CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Sección Computación

CARACTERIZACION DEL COMPORTAMIENTO DE LOS AUTOMATAS CELULARES LINEALES REVERSIBLES

TESIS

Para Obtener Grado de Maestro en Ciencias

en la Especialidad de Ingeniería Eléctrica

que presenta

LIC. JUAN CARLOS SECK TUOH MORA

DIRECTORES DE TESIS:

DR. HAROLD V. McINTOSH

DR. SERGIO V. CHAPA VERGARA

MEXICO D.F., AGOSTO DE 1999.

Resumen

En el siguiente trabajo se analizan las transformaciones locales que operan sobre un sistema el cual consiste en un espacio celular de una dimensión. En particular, se discuten aquellas transformaciones locales que generan un comportamiento global reversible, es decir, que conservan la información del sistema.

Damos una caracterización de este tipo de transformaciones locales utilizando el trabajo desarrollado por Hedlund en [Hedlund 69] basado en conceptos de dinámica simbólica, combinatoria y registro de corrimientos. Para hacer más entendible esta caracterización, los resultados de Hedlund son complementados con las herramientas gráficas elaboradas por McIntosh y Nasu en [McIntosh 91b] y [Nasu 78] respectivamente.

Conjuntando las ideas anteriores con el trabajo hecho por Kari en [Kari 96], explicamos el comportamiento global reversible por medio de permutaciones en bloque y corrimientos, haciendo esta idea extensiva para toda transformación local que genere este tipo de comportamiento global.

Por último, establecemos una cota máxima para el tamaño mínimo de la transformación inversa asociada a una transformación local que induzca un comportamiento global reversible.

Indice

1 Introducción **1**
1.1 Origen . . . 2
1.2 El Juego de Life . . . 2
1.3 Centrándose en Una Dimensión . . . 3
1.4 Construcción Básica . . . 4
1.5 Autómatas Celulares Reversibles . . . 5

2 Fundamentos **6**
2.1 Resumen . . . 6
2.2 Funcionamiento de un Autómata Celular Lineal . . . 6
2.2.1 Características de un Autómata Celular Lineal . . . 6
2.3 Ancestro y Jardín del Edén . . . 7
2.4 Diagramas para el Análisis de Autómatas Celulares . . . 7
2.4.1 Diagrama de de Bruijn . . . 7
2.4.2 Diagrama de Parejas . . . 8
2.4.3 Diagrama de Subconjuntos . . . 8
2.5 Caso de Estudio: Autómata $(4, 1/2)$ . . . 9
2.6 Observaciones Finales . . . 12

3 Reversibilidad en Autómatas Celulares Lineales **13**
3.1 Resumen . . . 13
3.2 Antecedentes Históricos . . . 13
3.3 Concepto de Reversibilidad . . . 14
3.3.1 Propiedades de los Autómatas Celulares Lineales Reversibles . . . 14
3.4 Multiplicidad Uniforme . . . 15
3.5 Indices de Welch . . . 18
3.6 Diagramas de Welch . . . 20
3.6.1 Más Propiedades de los Indices de Welch . . . 20
3.6.2 Formando el Diagrama de Welch . . . 22
3.7 Propiedades de Reversibilidad Basadas en Diagramas . . . 23
3.7.1 Diagrama de de Bruijn y Propiedades de Reversibilidad . . . 23
3.7.2 Diagrama de Parejas y Propiedades de Reversibilidad . . . 23
3.7.3 Diagrama de Subconjuntos y Propiedades de Reversibilidad . . . 23
3.7.4 Diagramas de Welch y Propiedades de Reversibilidad . . . 24
3.8 Propiedades Matriciales . . . 25
3.9 Caso de Estudio: Autómata $(4, 1/2)$ . . . 26
3.10 Observaciones Finales . . . 31

4 Permutaciones en Bloque **32**
4.1 Resumen 32
4.2 Proceso de Kari 32
4.3 Generalizando el Proceso 39
4.4 Casos de Estudio 45
4.4.1 Autómata $(2, 1/2)$ Regla 12. 45
4.4.2 Autómata $(2, 1)$ Regla 15. 47
4.4.3 Autómata $(4, 1/2)$ Regla $F5A0F5A0$. 49
4.4.4 Autómata $(6, 1)$ 51
4.5 Observaciones Finales 55

