

# El traslape de las vecindades y la aproximación de la teoría del campo promedio en la predicción del comportamiento colectivo no trivial

José Manuel Gómez Soto

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.,  
Sección de Computación,  
Departamento de Ingeniería Eléctrica,  
Av. Politécnico Nacional No. 2108, Col. Lindavista, D.F., México.

Verano, 1998

## Resumen

Es bien sabido que la teoría del campo promedio tiene márgenes de error en la predicción de la evolución de un autómata celular. Este hecho se debe a que asume independencia entre los estados de las células y un autómata celular no siempre cumple con esta premisa. Como parte de la evaluación de este método, Hughes Chaté y Paul Manneville reportaron que falla para predecir el comportamiento de un autómata celular en altas dimensiones, en particular la incapacidad de la aproximación del campo promedio para prever un comportamiento colectivo no trivial. En este documento se hace el estudio del traslape en las vecindades de Moore y von Neumann en tres, cuatro, cinco y seis dimensiones. La idea principal es ilustrar el comportamiento de la aproximación del campo promedio en varios niveles de traslape y ver si existe correlación entre ambos. Dado que la vecindad de von Neumann disminuye los traslapes a medida en que aumenta la dimensión (como aquí mismo se muestra), son analizados autómatas celulares con esta vecindad en varias dimensiones. Los autómatas utilizados en el análisis

presentan el fenómeno de Chaté y Manneville y tienen en común el mismo diseño que el autómata de Hemmingsson.

# 1 Antecedentes

El cálculo de probabilidades en autómatas celulares ha sido un tema de considerable atención. Las funciones de probabilidad que representan la regla de evolución fueron aplicadas por Dresden y Wong [3] en 1975; y una manera para calcular la probabilidad fue propuesta por Schulman y Seiden [7], en 1978. Procedimientos más sofisticados como el cálculo de la probabilidad de un bloque tratado por Lipman y Shamma [8] y la generalización presentada en la teoría de la estructura local de Gutowitz [4] [5] [6], fueron de las últimas contribuciones al área.

La teoría del campo promedio es una de las técnicas presentadas en estos trabajos y es parte de la herencia de la mecánica estadística. La idea básica es que dado que no es posible estimar con precisión el comportamiento de un autómata celular, se propone predecir información más general como el promedio de células. La aproximación mediante el campo promedio realiza lo anterior con la ventaja de sintetizar la composición de funciones de un autómata celular al cálculo iterativo de una función de una sola variable.

$$P^{t+1} = F(P^t) \quad (1)$$

Donde  $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{t}}+1)$  es la probabilidad (densidad) de aparición de un estado en el instante  $\mathbf{t}+1$  y  $\mathbf{F}$  es la función que determina ese nuevo valor teniendo como argumento la densidad actual.

Varios autores han evaluado la precisión de la aproximación del campo promedio, Gutowitz en su tesis doctoral [4] realiza un análisis sobre varios autómatas celulares y muestra el nivel de divergencia entre el método y la evolución real del autómata. Chaté y Manneville también llevaron a cabo un análisis de evaluación en altas dimensiones, en donde encontraron el fenómeno conocido ahora como *comportamiento colectivo no trivial* [2] y el cual según los autores contradecía las predicciones de la teoría del campo promedio.

Aquí se muestran autómatas celulares binarios en tres, cuatro, cinco y seis dimensiones que reproducen el fenómeno de Chaté y Manneville y la aproximación del campo promedio en ellos.

Se compara la función compuesta del autómata celular con la función de

iteración sobre la aproximación del campo promedio; la idea de esta comparación es ver que tanto se aproxima la teoría del campo promedio en la predicción de las densidades de período tres y cuasiperíodo tres encontradas por Chaté y Manneville.

Además se analiza si el traslape de las vecindades tiene relación con la dimensión del espacio y con la aproximación del campo promedio.

## 2 La teoría del campo promedio

La deducción del cálculo de la probabilidad a partir del campo promedio, tiene un principio sencillo y elegante. Si se desea calcular la probabilidad de que aparezca un **1** en un autómata binario en la siguiente generación, debemos de calcular la probabilidad de que ocurran las cadenas ancestras que producen **1**'s.

