = 3, 4, 5, 6$ . Este caso se clasifica entre un comportamiento localmente periódico con baja o alta concentración final y un comportamiento colectivo. Su densidad final puede no ser homogénea, i.e., puede haber grandes regiones con células en cierto estado, y pequeñas regiones en el otro estado.

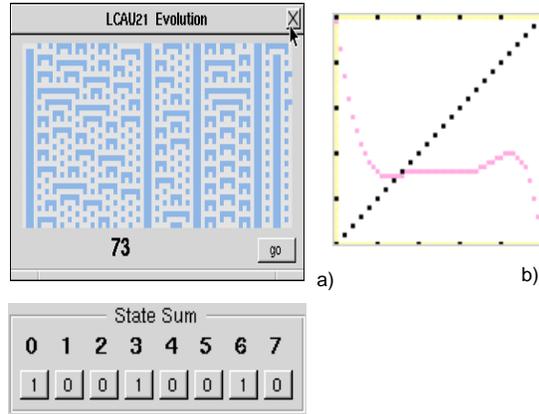


Fig. 13. Regla 73 en el autómata (2,1), vecindad de von Neumann en  $d = 1$ . a) Evolución que presenta membranas; b) Mapa de retorno.

### 3. Resultados publicados por otros autores

#### 3.1. Jan Hemmingsson

La investigación de Hemmingsson se enfoca a cómo partes separadas del autómata tienen acceso a la misma información. Esta división en subsistemas o macrocélulas es debida a las *paredes de Bloch* que se forman. Estas paredes o membranas están ubicadas aleatoriamente en el autómata celular, se conservan a través de las generaciones, tienen densidad finita, y entre 2 paredes adyacentes hay un número finito de células. Cada conjunto de células es una macrocélula aislada del resto, y dentro de ellas se dan ciclos o períodos. Las paredes no desaparecerán ni permitirán interacción alguna entre las macrocélulas. [4].

Para  $d = 1$  y  $d = 2$  es fácil encontrar las *paredes de Bloch*, sin embargo, para  $d \geq 3$  se hace difícil definir las. Por eso Hemmingsson dice que en  $d = 3$  no hay *paredes de Bloch*, pero que en su lugar hay una estructura “de cebolla”, es decir, diferentes capas que tienen células con el mismo número de vecinos 1. Cuando dichas capas interactúan (aunque hay poca interacción), el resultado es un comportamiento pseudo-periódico [4]. A causa de que hay poca interacción o

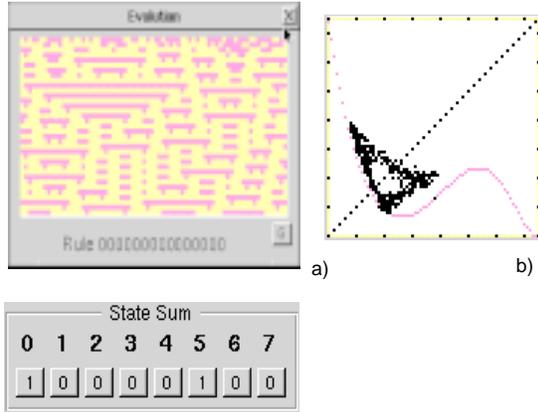


Fig. 14. Regla 33 en el autómata (2,3), vecindad de von Neumann en  $d = 3$ . a) Evolución que presenta membranas; b) Mapa de retorno que presenta un comportamiento colectivo no trivial de pseudo-período 3, en forma de anillo triangular.

acoplamiento, no parece adecuado describir a este tipo de autómatas como redes de transformaciones acopladas [2], contradiciendo así a Chaté y a Manneville. Éstos investigadores consideraron que se observaban comportamientos colectivos de naturaleza similar en los autómatas y en las redes de transformaciones acopladas, y dieron igual tratamiento a ambos [1].

