Glosario

Conceptos Básicos de Topología en Autómatas Celulares Lineales

Juan Carlos Seck Tuoh Mora[1, †]

[1] *Depto. de Ingeniería Eléctrica, Sección Computación, CINVESTAV-IPN, Apartado Postal 14-740 México D.F.*

Se presenta un análisis del espacio de configuraciones que existe en los autómatas celulares lineales, haciendo especial énfasis en el caso reversible. Para dicho estudio se hace uso de los conceptos básicos de topología de conjuntos y de dinámica simbólica.

Tabla de Contenidos

I Introducción

El interés en el análisis de los autómatas celulares lineales se debe a que son sistemas cuyo funcionamiento es muy sencillo y fácil de modelar en una computadora, pero aun así son capaces de generar comportamientos complejos. Un tipo especial de autómata celular lineal son los llamados *reversibles*, los cuales tienen la propiedad de conservar la información del sistema [TM90].

A Antecedentes Históricos de los Autómatas Celulares Lineales

El concepto de autómata celular surge con el trabajo hecho por John von Neumann sobre sistemas autorreproductivos [vN66]. La idea de von Neumann era la de crear máquinas que pudieran generar copias de sí mismas y a la vez mantuvieran un buen funcionamiento utilizando partes no confiables, esto lo llevo a desarrollar un modelo matemático (gracias a la sugerencia de Stanislaw Ulam) para demostrar la factibilidad de sus ideas; dicho modelo resultó ser un autómata celular.

Por otra parte, destaca también el trabajo realizado por Gustav A. Hedlund [Hed69] el cual sienta bases sólidas en el desarrollo de la dinámica simbólica, en especial su análisis sobre mapeos locales y globales en el espacio de corrimientos.

†Correo Electrónico: `seck@computacion.cs.cinvestav.mx`

B Antecedentes Históricos de la Topología de Conjuntos

Una necesidad fundamental en el análisis matemático ha sido el poder fundamentar las propiedades y características que tiene un conjunto, sin importar cuantos elementos contenga o aún si tiene un número infinito de estos. Es por esta razón que surge el desarrollo de la topología (o análisis en sitio) de conjuntos como una nueva rama de estudio para tratar este tipo de cuestiones [CR41].

El surgimiento de la topología se da a finales del siglo XIX y desde este etapa en adelante podemos encontrar dos tendencias claras en su enriquecimiento y utilización, la concerniente a la geometría y la aplicada a teoría de conjuntos [Lie65].

Tomando la topología de conjuntos, los trabajos fundamentales se deben a Félix Hausdorff, a Georg Cantor (creador de la teoría de conjuntos) y a N. Bourbaki; sin dejar de mencionar a importantes trabajos relacionados con el estudio de sistemas dinámicos elaborados por Henri Poncairé y G. D. Birkhoff.

El objetivo de este trabajo es presentar las construcciones y propiedades básicas que definen una topología en el espacio de configuraciones asociado a la dinámica de un autómata celular lineal, analizando con mayor detalle el caso reversible . En algunas secciones, los conceptos teóricos se ejemplificarán con un caso práctico para hacer más claro su entendimiento.

II Conceptos Básicos de los Autómatas Celulares Lineales

Antes de empezar con el análisis topológico sobre los autómatas celulares li-neales, veamos cual es su funcionamiento, características básicas y la terminología comunmente usada en este ambiente.

A Funcionamiento de un Autómata Celular Lineal

Un autómata celular lineal consiste en un arreglo unidimensional de celdas o *células*, cada célula puede tomar como valor un elemento de un conjunto finito K de *estados*, la cardinalidad de K se define con $|K| = k$. Una célula actualizará su valor dependiendo del estado en que se encuentre y el de r vecinas a cada lado, donde a r se le denomina como *radio de vecindad*; de esta forma $2r + 1$ células generan una nueva célula, dicho bloque de células se le conoce como *vecindad.* El mapeo $\phi : K^{2r+1} \rightarrow K$ que especifica que célula forma cada vecindad posible se le llama la *regla de evolución.*

Bajo la acción local de ϕ, una *configuración* o estado global del autómata evolucionará en otra nueva configuración al aplicar ϕ a cada una de las posibles vecindades contenidas en la anterior, es decir, cada célula actualiza su estado. Para este proceso, en cada aplicación de ϕ, los $2r$ elementos finales de cada vecindad se tomarán como los $2r$ elementos iniciales de la siguiente vecindad, existiendo un traslape entre las vecindades.

Así, empezando desde el instante t_0 con una secuencia inicial de células o *configuración inicial*, se producirá una nueva configuración que define el estado global del autómata en el instante t_1 y este proceso se repite de manera indefinida, esta secuencia de estados globales o configuraciones es la que nos da la dinámica del sistema. Al conjunto de configuraciones de un autómata celular lineal lo denominaremos como $\mathcal{C} = \{\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_i, \ldots\}$.

Una característica de estos sistemas es que tanto el tiempo como el espacio son discretos, esto es ya que el paso de una configuración a otra se muestra en pasos discretos y la interacción local especificada por ϕ se da entre células que toman valores discretos de un conjunto finito de estados.

B Ancestro y Jardín del Edén

Dos definiciones básicas dentro de la dinámica de un autómata celular lineal son las de *ancestro* y *Jardín del Edén.* Dadas dos configuraciones C_i y C_j, se dirá que C_i es ancestro de C_j si al aplicar ϕ a cada una de las vecindades de C_i se genera C_j, este mapeo global inducido por el mapeo local ϕ se denominará como $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, que representa la dinámica discreta en el tiempo de la evolución del autómata.

Por supuesto, puede existir un conjunto (posiblemente vacío) de configuraciones las cuales no puedan aparecer en la evolución del sistema más que al principio como configuración inicial, pues la regla de evolución ϕ es tal que al aplicarla a los elementos en $\mathcal{C}$ no produce dichas configuraciones. Al conjunto de configuraciones que carezcan de ancestros se le denomina el *Jardín del Edén* de dicho autómata celular.

C Autómatas Celulares Lineales Reversibles

Un tipo especial de autómata celular lineal es aquel en donde cada configuración tiene uno y sólo un ancestro, es decir, el Jardín del Edén es vacío y el mapeo global $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es biyectivo. Dicho tipo de autómata celular se denomina *reversible*, ya que existe una función global inversa Φ^{-1} que permite regresar en la evolución del sistema, en otras palabras, obtener las configuraciones que se habían generado anteriormente.

III Espacios Topológicos

En esta sección se expondrán los conceptos básicos utilizados en topología de conjuntos los cuales usaremos para analizar y observar que propiedades tiene el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal.

A Espacios Vectoriales

Antes de presentar los conceptos de topología, hagamos una revisión de las construcciones básicas que utilizaremos en este ambiente como son los espacios, subespacios, bases y mapeos al estilo del álgebra lineal.

1 Definición de Espacio Vectorial

En el estudio de las matemáticas o de la física, el término vector se aplica a una amplia variedad de objetos, principalmente a cantidades que representan magnitudes y dirección [LWJ98], ya sea un fuerza, una velocidad o una distancia. El término vector también se usa para describir entidades como matrices, polinomios o funciones.

Supongamos que tenemos un conjunto $\mathcal{V}$ donde para $x, y \in \mathcal{V}$ y a, b escalares cumplen con las siguientes propiedades:

Propiedad de cerradura

$x + y \in \mathcal{V}$.

$ax \in \mathcal{V}$.

Propiedad de adición

$x + y = y + x$.

$x + (y + z) = (x + y) + z$.

$\mathcal{V}$ contiene al elemento 0 con $x+0 = x, \forall x \in \mathcal{V}$.

