

# Teoría de Estructura Local

Gisela Montiel Espinosa

Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán, UNAM

March 17, 1999

## Resumen

A causa de la necesidad de predecir el comportamiento de un autómata celular se han desarrollado distintas técnicas estadísticas, con el fin de extraer sus rasgos más característicos. La Teoría de Estructura Local predice este comportamiento valiéndose principalmente de la regla de evolución y del tamaño de la red; se basa en el estudio de conjuntos de células en lugar de células individuales, reduciendo así la correlación entre ellas a lo largo de la evolución del autómata. La teoría de estructura local tiene la ventaja de volverse más exacta conforme su orden aumenta (tamaño del bloque).

# 1 Introducción

Un autómata celular es un sistema dinámico determinístico, cuyo espacio, tiempo y estados son discretos. Específicamente, un autómata celular se compone de un arreglo de células, que pueden tomar un número finito de estados en un tiempo discreto [3]. En la nueva generación, el nuevo estado de la célula depende de su propio estado y del estado de sus vecinos de una generación anterior. Cada célula obedece a la misma regla, y los estados de todas las células se actualizan de manera sincronizada.

En este reporte trabajaremos con autómatas celulares lineales, es decir, imaginemos una hoja cuadrículada donde cada cuadro representa una célula y cada renglón representa tanto el tamaño de la red como una generación del autómata.

El objetivo de la teoría de estructura local es predecir la evolución del autómata (es decir, calcular cuantas células vivas habrá en cada renglón en la hoja cuadrículada), por medio del estudio de la densidad de su configuración. La densidad es la característica más simple del autómata de escoger una célula al azar en algún momento en particular de su evolución y encontrar que esta en el estado 1.

Cuando se estudia probabilísticamente la evolución de un autómata, no es correcto pensar que la evolución de las células que forman la vecindad es independiente, ya que comparten una parte de su vecindario (traslape) y evolucionan de acuerdo a reglas determinísticas.

Una mejor aproximación se puede dar trabajando con probabilidades de un conjunto de células, para abarcar la probabilidad de su traslape de células en sus vecindades y así reducir la correlación de las células a lo largo de la evolución. A dichos conjuntos de células se les llama *bloque*; y pueden ser del tamaño que uno desee. El tamaño de bloque que uno defina será igual al orden de la Teoría de Estructura Local.

## 1.1 Antecedentes

Una de las teorías más utilizadas en la predicción de la densidad en la configuración de un autómata es la Teoría de Campo Medio (*Mean Field Theory*), la cual se define como

$$P^{t+1} = \sum_{\alpha|\tau(\alpha)=1} P^{\#1(\alpha)}(1-P)^{\#0(\alpha)} \quad (1)$$

Que es la suma de las probabilidades de las vecindades que asignan el estado 1 en la siguiente generación. Sin embargo, esta teoría asume que las probabilidades de cada célula son independientes, y por lo ya comentado del traslape, podemos notar que cae en un error. Es decir la Teoría de Campo Medio, supone que no existe la correlación entre células a lo largo de la evolución.

## 2 Fundamentos

### 2.1 Notación

Trabajando con un autómata celular en una red unidimensional, asignaremos a cada entero  $i$  una célula  $b_i$ . Cada célula puede tener cualquiera de los  $\mathbf{k}$  estados, donde  $\mathbf{k}$  sea finito. Un bloque de estados específicos será

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (2)$$

y se denotará como  $\mathbf{B}$  o  $\mathbf{B}_n$ .  $|B|$  denotará la longitud del bloque  $\mathbf{B}$ ; por ejemplo  $|B_n| = n$ . La aplicación de la regla a un autómata se denotará como

$$\tau(B), \quad (3)$$

la cual transforma un bloque de tamaño  $(\mathbf{n}+2\mathbf{r})$  en un bloque de tamaño  $\mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{r}$  es el radio.

### 2.2 Operadores de Truncamiento

Los operadores de truncamiento L (*left*) o R (*right*) transforman un bloque  $\mathbf{B}$  o  $\mathbf{B}_n$  de tamaño  $\mathbf{n}$  a un bloque de tamaño  $(\mathbf{n}-1)$ . Es decir, si

$$B_n = (b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (4)$$

entonces

$$LB_n = (b_2, b_3, \dots, b_n) \quad (5)$$

y

$$RB_n = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \quad (6)$$

Nótese que si L o R se aplica a un bloque de longitud 1 se produce el bloque nulo.

