

# FLEXÁGONOS CUADRADOS

Patricia Santiago Hernández \*  
Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM

Agosto, 2006

## Resumen

Este documento tiene como finalidad brindar información básica acerca de los flexágonos cuadrados, su construcción y su comportamiento dinámico.

## Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1	Geometría de los flexágonos . . . . .	4
2.2	Instrucciones generales para construir un flexágono . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Las posiciones principales</b>	<b>5</b>
3.1	Flexágonos con enlace . . . . .	6
3.2	Grados de libertad de un flexágono ideal . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Mapeando flexágonos</b>	<b>6</b>
4.1	Mapa completo de un flexágono cuadrado de un ciclo simple irregular . . . . .	7
4.2	Estructura del pat para el flexágono cuadrado de ciclo simple irregular . . . . .	9
4.3	Tipos de Mapas . . . . .	9
4.3.1	Mapa simplificado . . . . .	9
4.3.2	Mapa de posición intermedia . . . . .	9
4.3.3	Figura del flexágono . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Flexágonos cuadrados</b>	<b>11</b>
5.1	Flexágono cuadrado simple . . . . .	11
5.2	Flexágono cuadrado de ciclo simple regular . . . . .	12
5.3	Flexágono cuadrado de ciclo simple irregular . . . . .	13
5.4	Flexágono cuadrado de ciclo simple incompleto . . . . .	14
5.5	Grados de libertad de un flexágono cuadrado . . . . .	15
5.6	Posiciones principales ligadas de un flexágono cuadrado . . . . .	15
5.7	Flexágono cuadrado con 2 ciclos regulares y posición principal ligada . . . . .	16

---

\*email: macpaty2000@yahoo.com.mx

5.8	Flexágono cuadrado de ciclo regular y posición principal ligada .	17
5.9	Flexágono cuadrado con 2 ciclos irregulares y una posición principal	18
5.10	Flexágono cuadrado con un ciclo regular, un ciclo irregular y con posición principal ligada . . . . .	18
5.11	Flexágono cuadrado con un ciclo regular, un ciclo incompleto y una posición principal ligada . . . . .	19
5.12	Flexágono cuadrado con un ciclo irregular, un ciclo incompleto y una posición principal ligada . . . . .	20
5.13	Flexágono cuadrado con dos ciclos incompletos y una posición principal ligada . . . . .	21

# 1 Introducción

Los flexágonos son un descubrimiento del siglo veinte por Arthur H. Stone, un estudiante graduado de la Universidad de Princeton en América, descubriéndolos en 1939 mientras estaba doblando tiras de papel. Instalaron un Comité de flexágonos en la Universidad de Princeton para investigar los flexágonos. En 1940 dos miembros del comité trabajaron sobre una teoría matemática de flexágonos pero éste nunca fue publicado. El comité se disolvió en 1941 continuando en América, entró en la Segunda Guerra Mundial y por algún tiempo esta actividad fué poco visible. Interesados en revivirla más tarde en los años 1950's con la publicación de dos artículos de flexágonos en la revista *Scientific American* y la publicación del primer documento de flexágonos, se puede decirse que el tema alcanzado su madurez con esta edición en 1962 dando un informe comprensible sobre flexágonos.

# 2 Antecedentes

El primer tipo de flexágono que se descubrió es el conocido como el *trihexaflexágono*, que es el flexágono más simple que existe dentro de la clasificación de los hexaflexágonos, llamados así porque su contorno tiene la forma de un hexágono, cuenta con 9 triángulo equiláteros y uno adicional para unir la tira, la red para un modelo de papel de un trihexaflexágono es mostrada en la Fig 1

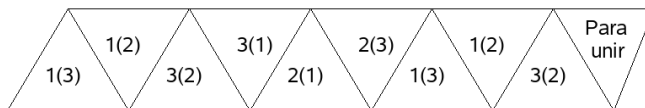


Figura 1: Red del trihexaflexágono

Para hacer el trihexaflexágono es necesario que pliegue las líneas entre triángulos para formar las bisagras. Los *número que aparecen entre los paréntesis tiene que ser escrito en la cara inversa de los triángulos y eliminada de la cara superior*. Doble las caras de los triángulos numerándolos hasta el 3 y haciéndolos coincidir, esto quiere decir que deben de quedar los triángulos junto con un número igual, relacionando el 1-1 , 2-2 y 3-3. Una los extremos de la red mostrando por líneas punteadas en la figura, con cinta adhesiva transparente. El trihexaflexágono ensamblado es una banda de triángulos continuos con bisagras. El contorno ensamblado del trihexaflexágono es un hexágono, y **ha este contorno se le llama una posición principal**. Por lo tanto el contorno formado por es una posición principal hexagonal, sí el contorno fuera el de un flexágono cuadrado entonces la posición principal de este flexágono sería un cuadrado.

Los polígonos individuales usados para hacer los flexágonos en este caso triángulos son llamados "Hojas".

La examinación del trihexaflexágono armado muestra que consiste en alternar hojas individuales y doblando pilas de 2 hojas. Ambas hojas individuales y pilas dobladas se les llama "Pats".

Para doblar el trihexaflexágono comience con la cara numerada con el número uno. Sujete dos pats juntos con el dedo pulgar y el índice de una mano. Asegure que no haya un doblez continuo conectando al inicio de los dos pats, en caso de que exista un doblez continuo se debe rotar el trihexaflexágono 60 grados, al mismo tiempo empuje los 2 pats opuestos hacia adentro con el dedo índice de la otra mano.

Continúe el trihexaflexágono hasta tener la apariencia de 3 triángulos conectados en un eje común y así está en "**Posición Intermedia**". La posición intermedia tiene triple simetría rotatoria con un ángulo de 120 grados entre cada par de triángulos (Fig 2). En la posición intermedia esto es posible para abrir el trihexaflexágono en el inicio de el eje común para revelar las hojas numeradas con el 3. Haga esto y después aplane el trihexaflexágono. Entonces tendrá hojas numeradas con el 3 encima de la tapa y numeradas con el 1 por debajo, ésta en otra posición principal.