Propiedad de multiplicación por un escalar

$a(bx) = (ab)x$.

$a(x + y) = ax + ay$.

$1x = x, \forall x \in \mathcal{V}$.

Entonces $\mathcal{V}$ se denomina un *espacio vectorial*. Podemos decir por lo anterior que en un espacio vectorial intervienen dos conjuntos, vectores y escalares, los segundos como coeficientes de los primeros. Los vectores forman un grupo abeliano con respecto a la adición (la suma es cerrada, asociativa, conmutativa, existe el elemento 0 y los negativos) y los escalares forman un campo con la inclusión del 0 y del 1.

Dicho de manera informal, en un espacio vectorial tenemos elementos los cuales podemos sumar entre ellos, alargarlos o contraerlos; un paso a seguir es encontrar todas las características estructurales de estos espacios. Para esto recurriremos a ideas provenientes del Álgebra Universal, tales como relaciones de orden, relaciones de equivalencia, mapeos de un conjunto a otro y la generación de espacios más complejos por medio de productos cartesianos [McI99].

2 Subespacios Vectoriales

Para un espacio vectorial $\mathcal{V}$, si existe un subconjunto $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ tal que:

- El elemento $0 \in \mathcal{V}$ está también en $\mathcal{W}$.
- $u + v \in \mathcal{W}, \forall u, v \in \mathcal{W}$.
- $au \in \mathcal{W}, \forall u \in \mathcal{W}$ y a cualquier escalar.

Entonces $\mathcal{W}$ es un *subespacio vectorial* en $\mathcal{V}$, es decir, cualquier subconjunto de un espacio vectorial que mantiene las mismas propiedades por sí mismo conforma un subespacio.

3 Relaciones de Orden

En un espacio vectorial, podemos ordenar los subespacios por su contención, por ejemplo, el subespacio más pequeño consistente del elemento 0 está contenido en cualquier otro subespacio, o el espacio completo $\mathcal{V}$ es el subespacio más grande que contiene a cualquier otro.

Par dos subespacios $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, definiremos el subespacio más grande común a ambos como $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, por otra parte, el subespacio más pequeño que contiene tanto a $\mathcal{U}$ como a $\mathcal{W}$ consiste en todas las combinaciones lineales de vectores posibles con los dos subconjuntos y no sólo en $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$.

Con esto, los subconjuntos de un espacio vectorial pueden ser organizados en una jerarquía, en donde para cada subconjunto se obtiene el mínimo subespacio que lo contiene o el máximo subespacio que éste contenga, esto nos lleva a una noción fundamental en el estudio de espacios vectoriales, la de base.

4 Base de un Espacio Vectorial

Hasta el momento, hemos visto que las relaciones de orden nos ofrecen una forma de organizar los subespacios de un espacio vectorial según su contención, en especial, todos los múltiplos escalares de un subespacio $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ forman el menor conjunto que incluye a $\mathcal{W}$.

Supongamos que para $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, con $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, todo elemento $v \in \mathcal{V}$ es una *combinación lineal* de los elementos de $\mathcal{W}$, es decir:

$$v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_m w_m \text{ para } a_1, a_2, \ldots, a_m \text{ escalares.} \tag{1}$$

entonces se dice que $\mathcal{V}$ es una expansión de $\mathcal{W}$.

Para $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq \mathcal{V}$, decimos que $\mathcal{W}$ es linealmente dependiente si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$ no todos iguales a 0 tal que:

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_m w_m = 0. \tag{2}$$

Esto indica que alguno de los elementos de $\mathcal{W}$ es múltiplo de otro; en caso contrario, si la ecuación 2 no se cumple más que para $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, entonces los elementos de $\mathcal{W}$ son linealmente independientes.

De aquí, si $\mathcal{V}$ es una expansión de $\mathcal{W}$, entonces el conjunto de vectores linealmente independientes $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{W}$ forma una *base* de $\mathcal{V}$. Con las relaciones de orden sobre $\mathcal{V}$, podemos encontrar $\mathcal{B}$ como el conjunto de elementos linealmente independientes que generan a $\mathcal{V}$ por medio de todas las posibles combinaciones lineales, así, el número de vectores linealmente independiente en $\mathcal{B}$ dado por $|\mathcal{B}|$ define la dimensión del espacio.

5 *Relaciones de Equivalencia*

Una vez definida la estructura de un espacio vectorial, es interesante analizar los mapeos que pueden existir entre los elementos de varios espacios, en este caso, el uso de relaciones de equivalencia ayuda a hacer más clara la interacción entre dos espacios conectados por una función.

Una función debe cumplir que para cada elemento x, $f(x)$ sea única; de este modo, para espacios vectoriales se requiere que las funciones cumplan con ser lineales, esto es:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y). \tag{3}$$

Funciones lineales entre espacios vectoriales forma otro espacio vectorial; los valores que tome la función dependen de los valores que asigne a la base del espacio, pues de ahí todos los demás elementos se generan como combinaciones lineales.

Para un subconjunto de un espacio vectorial donde una función toma el mismo valor en cada elemento del subconjunto, se define una *clase de equivalencia*; las contraimágenes de esta función dependen de la contraimagen de 0 pues dos elementos de la misma clase de equivalencia tienen las mismas imágenes; por esto, la contaimagen de 0 constituye el *kernel* del mapeo. Las imágenes y contraimágenes de un espacio vectorial son también espacios vectoriales.

6 *Producto Cartesiano*

Sea $\mathcal{V}_i$ una familia de espacios vectoriales para $i \in I \subseteq \mathbb{Z}^+$ donde I es un conjunto que indexa a la familia $\mathcal{V}_i$, entonces:

$$\mathcal{V} = \prod_{i \in I} V_i. \tag{4}$$

denota el conjunto de todos los mapeos $p : I \to \mathcal{V}$ tal que $p(i) = v_i \in \mathcal{V}_i$ para cada $i \in I$.

Bajo esta construcción, $\mathcal{V}$ se denota como el *producto directo* o *producto cartesiano* de los espacios $\mathcal{V}_i$. El producto cartesiano es una de las maneras más sencillas de fomar un espacio vectorial complicado utilizando espacios más simples [McI99]. Las funciones que vayan desde las bases a los elementos del producto se denominan *proyecciones* y sirven para recobrar los factores originales del producto cartesiano.

B Definición Básica de Espacios Topológicos

Tomando como referencia los conceptos de álgebra lineal para el análisis de espacios vectoriales, veamos ahora como se formula con la topología de conjuntos una teoría similar en el estudio de espacios que contienen cualquier tipo de elementos; de este modo, mientras en espacios vectoriales las entidades básicas son vectores, en topología de conjuntos las estructuras fundamentales serán los conjunto abiertos y mientras en espacios vectoriales las operaciones básicas son la adición y la multiplicación por un escalar, en espacios topológicos lo son la unión y la intersección de conjuntos.

Un *espacio topológico* consiste en un conjunto $\mathcal{C}$ y una topología definida sobre éste, la cual se define con una familia $\mathcal{F}$ o un conjunto de subconjuntos de $\mathcal{C}$ denominados *abiertos*; dicha familia debe cumplir con los siguientes axiomas:

Axioma 1. *El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto total $\mathcal{C}$ pertenecen a $\mathcal{F}$.*

Axioma 2. *La unión de una subfamilia arbitraria de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.*

Axioma 3. *La intersección de una subfamilia finita de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$.*

Las definiciones básicas [Jan84] utilizadas en los espacios topológicos son:

- $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ es llamado *cerrado* cuando $\mathcal{C} - \mathcal{U}$ es abierto.
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ es llamado una *vecindad* de $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ si existe un conjunto abierto $\mathcal{W}$ que cumple con $\mathrm{C} \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$.