5 Formas Válidas de las Permutaciones en Bloque **56**
5.1 Resumen 56
5.2 Autómatas Celulares Lineales con r=1/2 56
5.3 Propiedades Básicas de las Permutaciones 58
5.3.1 Obteniendo la Regla Inversa ϕ^{-1} de las Permutaciones p_1 61
5.3.2 Relación entre la Permutación p_1 y la Permutación p_2. 61
5.4 Casos de Estudio 62
5.4.1 Caso $(4, 1/2)$, $L = 1$, $R = 4$ 62
5.4.2 Caso $(4, 1/2)$, $L = 2$, $R = 2$ 65
5.4.3 Caso $(4, 1/2)$, $L = 2$, $R = 2$ 66
5.4.4 Caso $(6, 1/2)$, $L = 2$, $R = 3$ 67
5.4.5 Caso $(6, 1/2)$, $L = 2$, $R = 3$ 68
5.4.6 Caso $(12, 1/2)$, $L = 2$, $R = 6$ 69
5.4.7 Caso $(12, 1/2)$, $L = 3$, $R = 4$ 71
5.5 Observaciones Finales 73

6 Máxima Longitud de la Mínima Vecindad Inversa **76**
6.1 Resumen 76
6.2 Abordando el Problema por medio de Gráficas. 76
6.2.1 Diagrama de de Bruijn 77
6.2.2 Diagrama de Parejas 77
6.2.3 Diagrama de Subconjuntos 78
6.2.4 Diagramas de Welch 78
6.3 Utilizando Relaciones de Equivalencia 79
6.3.1 Proceso de Kari 79
6.4 Reversibles con Indices L y R Distintos de 1. 83
6.5 Casos de Estudio 88
6.5.1 Caso $(4, 1/2)$. 88
6.5.2 Caso $(6, 1/2)$. 90
6.6 Observaciones Finales 93

7 Conclusiones **94**
7.1 Comportamiento Reversible 94
7.2 Trabajo Futuro 95

Capítulo 1

Introducción

A medida que el hombre, apoyado en el recurso tecnológico, comprende mejor el mundo que le rodea; ha visto que su conocimiento profundiza cuando las explicaciones de los comportamientos de cualquier sistema se dá en términos de la interacción de sus partes o subsistemas. Los sistemas naturales: físicos, químicos, biológicos, ecoloógicos y sociales; en donde la relación entre sus componentes es sencilla pero en su conjunto generan un patrón de comportamiento global interesante o complejo, se les denomina *sistemas complejos.*

El interés por el estudio de lo sistemas complejos se vió fortalecido después de la segunda guerra mundial gracias a dos causas. La primera corresponde al desarrollo de la microelectrónica y por ende a la misma tecnología de computación. La segunda, de índole teórico, corresponde a una serie de modelos y fundamentos teóricos que han permitido elaborar estudios y desarrollar investigación profunda en lo denominado actualmente como sistemas complejos. En particular, los trabajos teóricos de gente como Alonzo Church, Emil L. Post y Alan M. Turing, entre otros, fueron los que establecieron los fundamentos teóricos para el estudio de un cierto tipo de sistemas complejos denominados Autómatas Celulares.

El inicio en el estudio de los autómatas celulares se debe a John von Neumann en los 50's. Influenciado por los trabajos de Turing y Post que se presentaron de manera independiente en los 30's acerca de los procesos computables y autómatas; y, el trabajo de Warren S. McCulloch y Walter Pitts sobre el funcionamiento del sistema nervioso a principio de los 40's. El gran interés que despertó estas ideas en von Neumann lo llevó a investigar sobre la complejidad requerida para que un dispositivo pudiera autorreproducirse y la organización de éste para tener un funcionamiento correcto al repararse con partes que pudieran tener un mal funcionamiento. Los resultados no se dejaron esperar, toda una corriente de investagación se ha desarrollado con una fuerte interrelación en campos como fractales y sistemas dinámicos, así como aplicaciones en: computación en paralelo, simulación de sistemas dinámicos y reconocimiento de patrones.