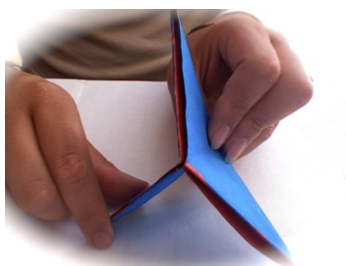


Figura 2: *Posición intermedia para el trihexaflexágono utilizando la técnica "Sujetar y Doblar"*

Esta técnica es conocida como "**sujetar y doblar (pinch flex)**". Al sujetar y doblar se tiene dos estados en el primer estado una posición principal es transformada en una posición intermedia, y en la segunda posición ésta posición intermedia es transformada en otra posición principal. La triple rotación simétrica es mantenida mientras están sujetando y doblando el trihexaflexágono. Repitiendo el "sujetar y doblar" después de estar rotando el trihexaflexágono por 60 grados el resultado en las hojas numeradas con el 2 en la cara superior y con el número 3 por debajo.

## 2.1 Geometría de los flexágonos

El rasgo principal característico de un flexágono es que éste tiene la apariencia de un polígono el cual puede ser doblado en orden para desplegar los pares de caras alrededor de un ciclo y de manera recursiva. Otro rasgo característico

es que las caras de polígonos individuales se conocen como hojas, las cuales se hacen para arriba y forman la cara de un flexágono, al rotarlas en sentido de los diferentes vértices y se mueve al centro de una posición principal. Como un flexágono es doblado de una posición principal a otra. Las hojas visibles son realmente pilas de hojas dobladas llamadas pats. Algunos pats son hojas simples. Alternando los pats tenemos la misma estructura. **Un par de pats adyacentes son un sector.**

Se utilizan las descripciones geométricas por 3 principales propósitos:

- 1.- Para el mapa de comportamiento dinámico de los flexágonos,
- 2.- Para el análisis de su estructura, y
- 3.- Como base para la construcción de flexágonos de cualquier tipo deseado.

## 2.2 Instrucciones generales para construir un flexágono

- 1- Plegar las líneas entre las hojas para formar las bisagras. Asegure que las hojas adyacentes se sobrepongan cuidadosamente cuando se doblen juntas.
- 2- Trasladar cada número que se encuentra entre paréntesis al reverso de la cara de la hoja y quitar éste de la cara superior.
- 3- Copiar cualquier bisagra o vértice con letras sobre el reverso de la red. Las hojas deben coincidir con su correspondiente número al doblarlos juntos.
- 4- Comenzando con el número más grande posible y trabajando hacia abajo hasta que solamente las hojas numeradas con el 1 y 2 sean visibles.
- 5- Unir los extremos de la red que están sealados con líneas punteadas usando cinta adhesiva transparente.
- 6- Decorar el flexágono para distinguir con mayor facilidad cada ciclo o cara.

## 3 Las posiciones principales

Investigando posibles variedades de flexágonos Chapman (1961) consideró posibles arreglos siempre de un número  $2n$  de un polígono convexo regular con  $s$  lados, cercano a un punto en un plano. Precisando que hay 2 soluciones. Esto corresponde a la posición principal de los flexágonos cuadrados ( $n=2$  y  $s=4$ ) y un hexaflexágono ( $n=3$  y  $s=6$ ). La apariencia de estas posiciones principales son mostradas en Fig 3, concluyendo que éstas son las únicas posibles variedades de flexágonos. Como la posición principal en las figuras, por definición, se sitúan en un plano que es conveniente para llamarlos posiciones principales "Planas". También por definición la suma de los ángulos de las hojas y por sus vértices centrales de una posición principal es de 360 grados.

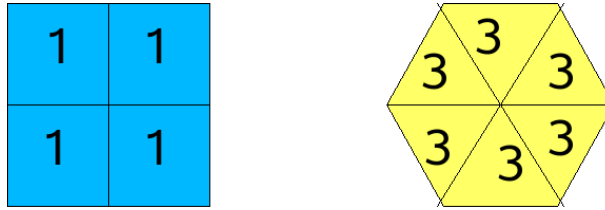


Figura 3: *Apariencia de la posición principal de un flexágono cuadrado (izq) y un hexaflexágono (der)*

### 3.1 Flexágonos con enlace

La definición formal de un enlace es que ésta es una construcción que acopla cuerpos rígidos por medio de ligas cuya libertad de movimiento es limitado después de una instanciación fija de una liga en un espacio, de la limitación impuesta por su acoplamiento. El número de grados de libertad que poseen por un enlace es usualmente definido como el número independiente de parámetros necesarios para determinar completamente su configuración. La siguiente figura muestra la apariencia de una posición principal de un penta-flexágono Fig. 5.



Figura 4: *Flexágono con enlace*

### 3.2 Grados de libertad de un flexágono ideal

Los cambios en el número de grados de libertad de un flexágono ocurren al estar doblándolo, pero éstos pueden ser difíciles de enumerar. Los cambios en el número de grados de libertad de un flexágono como éste es doblando entre configuraciones que son una característica importante la cual domina su comportamiento dinámico. Sus efectos son fácilmente observados en los modelos de papel.

## 4 Mapeando flexágonos

Hay una dificultad fundamental en estar mapeando el comportamiento dinámico de flexágonos. Esto es porque sus estructuras y comportamientos dinámicos son también complicados, excepto para los flexágonos más simples, el mapa debe de

incluir los detalles relevantes y razonablemente fácil de seguir, a continuación se indicará una forma de mapear los flexágonos.

#### 4.1 Mapa completo de un flexágono cuadrado de un ciclo simple irregular

La red para el flexágono cuadrado de ciclo simple irregular es mostrado en la Fig 5. Este flexágono tiene 4 caras y 4 posiciones principales, las cuales pueden ser visitadas en orden cíclico. Ésta es una banda desdoblada, así que no hay forma enantiomórfica (imagen del espejo).