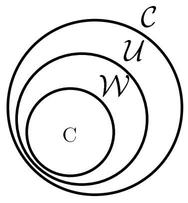

Figura 1: Vecindad de C.

- Para $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$, un elemento $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ es llamado un *punto interior*, *exterior* o *frontera* de $\mathcal{U}$, respectivamente, si $\mathcal{U}$, $\mathcal{C} - \mathcal{U}$ o ninguno de los anteriores es una vecindad de C.

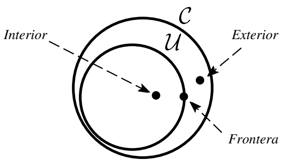

Figura 2: Punto interior, exterior y frontera de $\mathcal{U}$.

- El conjunto $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ de los puntos interiores de $\mathcal{U}$ es llamado el *interior* de $\mathcal{U}$.
- El conjunto $\overline{\mathcal{U}}$ de los puntos de $\mathcal{C}$ que no son puntos exteriores de $\mathcal{U}$ es llamado la *cerradura* de $\mathcal{U}$.

El papel que juegan los conjuntos abiertos en un espacio topológico es crucial ya que con ellos podemos conocer las características de este espacio; propiedades que cumplen los conjuntos abiertos son:

- $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ es abierto $\Leftrightarrow \mathcal{C} - \mathcal{U}$ es cerrado.
- $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ es abierto $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ es una vecindad de cada uno de sus puntos.

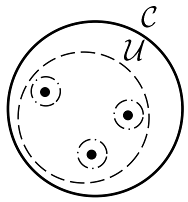

Figura 3: Si $\mathcal{U}$ es abierto, entonces es vecindad de cada uno de sus puntos.

- $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ es abierto $\Leftrightarrow \mathcal{C} - \mathcal{U} = \overline{\mathcal{C} - \mathcal{U}}$.

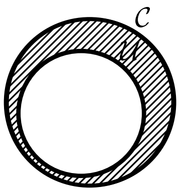

Figura 4: Si $\mathcal{U}$ es abierto, entonces $\mathcal{C} - \mathcal{U}$ es cerrado.

Para un mismo conjunto $\mathcal{C}$, podemos definir varias topologías, es decir, distintas familias $\mathcal{F}_i$ que cumplan con los axiomas de un espacio topológico. Por supuesto, los conjuntos $\mathcal{F}_i$ no tienen por que ser iguales ni tener el mismo número de subconjuntos; si $\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{F}_j$ son topologías sobre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ entonces $\mathcal{F}_j$ se dice mas fina que $\mathcal{F}_i$ ó $\mathcal{F}_j$ se denomina mas débil o gruesa que $\mathcal{F}_i$. La más débil topología de todas es $\mathcal{F} = \{\varnothing, \mathcal{C}\}$ y es llamada *discreta* [Haj68].

C Base de un Espacio Topológico y Mapeos Contínuos

Sea $\mathcal{C}$ un espacio topológico, un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ se dice una *base* de $\mathcal{C}$ si cada conjunto abierto de $\mathcal{C}$ es generado por la unión de conjuntos de $\mathcal{B}$. De la misma manera que la base de un espacio vectorial, la base de una topología es capaz de generar todos los elementos del espacio topológico por medio de la unión.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos espacios topológicos, Un mapeo $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es *contínuo* si la imagen inversa de un conjunto abierto es siempre otro conjunto abierto. Un mapeo biyectivo $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se denominará un *homeomorfismo* cuando tanto f como f^{-1} sean contínuas; es decir, para $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{U}$ es abierto sí y solo si $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}$ es abierto también.

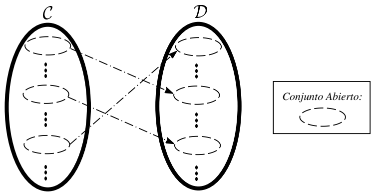

Figura 5: Homeomorfismo entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$; el mapeo preserva los conjuntos abiertos.

Para los espacios topológicos, los homeomorfismos juegan el mismo papel que los isomorfismos en espacios vectoriales [Jan84]; un homeomorfismo conserva las propiedades topológicas al mapear de un espacio a otro, pues el mapeo de una base será a su vez la base del espacio imagen. Trabajar con homeomorfismos es muy útil ya que si conocemos las propiedades de un espacio topológico dado, podemos encontrar estas mismas características en todos los espacios homeomórficos a éste.

D Espacios Métricos

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto, suponga que existe una función real d para los pares ordenados $(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que satisface:

1. $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) \geq 0 \ \forall \ \mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \in \mathcal{C}$.
2. $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{C}_i = \mathrm{C}_j$.
3. $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = d(\mathrm{C}_j, \mathrm{C}_i)$.
4. $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_k) \leq d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) + d(\mathrm{C}_j, \mathrm{C}_k)$ (desigualdad triangular).

Entonces $\mathcal{C}$ es un *espacio métrico* y d una *distancia* o *métrica* sobre $\mathcal{C}$ [Hal50].

Para el conjunto de estados K de un autómata celular lineal, podemos formar el conjunto $\mathcal{C}$ de todas las posibles configuraciones de estados, cada configuración infinita en ambas direcciones. Entonces $\mathcal{C}$ consiste en el producto cartesiano de K indexado por el conjunto de todos los enteros $\mathbb{Z}$ o también:

$$\mathcal{C} = K^{\mathbb{Z}}. \tag{5}$$

lo que indica la formación del producto cartesiano con un solo conjunto, en este caso K. Para la i-ésima configuración $\mathrm{C}_i \in \mathcal{C}$, se utilizarán las siguientes convenciones.

- $\mathrm{C}_{i[a]}$ será la célula ubicada en la posición a en la configuración C_i, para $a \in Z$.
- $\mathrm{C}_{i[a \dots b]}$ será la secuencia de estados contenida en la configuración C_i que cuyo intervalo empieza en la posición a y termina en la posición b para $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \leq b$.
- La longitud de la secuencia $\mathrm{C}_{i[a \dots b]}$ está dada por $b - a + 1$.

En base al trabajo de Hedlund en [Hed69] y de Mike Boyle en [Boy93], sobre cada par ordenado $(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ con $\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \in \mathcal{C}$, definamos la función $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j)$ de la siguiente manera:

$$d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{C}_i = \mathrm{C}_j \\ & \\ (1+r)^{-1} & \text{para el menor } r \in \mathbb{Z}^+ \\ & \quad \text{tal que } \mathrm{C}_{i[r]} \neq \mathrm{C}_{j[r]} \\ & \quad \text{ó } \mathrm{C}_{i[-r]} \neq \mathrm{C}_{j[-r]}. \end{cases} \tag{6}$$

Entonces $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1+r)^{-1}$ define una métrica sobre el conjnto de configuraciones infinitas $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal, esto es ya que:

a) $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1+r)^{-1}$ es una función real que toma valores en el intervalo $[0, 1]$ pues:

$$d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = 0 \text{ si } \mathrm{C}_i = \mathrm{C}_j.$$
$$d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = 1 \text{ si } \mathrm{C}_{i[0]} \neq \mathrm{C}_{j[0]}.$$
$$(1+r)^{-1} \to 0 \text{ cuando } r \to \infty.$$

b) $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1+r)^{-1}$ significa que $\mathrm{C}_{i[-r \dots r]} \neq \mathrm{C}_{j[-r \dots r]}$ lo que implica también que $d(\mathrm{C}_j, \mathrm{C}_i) = (1+r)^{-1}$.

c) Sea $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1+r_1)^{-1}$ y $d(\mathrm{C}_j, \mathrm{C}_k) = (1+r_2)^{-1}$; tomemos a $m = \min\{r_1, r_2\}$, entonces:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_k) \leq (1+m)^{-1} &\leq (1+r_1)^{-1} + (1+r_2)^{-1} \\ &= d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) + d(\mathrm{C}_j, \mathrm{C}_k) \end{aligned}$$

cumpliendo con la desigualdad triangular.