### 2.3 Función de Probabilidad de Bloques

Una transformación

$$P_n de (B_n, B_{n-1}, \dots, B_0) \quad (7)$$

en los reales es una *Función de Probabilidad de Bloques de orden n* si satisface las *Condiciones de Consistencia de Kolmogorov*.

$$P_n(B) \geq 0 \quad para \quad |B| = 0, 1, \dots, n. \quad (8)$$

Determina que la probabilidad de un bloque B, no puede ser negativa.

La segunda condición

$$\sum_{B \in B_m} P_n(B) = 1 \quad para \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (9)$$

Dice que la probabilidad de un bloque con los n estados es igual a 1. En particular, la función de probabilidad del bloque nulo es 1 bajo todas las funciones de probabilidad de bloques. Las siguientes condiciones

$$P_n(B') = \sum_{B|RB=B'} P_n(B) \quad para \quad |B'| < n, \quad (10)$$

y

$$P_n(B') = \sum_{B|LB=B'} P_n(B) \quad para \quad |B'| < n, \quad (11)$$

determinan que la suma de las probabilidades de dos bloques que tengan un subbloque en común será igual a la probabilidad del subbloque.

## 2.4 Extensión de Bayes

Para tomar en cuenta la correlación entre las células a través de la evolución de un autómata utilizaremos la extensión de Bayes, que es un proceso para estimar las probabilidades de bloques grandes en términos de probabilidades de bloques pequeños contenidos en los grandes.

Para estimar la probabilidad de un bloque dado de tamaño  $(\mathbf{n}+2\mathbf{r})$ , se multiplican las probabilidades de todos los bloques de tamaño  $\mathbf{n}$  que contenga; y se divide entre los bloques de tamaño  $(\mathbf{n}-1)$  formados por las intersecciones de los bloques de tamaño  $\mathbf{n}$ .

*Ejemplo.* Tomemos un bloque de tamaño 5 que transforma a un bloque de tamaño 3

$$B_5 = (a, b, c, d, e) \quad (12)$$

los bloques de tamaño 3 que contiene son

$$B_3 = (a, b, c) \quad B_3 = (b, c, d) \quad B_3 = (c, d, e) \quad (13)$$

y sus intersecciones son

$$(a, b, c) \cup (b, c, d) = (b, c) \quad (b, c, d) \cup (c, d, e) = (c, d) \quad (14)$$

Podemos notar que estos bloques se pueden obtener usando los operadores de truncamiento, véase la figura 1.

## 3 Teoría de Estructura Local

Una asignación de probabilidad a bloque de todos los tamaños se llama medida de probabilidad, o simplemente medida. La teoría de estructura local predice, de manera directa, a partir de la descripción de la regla, las propiedades estadísticas invariantes de la misma. Auxiliándose de la extensión de Bayes la teoría de estructura local [2] define la probabilidad de obtener un bloque  $\mathbf{B}'$  en un tiempo  $(\mathbf{t}+1)$  de la siguiente manera,

$$P_n^{t+1}(B') = \sum_{B \in B_{n+2r}} \delta(\tau(B), B') \frac{P_n^t(R^2B)P_n^t(RLB)P_n^t(L^2B)}{P_n^t(R^2LB)P_n^t(L^2RB)} \quad (15)$$

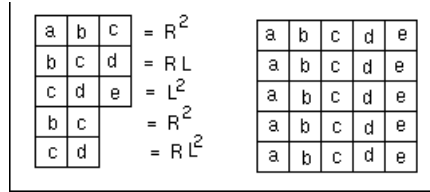


Figura 1: Aplicación de los operadores de truncamiento a un bloque de tamaño 5

nótese que el exponente 2 en los operadores de truncamiento significa aplicar dicho operador 2 veces y

$$\delta(\tau(B), B') \tag{16}$$

toma el valor de 1 si al aplicar la regla a un bloque  $\mathbf{B}$  transforma al bloque  $\mathbf{B}'$  y cero de lo contrario.