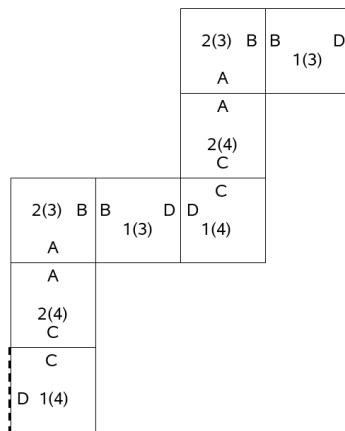


Figura 5: Red para el flexágono cuadrado de un ciclo simple irregular

El flexágono cuadrado simple de ciclo irregular es usado para ilustrar la complejidad de el comportamiento dinámico de los flexágonos y para demostrar como un mapa completo (Fig 6) puede ser usado para interpretar y describir este comportamiento.

Así el flexágono armado está en la posición principal mostrada como en el diagrama izquierdo en la Fig 6. Las caras numeradas 2 y 1 son visible y estan en la posición principal 2(1). El primer número en el código esta identificando a una posición principal y esta indicando que el número visible en la superficie de la cara es el número 2 y el segundo número encerrado entre paréntesis, es visible en la cara de abajo y este corresponde al número 1. Si el flexágono fue cambiado de cara, tal que la cara numerada con el 1 fue primero entonces el código podría ser 1(2). Esto algunas veces no es necesariamente para indicar cual cara de el flexágono es primero. Las posiciones principales son planas y tienen doble rotación simétrica cercana a un eje vertical o 'Sectores'. Hay 2 pats adyacentes en un sector. En general en una posición principal de un flexágono tiene  $2n$  pats y  $n$  sectores.

Las líneas A-A y D-D en el diagrama superior izquierdo identifica las bisagras en el flexágono cuadrado, como es marcado en la red, y por lo tanto su

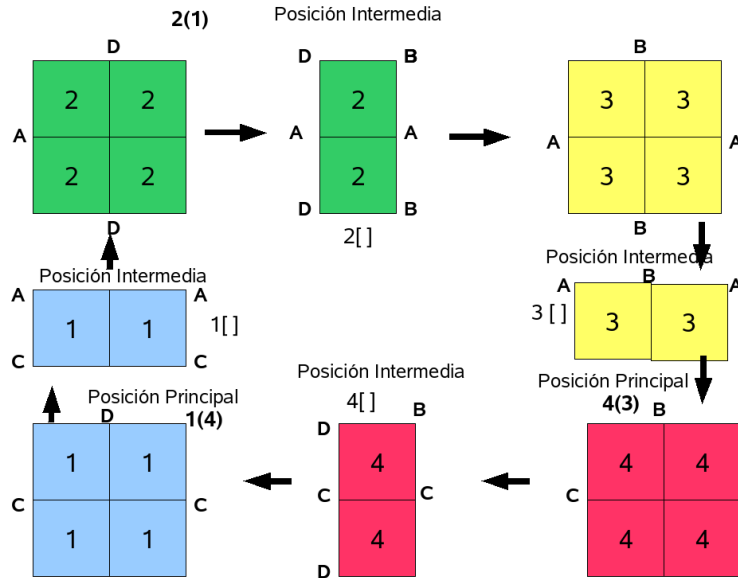


Figura 6: Mapa completo del flexágono cuadrado de ciclo simple irregular

orientación. Rotando a una posición principal del flexágono cuadrado por 180 grados cerca del eje vertical no lo hace diferente porque éste tiene doble rotación simétrica.

La orientación mostrada en la figura 6 son arbitrarias, y estas son elegidas para ayudar a la visualización del comportamiento dinámico del flexágono. En un flexágono cuadrado la posición principal tiene 2 grados de libertad en que la rotación puede ocurrir cerca de 2 diferentes líneas de la bisagra.

El mapa completo muestra que sucede cuando el flexágono cuadrado es doblado alrededor de su ciclo usando la técnica "sujetar y doblar". La descripción de abajo es para cruzar en la dirección de las flechas en la fig 6. Comenzando en la posición principal 2(1), doblando el flexágono cuadrado en 2, la línea a lo largo de la bisagra D-D para alcanzar la posición intermedia 2[4]. Manteniendo la bisagra de la línea superior y asegurando que las hojas numeradas con el 1 sean ocultas. Una posición intermedia tiene la apariencia de 2 cuadrados, unidos en un lado común. Este tiene doble rotación simétrica cerca de la bisagra central, por ejemplo la bisagra de la línea A-A en la posición intermedia 2[4]. El diagrama superior del centro en la figura muestra la apariencia para un lado. Sólo un número es visible y este número es el primer número mostrado en el código. Abriendo el flexágono en la parte superior y revelando cerca de las bisagras B así como para alcanzar la posición principal 3(2). Continúe doblando en orden cíclico para recorrer el periodo completo. Si el flexágono es cambiado, el ciclo puede ser recorrido en la dirección inversa.



En una posición principal esto es posible, para doblar un flexágono cuadrado en 2 ó 4 diferentes maneras para lograr cuatro diferentes posiciones intermedias. Mientras que para el flexágono cuadrado de ciclo simple irregular 2 de estas no conducen a otra posición principal. Tal posición intermedia no es normalmente mostrada en un mapa completo.

## 4.2 Estructura del pat para el flexágono cuadrado de ciclo simple irregular

Una posición principal 2(1) y 4(3) del flexágono cuadrado de ciclo simple irregular (Fig 6) en el cual cada pat es una pila doblada de 2 hojas. Mientras que, una posición principal 3(2) y 1(4) del mismo flexágono están alternando pats con una hoja simple y otro con una pila doblada de 3 hojas. Por esta situación es necesaria una notación para caracterizar la estructura interna de los pats. Para realizar esta línea de segmentos que conectaban los medios puentes de las bisagras se han incluido los diagramas de las posiciones principales e intermedias.