Estos ancestros son los argumentos de la regla de evolución que determinan la asignación al estado **1**, (es decir las vecindades) por lo que la probabilidad de que aparezca el estado **1** va a estar dada por la suma de las probabilidades de que ocurran las vecindades que lo originan. Y la probabilidad de que las vecindades ancestras ocurran está dada por la probabilidad de que aparezcan los estados que forman dichas vecindades o contraimágenes. De esta manera se puede definir recursivamente:

$$P_1^{t+1} = \sum_{\alpha|\varphi(\alpha)\rightarrow 1} (P_1^t)^{N1(\alpha)}(1 - P_1^t)^{N0(\alpha)}, \quad (2)$$

donde:

$$P_1^{t+1} \text{ es la probabilidad de que aparezca el estado } \mathbf{1} \text{ en la generación } \mathbf{t+1}. \quad (3)$$

$$P_1^t \text{ es la probabilidad de que aparezca el estado } \mathbf{1} \text{ en la generación } \mathbf{t}. \quad (4)$$

$$N1(\alpha) \text{ es el número de celdas cuyo estado es } \mathbf{1} \text{ en la vecindad } \alpha. \quad (5)$$

$$N0(\alpha) \text{ es el número de celdas cuyo estado es } \mathbf{0} \text{ en la vecindad } \alpha. \quad (6)$$

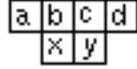


Figura 1: La probabilidad de que ocurra el estado  $\mathbf{y}$  no es independiente del estado  $\mathbf{x}$  ya que ambos comparten parte de los ancestros que los originan, por lo que el hecho de que aparezca  $\mathbf{y}$  se debe de alguna manera al hecho de que haya ocurrido  $\mathbf{x}$ .

$$\sum_{\alpha|\varphi(\alpha)\rightarrow 1} \text{ es la suma de las vecindades donde la regla de evol. asigna un } \mathbf{1} \tag{7}$$

Sin embargo la aproximación del campo promedio adolece de un problema: asume que no existe correlación entre los estados de las células del autómata celular. Este supuesto no es exacto, ya que una de las características de un autómata celular es precisamente el traslape entre las células de sus vecindades y por lo tanto existe dependencia entre los estados de las células como lo ilustra la figura 1.

Este hecho parece ser la causa de la divergencia entre la aproximación del campo promedio y la evolución real del autómata.

## 2.1 Reglas totalísticas

La expresión (2) calcula la aproximación del campo promedio para la regla general de un autómata celular, es decir una regla donde se declara de una manera explícita la asignación para cada una de las vecindades. Si se trata de un autómata celular (2,1) con la regla de evolución conocida como la regla 22 (estas dos últimas notaciones propuestas por Stephen Wolfram [9]) se tendrá una aproximación del campo promedio expresado por la siguiente función:

$$f(p) = 3pq^2, \tag{8}$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$  es la probabilidad de que aparezca el estado 1 en la siguiente generación y está determinado por la suma de las probabilidades de que ocurran las vecindades que lo originan.

$$\begin{aligned}
\phi(000) &= 0 & \phi(100) &= 1 \\
\phi(001) &= 0 & \phi(101) &= 1 \\
\phi(010) &= 1 & \phi(110) &= 0 \\
\phi(011) &= 0 & \phi(111) &= 1
\end{aligned} \tag{9}$$

Regla de evolución general número **22**

Sin embargo existen otras formas de realizar asignaciones en las vecindades, una de ellas es mediante la asignación de la transformación sobre  $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{k-1})$  conjuntos de vecindades agrupados por alguna característica en común. La regla resultante de esta asignación llamada regla totalística, es especialmente útil si el número de vecindades es particularmente grande.

Cualquier función puede determinar la propiedad que caracterizará a los  $\mathbf{k-1}$  grupos, por ejemplo la suma de las células activas podría ser una de ellas. En nuestro caso tomaremos esta última por lo que considerando el mismo autómatas celular (2,1) la asignación de una regla totalística sobre sus vecindades es:

<i>Suma de la vecindad</i>	<i>Función</i>	
0	$\phi(000) = 1$	
1	$\phi(001), \phi(010), \phi(100) = 1$	(10)
2	$\phi(101), \phi(011), \phi(110) = 0$	
3	$\phi(111) = 1$	

Los grupos resultantes son aquellos para los cuales la suma de sus células es  $\mathbf{0,1,2}$  y  $\mathbf{3}$  y el número de vecindades que conforman a cada grupo es de  $\mathbf{1,3,3}$  y  $\mathbf{1}$  respectivamente.

Para este caso la función del campo promedio es:

$$f(p) = q^3 + 3q^2p + p^3, \tag{11}$$

y la función que considera todos los grupos de vecindades posibles es:

$$f(p) = (p + q)^3 = q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3, \tag{12}$$

como se puede observar los coeficientes de esta función están determinados por el número de vecindades que conforman a cada grupo. Y dado que cada grupo lo determina la suma de las células de la vecindad sin importar el orden en que se encuentren distribuidos los estados, los coeficientes se pueden calcular como:

$$\binom{n}{r} \quad (13)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el tamaño de la vecindad y  $\mathbf{r}$  es el número de estados que se suma.