La ecuación (14) realiza la suma de las probabilidades de aquellos bloques de tamaño  $(\mathbf{n}+2\mathbf{r})$  que generen el bloque de tamaño  $\mathbf{n}$  deseado. El cociente representa la extensión de Bayes, donde se multiplican las probabilidades de los bloques de tamaño  $\mathbf{n}$  contenidos en el bloque de tamaño  $(\mathbf{n}+2\mathbf{r})$  y se divide entre el producto de las probabilidades de las intersecciones de dichos bloques de tamaño  $\mathbf{n}$ .

La teoría de estructura local considera que la probabilidad de un bloque depende sólo de la secuencia de estados de las células que definen el bloque, no de su localización [1].

## 3.1 Ejemplos

Para ilustrar los conceptos plasmados en el reporte, analizaremos un autómata (2,1) en la regla 22, para la teoría de estructura local de orden 1 y 2.

### 3.1.1 Ejemplo 1. Teoría de Estructura Local de orden 1

En un autómata (2,1) necesitamos un bloque de tamaño 3 que al evolucionar se convierta en un bloque de tamaño 1, por lo que nos damos cuenta que los bloques son las diferentes vecindades de la regla.

$$\begin{array}{rcl}
 000 & - & 0 \\
 001 & - & 1 \\
 010 & - & 1 \\
 011 & - & 0 \\
 100 & - & 1 \\
 101 & - & 0 \\
 110 & - & 0 \\
 111 & - & 0
 \end{array} \tag{17}$$

Siguiendo la fórmula (14), notamos que solo hay 3 bloques que mapean a 1, la densidad que nos interesa; por lo tanto la regla queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 P_1^{t+1}(1) &= \frac{P_1^t(0)P_1^t(0)P_1^t(1)}{1} \\
 &+ \frac{P_1^t(0)P_1^t(1)P_1^t(0)}{1} \\
 &+ \frac{P_1^t(1)P_1^t(0)P_1^t(0)}{1} \\
 &= qqp + qpq + pqq \\
 &= q^2p + q^2p + q^2p \\
 &= 3q^2p
 \end{aligned} \tag{18}$$

observemos que la teoría de estructura local de orden 1 es igual que teoría de campo medio. Por lo tanto podemos decir que la teoría de estructura local generaliza a teoría de campo medio [2]. En el paquete LCAU en ambiente NextStep o NXLCAU, realizado por el Dr. Harold V. McIntosh para el análisis de autómatas celulares; existe una opción que realiza el estudio probabilístico de autómatas. Ahí podemos encontrar la opción de *Mean Field*, que realiza la gráfica de la función de densidad de probabilidad del autómata, o bien, la gráfica correspondiente a la teoría de estructura local de orden 1.

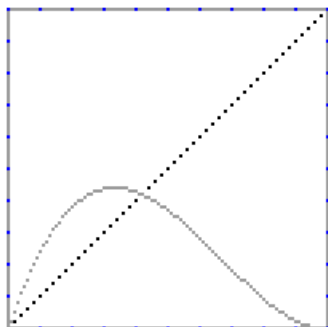


Figura 2: Función de densidad de la regla 22

### 3.1.2 Ejemplo 2. Teoría de Estructura Local de orden 2

En un autómata (2,1) necesitamos un bloque de tamaño 4 que al evolucionar se convierta en un bloque de tamaño 2.

A continuación se muestran todos los posibles bloques de 4 células (ancestros) así como sus hijos (cadenas resultantes) después de aplicarles la regla 22.

$$\begin{array}{ll}
 0000 - 00 & 1000 - 10 \\
 0001 - 01 & 1001 - 11 \\
 0010 - 11 & 1010 - 01 \\
 0011 - 10 & 1011 - 00 \\
 0100 - 11 & 1100 - 01 \\
 0101 - 10 & 1101 - 00 \\
 0110 - 00 & 1110 - 00 \\
 0111 - 00 & 1111 - 00
 \end{array} \tag{19}$$

Ahora el problema se transforma en el cálculo de una cadena de dos elementos. Suponga que deseamos calcular la probabilidad de que aparezca la cadena 01 (en realidad puede ser cualquier cadena como mas tarde veremos, ya que nuestro objetivo final es el cálculo de una la aparición del estado 1, es decir una cadena cuyo elemento es 1).