Los autómatas celulares, según el enfoque de los investigadores, han sido estudiados bajo una gran variedad de nombres: "espacios celulares", "estructuras celulares", "estructuras homogéneas", "estructuras de mosaico", "autómatas de mosaico" o "arreglos iterativos" [Voorhes 96].

Los diferentes puntos de vista han vigorizado el estudio de los autómatas celulares y, su historia, aunque muy reciente en comparación de otras áreas, ya ha presentado una alternancia entre fuertes momentos de interés y periodos de latencia, que otras áreas tradicionales de investigación han presentado. Nosotros podemos identificar varias etapas históricas: el origen, el juego de la vida y el de autómatas celulares lineales.

1.1 Origen

El origen de los autómatas celulares, dado a principios de los 50's, se identifica con el trabajo de John von Neumann sobre sistemas autorreproductivos [von Neumann 66]. Von Neumann interesado con las ideas de Turing acerca de un autómata universal, propone un autómata celular equivalente a una máquina universal de Turing [Codd 68]. Además, también quería averiguar que tan complejo podría ser construir un aparato autorreproductivo y como resolver el problema de alta confiabilidad relacionado con la complejidad de este dispositivo. En este mismo orden de ideas, él planteaba la necesidad de un mecanismo auto-reparador que utilizara partes que pudieran tener un mal funcionamiento.

En 1944, von Neumann se integra al proyecto ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) formando un grupo de trabajo cuyos intereses eran investigar problemas de computadoras, comunicaciones, control y series de tiempo; y para el sistema nervioso aspectos de comunicación y control [Preston 84]. En 1947, von Neumann empieza a estudiar la complejidad requerida para un dispositivo autorreproductor, empezando con modelos contínuos basados en ecuaciones diferenciales parciales no lineales y también usando la idea de un autómata cinético basado en los principios de Turing.

Debido a lo difícil de poder probar rigurosamente esta idea y escuchando la sugerencia de Stanislaw Ulam de utilizar un arreglo de elementos computables, von Neumann empieza a trabajar en un esquema basado en un espacio celular ocupando una malla de dos dimensiones, en el cual una célula podía tomar un valor de entre veintinueve posibles. Para su comportamiento cada célula depende del estado de ella misma y de sus cuatro células “vecinas” ortogonales: arriba, abajo, izquierda y derecha.

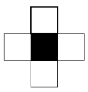


Figura 1.1: Vecindad de von Neumann

John von Neumann muere en 1957 antes de poder publicar su trabajo; pero este es publicado en 1966 mediante una edición por Arthur W. Burks [von Neumann 66]. Durante la decada de los 60's se trabajó fuertemente con la idea de autorreproducción destacando el trabajo de E. F. Codd [Codd 68] que realiza una variante del autómata de von Neumann pero con solo ocho estados posibles para cada célula. Otro trabajo importante se debe a Edward F. Moore y su concepto de “Jardín del Edén” [Moore 62]; el cual se tratará con mayor detalle en las secciones subsecuentes.

1.2 El Juego de Life

En 1970, John H. Conway, propone un juego matemático llamado *Life* el cual aparece publicado en la columna de Martin Gardner [Gardner 70] y dá una nueva línea de estudio de los autómatas celulares. El juego de Life es muy simple, consiste en un espacio cudriculado en donde cada cuadro o célula puede tomar un valor de dos posibles, vivo o muerto; una célula depende de su estado y de sus ocho células vecinas, cuatro ortogonales y cuatro diagonales como lo había hecho anteriormente Moore [Moore 62].

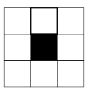


Figura 1.2: Vecindad de Moore

Las reglas del juego son que una célula puede “nacer” si hay a su alrededor exactamente tres células vivas, una célula permanece viva sis existen dos o tres células vivas a su alrededor y en los demás casos la célula o permanece inactiva o pasa a estado muerto si se encontraba viva.