De esta manera la función general que describe a la aproximación del campo promedio para las reglas totalísticas es:

$$P_1^{t+1} = \sum_{\alpha|\varphi(\alpha)\rightarrow 1} \binom{n}{r} (p^t)^n (1-p)^{n-r} \quad (14)$$

La familia de polinomios que forma esta expresión son conocidas también como los polinomios de Bernstein (puntualmente los polinomios de Bernstein están expresados por  $\mathbf{p}^{\mathbf{r}}\mathbf{q}^{\mathbf{n}-\mathbf{r}}$  y la parte de la combinación calcula los coeficientes) y los coeficientes tienen relación con el triángulo de Pascal.

Si se considera un tamaño de la vecindad  $\mathbf{n}=\mathbf{2}$  los coeficientes de la función son:

$$1,2,1$$

si  $\mathbf{n}=\mathbf{3}$  los coeficientes son:

$$1,3,3,1$$

en general los coeficientes están relacionados con cada renglón del triángulo de Pascal, el primer renglón del triángulo determina los coeficientes para una vecindad de tamaño  $\mathbf{n}=\mathbf{0}$ , el segundo renglón lo hace para el tamaño  $\mathbf{n}=\mathbf{1}$ , el tercer renglón para  $\mathbf{n}=\mathbf{2}$ , etcétera, de manera que el triángulo de Pascal puede determinar los coeficientes para cualquier tamaño de vecindad como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & 1 & & & \\
& & & & 1 & 2 & 1 & \\
& & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
& & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
& & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
n = 7 & & 1 & 7 & 21 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
& & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Triángulo de Pascal y las vecindades de tamaño  $\mathbf{n}$  de un autómata celular.

El caso donde  $\mathbf{n=0}$  y  $\mathbf{n=1}$  no tiene interés en autómatas celulares pero los siguientes tamaños de vecindades si lo tienen, en particular los coeficientes para los autómatas con tamaño de vecindad,  $\mathbf{n=7,9,11}$  y  $\mathbf{13}$ , que corresponden a los autómatas celulares  $(\mathbf{2,3}),(\mathbf{2,4}),(\mathbf{2,5})$  y  $(\mathbf{2,6})$ , mismos que se utilizan para llevar a cabo el análisis del fenómeno de Chaté y Manneville, para las vecindades de von Neumann y Moore en tres, cuatro, cinco y seis dimensiones.

De acuerdo al triángulo de Pascal los polinomios de Bernstein para los autómatas  $(\mathbf{2,3}),(\mathbf{2,4}),(\mathbf{2,5})$  y  $(\mathbf{2,6})$  son respectivamente:

$$f(p) = q^7 + 7q^6p + 21q^5p^2 + 35q^4p^3 + 35q^3p^3 + 21q^2p^5 + 7qp^6 + p^7 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
f(p) &= q^9 + 9q^8p + 36q^7p^2 + 84q^6p^3 + 126q^5p^4 \\
&+ 126q^4p^5 + 84q^3p^6 + 36q^2p^7 + 9qp^8 + p^9
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
f(p) &= q^{11} + 11q^{10}p + 55q^9p^2 + 165q^8p^3 \\
&+ 330q^7p^4 + 462q^6p^5 + 462q^5p^6 + 330q^4p^7 \\
&+ 165q^3p^8 + 55q^2p^9 + 11qp^{10} + p^{11}
\end{aligned} \quad (17)$$

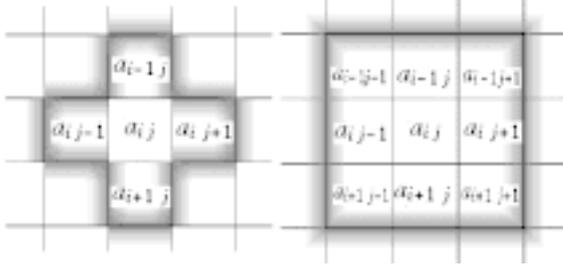


Figura 2: Vecindad de von Neumann y Moore de izquierda a derecha.

y

$$\begin{aligned}
 f(p) = & q^{13} + 13q^{12}p + 78q^{11}p^2 + 286q^{10}p^3 \\
 & + 715q^9p^4 + 1287q^8p^5 + 1716q^7p^6 \\
 & + 1716q^6p^7 + 1287q^5p^8 + 715q^4p^9 \\
 & + 286q^3p^{10} + 78q^2p^{11} + 13qp^{12} + p^{13}
 \end{aligned} \tag{18}$$

La asignación de 1's de la regla totalística determina que sumandos de su polinomio que podrán representarla. Esto se ya se ilustró con la formación de la expresión (11).