## 4.3 Tipos de Mapas

### 4.3.1 Mapa simplificado

La figura 7 es un 'mapa simplificado' mostrando sólo el código de la posición principal e intermedia y la dirección para recorrerlo. La figura 8 es otra simplificación, esta es conocida como el diagrama de Tuckerman. *El diagrama de Tuckerman indica que pares de caras son mostradas en todas las posibles posiciones principales de un flexágono y también el como pasar de una posición principal a cualquier otra.* Por lo tanto, sólo los códigos de la posición principal y la dirección para recorrerlo son mostradas.

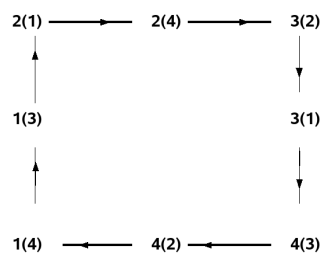


Figura 7: Mapa simplificado de un flexágono cuadrado de ciclo simple irregular

### 4.3.2 Mapa de posición intermedia

En un "mapa de posición intermedia" (Fig 9). El ciclo es representado por un cuadrado. Los vértices numerados representan posiciones intermedias, con cada número correspondiente a el número visible por fuera de una posición intermedia. Los lados representan posiciones principales con el número de los vértices

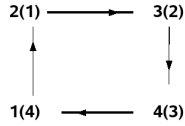


Figura 8: *Diagrama de Tuckerman para el flexágono cuadrado de ciclo simple irregular*

correspondientes a los números visibles en la posición principal. Por ejemplo el '1' en la parte superior izquierda del vértice representa una posición intermedia 1[3] (Fig 6) y la línea de la parte superior de el cuadrado representa la posición principal 2(1).

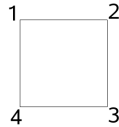


Figura 9: *Mapa de posición intermedia del flexágono cuadrado de ciclo simple irregular*

### 4.3.3 Figura del flexágono

Una "figura del flexágono" puede ser usada para caracterizar cualquier flexágono de un ciclo simple. Este consiste de 2 polígonos, tomando simplemente sus lados. El primero es un polígono circunscrito el cual es del mismo tipo de polígono como las hojas usadas para la construcción del flexágono. La segunda parte es un polígono inscrito cuyos vértices estan situados en los puntos medios de los lados del polígono circunscrito. Este polígono inscrito es una característica invariante del comportamiento dinámico de un flexágono y es obtenido de la parte del circuito mostrado en la posición intermedia de un mapa completo.

La parte del circuito para cada pat en la posición intermedia del flexágono cuadrado de un ciclo simple irregular en la posición intermedia es un cuadrilátero cruzado. Éste es usado como el polígono inscrito en la figura del flexágono, pero sin la dirección de las flechas como se muestra en la Fig 10.

Una figura del flexágono contiene bastante información para construir el flexágono correspondiente. Hay una única solución para el flexágono cuadrado de ciclo simple irregular.

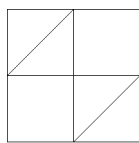


Figura 10: "Figura del Flexágono" para el flexágono cuadrado de ciclo simple irregular

## 5 Flexágonos cuadrados

Los flexágonos cuadrados fueron la segunda variedad de flexágonos a ser descubiertos. Son menos entendidos que los hexaflexágonos particularmente porque su comportamiento dinámico es más complejo. En detalle se sabe relativamente poco sobre números de tipos distintos con un número dado de caras. En apariencia una posición principal de un flexágono cuadrado es plana y consiste de cuatro hojas, cada una con un vértice en el centro de modo que hay cuatro pats y dos sectores. El contorno es un cuadrado. Algunos flexágonos cuadrados son bandas torcidas y por lo tanto existe como pares enantiomórficos (imagen de espejo).

Los flexágonos cuadrados tienen 3 diferentes tipos de ciclos y 2 tipos de ligas entre los ciclos. Hay 3 diferentes tipos de flexágonos cuadrados de un sólo ciclo. Dos de éstos tienen 4 caras y recorren completamente un ciclo de 4. El tercero tiene 3 caras y es incompleto ya que solamente recorre un ciclo de 3.

La designación de las redes para especificar el tipo de flexágono cuadrado cuyo comportamiento dinámico se sabe es más difícil que para hexaflexágonos. Comenzando por un diseño conocido, los métodos prácticos basados en los modelos de papel permiten agregar o eliminar ciclos y caras, y por lo tanto diseñar los flexágonos cuadrados deseados con comportamiento dinámico.

### 5.1 Flexágono cuadrado simple

En una posición principal un flexágono cuadrado tiene la apariencia de 4 cuadros, cada uno con un vértice en el centro. El contorno es un cuadrado grande. La figura 11 muestra la red para un flexágono cuadrado simple. Este flexágono cuadrado se arma siguiendo los pasos del trihexaflexágono, excepto que solamente las líneas horizontales entre las hojas necesitan ser plegadas. El flexágono cuadrado es un banda que da vuelta con bisagras cuadradas y existen en 2 formas enantiomórficas. Se dobla usando la técnica "sujetar y doblar", éste proceso es más simple para el flexágono cuadrado que para el trihexaflexágono porque hay solamente doble simetría rotatoria.

Comenzando en primer lugar con las hojas numeradas con el 2. Doblando el flexágono cuadrado en dos con el primer doblez. Asegurando que no hay un doblez continuo que este conectando las tapas de los pats que están siendo doblados juntos. El flexágono cuadrado está en una posición intermedia. Éste tiene la apariencia de 2 cuadrados con un lado en común. Abriendo el flexágono cuadrado en la parte de arriba para revelar los cuadrados numerados con el 3 y

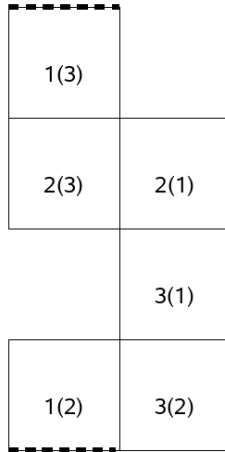


Figura 11: Red de un flexgono cuadrado simple

aplanándolo a una segunda posición principal. Este flexágono cuadrado particularmente no puede ser hecho para atravesar un ciclo pero puede ser regresado a su posición principal inicial dándole vuelta, cambiándolo y doblándolo. La versión de "sujetar y pegar" usada para manipular los flexágonos cuadrados es algunas veces llamado 'doblez de libro'.