Una explicación para la interacción de éstas macrocélulas sería una influencia externa sobre todo el autómata, pero en tal caso, el intercambio de información no sería lo suficientemente rápido [2]. La explicación que Hemmingsson apoya es que una configuración inicial homogénea (por medio de un generador de números aleatorios) le da a todas las macrocélulas que forman el autómata la misma información inicial, y entonces ya no será necesaria la comunicación entre dichas macrocélulas. Por lo tanto, la sincronización global se debe al estado inicial del autómata [2] [4]. Entre más grande sea el número de células, se hace más predecible la evolución del autómata, ya que para calcular la densidad global se obtiene una media sobre todas las macrocélulas [2].

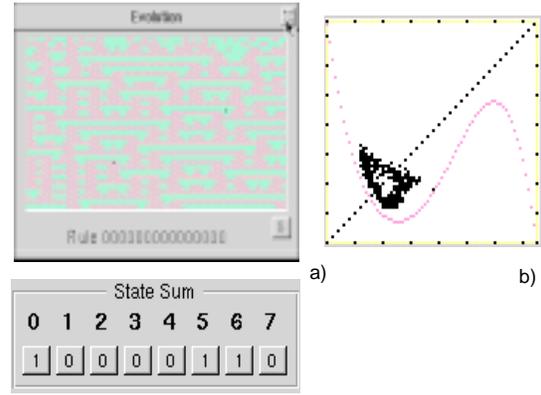


Fig. 15. Regla 97 en el autómata (2,3), vecindad de von Neumann en  $d = 3$ . a) Evolución que presenta membranas; b) Mapa de retorno que presenta un comportamiento colectivo no trivial de pseudo-período 3, en forma de anillo triangular.

Para Hemmingsson la evidencia de una sincronización global no justifica la sincronización en la evolución del autómata celular. Comenta que tal vez no sea necesaria la sincronización en la evolución para poder observar un comportamiento colectivo periódico o pseudo-periódico, y que por lo tanto, el comportamiento global observado por Chaté y Manneville no es un fenómeno colectivo [2].

En autómatas celulares de 1 dimensión, Hemmingsson experimentó con la regla 73 (que tiene una estructura diferente a “Life”) y su conjugada, la regla 109, en una vecindad de tamaño 3. En este autómata celular se encontraron *paredes de Bloch*. Iniciando con una configuración aleatoria, el autómata celular pasó por un estado transitorio y finalmente presentó un comportamiento con período tres [4], aunque Chaté y Manneville no lograron observar su fenómeno en  $d = 1$ . Por lo tanto, Hemmingsson encontró que la regla 73 en  $d = 1$  tiene algunas propiedades de un autómata celular de dimensión mayor [2]. Cabe aclarar que en  $d = 1$  la periodicidad observada es local (a nivel de vecindades o de regiones localizadas), porque a nivel global, la densidad del autómata tiende a período 1.

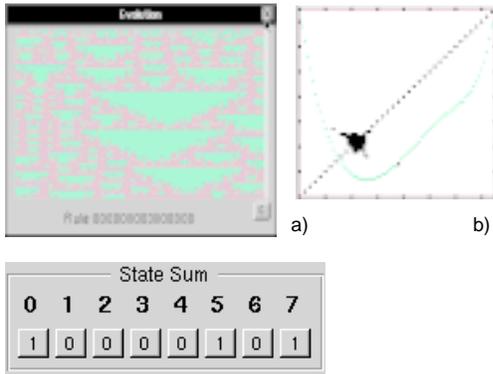


Fig. 16. Regla 161 en el autómata (2,3), vecindad de von Neumann en  $d = 3$ . a) Evolución; b) Mapa de retorno que presenta un comportamiento colectivo no trivial de pseudo-período 3, en forma de anillo triangular.

En dimensión  $d = 3$  Hemmingsson experimentó con la regla 33 (que también tiene una estructura diferente a “Life”) y su regla complemento, la regla 123, en una vecindad de von Neumann, con una configuración aleatoria y densidad de células “vivas” de 0.5, en un autómata de  $256^3$  células. Hemmingsson dice que ésta regla es la única totalística en  $d = 3$  que tiene un comportamiento pseudo-periódico en el mapa de retorno [2] [3], tal como el fenómeno observado por Chaté y Manneville, incluso con el mismo ruido estadístico. Con la regla 33 ocurre un comportamiento no trivial cuando se comienza con una densidad pequeña de células en estado 1. Si la densidad inicial se va a los extremos, i.e., todas las células en 0 ó todas en 1, entonces el comportamiento observado sería trivial [3]. Además, Hemmingsson encontró el número promedio de revoluciones completas en cada generación [2] [3]. Este número es -0.3371, i.e., aproximadamente cada 3 generaciones el toro triangular en el mapa de retorno da una vuelta completa. El signo negativo indica que el triángulo gira en el sentido del reloj.