A pesar de que las reglas eran simples, el comportamiento del autómata celular se mostraba complejo, razón por la cual, la propuesta de Conway recibió una gran aceptación, a la vez que el acceso a cada vez mejores dispositivos de video aumentó la popularidad de Life.

La conducta de Life es muy similar al de un grupo de microbios en una gota de agua, por ejemplo, existen construcciones llamadas "gliders" que son capaces de moverse diagonalmente en el espacio de evolución, otras figuras conocidas como "space ships" (naves espaciales) capaces de movimientos horizontales o verticales, además de "glider guns" o cañones los cuales producen gliders de manera ilimitada. Estas propiedades hicieron que el estudio de Life ganara popularidad y produjo que muchos investigadores se dedicaran a la investigación de los autómatas celulares.

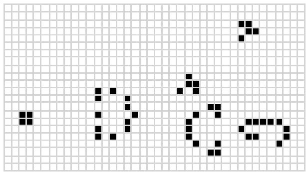


Figura 1.3: Ejemplo de una evolucion de Life

1.3 Centrándose en Una Dimensión

A mediados de los 80's, un nuevo impulso surge en el estudio de autómatas celulares gracias al trabajo desarrollado por Stephen Wolfram [Wolfram 86] y [Wolfram 94]. El estudio de Wolfram se caracteriza por ser más general que el de von Neumann y el de Conway. El enfoque de los dos últimos autores fue estudiar a detalle un autómata celular así como sus consecuencias. Mientras que Wolfram estudia un conjunto de autómatas celulares en una dimensión en base a una búsqueda computacional de sus propiedades en términos de mecánica estadística y dinámica no lineal [McIntosh 87].

Una de las aportaciones importantes de Wolfram fue su clasificación (que se puede considerar análoga a la hecha por Stephen Smale en sistemas dinámicos) de los autómatas celulares en base a su comportamiento, dando como resultado cuatro clases distintas:

- La clase I es aquella en que el comportamiento del autómata rapidamente deriva a un valor fijo o estado de equilibrio.
- La clase II es aquella en que el comportamiento del autómata llega a un conjunto de estados finales que se repiten cíclicamente.
- La clase III se caracteriza porque su comportamiento es caótico, es decir, no se puede predecir.
- La clase IV es aquella en donde la conducta del autómata es una combinación entre la clase uno y dos con la clase tres; es decir, se observan zonas de comportamiento caótico mezcladas con zonas de comportamiento fijo o cíclico; Wolfram pone especial interés en esta clase por su deseo de asociarla con computación universal

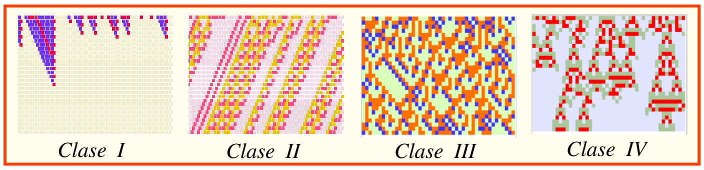


Figura 1.4: Clases de Wolfram

1.4 Construcción Básica

Un autómata celular lineal está compuesto por un arreglo lineal de celdas o *células*, en donde cada una de estas puede tomar como valor un elemento de un conjunto finito de posibilidades o *estados*. Al arreglo inicial de células que se tenga se le denomina *configuración inicial*. Cada célula va a actualizar su valor dependiendo del estado que tenga y del estados en que se encuentren también las r células tanto a su izquierda como a su derecha, al conjunto total que forma una célula con sus r vecinas izquierdas y derechas se le denomina *vecindad* y r se conoce como el *radio de vecindad*.

El mapeo entre el conjunto de todas las posibles vecindades y el conjunto de estados se le denomina *regla de evolución*. Con estos elementos podemos describir facilmente el comportamiento de un autómata celular lineal:

1. Se empieza con una configuración inicial o un arreglo lineal de elementos en donde cada elemento toma un valor de un conjunto finito de estados.
2. Cada célula actualiza su valor dependiendo de su estado y de sus r vecinas a cada lado, el nuevo valor está especificado en la regla de evolución del autómata.
3. En el caso de los elementos extremos del arreglo, estos se concatenan para que su vecindad se complete. De esta manera la configuración inicial en realidad forma una circunferencia.
4. Al actualizar en cada paso a todas las células del arreglo al mismo tiempo, se forma una nueva *configuración*, sobre la cual se repite el mismo proceso anteriormente descrito.
5. A la formación de nuevas configuraciones en base a las anteriores se le denomina como la *evolución* del autómata; esta evolución forma un cilindro conforme las configuraciones se van actualizando.