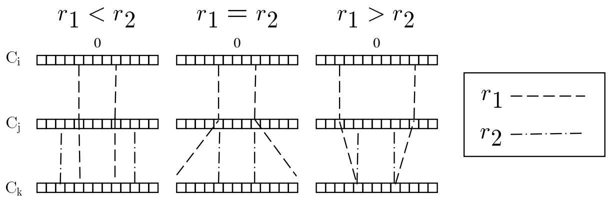

Figura 6: Distancia r_1 entre C_i y C_k.

Por lo que $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1+r)^{-1}$ define un distancia sobre $\mathcal{C}$; por ejemplo, para un autómata celular lineal con $k = 2$, tres configuraciones posibles son:

Configuración	Posiciones
	... -3 -2 -1 0 1 2 3 ...
C_1	... 0 0 0 1 0 0 0 ...
C_2	... 1 0 0 1 0 0 0 ...
C_3	... 0 0 0 1 0 1 0 ...

En este caso se tiene que:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) = d(\mathrm{C}_2, \mathrm{C}_1) = (1+3)^{-1} = 1/4 \\ d(\mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3) = d(\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_2) = (1+2)^{-1} = 1/3 \\ d(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_3) = d(\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_1) = (1+2)^{-1} = 1/3 \end{aligned}$$

cumpliendo con la desigualdad triangular pues $d(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_3) < d(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) + d(\mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3)$.

Por supuesto, otro tipo de métricas son posibles, como la expuesta por Douglas Lind y Brian Marcus en [LM95] que tiene la siguiente forma:

$$d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{C}_i = \mathrm{C}_j \\ & \\ (2)^{-r} & \text{para el mayor} \\ & r \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que} \\ & \mathrm{C}_{i[-r \dots r]} = \mathrm{C}_{j[-r \dots r]}. \end{cases} \tag{7}$$

En ambos casos, las métricas toman en cuenta que las configuraciones C_i y C_j concuerden en una parte central, en donde la especificación del centro es arbitraria por lo que dos configuraciones pueden estar muy cercanas o no dependiendo donde se defina el centro. Una generalización de ambas distancias puede realizarse tomando a $(n+r)^{-1}$ ó a $(n)^{-r}$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

¿Puede entonces existir una distancia que sólo indique cuanto difiere una configuración de otra sin importar el lugar donde se presenten las diferencias?; para esto definamos la siguiente métrica:

$$\delta_r(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{C}_{i[r]} \neq \mathrm{C}_{j[r]} \\ 0 & \text{si } \mathrm{C}_{i[r]} = \mathrm{C}_{j[r]}. \end{cases} \tag{8}$$

entonces

$$\Delta = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta_r(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j). \quad (9)$$

La métrica se definirá como:

$$d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = 1 - 2^{-\Delta}. \quad (10)$$

Para este caso, si $\mathrm{C}_i = \mathrm{C}_j$ entonces $\Delta = 0$ y $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = 1 - 2^0 = 0$; si $\Delta = n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = 1 - 2^{-n}$. Así, la distancia $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = 1 - 2^{-\Delta} \to 1$ conforme $\Delta \to \infty$ de ahí que $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j)$ se encuentre en el intervalo $[0, 1)$, con la diferencia que esta distancia se concentra en medir diferencias entre configuraciones en vez de similitudes entre partes centrales. En la continuación de este trabajo utilizaremos la distancia definida por Hedlund en [Hed69]; es decir, $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1 + r)^{-1}$.

E Conjuntos Abiertos en $\mathcal{C}$

La definición de conjuntos abiertos en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal es sencilla al utilizar el concepto de distancia. Para $m \in \mathbb{R}^+$ y $\mathrm{C}_i \in \mathcal{C}$, definimos el subconjunto $\mathrm{B}_m(\mathrm{C}_i) = \{\mathrm{C}_j \in \mathcal{C} : d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) < m\}$; es decir, $\mathrm{B}_m(\mathrm{C}_i)$ es el subconjunto de configuraciones que están a una distancia menor que m de C_i. A dicho subconjunto se le denomina un *disco abierto* de radio m, para el caso donde $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) \leq m$ el subconjunto se denomina un *disco cerrado* y se denota con $\overline{\mathrm{B}_m(\mathrm{C}_i)}$.

Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos de $\mathcal{C}$ tal que para cada $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$, si $\mathrm{C}_i \in \mathrm{F}$ entonces existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathrm{B}_m(\mathrm{C}_i) \subset \mathrm{F}$; de este modo, la familia $\mathcal{F}$ define una topología formada por los conjuntos abiertos F y $\mathcal{C}$ se dice un *espacio topológico métrico* o simplemente un *espacio métrico.*

Para un autómata celular lineal con $k = 2$, tomemos solamente las configuraciones de tamaño 2.

Conjunto $\mathcal{C}$
00
01
10
11

Tabla I: Configuraciones formadas con 2 estados de longitud 2

Tomando a $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1 + r)^{-1}$ se obtiene que los discos cerrados son:

$\mathrm{C} \in \mathcal{C}$	m	$\overline{\mathrm{B}_m(\mathrm{C})}$
00	0	00
	1/2	01
	1	10,11
01	0	01
	1/2	00
	1	10,11
10	0	10
	1/2	11
	1	00,01
11	0	11
	1/2	10
	1	00,01

Tabla II: Esferas cerradas de $\mathcal{C}$

Propongamos a

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \varnothing \\ \mathrm{F}_1 = \{00, 01\} \\ \mathrm{F}_2 = \{10, 11\} \\ \mathrm{F}_3 = \{00, 01, 10, 11\}. \end{cases} \quad (11)$$

Para F_1, se observa que los discos abiertos son:

$$\mathrm{B}_{1/2}(00) = \{00\} \in \mathrm{F}_1$$

$$\mathrm{B}_1(00) = \{00, 01\} \in \mathrm{F}_1.$$

el mismo caso se presenta para F_2 y F_3, además, se cumple que:

$$\begin{array}{l} \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_3 \\ \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \varnothing \\ \mathrm{F}_3 \cup \varnothing = \mathrm{F}_3 \\ \mathrm{F}_3 \cap \varnothing = \varnothing. \end{array}$$

lo que muestra que $\mathcal{F}$ define una topología sobre $\mathcal{C}$, en el ejemplo, el conjunto de configuraciones de longitud 2.

Es posible observar en el ejemplo anterior que si sólo formamos a $\mathcal{F}$ con el conjunto vacío y el conjunto total cumplirán con ser conjuntos abiertos y también sus uniones e intersecciones caen dentro de $\mathcal{F}$, siendo $\mathcal{F} = \{\varnothing, \mathcal{C}\}$ la topología discreta de $\mathcal{C}$ como se definió en la sección III B. Teniendo estos resultados, podemos ver que $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1 + r)^{-1}$ induce una topología sobre el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal.

F Producto Topológico

En la ecuación 5 se presentó que $\mathcal{C} = K^{\mathbb{Z}}$, denotando al conjunto de todos los mapeos con la siguiente forma :

$$p : \mathbb{Z} \to \mathcal{C} \text{ tal que } p(i) = e_i \in K_i \text{ para } i \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Con lo anterior, $\mathcal{C}$ es el producto directo o cartesiano de los conjuntos K_i donde $K_i = K$, $\forall\, i \in \mathbb{Z}$, cada e_i es la proyección de p sobre K_i y cada mapeo p construye una configuración C que pertenece al conjunto de configuraciones $\mathcal{C}$. El mapeo:

$$p_i : p \to K_i \text{ para } i \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

se dirá el i-ésimo mapeo de proyección; o sea, p_i es el mapeo que va de cada configuración C sobre el conjunto de estados K_i.