### 3 Traslape de las vecindades de Moore y von Neumann en $n$ Dimensiones

Chaté y Manneville han argumentado que la aproximación del campo promedio llega a ser más exacta a medida que aumenta la dimensión del espacio del autómata celular, concretamente cuando el límite del tamaño del espacio del autómata celular tiende a infinito [1]. Una razón que puede apoyar esta afirmación, es el hecho de que el traslape de las vecindades disminuye a medida que aumenta la dimensión y esto baja a su vez la correlación entre las células.

Aquí se analiza cómo se comporta el traslape de las vecindades en  $n$  dimensiones para la vecindad de von Neumann y Moore (ver figura 2), y se

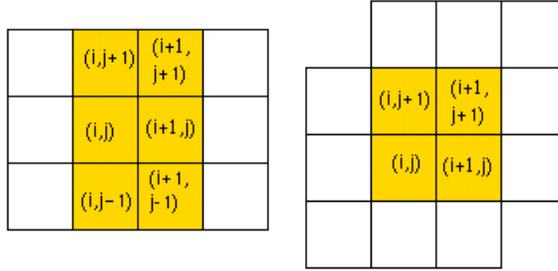


Figura 3: traslape en una vecindad de Moore en 2 dimensiones, tomando en cuenta vecindades de la célula vecina ortogonal y diagonal.

demuestra que en el caso de la vecindad de Moore no importa la dimensión del espacio, el traslape siempre será de  $\mathbf{2/3}$ . Sin embargo, el traslape en la vecindad de von Neumann sí depende de la dimensión del espacio, ya que disminuye a medida en que la dimensión aumenta; o en otros términos tiende a  $\mathbf{0}$  cuando  $\mathbf{n}$  tiende a infinito.

### 3.1 Traslape en la vecindad de Moore

La vecindad de Moore en el plano está definida como una vecindad de nueve células:

$$\begin{array}{ccccc}
 (i, j) & (i, j + 1) & (i, j - 1) & & \\
 (i + 1, j) & (i + 1, j + 1) & (i + 1, j - 1) & & \\
 (i - 1, j) & (i - 1, j + 1) & (i - 1, j - 1) & & 
 \end{array} \tag{19}$$

La vecindad de la célula  $(\mathbf{i+1,j})$  se traslapa con la vecindad de  $(\mathbf{i,j})$  en las células

$$\begin{array}{ccccc}
 (i, j + 1) & (i, j) & (i, j - 1) & & \\
 (i + 1, j + 1) & (i + 1, j) & (i + 1, j - 1) & & 
 \end{array} \tag{20}$$

tomando como referencia a la primera vecindad, lo cual da un traslape de  $\mathbf{2/3}$  (ver figura 3).

La vecindad de Moore en tres dimensiones está compuesta de  $\mathbf{27}$  células, a saber:

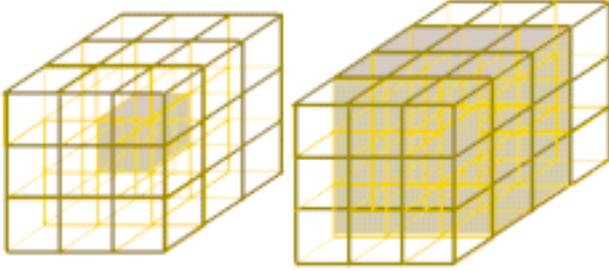


Figura 4: Vecindad de Moore y su traslape ortogonal en tres dimensiones.

$$\begin{array}{ll}
 (i, j, k) & (i, j, k + 1) \\
 (i, j, k - 1) & (i, j + 1, k) \\
 (i, j + 1, k + 1) & (i, j + 1, k - 1) \\
 (i, j - 1, k) & (i, j - 1, k + 1) \\
 (i, j - 1, k - 1) & (i + 1, j, k) \\
 (i + 1, j, k + 1) & (i + 1, j, k - 1) \\
 (i + 1, j + 1, k) & (i + 1, j + 1, k + 1) \\
 (i + 1, j + 1, k - 1) & (i + 1, j - 1, k) \\
 (i + 1, j - 1, k + 1) & (i + 1, j - 1, k - 1) \\
 (i - 1, j, k) & (i - 1, j, k + 1) \\
 (i - 1, j, k - 1) & (i - 1, j + 1, k) \\
 (i - 1, j + 1, k + 1) & (i - 1, j + 1, k - 1) \\
 (i - 1, j - 1, k) & (i - 1, j - 1, k + 1) \\
 (i - 1, j - 1, k - 1) &
 \end{array} \tag{21}$$