## 5.2 Flexágono cuadrado de ciclo simple regular

La figura 12 muestra la red para el segundo tipo de flexágono cuadrado ciclo simple con 4 caras. Completará un recorrido de 4 ciclos, ésta es una banda torcida pero no una banda de Möbius. Este flexágono cuadrado es regular ya que en este caso las cuatro posiciones principales tienen la misma estructura del pat. Los pats en la posición principal son alternando las hojas y las pilas dobladas en 3 hojas. Los pats, que consisten en las pilas de tres hojas tienen una vuelta de  $-360$  grados así esto es una imagen de espejo.

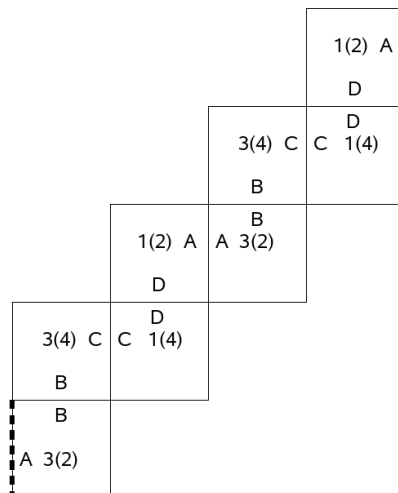


Figura 12: Red para el flexágono cuadrado de ciclo simple regular

El flexágono de la figura (Fig 13) es un cuadro, el cual es un polígono regular, con vértices en los puntos medios de un cuadro circunscrito. El mapa simplificado, diagrama de Tuckerman y la posición intermedia del mapa es igual que para el flexágono cuadrado irregular de un sólo ciclo. (FIG. 7, 8 y 9). Un flexágono regular de un sólo ciclo puede ser definido como un flexágono de un ciclo cuya figura del flexágono es un polígono regular con el mismo número de lados que como el polígono a circunscribir.

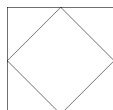


Figura 13: "Figura del flexágono" para el flexágono cuadrado de ciclo simple regular

### 5.3 Flexágono cuadrado de ciclo simple irregular

El flexágono cuadrado irregular de un sólo ciclo tiene 4 caras y recorre un ciclo completo. Esta red es mostrada en la Fig. 14 y es llamada irregular porque, como puede ser visto en el mapa completo.

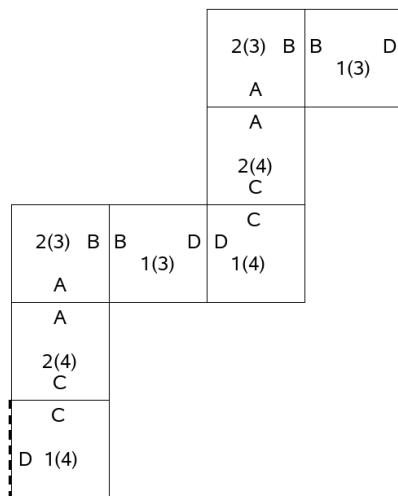


Figura 14: Red para el flexágono simple de ciclo simple irregular

Las posiciones principales tienen dos tipos distintos de estructura del pat.

También, la parte inscrita de la figura del flexágono (Fig. 15) es un cuadrilátero cruzado, el cual es un polígono irregular. Este tipo particular de flexágono cuadrado es una banda desenrollada. Esto es visto fácilmente doblando las hojas en cualquier posición principal 2(1) o posición principal 4(3). La posición principal 2(1) del lado izquierdo superior y los pats derechos inferiores tienen una vuelta de -180 grados y los otros 2 pats tienen una vuelta izquierda de 180 grados. El total de vueltas alrededor del flexágono por lo tanto es cero, de aquí que sea una banda desdoblada.

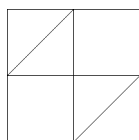


Figura 15: "Figura del flexágono" correspondiente al flexágono cuadrado de ciclo simple irregular

Un flexágono irregular de ciclo simple puede ser definido como un flexágono de un sólo ciclo, cuya figura del flexágono es un polígono irregular con el mismo número de lados como el polígono a circunscribir.

#### 5.4 Flexágono cuadrado de ciclo simple incompleto

Éste es el tercer tipo de flexágono cuadrado de ciclo simple, tiene 3 caras y 3 posiciones principales, la red para este flexágono es mostrada en la figura 16.

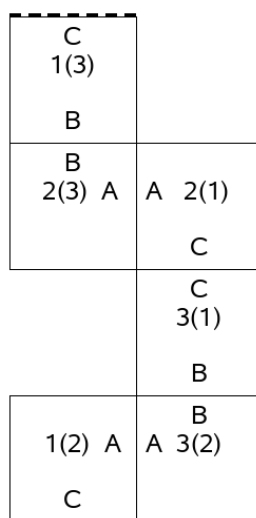


Figura 16: Red del flexágono cuadrado de ciclo simple incompleto

Según lo mostrado en el mapa completo (Fig 17), el flexágono cuadrado de ciclo incompleto recorre un ciclo de 3. Las dos posiciones principales son idénticas aunque esto no es inmediatamente obvio en la figura. La identidad llega a aclararse si una de las posiciones principales es cambiada y se rediseña su circuito. En el código para la posición intermedia 2[ ], los corchetes vacíos demuestran que esto no es posible para abrir el flexágono cuadrado en posición de la caja, esto es posible de hacer en posiciones intermedias 1(3) y 3(1).