Al conjunto de estados K lo podemos ver como un espacio topológico cuya topología discreta es él mismo, en otras palabras, podemos ver a K como un conjunto abierto. Entonces, el conjunto de mapeos $p(i)^{-1} : K_i \to p$ forma un *producto topológico* que da origen a un elemento C en $\mathcal{C}$.

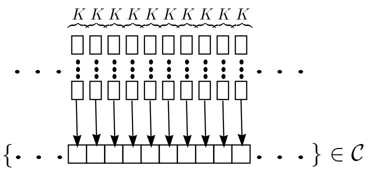

Figura 7: Los mapeos $p(i)^{-1} : K_i \to p$ forman las configuraciones en $\mathcal{C}$.

De esta forma, se puede ver que el espacio métrico de configuraciones $\mathcal{C}$ coincide con el producto topológico generado por la topología discreta de K como se señala en [Hed69].

IV Propiedades del Espacio Métrico de Configuraciones

Hasta el momento hemos visto que para el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$, la distancia $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1+r)^{-1}$ induce una topología , utilizando esta métrica obtengamos las propiedades que se presentan en dicho espacio.

A Convergencia

Para el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$, se dirá que una configuración C_i converge a C si $d(\mathrm{C}_{i[-r\ldots r]}, \mathrm{C}) \to 0$ conforme $r \to \infty$; es decir:

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{C}_{i[-r\ldots r]} = \mathrm{C}. \tag{14}$$

Supongamos que $\mathrm{C}_i \to \mathrm{C}_1$ y $\mathrm{C}_i \to \mathrm{C}_2$, entonces $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2$; esto se puede probar utilizando la desigualdad del triángulo.

$$0 \le d(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) \le d(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_i) + d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_2) \to 0 + 0 = 0. \tag{15}$$

Así $d(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) = 0$ por lo que $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2$, mostrando que el límite es único.

B Conjuntos de Cilindros

Sobre el conjunto de configuraciones $\mathcal{C}$, para un bloque finito de estados b fijo y $m \in \mathbb{Z}$, definamos el *cilindro* $\mathfrak{C}_m(b)$ como sigue.

$$\mathfrak{C}_m(b) = \{\mathrm{C} \in \mathcal{C} : \mathrm{C}_{[m\ldots m+|b|-1]} = b\}. \tag{16}$$

En otras palabras, $\mathfrak{C}_m(b)$ es el conjunto de configuraciones en las cuales el bloque de estados b aparezca empezando en la posición m.

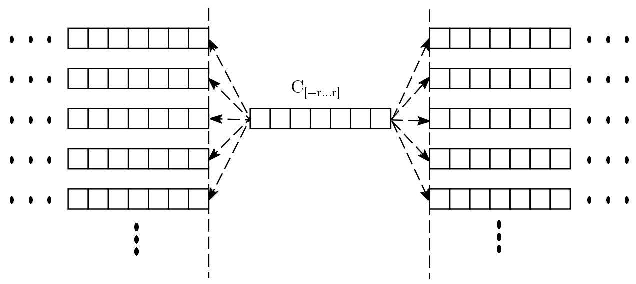

Figura 8: Cilindro $\mathfrak{C}_{-r}(\mathrm{C}_{[-r\ldots r]})$.

Una primera observación a realizar, es que todo cilindro es abierto ya que para cualquier $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ tenemos:

$$\mathfrak{C}_{-m}(\mathrm{C}_{[-m\ldots m]}) = \mathrm{B}_{(m+1)^{-1}}(\mathrm{C}). \tag{17}$$

probando que el cilindro $\mathfrak{C}_{-m}(\mathrm{C}_{[-m\ldots m]})$ es abierto pues $\mathrm{B}_{(m+1)^{-1}}(\mathrm{C})$ cumple con esto. Por las propiedades de un espacio topológico, sabemos que el complemento de un conjunto abierto es cerrado, y la unión de conjuntos abiertos es abierta por el axioma 2; tomemos el caso más sencillo, para un autómata celular lineal de k estados, tenemos que $\left|\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{[0]})\right| = k$, cada uno de estos cilindros cumpliendo con ser abierto. Para cualquier cilindro $\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})$ con $0 \le i < k$, su complemento en $\mathcal{C}$ lo representan $k-1$ cilindros cuya unión también es abierta, de aquí que $\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})$ sea cerrado, concluyendo que un cilindro es tanto abierto como cerrado.

Dado que con el conjunto de cilindros podemos representar a todo el espacio métrico $\mathcal{C}$ y son conjuntos abiertos, estos constituyen una base para $\mathcal{C}$ [Boy93].

Haciendo uso de los conceptos de convergencia y del conjunto de cilindros describamos dos características importantes que se presentan en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal.

C Espacios Compactos

La *cubierta abierta* de un espacio topológico $\mathcal{C}$ es una familia de conjuntos abiertos cuya unión es el mismo espacio $\mathcal{C}$. Un espacio toplógico $\mathcal{C}$ se dirá *compacto* si cada cubierta abierta de éste tiene una subcubierta finita. Esto significa que $\mathcal{C}$ es compacto si cumple con lo siguiente.

$$\begin{array}{c} \mathcal{F} = \{\mathrm{F}_i : 0 < i < \infty, \mathrm{F}_i \subset \mathcal{C}\} \\ \text{cumpliendo que } \bigcup_i \mathrm{F}_i = \mathcal{C}. \end{array} \tag{18}$$

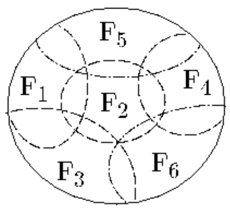

Figura 9: Cubierta finita de $\mathcal{C}$ con $|\mathcal{F}| = 6$.

En el caso del espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal, tomemos el siguiente cilindro:

$$\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}) = \{\mathrm{C} \in \mathcal{C} : \mathrm{C}_{[0]} = i \text{ para } i \in K\}. \tag{19}$$

$$\mathcal{F} = \{\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}) : \forall i \in K\}. \tag{20}$$

Es decir, K indexará al conjunto de cilindros donde cada cilindro cumple con que $\mathrm{C}_{i[0]} = i$ donde $i \in K$. Entonces, $\left|\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})\right| = k < \infty$ pues K es un conjunto finito de estados, por lo que:

$$\mathcal{F} = \bigcup_i \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}) = \mathcal{C}. \tag{21}$$

Como cada cilindro $\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}) \subset \mathcal{C}$ es abierto, entonces $\mathcal{F}$ establece una cubierta finita para $\mathcal{C}$.

Es aquí donde se puede apreciar la importancia que tiene la elección de un centro para definir una distancia en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$, pues dado este centro se puede definir el conjunto de cilindros y con esto generar una cubierta finita de $\mathcal{C}$ concluyendo que dicho espacio es compacto. El que un espacio topológico sea compacto es muy útil ya que podemos tratar el espacio con un número finito de subconjuntos del mismo lo que facilita su estudio, veamos ahora como podemos elegir un representante de cada subconjunto.