El traslape de su vecino ortogonal es de un total de 18 células:

$$\begin{array}{ll}
 (i, j, k) & (i, j + 1, k) \\
 (i, j - 1, k) & (i - 1, j, k) \\
 (i - 1, j + 1, k) & (i - 1, j - 1, k) \\
 (i + 1, j, k) & (i + 1, j + 1, k) \\
 (i + 1, j - 1, k) & (i, j, k + 1) \\
 (i, j + 1, k + 1) & (i, j - 1, k + 1) \\
 (i - 1, j, k + 1) & (i - 1, j + 1, k + 1) \\
 (i - 1, j - 1, k + 1) & (i + 1, j, k + 1) \\
 (i + 1, j + 1, k + 1) & (i + 1, j - 1, k + 1)
 \end{array} \tag{22}$$

de las 27 que contiene la vecindad. De esta manera se tiene que **2/3** resulta ser el traslape en 3 dimensiones (ver fig 4).

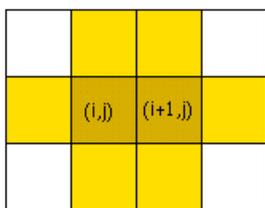


Figura 5: Traslape de la vecindad de von Neumann en dos dimensiones.

En general la vecindad de Moore está definida por todas las posibilidades de tener una célula en el centro, y una célula desplazada un sitio en cualquier dirección. Esto se expresa en términos de coordenadas bajo tres formas:

- La variable que representa el valor de la coordenada.
- La suma de uno a dicha variable.
- La resta de uno sobre la misma variable

de manera que el total de células que tendrá la vecindad de Moore en  $n$  dimensiones será de

$$3^n \text{ para } n \geq 2. \quad (23)$$

En el plano esto significa tomar en cuenta las células de arriba y abajo, para un desplazamiento de tres posiciones sobre la recta, lo cual produce un total de  $3 \times 3 = 9$  células, que puede expresarse como:

$$(a \pm 1, b \pm 1). \quad (24)$$

En tres dimensiones se tiene

$$(a \pm 1, b \pm 1, c \pm 1), \quad (25)$$

$3 \times 3 \times 3 = 27$  y para cuatro dimensiones la vecindad tiene **81** células.

Por otro lado el traslape ortogonal de las vecindades está definido por la suma de las células de 2 subespacios de  $n-1$  dimensiones sobre un espacio de  $n$  dimensiones:



Figura 6: Vecindad de von Neumann en tres dimensiones y su traslape.

$$(3^{n-1} + 3^{n-1})/3^n \quad \text{para } n \geq 2. \quad (26)$$

De manera que el traslape en  $n=2$  (el plano) es de  $3\hat{\mathbf{1}}+3\hat{\mathbf{1}}=6$ , lo cual dividido entre el total de células de la vecindad nos da:  $2/3$ . El traslape en 3 dimensiones es de

$$3^2 + 3^2/3^3 = 18/27 \rightarrow 2/3. \quad (27)$$

En general, como se mencionó el traslape en  $n$  dimensiones es

$$\frac{3^{n-1} + 3^{n-1}}{3^n}. \quad (28)$$

Desarrollando obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} t &= \frac{3^{n-1}+3^{n-1}}{3^n} \\ t &= \frac{2(3^{n-1})}{3^n} \\ t &= \frac{2(3^{n-1})}{3^n} \left( \frac{1}{3^{n-1}} \right) \\ t &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (29)$$

En conclusión, para la dimensión  $n$  el traslape de las vecindades de Moore siempre será de  $2/3$

### 3.2 Traslape en la vecindad de von Neumann

La vecindad de von Neumann diseñada con la idea de optimizar espacio, tiene un traslape que difiere en gran medida al traslape de la vecindad de Moore. Para empezar, la vecindad de von Neumann está definida por las siguientes 5 células:  $(i,j), (i,j+1), (i,j-1), (i+1,j), (i-1,j)$ , con un poco más

de la mitad de células que la vecindad de Moore, diferencia considerable que se irá incrementando rápidamente conforme aumenta la dimensión.