Cabe mencionar que Hemmingsson no hace comentarios respecto al resto de las reglas. Simple-

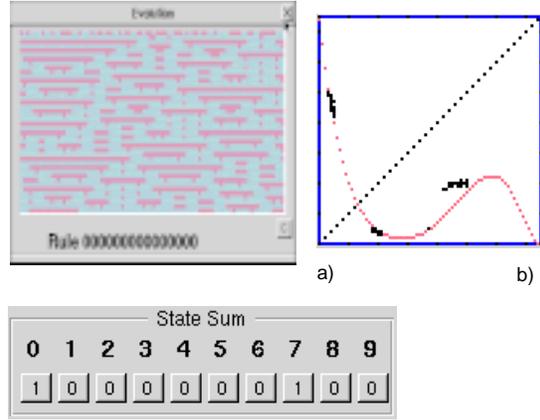


Fig. 17. Regla 129 en el autómata (2,4), vecindad de von Neumann en  $d = 4$ . a) Evolución; b) Mapa de retorno que presenta un comportamiento colectivo no trivial de período 3, en forma de tres nubes de puntos.

mente dice con cuáles trabajó y los resultados que obtuvo. Y tal vez está omitiendo algunas reglas que también presentan el comportamiento colectivo de período 3 ó de pseudo-período 3. Por ejemplo, H.V. McIntosh ha encontrado otras reglas totalísticas en  $d = 3$  con la estructura de la regla 33 de Hemmingsson que muestran el efecto de Chaté y Manneville: en la regla 97 ocurre un comportamiento colectivo no trivial pseudo-periódico. Y en  $d = 4$ , encontró la regla 129, en cuya evolución se observa un comportamiento de período 3. En la regla 161, aunque la curva del mapa de retorno no tiene la misma estructura, se observó un pseudo-período en  $d = 3$ .

### 3.2. P.-M. Binder

Tomó la regla en 3 dimensiones de Hemmingsson: la regla 33. Comparó el comportamiento de este modelo en un autómata de  $81^3$  células, tomando 2 configuraciones iniciales casi idénticas. Graficando, es posible observar que el patrón de las diferencias crece cada generación, formando casi un triángulo [5], empezando en un vértice y terminando en la base.

El crecimiento de las diferencias entre evolu-

ciones implica que la información de los cambios eventualmente se propaga a través de todo el autómata celular. Las tasas de transmisión de información a la derecha y a la izquierda están determinadas por la pendiente del patrón de diferencias, y dichas pendientes son exponentes de Lyapunov positivos [6], es decir, la razón de cambio del comportamiento del autómata se observa en la pendiente que tienen los lados del triángulo.

Binder argumenta que en el comportamiento pseudo-periódico del autómata celular las diferencias encontradas crecen en ambas direcciones (derecha e izquierda), y esto haría imposible la existencia de las membranas, y por lo tanto, de las macrocélulas [5]. Si existieran las membranas, tal vez no se podrían transmitir tan fácilmente los cambios ocasionados por la diferencia en la configuración inicial, y por lo tanto, no crecerían tanto las diferencias entre las evoluciones que se comparan. Binder parece haber demostrado la no existencia de membranas, y concluye que los resultados obtenidos por Hemmingsson en [2] no son una explicación para el fenómeno descrito por Chaté y Manneville en [1].

#### 4. Conclusiones

En la evolución de un autómata celular pueden ocurrir diferentes situaciones. Lo ordinario es que el comportamiento sea trivial, i.e., que la densidad final de células vivas sea única. Pero también se llega a observar el comportamiento no trivial, cuando no se presenta una única densidad final en el autómata celular. El comportamiento más interesante es el pseudo-período 3, representado gráficamente en el mapa de retorno por un anillo triangular, que se define mejor conforme crece el número de células del autómata.