En base al trabajo de Lind y Marcus en [LM95], para el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$, tomemos un cilindro $\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})$ como se establece en la ecuación 19, construyamos una subsecuencia convergente de $\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})$. Para $r \geq 1$, encontremos una secuencia de subconjuntos S_r de enteros positivos tal que:

$$\mathrm{C}_{p[-r\ldots r]} = \mathrm{C}_{q[-r\ldots r]}\ \forall p, q \in S_r;\ \mathrm{C}_p, \mathrm{C}_q \in \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}). \tag{22}$$

Definamos la configuración C donde $\mathrm{C}_{[-r\ldots r]} = \mathrm{C}_{p[-r\ldots r]}$ para toda $p \in S_r$ e inductivamente definamos p_r como el elemento más pequeño de S_r el cual excede a p_{r-1}. Entonces $\mathrm{C}_{p_r[-r\ldots r]}$ converge a C conforme $r \to \infty$.

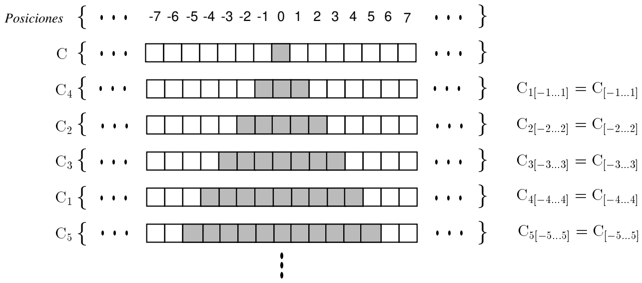

Figura 10: Convergencia de $\mathrm{C}_{p[-r\ldots r]}$ a C conforme $r \to \infty$.

Utilizando la idea de convergencia, podemos decir que el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ es compacto si cada secuencia de configuraciones en $\mathcal{C}$ converge a un configuración dada [LM95], pues esta convergencia asegura la existencia de los conjuntos de cilindros.

D Espacios Separables

Otra propiedad importante para clasificar a un espacio topológico es el grado de separación que tiene [Haj68] [Hus66]; así, un espacio topológico $\mathcal{C}$ se clasifica como:

T_0 (Espacio de Riesz) si para cualesquiera dos elementos distintos en $\mathcal{C}$ existe una vecindad de uno que no contiene al otro.

T_1 (Espacio de Kolmogorov) si para cualesquiera dos elementos distintos en $\mathcal{C}$ existen vecindades de ambos que no contienen al otro.

T_2 (Espacio de Hausdorff) si cualesquiera dos elementos distintos en $\mathcal{C}$ tiene vecindarios disjuntos.

T_3 (Espacio Regular) si cada vecindad de cualquier elemento en $\mathcal{C}$ contiene una vecindad cerrada del mismo.

T_Q (Espacio de Tychonov o Completamente Regular) si el espacio es T_2 y para cada elemento $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ y cualquier vecindario $\mathcal{U}$ del mismo, existe un mapeo contínuo $f : \mathcal{C} \to [0, 1]$ con $f(\mathrm{C}) = 0$ y $f(\mathcal{C} - \mathcal{U}) = 1$.

T_4 (Espacio Normal) si el espacio es T_2 y cualesquiera dos subconjuntos cerrados disjuntos de $\mathcal{C}$ tienen vecindarios disjuntos.

En particular, el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal es de tipo T_2 o de Hausdorff, para mostrar esto, tomemos dos configuraciones distintas $\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \in \mathcal{C}$. Seleccionemos la posición de una célula en la cual ambas configuraciones difieran (por lo menos existe una pues de otra forma $\mathrm{C}_i = \mathrm{C}_j$) y definamos ésta como la posición central de las configuraciones, de aquí establezcamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}_{i[0]} \neq \mathrm{C}_{j[0]} \\ &\left.\begin{aligned}\mathrm{C}_{i[0]} = i \\ \mathrm{C}_{j[0]} = j\end{aligned}\right\} \text{ para } i, j \in K \text{ con } i \neq j. \end{aligned} \tag{23}$$

Utilizemos nuevamente el conjunto de cilindros $\mathcal{F}$ como se definió en la ecuación 20, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_i \in \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}) \text{ con } \mathrm{C}_{i[0]} = i \\ \mathrm{C}_j \in \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{j[0]}) \text{ con } \mathrm{C}_{j[0]} = j. \end{aligned} \tag{24}$$

Para C_i tomemos la secuencia de estados definida por $\mathrm{C}_{i[-1\ldots1]}$, entonces tenemos que

$$\mathrm{C}_i \in \mathfrak{C}_{-1}(\mathrm{C}_{i[-1\ldots1]}). \tag{25}$$

lo cual es análogo para C_j

$$\mathrm{C}_j \in \mathfrak{C}_{-1}(\mathrm{C}_{j[-1\ldots1]}). \tag{26}$$

Dado que el cilindro especificado en las ecuación 25 cumple que sus elementos comparten la misma parte central y el mismo caso se presenta para el cilindro en la ecuación 26, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_i \in \mathfrak{C}_{-1}(\mathrm{C}_{i[-1\ldots1]}) \subset \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}) \\ \mathrm{C}_j \in \mathfrak{C}_{-1}(\mathrm{C}_{j[-1\ldots1]}) \subset \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{j[0]}). \end{aligned} \tag{27}$$

Por lo que $\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})$ es una vecindad de C_i y $\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{j[0]})$ es una vecindad de C_j. Por último, sabemos que toda $\mathrm{C}_i \in \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})$ cumplen con que $\mathrm{C}_{i[0]} = i$ siendo esto similar para todo $\mathrm{C}_j \in \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{j[0]})$ con $\mathrm{C}_{j[0]} = j$; como $i \neq j$ entonces $\mathrm{C}_i \neq \mathrm{C}_j$ $\forall \mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j$, de aquí que:

$$\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]}) \cap \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{j[0]}) = \varnothing. \tag{28}$$

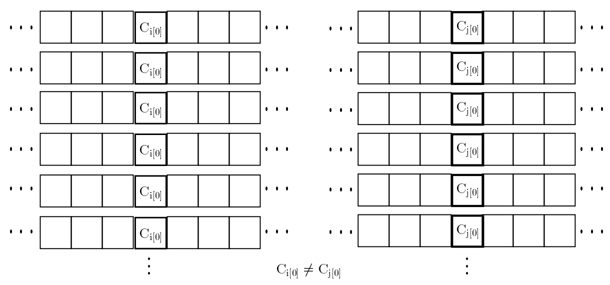

Figura 11: Los conjuntos de cilindros son disjuntos.

Por lo que las vecindades de C_i y C_j son disjuntas, para cualquier $\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \in \mathcal{C}$ con lo que el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ es separable T_2 o de Hausdorff.

V Introducción al Espacio de Corrimientos de Tipo Finito

Hemos visto hasta ahora algunas propiedades globales que caracterizan el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal, veamos entonces cual es el comportamiento local que en dichos sistemas existen, para esto utilizaremos conceptos de dinámica simbólica desarrollados en [Hed69], [Boy93] y [LM95].

A Espacios de Corrimientos

Sobre el espacio topológico $\mathcal{C}$ podemos definir un mapeo de corrimiento sobre cada configuración de la siguiente manera:

$$\sigma : \mathrm{C}_j \to \mathrm{C}_k \text{ tal que } \mathrm{C}_{k[i]} = \mathrm{C}_{j[i+1]},\ \forall \mathrm{C}_j, \mathrm{C}_k \in \mathcal{C}. \tag{29}$$

El mapeo σ hace correr a la izquierda cada elemento de una configuración en una posición con respecto a un centro especificado; en el caso de σ^{-1} el corrimiento es a la derecha. Globalmente, el mapeo de corrimiento σ mapea configuraciones a configuraciones; es decir, $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, al tener una función inversa con σ^{-1}, el mapeo de corrimiento es biyectivo en $\mathcal{C}$ y el espacio $\mathcal{C}$ se denomina el *espacio de corrimiento.*

B Homomorfismos

Un *homorfismo* es simplemente una mapeo contínuo que conmuta con el co-rrimiento. Para el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ y la regla de evolucion $\phi : K^{2r+1} \to K$ asociada a un autómata celular lineal, si dos configuraciones $\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j \in \mathcal{C}$ son cercanas según $d(\mathrm{C}_i, \mathrm{C}_j) = (1+r)^{-1}$, entonces C_i y C_j tienen secuencias centrales idénticas de considerable longitud. De aquí, sus evoluciones $\phi(\mathrm{C}_i)$ y $\phi(\mathrm{C}_j)$ también coincidirán en una secuencia central con longitud ligeramente menor que en el caso de C_i y C_j, de esta manera, ϕ define un mapeo global $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ contínuo sobre $\mathcal{C}$ pues los conjuntos abiertos siguen permaneciendo así.