En el caso de la vecindad de von Neumann sólo tiene vecinos ortogonales, de forma que el único traslape a considerar es el ortogonal. Bajo ésta consideración el traslape en dos dimensiones ocurre en las células  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}), (\mathbf{i}+1, \mathbf{j})$  (como lo ilustra la figura 5) entre las 7 que constituyen el total de células de la vecindad, dando un traslape de  $\mathbf{2}/\mathbf{7}$  La vecindad de von Neumann en tres dimensiones consta de 7 células  $((\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}), (\mathbf{i}+1, \mathbf{j}, \mathbf{k}), (\mathbf{i}-1, \mathbf{j}, \mathbf{k}), (\mathbf{i}, \mathbf{j}+1, \mathbf{k}), (\mathbf{i}, \mathbf{j}-1, \mathbf{k}), (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}+1), (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}-1))$  esto equivale aproximadamente a  $\mathbf{1}/\mathbf{4}$  con respecto a la vecindad de Moore. En tres dimensiones el traslape se da en 2 células:  $(\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}), (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}+1)$  de un total de 7 como se puede apreciar en la gráfica 6; de manera que  $\mathbf{2}/\mathbf{7}$  es el grado de traslape en 3 dimensiones.

En general se puede observar que existen dos células en cada dimensión del conjunto de células que forman a la vecindad y una célula (la célula central) que llega a ser parte de todas las direcciones involucradas (espacios). De manera que el número de células que tiene una vecindad de von Neumann en  $\mathbf{n}$  dimensiones es:

$$2n + 1 \text{ para } n \geq 2. \quad (30)$$

para los casos  $\mathbf{n}=\mathbf{2}$  y  $\mathbf{n}=\mathbf{3}$ , se puede constatar el número de células  $\mathbf{2}(\mathbf{2})+\mathbf{1}=\mathbf{5}$  y  $\mathbf{2}(\mathbf{3})+\mathbf{1}=\mathbf{7}$  respectivamente, con lo expuesto apenas unos párrafos arriba.

Los traslapes en tres dimensiones en la vecindad de von Neumann se dan a través de las células alineadas ortogonalmente en cada dirección. Si se recorre una célula sobre el eje de cualquier dimensión se tendrán  $\mathbf{3}-\mathbf{1}=\mathbf{2}$  traslapes, ya que 3 es el número de células por cada eje, cualquiera que este sea. Y además los traslapes en todas las dimensiones restantes desaparecen, por lo que para cualquier dimensión el traslape será de:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = 0 \quad (31)$$

Es decir que el traslape disminuye cuando la dimensión aumenta.

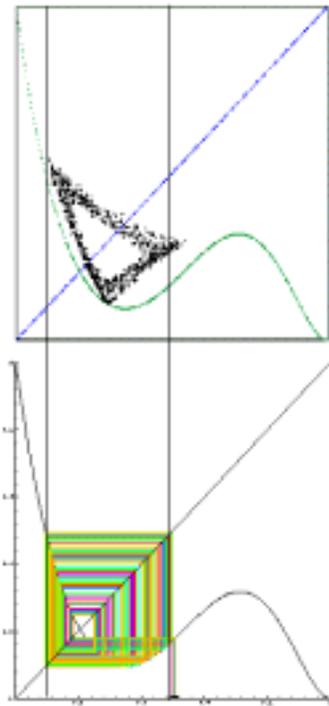


Figura 7: a) Arriba: Despliegue del mapa de retorno de las densidades reales del autómata celular (2.3), con regla de evolución 33. b) Abajo: Graficación de la escalera sobre la iteración de la aproximación del campo promedio, en tres dimensiones.

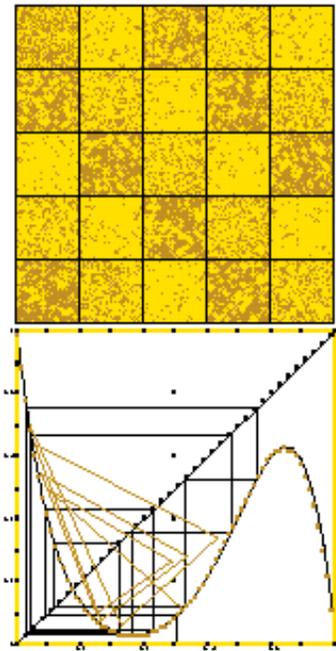


Figura 8: a) Arriba: Despliegue de la evolución del Autoómata celular (2.4), en el plano con regla 385. b) Abajo: Aproximación del campo promedio (graficación de la escalera) contra la composición de funciones (gráfica triangular) en 4 dimensiones.