Para llevar a cabo este cálculo se tiene que

$$P_2^{t+1}(01) = P_2^t(0001) + P_2^t(1010) + P_2^t(1100) \tag{20}$$



Es decir, la probabilidad de que aparezca una cadena es igual a la suma de la probabilidad de que se den sus ancestros.

Sabemos que la probabilidad de que aparezca 0001 es:

$$P_2^{t+1}(0001) = \frac{P_2^t(00)P_2^t(00)P_2^t(01)}{P_2^t(0)P_2^t(0)} \quad (21)$$

que la probabilidad de que se de la cadena 1010 es:

$$P_2^{t+1}(0101) = \frac{P_2^t(01)P_2^t(10)P_2^t(01)}{P_2^t(1)P_2^t(0)} \quad (22)$$

y finalmente la probabilidad de que se aparezca la cadena 1100 es:

$$P_2^{t+1}(1100) = \frac{P_2^t(11)P_2^t(10)P_2^t(00)}{P_2^t(1)P_2^t(0)} \quad (23)$$

Por lo tanto, la probabilidad de que se de la cadena 01 estara definida por:

$$\begin{aligned} P_2^{t+1}(01) &= \frac{P_2^t(00)P_2^t(00)P_2^t(01)}{P_2^t(0)P_2^t(0)} \\ &+ \frac{P_2^t(01)P_2^t(10)P_2^t(01)}{P_2^t(1)P_2^t(0)} \\ &+ \frac{P_2^t(11)P_2^t(10)P_2^t(00)}{P_2^t(1)P_2^t(0)} \end{aligned} \quad (24)$$

o

$$\begin{aligned} P_2^{t+1}(01) &= \frac{P_2^t(00)P_2^t(00)P_2^t(01)}{(P_2^t(00)+P_2^t(01))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\ &+ \frac{P_2^t(01)P_2^t(10)P_2^t(01)}{(P_2^t(11)+P_2^t(01))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\ &+ \frac{P_2^t(11)P_2^t(10)P_2^t(00)}{(P_2^t(11)+P_2^t(01))(P_2^t(11)+P_2^t(01))} \end{aligned} \quad (25)$$

donde por las condiciones de Kolmogorov podemos expresar la probabilidad de que aparezca 01 en términos homogéneos, es decir, en términos de cálculos de bloques de 2 células, ya que:

$$\begin{aligned} P^{t+1}(0) &= P^t(00) + P^t(01) \\ P^{t+1}(1) &= P^t(11) + P^t(10) \end{aligned} \quad (26)$$

Como se puede apreciar de esta ecuación para calcular la probabilidad de que aparezca la cadena 01, se tiene que calcular la probabilidad de las cadenas 00, 10 y 11. O en otras palabras las probabilidades de que aparezcan todas los ancestros de las cadenas de dos elementos: las cadenas de cuatro elementos.

Siguiendo pasos similares a los del cálculo de la probabilidad de 01, se tiene que la probabilidad de que aparezca 00, 01 y 11. Entonces la solución del cálculo de la probabilidad de 01 esta dado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
P_2^{t+1}(00) = & \\
& \frac{P_2^t(11)P_2^t(11)P_2^t(11)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(01)+P_2^t(11))} \\
& + \frac{P_2^t(11)P_2^t(11)P_2^t(10)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(01)+P_2^t(11))} \\
& + \frac{P_2^t(11)P_2^t(10)P_2^t(01)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\
& + \frac{P_2^t(10)P_2^t(01)P_2^t(11)}{(P_2^t(00)+P_2^t(01))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\
& + \frac{P_2^t(01)P_2^t(11)P_2^t(10)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(01)+P_2^t(11))} \\
& + \frac{P_2^t(00)P_2^t(00)P_2^t(00)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(01)+P_2^t(11))} \\
& + \frac{P_2^t(01)P_2^t(11)P_2^t(11)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(01)+P_2^t(11))}
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
P_2^{t+1}(01) &= \\
&\frac{P_2^t(00)P_2^t(00)P_2^t(01)}{(P_2^t(00)+P_2^t(01))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\
&+ \frac{P_2^t(01)P_2^t(10)P_2^t(01)}{(P_2^t(11)+P_2^t(01))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\
&\frac{P_2^t(11)P_2^t(10)P_2^t(00)}{(P_2^t(11)+P_2^t(01))(P_2^t(11)+P_2^t(01))}
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
P_2^{t+1}(10) &= \\
&= \frac{P_2^t(00)P_2^t(01)P_2^t(11)}{(P_2^t(00)+P_2^t(01))(P_2^t(01)+P_2^t(11))} \\
&+ \frac{P_2^t(01)P_2^t(10)P_2^t(01)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\
&\frac{P_2^t(10)P_2^t(00)P_2^t(00)}{(P_2^t(00)+P_2^t(01))(P_2^t(00)+P_2^t(01))}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
P_2^{t+1}(11) &= \\
&\frac{P_2^t(00)P_2^t(01)P_2^t(10)}{(P_2^t(00)+P_2^t(01))(P_2^t(01)+P_2^t(11))} \\
&+ \frac{P_2^t(01)P_2^t(10)P_2^t(00)}{(P_2^t(01)+P_2^t(11))(P_2^t(00)+P_2^t(01))} \\
&\frac{P_2^t(10)P_2^t(00)P_2^t(01)}{(P_2^t(00)+P_2^t(01))(P_2^t(00)+P_2^t(01))}
\end{aligned} \tag{30}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones tendremos la probabilidad para todas las posibles cadenas de dos estados, es decir las cadenas 00,01,10 y