Otra propiedad de $\phi(\mathrm{C}_i) = \mathrm{C}_j$ es que conmuta con $\sigma : \mathrm{C}_i \to \mathrm{C}_j$ como lo demuestra Hedlund en [Hed69] de la siguiente manera:

$$\sigma(\phi(\mathrm{C}_{i[-2r\ldots 2r]})) = \sigma(\mathrm{C}_{j[0]}) = \mathrm{C}_{j[1]} = \phi(\mathrm{C}_{i[-2r+1\ldots 2r-1]})$$
$$\phi(\sigma(\mathrm{C}_{i[0]})) = \phi(\sigma(\mathrm{C}_{i[-2r]})\ldots\sigma(\mathrm{C}_{i[2r]})) = \phi(\mathrm{C}_{i[-2r+1]}\ldots\mathrm{C}_{i[2r-1]}) = \mathrm{C}_{j[1]}. \quad (30)$$

Con lo anterior tenemos que el mapeo global $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ inducido por ϕ es contínuo y conmuta con el corrimiento o lo que es lo mismo, es un homomorfismo, en particular, como Φ es un mapeo de $\mathcal{C}$ a si mismo, define un *endomorfismo*.

Un resultado importante debido a Hedlund en [Hed69], es que todos los homomorfismo en un espacio topológico deben tener el funcionamiento de un autómata celular lineal. Sea $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un homomorfismo, entonces $\Phi(\mathrm{C}_i) \to \mathrm{C}_j$ es contínua. Como hemos hecho anteriormente C_i y C_j pueden ser especificados como elementos de dos cilindros disjuntos, dado que el mapeo es contínuo, entonces

$$\Phi(\mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})) \to \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{j[0]}). \quad (31)$$

Entonces, para $\mathrm{C}_{i_1}, \mathrm{C}_{i_2} \in \mathfrak{C}_0(\mathrm{C}_{i[0]})$ se tiene que $d(\mathrm{C}_{i_1}, \mathrm{C}_{i_2}) = (1+r)^{-1} < 1$ pues comparten la misma parte central por lo que $r > 0$; de esta forma:

$$\Phi(\mathrm{C}_{i_1[0]}) = \Phi(\mathrm{C}_{i_2[0]}) = \mathrm{C}_{j[0]}. \quad (32)$$

Así, la coordenada central de $\mathrm{C}_{j[0]}$ depende solamente de los bloques centrales $\mathrm{C}_{i_1[-r\ldots r]}$ y $\mathrm{C}_{i_2[-r\ldots r]}$, lo que representa un mapeo de bloques de tamaño $2r-1$ a elementos de K o lo que es lo mismo $\phi : K^{2r+1} \to K$, que es justamente el funcionamiento de un autómata celular lineal.

C Corrimientos de Tipo Finito

Se ha visto que en un espacio de corrimiento $\mathcal{C}$, σ mapea el espacio a si mismo, esto se conoce como el *sistema dinámico de corrimiento*. En un autómata celular lineal, tenemos que el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ está compuesto por todas las secuencias infinitas de estados posibles, donde K representan el conjunto finito de estados. Llamaremos el *K-corrimiento completo* a todo el conjunto de posibles secuencias infinitas que se puedan generar con K, esto es:

$$K\text{-}\textit{corrimiento completo} = K^{\mathbb{Z}} = \{\mathrm{C}_{[i]} : i \in \mathbb{Z}, \mathrm{C}_{[i]} \in K \ \forall i \in \mathbb{Z}\}. \quad (33)$$

entonces, cada configuración de estados C pertenece a $K^{\mathbb{Z}}$.

Un *corrimiento de tipo finito* [Boy93] es una restricción del K-corrimiento completo, en donde existe un conjunto finito $\mathfrak{P}$ de secuencias de estados prohibidas, es decir, ningún elemento de $\mathfrak{P}$ puede aparecer en las configuraciones pertenecientes al corrimiento de tipo finito. Definamos a $\mathcal{C}_{\not\mathfrak{P}}$ como el corrimiento de tipo finito formado por configuraciones de estados que no contienen ninguna secuencia en $\mathfrak{P}$, con esto se tiene que:

$$\mathcal{C}_{\not\mathfrak{P}} \subseteq \mathcal{C}. \quad (34)$$

En el ámbito de un autómata celular lineal, un corrimiento de tipo finito $\mathcal{C}_{\not\mathfrak{P}}$ es el conjunto de todas las posibles configuraciones donde $\mathfrak{P}$ son las secuencias de estados base del Jardín del Edén de dicho autómata, con lo que $\mathcal{C}_{\not\mathfrak{P}}$ contiene solamente aquellas configuraciones que son posibles de generar con la regla de evolución ϕ.

D Diagrama de de Bruijn

Un paso acostumbrado en dinámica simbólica es representar un corrimiento de tipo finito por medio de una gráfica , donde todas las posibles rutas del diagrama muestren la colección de las secuencias que se tienen en $\mathcal{C}_{\not\mathfrak{P}}$, para autómatas celulares lineales, la gráfica que resulta natural para conocer las evoluciones del conjunto $\mathcal{C}$ es el *diagrama de de Bruijn* [McI91].

Para un autómata celular con k estados y un radio de vecindad r, la definición del diagrama de de Bruijn es la siguiente:

- El conjunto de nodos del diagrama de de Bruijn $\mathcal{N}_B$ consistirá de todas las posibles secuencias de estados de longitud $2r$, es decir, $\mathcal{N}_B = K^{2r}$.
- Para $\mathrm{n}_i, \mathrm{n}_j \in \mathcal{N}_B$, existirá una arista de n_i a n_j si los $2r-1$ elementos finales de n_i son iguales a los $2r-1$ elementos iniciales de n_j, para el caso en que $r = 1/2$, tenemos 0 elementos finales para n_i y 0 elementos iniciales para n_j, por lo que en esta situación en particular el diagrama será completo.
- Cada arista en el diagrama de de Bruijn representa una vecindad del autómata, es decir, un bloque de estados de longitud $2r+1$, tomando en cuenta el elemento inicial del nodo n_i, el traslape de longitud $2r-1$ y el elemento final del nodo n_j. Al conjunto de aristas del diagrama de de Bruijn se le denominará con $\mathcal{A}_B$ y representa al conjunto de vecindades K^{2r+1} de un autómata celular lineal.
- Cada arista $a \in \mathcal{A}_B$ se etiquetará con un símbolo o se coloreará con un color distinguiendo el estado en el cual evoluciona la vecindad representada por a, o sea, el etiquetado de todas las aristas representa al mapeo
$\phi : K^{2r+1} \to K$ que es la regla de evolución del autómata.