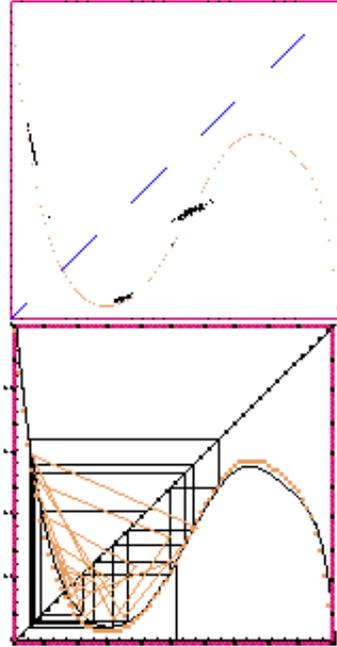


Figura 9: a) Arriba: Mapa de retorno de las densidades reales. b) Abajo: Sobreposición de la iteración del campo promedio contra la composición de funciones. Ambas gráficas pertenecen al autómata celular binario 1409 en 5 dimensiones.

## 4 La aproximación del campo promedio y el fenómeno de Chaté y Manneville en 3,4,5, y 6 Dimensiones

En esta sección se analiza la aproximación del campo promedio a medida que aumenta la dimensión del espacio del autómata celular. El análisis se realiza en autómatas celulares binarios en tres, cuatro, cinco y seis dimensiones, que reproducen el fenómeno de Chaté y Manneville.

La línea de autómatas en los que se hace el análisis comparten el esquema de construcción Hemmingsson para contar con un punto de referencia común. Las reglas de los autómatas que se tratan son: la regla **33** en **(2,3)**, la regla

**385** en **(2,4)**, la regla **1409** en **(2,5)** y finalmente la regla **5296** en **(2,6)**.

Hay que aclarar que lo que se muestra aquí es únicamente para ilustrar como se comporta la aproximación del campo promedio para estas reglas, sin embargo, para caracterizar el comportamiento se tiene que llevar a cabo un análisis mucho más exhaustivo. Para todos éstos autómatas celulares se consideró una vecindad de von Neumann, ya que bajo esta vecindad los traslapes disminuyen conforme aumenta la dimensión.

#### **4.1 Aproximación del campo promedio en la regla 33 en (2,3)**

Dada la vecindad del autómata celular **(2,3)** es posible considerar la asignación de la vecindad de von Neumann en un espacio de tres dimensiones donde se necesitan 7 elementos.

En la gráfica 7a se muestran las densidades reales de la evolución del autómata celular mediante el par ordenado  $(\mathbf{P}\hat{t}, \mathbf{P}\hat{t}+1)$ , conocido como el mapa de retorno, mediante él se puede apreciar el cuasiperíodo de período 3. En la figura 7b se tiene la graficación de la escalera que busca los puntos fijos sobre la iteración del campo promedio. Como se puede notar las densidades en que se posan cada una de las funciones no corresponden entre si, marcando una gran discrepancia entre ambas. Es posible que esto suceda porque el traslape en este espacio aún es considerable.

#### **4.2 Aproximación del campo promedio en la regla 385 en (2,4)**

El autómata celular lineal **(2,4)** tiene una vecindad de **9** elementos, por lo cual es posible representar una vecindad de von Neumann en **4** dimensiones.

Si se parte el espacio en planos podemos ver la densidad de varias generaciones, la gráfica 8a muestra 25 generaciones donde se puede apreciar algo cercano al ciclo 3. En la figura 8b se tienen sobrepuestas la graficación de la escalera y la composición de funciones, la distinción entre ambas se puede notar por su forma, la primera con la clásica graficación: función, diagonal,

función, y la segunda formando triángulos entre las tres densidades reales.

En este caso las densidades presentadas mediante la iteración de funciones y la función compuesta difieren desde el primer momento; la iteración del campo promedio rápidamente llega a tener valores altos cuya imagen es una densidad baja, que continúa con un valor bajo, rompiendo de esta manera con el ciclo alto, medio y bajo.

### **4.3 Aproximación del campo promedio en la regla 1409 en (2,5)**

La regla **1409** como las reglas anteriores, reproduce el fenómeno de Chaté y Maneville, y dado su tamaño de vecindad permite representar una vecindad de von Neumann en **5** dimensiones. La aproximación del campo promedio en 9b muestra una mejor aproximación en este autómata, aunque todavía existen diferencias entre la función de iteración con la función compuesta. La figura 9a muestra el mapa de retorno, donde se detecta un claro ciclo de período **3**.