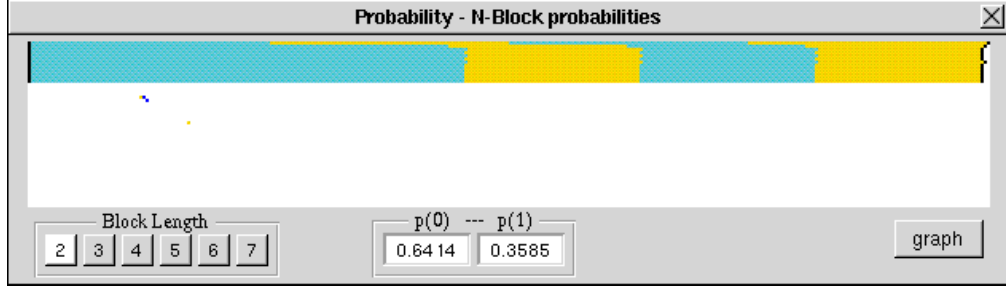


Figura 3: Gráfica de la probabilidad de un bloque de tamaño 2

11. Pero lo que buscamos nosotros es la probabilidad de aparición del estado 1, una vez más por Kolmogorov, tenemos que sumando dos de nuestros anteriores resultados, en particular

$$P(1) = P(11) + P(01) \quad (31)$$

tendremos la probabilidad de que aparezca el estado uno.

En el paquete NXLCAU podemos encontrar también la opción N-Block, que realiza la gráfica de la probabilidad de bloques de tamaño  $n$ . En dicha gráfica, cada barra es uno de los bloques de tamaño  $n$  que se pueden formar; y el ancho de cada uno depende del número de bloques de tamaño  $(n+2r)$  que transforman en un bloque de tamaño  $n$ .

En la figura 3 mostramos dicha gráfica. Por ejemplo en la gráfica 3 la primera columna representa las transformaciones al bloque (00), la segunda al bloque (01), la tercera al bloque (10) y por último al bloque (11). Dado que la regla 22 transforma en su mayoría a 0, la columna mas ancha es la primera.

## 4 Conclusiones

A pesar de que la teoría de estructura local se convierte en una herramienta muy exacta conforme aumenta su orden, el polinomio de probabilidad aumenta su grado; por lo que sería una locura iterarlo para predecir futuras evoluciones. Quizá esta sea la razón más poderosa por la que se use la teoría

de campo medio para la predicción de la densidad de un autómata en futuras generaciones.

## Bibliografía

- [1] Howard A. Gutowitz, *Classification of Cellular Automata According to their Statistical Properties* Laboratory of Mathematical Physics, The Rockefeller University 1230 York Avenue, Box 75. New York, New York 10021-6399.
- [2] H. A. Gutowitz, J. D. Victor y B. W. Knight, *Local Structure Theory for Cellular Automata* Physica D, 28, 18-48 (1987)
- [3] Howard A. Gutowitz, *Statistical Properties of Cellular Automata in the Context of Learning and Recognition*