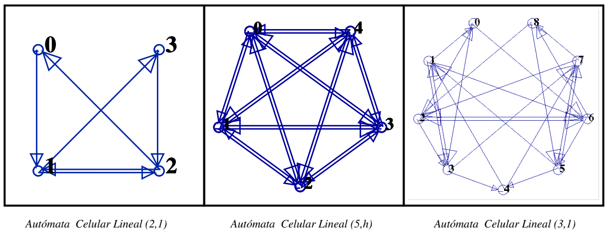

Figura 12: Diagramas de de Bruijn genéricos de distintos autómatas celulares lineales.

Por medio del diagrama de de Bruijn, tenemos una representación gráfica de la regla de evolución, las rutas en este diagrama representan todas las posibles configuraciones que aparecen en la evolución del autómata celular como producto de ϕ.

Cabe señalar que en la literatura sobre dinámica simbólica, el uso del diagrama de de Bruijn es casi inexistente, prefiriendo usar otro tipo de diagramas más a la manera de la representación gráfica de autómatas finitos, o la gráfica dual del diagrama de de Bruijn (en caso de existir).

E Definición de Espacios Sóficos

Supongamos que tenemos una gráfica la cual pueda representar por medio de sus rutas un subconjunto de secuencias infinitas perteneciente al K-corrimiento completo $K^{\mathbb{Z}}$, a dicho subconjunto se le llamará un *espacio sófico*, una definición formal la podemos obtener en el trabajo de Lind en [LM95] y se prsenta en seguida.

- Un subconjunto $\mathcal{C}$ del corrimiento completo $K^{\mathbb{Z}}$ es un *espacio sófico* si $\mathcal{C}$ puede ser generado por medio de una gráfica etiquetada $\mathcal{G}$. Una presentación del espacio sófico $\mathcal{C}$ es una gráfica etiquetada $\mathcal{G}$ para la cual el conjunto de todas sus rutas sea igual a $\mathcal{C}$.

También se señala en [LM95] que la palabra "sófico" fue utilizada en este ámbito por primera vez gracias a B. Weiss y viene de la palabra hebrea para "finito." Para un autómata celular lineal, el conjunto de configuraciones $\mathcal{C}$ puede tomarse como un espacio sófico teniendo como representación al diagrama de de Bruijn.

De acuerdo si el conjunto $\mathfrak{P}$ de secuencias pertenecientes al Jardín del Edén es finito o no, podemos tener la siguiente clasificación de $\mathcal{C}$.

Figura 13: Clasificación de $\mathcal{C}$ según la cardinalidad de $\mathfrak{P}$.

La teoría de espacios sóficos desde el punto de vista de la dinámica simbólica se ha concentrado en estudiar cuales son los posibles conjuntos $\mathcal{C}$ que se pueden generar, en analogía al lenguaje que un autómata finito puede reconocer como se estudia en teoría de autómatas. Sin embargo, en el caso de un autómata celular sería también interesante conocer cuales son las propiedades que se cumplen al generar las secuencias de estados y configuraciones que las contengan.

F Topología Básica de los Autómatas Celulares Lineales Reversibles

Se ha observado que en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}$ de un autómata celular lineal se puede inducir una métrica con la elección arbitraria de un centro, la cual nos permite definir conjuntos abiertos y topologizar a $\mathcal{C}$. Un tipo especial de conjuntos abiertos son los cilindros, con los cuales podemos caracterizar a $\mathcal{C}$ como compacto y separable del tipo de un espacio de Hausdorff. En un autómata celular lineal reversible, encontraremos además que toda secuencia de configuraciones que se van generando en la evolución del mismo tendrán una métrica periódica si las configuraciones son de longitud finita, pues dado que el número de posibilidades está restringido, una configuración tendrá que repetirse tarde o temprano, dicha configuración debe ser la inicial pues de otro modo el autómata no cumple con ser reversible.

Dado que en un autómata reversible no existe el Jardín del Edén, toda configuración es posible de formarse, por lo que este tipo de autómatas caen en la categoría de corrimientos completos, es decir, en un autómata celular lineal reversible se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \varnothing \\ \mathcal{C}_{\not\mathfrak{P}} &= \mathcal{C}. \end{aligned} \tag{35}$$

VI Conclusiones

Podemos apuntar que la topología del conjunto de configuraciones $\mathcal{C}$ se da por un elemento principal, la elección de un centro, pues la definición de la métrica en este espacio, ya sea al estilo de Hedlund ($(1+r)^{-1}$) o al de Lind ($(2)^{-r}$) es en base a este centro y la construcción de los conjuntos de cilindros,también es apoyándose en las posiciones que implican el establecimiento de un centro.

La caracterización de el espacio $\mathcal{C}$ como compacto y Hausdorff separable se puede lograr al utilizar al conjunto de cilindros como base de la topología.

Los mapeos contínuos entre espacios topológicos son de gran importancia ya que preservan los conjuntos abiertos, así, un resultado importante es el que todo mapeo contínuo que conmuta con el corrimiento puede ser representado por la acción de una regla de evolución y con esto coincidir con el funcionamiento de un autómata celular lineal. Para el caso reversible, los endomorfismos del espacio en sí mismos cumplen con ser biyectivos, definiendo el conjunto de mapeos que son automorfismos en $\mathcal{C}$.

Dado que en todo cilindro se puede encontrar una subsecuencia convergente de configuraciones, podemos representar al espacio $\mathcal{C}$ con un conjunto finito de elementos, si limitamos la longitud de la configuración límite de cada subsecuencia convergente, entonces podemos representar al espacio $\mathcal{C}$ con un conjunto de configuraciones finitas siendo su número finito también, y de este modo facilitar el estudio de la dinámica de un autómata celular lineal pues solo se toma el caso finito.

La teoría de dinámica simbólica y corrimientos de tipo finito pueden ofrecer más resultados si tomamos al diagrama de de Bruijn como base. Dado que para el caso reversible el espacio resulta ser un corrimiento completo sin palabras prohibidas, se puede conjeturar que dicho espacio contiene otros subespacios completos, explicando así la existencia de subautómatas reversibles en todo autómata celular lineal reversible con $k > 2$, como se ha podido apreciar en observaciones experimentales.

Bibliografía

[Boy93] Mike Boyle, Symbolic Dynamics and Matrices, IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 50, 1–38, IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, Academic Press, New York, 1993, pp. 1–38.

[CR41] Richard Courant and Herbert Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, New York, 1941.

[Haj68] Otomar Hajek, *Dynamical systems in the plane*, Academic Press, London, 1968.

[Hal50] Paul R. Halmos, *Measure theory*, D. Van Nostrand, New York, 1950.

[Hed69] Gustav A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Mathematical Systems Theory **3** (1969), 320–375.

[Hus66] Taqdir Husain, *Introduction to topological groups*, W. B. Saunders Company, Philadelphia and London, 1966.

[Jan84] Klaus Janich, *Topology*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[Lie65] W. Lietzmann, *Visual topology*, Chatto & Windus, London, 1965, Traducido del alemán por M. Bruckheimer.

[LM95] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, New York, 1995.

[LWJ98] Jimmy T. Arnold Lee W. Johnson, R. Dean Riess, *Introduction to linear algebra*, Addison-Wesley, New York, 1998.

[McI87] Harold V. McIntosh, *Linear cellular automata*, Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, 1987.

[McI91] Harold V. McIntosh, *Linear cellular automata via de bruijn diagrams*, http:// delta. cs. cinvestav. mx/ ˜mcintosh, 1991.

[McI99] Harold V. McIntosh, *Linear algebra*, Notas del curso de Algebra Lineal impartido en el Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 1999.

[TM90] T. Toffoli and N. Margolus, *Invertible cellular automata: a review*, Physica D **45** (1990), 229–253.

[vN66] John von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, University of Illinois Press, 1966, Editado y completado por A. W. Burks.