### **4.4 Aproximación del campo promedio en la regla 5296 en (2,6)**

Este último autómata celular en seis dimensiones muestra un mayor acercamiento entre la iteración del campo promedio y la composición de funciones. Como lo muestra la figura 10b la función de la escalera casi logra un comportamiento periódico de período tres. Después de una densidad inicial de 0.5, toma las densidades alta, mediana y baja, hasta que cierra el ciclo con la densidad alta, de esta manera regresa otra vez a tomar un valor alto en dos pasos. En esta dimensión el traslape en general llega a ser **2/13**, menor que en las dimensiones anteriores y el supuesto general de la mejora en la aproximación del campo promedio en esta dimensión es la disminución del traslape. En la figura 10a se detectan las tres densidades mediante la proyección de la evolución en el plano.

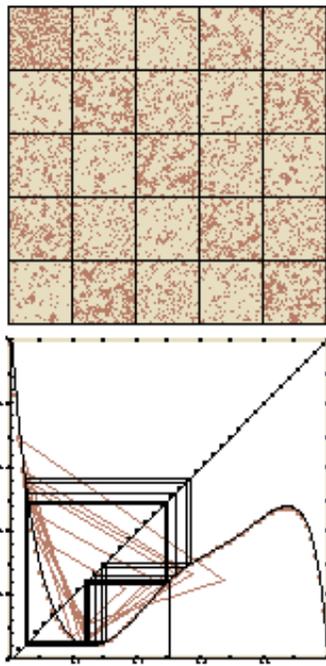


Figura 10: a) Arriba: Evolución en el plano. b) Abajo: Aproximación del campo promedio contra la composición de funciones en 6 dimensiones.

## 5 Conclusiones

La vecindad de von Neumann disminuye los traslapes conforme se aumenta la dimensión del autómata celular, mientras que la vecindad de Moore mantiene un alto traslape en cualquier dimensión.

Una vez que se sabe que el traslape de las vecindades se puede disminuir a una cantidad convenientemente pequeña (con el aumento de las dimensiones), es necesario hacer estudios para verificar si esto se traduce en una independencia entre las células (no correlación) y por ende permita que la aproximación del campo promedio sea exacta.

Si lo anterior se prueba, se pueden realizar aproximaciones de la teoría del campo promedio a un punto tal que la composición de funciones en autómatas celulares pueda considerarse como la iteración de funciones, por lo que se puede utilizar la teoría involucrada en esta área para dar explicación al cuasiperíodo 3 y período 3 de Chaté-Manneville.

Hay que señalar que hizo falta hacer observaciones de la aproximación del campo promedio para la vecindad de Moore, por lo que aunque sabemos que su traslape es alto, no tenemos idea si esto tiene un efecto sobre la aproximación del campo promedio en distintas dimensiones.

## 6 Reconocimientos

Quiero agradecer al Departamento de Aplicación de Microcomputadoras del Instituto de Ciencias de la Universidad Autónoma de Puebla el apoyo que me brindaron en esta estancia de Verano, en particular al Dr. Harold V. McIntosh por sus innumerables comentarios y discusiones sobre el tema. También me gustaría hacer patente mi agradecimiento al Dr. Sergio Victor Chapa Vergara y al CINVESTAV por permitir mi estancia en Puebla. Finalmente le agradezco a Abdiel Cáceres González sus comentarios sobre el texto.

## Bibliografía

- [1] Bernard Barral, Hugues Chaté and Paul Manneville, “Collective behav-

- iors in a family of high-dimensional automata,” *Physics Letters A* **163** 279-285 (1992).
- [2] H. Chaté and P. Manneville, “Evidence of collective behaviour in cellular automata,” *Europhysics Letters* **14** 409-413 (1991).
- [3] M. Dresden and D. Wong, “Life games and statistical models”, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **72** 956-960 (1975).
- [4] Howard A. Gutowitz, “Local structure theory for cellular automata,” *Thesis* Rockefeller University, 1987.
- [5] Howard A. Gutowitz and Jonathan D. Victor, “Local structure theory in more than one dimension,” *Complex Systems* **1** 57-68 (1987).
- [6] Howard A. Gutowitz, Jonathan D. Victor, and Bruce W. Knight, “Local structure theory for cellular automata,” *Physica* **28D** 18-48 (1987).
- [7] L.S. Schulman and P.E. Seiden , “Statistical mechanics of a dynamical system based on Conway’s game of Life”, *Journal of Statistical Physics* **19** 293-314 (1978).
- [8] W. John Wilbur, David J. Lipman y Shihab A. Shamma, “On the prediction of local patterns in cellular automata”, *Physica D* **19** 397-410 (1986).
- [9] Stephen Wolfram (Ed.), *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Press, Singapore, 1986 (ISBN 9971-50-124-4 pbk).