Hay varias explicaciones para el comportamiento no trivial:

- La explicación de Chate y Manneville, luego de experimentar con reglas totalísticas con la estructura de “*Life*” en  $2 \leq d \leq 6$  es que se trata de un comportamiento colectivo, donde supuestamente se sincronizan todas las partes del autómata celular, que sólo es posible ver en dimensión  $d \geq 4$ .
- Por su parte, Hemmingsson enfatiza la existencia de macrocélulas a causa de membranas dentro del autómata. Y estas membranas no permiten que haya una sincronización. Para él, se trata de un comportamiento global. Hemmingsson experimentó con unas cuantas reglas, de estructura diferente a “*Life*”. Publicó sus resultados con dichas reglas (en  $d = 1$  y  $d = 3$ ), omitiendo el resto. Y en las reglas omitidas puede haber algo que lo contradiga. Una muestra de ello es que McIntosh ha encontrado otras reglas totalísticas (en  $d = 3$  y  $d = 4$ ), con la estructura del autómata de Hemmingsson, que también siguen un comportamiento no trivial de pseudo-período 3 ó de período 3. Algo que me parece curioso es que el pseudo-período 3 se observa con mejor definición en las reglas con la estructura en la curva del mapa de retorno propuesta por Hemmingsson, que en las reglas con la estructura de “*Life*”.
- Binder, luego de analizar el autómata propuesto por Hemmingsson, dice que tal vez no sea necesaria la existencia de macrocélulas para poder observar el comportamiento no trivial.

Por lo tanto, creo que aún no se ha logrado dar una explicación al comportamiento no trivial de pseudo-período 3 que convenza a los diferentes investigadores en el área. Tal vez se necesite experimentar no sólo con reglas totalísticas. O tal vez se necesita hacer experimentos en dimensiones mayores, para llegar a las verdaderas causas que rigen fenómeno; y después extenderlas a las reglas de autómatas celulares en dimensiones menores.

## 5. Agradecimientos

Quiero agradecer a la Academia Mexicana de Ciencias y al Instituto de aplicación de micro-computadoras de la UAP por la oportunidad, especialmente al Dr. H. V. McIntosh, por sus explicaciones, y por la enorme paciencia que nos tuvo. A J.M. Gómez, A. Cáceres y Genaro J., por sus valiosos comentarios y sus explicaciones. A la UNAM, mi escuela, por darme las bases que me permitieron realizar este reporte. A Beatriz Clavel Díaz, mi profesora en M.A.C., por todo lo que me ha enseñado, por apoyarme, por comprenderme, por ayudarme... gracias a ella muchas cosas se hicieron posibles. Al Dr. S. Chapa, por motivarnos a participar en el Verano. A M.C. González, jefa de la División de Matemáticas e Ingeniería y a B. Trueba, jefa de la Sección de M.A.C., de la E.N.E.P. Acatlán, por su apoyo para participar en este VIII Verano de la investigación científica. Y por su confianza y apoyo, agradezco a mi familia y amigos, en especial *a mi mejor amigo*.

## Referencias

- [1] H. Chaté, P. Manneville. *Collective behaviors in spatially extended systems with local interaction and synchronous updating*, Progress of Theoretical Physics. 87, 1991, pp 1-60.
- [2] J. Hemmingsson, J. Herrmann. *On oscillations in cellular automata* Europhysics letters 23, 1993, pp 629-634.
- [3] J. Hemmingsson. *A totalistic 3D cellular automata with quasiperiodic behavior* Physica A, 183, 1992, pp 255-261.
- [4] J. Hemmingsson, Sorensen, Flyvbjerg, Herrman. *What synchronization?* Europhysics letters, 23, 1993, pp 629-634.
- [5] P.-M. Binder. *Domains and synchronization in high-dimensional cellular automata* Physical Review W, 51, 1995, pp 839-840.
- [6] S. Wolfram. *Cellular Automata and Complexity* Addison-Wesley Publishing Co., U.S.A., 1994.
- [7] W. Mendenhall, D. Wackerly, R. Scheaffer. *Estadística Matemática con aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.