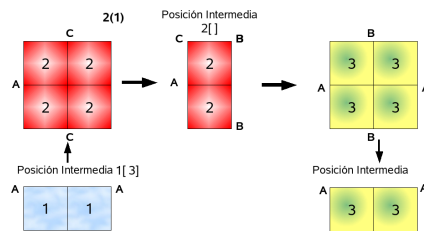


Figura 17: Mapa completo del flexágono cuadrado de ciclo simple incompleto

La figura del flexágono (Fig 18) es un triángulo de ángulo recto con vértices en 3 de los puntos medios de cuadrado circunscrito. Un flexágono cuadrado de ciclo simple incompleto puede ser definido como un flexágono de un ciclo simple cuya figura del flexágono es un polígono con menos lados que el polígono circunscrito.

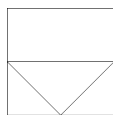


Figura 18: "Figura del flexágono" para el flexágono cuadrado de ciclo simple incompleto.

### 5.5 Grados de libertad de un flexágono cuadrado

Una posición principal de un flexágono cuadrado tiene 2 grados de libertad. Por ejemplo la posición principal 2(1) puede ser rotada sobre las bisagras A-A o la bisagra D-D. Una vez en el movimiento entre una posición principal y una posición intermedia hay un grado de libertad. En una posición intermedia se tiene un máximo de 4 grados de libertad. Por ejemplo la posición intermedia 24 puede ser rotada sobre las bisagras A-A, abriendo sobre las bisagras B-B o D-D, o en una caja abierta hacia afuera.

A partir de un ejemplo, considerando al flexágono cuadrado simple en su posición intermedia (Fig 4) éste tiene la apariencia de dos cuadrados unidos por una bisagra y hay 3 grados de libertad, 2 de estos corresponden a la rotación cercana a las bisagras la cual conduce a las dos posiciones principales y la tercera a la rotación sobre las bisagras conectando los dos pats. En una posición principal hay 2 grados de libertad, éstos corresponden a rotaciones cercanas de 2 pares de bisagras conectando los 4 pats.

### 5.6 Posiciones principales ligadas de un flexágono cuadrado

Las ligas de los modelos de papel de dos flexágonos cuadrados usando una liga en una posición principal el procedimiento es como sigue: Doblar cada uno

de los flexágonos cuadrados para la posición principal a la cual debe ser ligado. Este debe ser uno de los pats en el cual se suplantaré la hoja simple. Un flexágono cuadrado de ciclo simple regular puede ser ligado en cualquiera de sus 4 posiciones principales. Sin embargo un flexágono cuadrado de ciclo simple irregular puede solamente ser ligado en 2 posiciones principales porque solamente se tienen dos alternativas para escoger las hojas, por ejemplo la posición principal 3(2) y 1(4) en la Fig 6.

Un flexágono cuadrado de ciclo simple incompleto puede ser ligado en cualquiera sus posiciones principales. Cortando el flexágono en la bisagra a lo largo de la línea entre hojas y quitar la hoja simple. Mantener los pats restantes en su relación original uno a otro. Marque en los lados el corte de las hojas en los pats para referencias futuras. Ensamble la posición principal común de el flexágono cuadrado para ligarlo poniendo los pats restantes por cada uno de los flexágonos cuadrados alternadamente. Uniendo los lados marcados de la hoja inicial y de cada pat para el lado marcado del inferior de la hoja de un pat adyacente. Si esto no es posible entonces cambie usando las manos por uno de los flexágonos cuadrados que estan ligados. Si esto es un flexágono cuadrado de ciclo simple irregular entonces los pats pueden ser cambiados por otro, usando una posición principal disponible. Esto funciona porque los dos posiciones principales disponibles son enantiomórficas. El enumerar nuevamente las caras usualmente será necesario al ligar los dos flexágonos cuadrados de 4 hojas y por lo tanto 2 caras son removidas

### 5.7 Flexágono cuadrado con 2 ciclos regulares y posición principal ligada

Como un ejemplo de una posición principal ligada la Fig 19 muestra la red para 2 ciclos del flexagono cuadrado formado por 2 ligas.

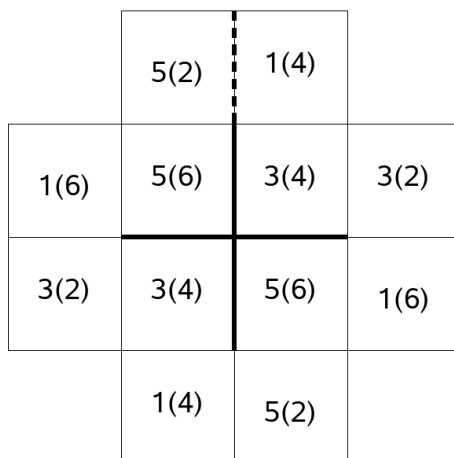


Figura 19: Red del flexágono cuadrado con dos ciclos regulares y posición principal ligada. Cortando las líneas gruesas y punteadas



La posición principal común durante la construcción de la liga es mostrada en el diagrama de la posición principal 2(1) en la Fig. 20 y el mapa simplificado correspondiente a la misma posición principal ligada 2(1) es ilustrado por la Fig 21. El resultado del flexágono es también una banda torcida.

Para la posición principal común 2(1) en la Fig 21, el flexágono cuadrado con 2

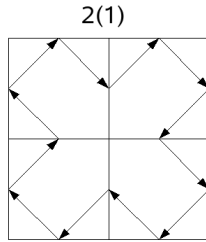


Figura 20: *Diagrama de la posición principal 2(1)*

ciclos regulares liga la posición principal y puede ser doblado hacia 4 diferentes posiciones principales

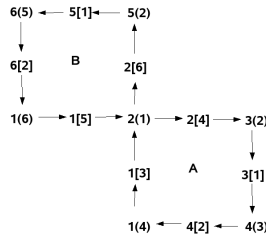


Figura 21: *Mapa simplificado de el flexágono cuadrado con 2 ciclos regulares y posición principal ligada*

## 5.8 Flexágono cuadrado de ciclo regular y posición principal ligada

En el flexágono cuadrado con ciclos regulares y la posición principal ligada, tiene un comportamiento dinámico que puede ser convenientemente representado por un diagrama de flexágonos. El número de caras es 2 veces más el doble del número de cuadrados. En el diagrama del flexágono en la Fig 22 se muestra el diagrama del flexágono para el flexágono cuadrado con 2 ciclos regulares y una posición principal ligada. Un recorrido de Tuckerman garantiza que todas las posibles posiciones principales sean visibles.

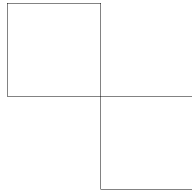


Figura 22: *Diagrama del flexágono para el flexágono cuadrado con posición principal ligada*

### 5.9 Flexágono cuadrado con 2 ciclos irregulares y una posición principal

Éste flexágono es una banda desdoblada y la red es un anillo y puede ser construido sólo por flexion de sus hojas, sin necesidad de cortar el anillo, la red para construir este flexágono es mostrada por la figura 23.

4(3)	1(3)	6(2)	6(5)
4(2)			1(5)
1(5)			4(2)
6(5)	6(2)	1(3)	4(3)

Figura 23: *Red del flexágono cuadrado con dos ciclos irregulares y posición principal ligada.*

### 5.10 Flexágono cuadrado con un ciclo regular, un ciclo irregular y con posición principal ligada

La Fig. 24 muestra la red para el flexágono cuadrado de un ciclo regular, un ciclo irregular y con posición principal ligada. La red es un híbrido de las redes mostradas en las figuras 19 y 23. El comportamiento dinámico de todo el árbol de los flexágonos cuadrados cuyas redes son mostradas en las Fig. 19, 23 y 24 es en general el mismo, pero diferentes en detalles.

El mapa simplificado (Fig 21) es todo lo mismo para los 3. Para distinguir entre ellos, este mapa simplificado tendría que ser anotado para mostrar los tipos

de ciclos presentados. El diagrama del flexágono de la Fig. 22 son también iguales para los 3 flexágonos cuadrados.

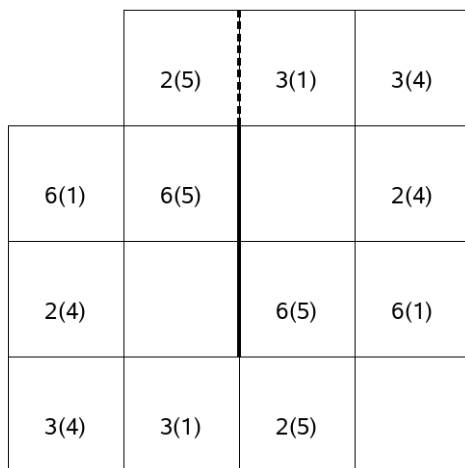


Figura 24: Red del flexágono cuadrado con un ciclo regular, un ciclo irregular y posición principal ligada.

### 5.11 Flexágono cuadrado con un ciclo regular, un ciclo incompleto y una posición principal ligada

Al suprimir o borrar la cara 3 de la red para el flexágono cuadrado con 2 ciclos regulares y una posición principal ligada (Fig 19) resulta el flexágono cuadrado con un ciclo regular y un ciclo incompleto y una posición principal ligada. La red es mostrada en la figura 25 y el mapa simplificado en la Fig. y 26.

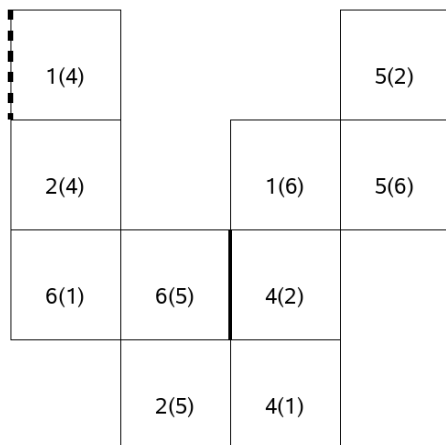


Figura 25: Red del flexágono cuadrado con un ciclo incompleto, posición principal ligada.

Como se puede observar en la Fig.26. El ciclo A se ha convertido en un ciclo incompleto.

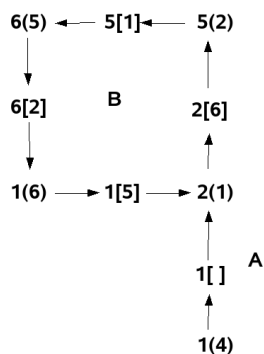


Figura 26: *Mapa simplificado*

### 5.12 Flexágono cuadrado con un ciclo irregular, un ciclo incompleto y una posición principal ligada

Suprimiendo la cara 5 de la red para el flexágono cuadrado con 2 ciclos irregulares y una posición principal ligada (FIG 23) resulta el flexágono cuadrado con un ciclo irregular y un ciclo incompleto y una posición principal ligada. La red es mostrada en la figura 27.

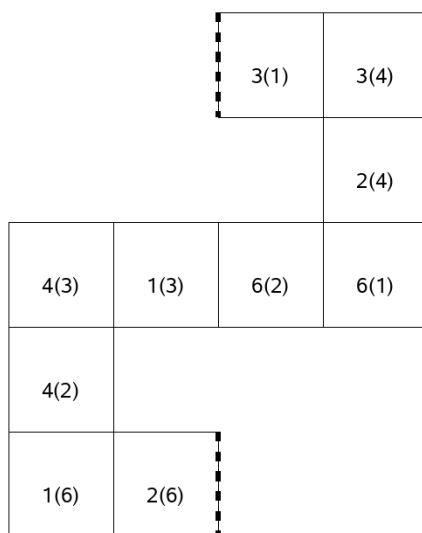


Figura 27: *Red del flexágono cuadrado con un ciclo irregular, un ciclo incompleto y una posición principal ligada*

El mapa simplificado (Fig. 28) es similar que el mostrado en la figura 26 pero las caras numeradas y las letras del ciclo son diferentes.

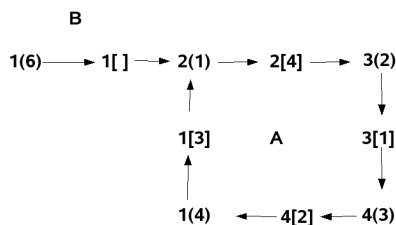


Figura 28: *Mapa simplificado del flexágono cuadrado con un ciclo irregular, uno incompleto y una posición principal ligada*

### 5.13 Flexágono cuadrado con dos ciclos incompletos y una posición principal ligada

Dos diferentes tipos de flexágonos cuadrados en 2 ciclos incompletos y una posición principal ligada puede ser derivada de la red del flexágono cuadrado con un ciclo regular, un ciclo incompleto y una posición principal ligada (fig. 25). Suprimiendo la cara 5 se llega a la red mostrada en la figura 29 y suprimiendo la cara 6 obtendremos la red que se muestra en la figura 30.

El correspondiente mapa simplificado es mostrado en las figuras 31 y 32 re-

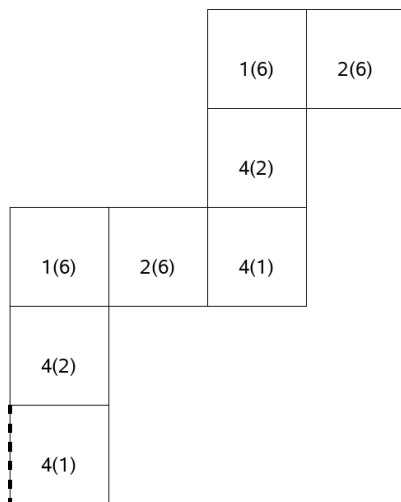


Figura 29: *Red del flexágono cuadrado con dos ciclos incompletos y posición principal ligada, suprimiendo la cara 5*

spectivamente. El tercer tipo puede ser derivado de la red para el flexágono cuadrado con dos ciclos irregulares y una posición principal ligada (figura 23) para suprimir las caras 3 y 5. El mapa simplificado es el mismo que el mostrado

2(5)	1(5)	4(2)	4(1)
4(1)	4(2)	1(5)	2(5)

Figura 30: Red del flexágon cuadrado con dos ciclos incompletos y posición principal ligada, suprimiendo la cara 6

en la figura 31 pero la estructura del pat es diferente.

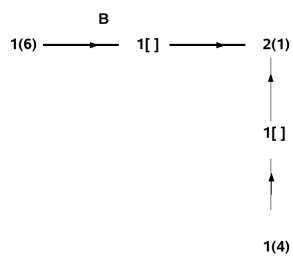


Figura 31: Mapa simplificado para el flexágon cuadrado con dos ciclos incompletos y posición principal ligada

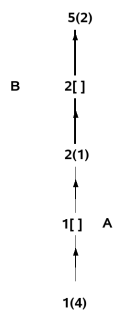


Figura 32: Mapa simplificado del flexágon cuadrado con dos ciclos incompletos y posición principal ligada

## GLOSARIO

**Ángulo Adyacente (Adjacent Angle):** que tiene el mismo vértice y un lado común con otro, y los lados no comunes formando parte de una misma recta.

**Ángulo dihedral:** El ángulo diedral (Coxeter 1963) es el ángulo en una sección el cual corta 2 planos en 90 grados.

**Bisagra (Hinge) :** Es el ángulo dihedral entre los 2 planos conteniendo 2 hojas, la bisagra puede variar entre 0 y 360 grados sin restricción.//También son los dobleces que marcan el área entre una hoja y otra.

**Cara (Face):** Se les llama de esta manera a las superficies individuales cada polígono que conforma el flexágono o la superficie total del flexágono generado.

**Dobleces de libro (Book Flex):** Este doblez es utilizado en los flexágonos cuadrados para poder pasar de una posición principal a una intermedia y viceversa.

**Enantiomorfo (enantiomorph):** Un enantiomorfo es una imagen de algo, una reflexión opuesta del espejo.

**Grados de libertad (Degrees of Freedom):** Es el número de caminos por el cual con movimientos paralelos se consigue llegar a moverse completamente la posición extendida.

**Hoja (Leaf):** Son varios segmentos del flexágono que se doblan al mismo tiempo y pueden ser desplegados alrededor de un eje central común.

**Pat (Pat):** Las hojas visibles son realmente pilas de hojas dobladas llamadas pats. Algunos pats son hojas simples Alternando los pats tenemos la misma estructura.

**Pila (Stack):** Son hojas individuales formadas por figuras planas las cuales pueden ser apiladas haciendo que sus bordes correspondan de manera paralela.

**Polígono Convexo:** Un polígono es convexo sí y solamente sí cualquier línea que contiene un lado del polígono no contiene un punto en el interior del polígono.

**Posición Intermedia:(Intermediate position):** Es el doblez que realizamos en el flexágono el cual nos permite descubrir las caras ocultas que este contiene y estos dobleces deben estar conectados en un eje común.

**Posición Principal(Main Position):** Es el contorno del polígono que se ha construido por medio del flexágono en su forma plana y extendida.

**Red (Net):** La red es el patrón o base con la cual se debe trabajar para formar el flexágono, ya que esta presenta la figura y como están unidos cada uno de los polígonos, y contienen el número correspondiente para saber como deben ser unidos o enlazados estos polígonos.

**Sector:** Se conoce como sector a un par de pats adyacentes.

**Sujetar y Doblar (Pinch Flex):** Es un método el cual es usado en este orden para manipular flexágonos hasta desplegar diferentes pares de caras. Un flexágono es doblado primero de una posición principal a una posición intermedia y luego a otra posición principal. En el caso de los flexágonos cuadrados este doblado es conocido como "doblez de libro" .

## References

- [1] Harold V. McIntosh, *A Flexagon Glossary*, 21 de Mayo, 2006.  
<http://cellular.ci.ulsal.mx/foro/viewtopic.php?t=94>
- [2] Pook, L. *Flexagons: Inside Out*, New York: *Cambridge University Press*, 2003 (ISBN 0 521 52574-8)
- [3] Harold V. McIntosh, *Tetragonal Flexagons*, 31 de Octubre, 2000  
<http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/tetragon/tetragon.html>