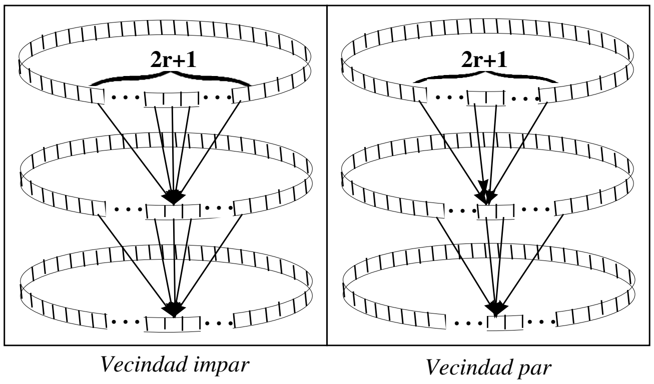


Figura 1.5: Mecanismo de evolución de un autómata celular lineal tanto en vecindades impares como pares.

Los autómatas celulares lineales caen en la categoría de sistemas dinámicos discretos por dos claras razones:

- La actualización de todos los elementos de una configuración se hace en lapsos o pasos discretos.
- El tamaño de vecindad para actualizar cada configuración es discreto.

Para cumplir con la segunda propiedad, el valor de r puede ser unicamente de dos formas, (n) o $(n/2)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$ es decir, para tamaños de vecindad par o impar; por razones de una mejor representación simétrica, el nuevo estado que se forme según establezca la regla de evolución será colocado abajo y en la parte media de la vecindad que le dio origen.

Las características relevantes de estos sistemas son que el espacio donde se desenvuelven es celular, el número de estados que puede tener cada célula es finito, el comportamiento de los elementos del autómata es homogéneo y el comportamiento global del autómata depende de las interacciones locales de sus partes.

1.5 Autómatas Celulares Reversibles

En particular, un tipo muy interesante de autómatas celulares son los denominados *reversibles*, dada su alta relación con conceptos de termodinámica y física de partículas, en donde el sistema puede regresar a estados anteriores. Se dice que un autómata celular es reversible si se puede encontrar una regla *inversa* a la original con la cual poder *regresar* en la evolución del autómata.

El saber cuando un autómata celular es reversible se ha sido una cuestión de gran interés en el estudio de este tema, obteniendo que es decidible para el caso unidimensional [Amoroso 72] pero indecidible en dos dimensiones [Kari 92] y [Kari 92]. En los últimos tres años se ha desarrollado trabajo sobre autómatas celulares lineales reversibles en donde se analizan sus efectos y como poder detectar los mismos [Gómez 96] [Seck 98]. Sin embargo, no se tiene aún una caracterización para entender el comportamiento reversible de un autómata celular lineal.

El objetivo de este escrito es investigar y exponer las causas que expliquen el por qué un autómata celular es reversible, esto es, describir el mecanismo por el cual el comportamiento de un autómata celular en una dimensión puede regresar a estados globales por los que había pasado anteriormente. El trabajo está organizado de la siguiente manera:

> El capítulo 1 trata sobre las el funcionamiento, la terminología y las herramientas utiliadas para el estudio de autómatas celulares lineales.
>
> El capítulo 2 expone el concepto de autómatas celulares reversibles y la teoría fundamental sobre este tema.
>
> El capítulo 3 explica el funcionamiento de estos autómtas por medio de permutaciones en bloque y corrimientos aplicando este proceso para cualquier tipo de autómata reversible.
>
> El capítulo 4 muestra cuales son las características que deben presentar estas permutaciones en bloque para funcionar de manera adecuada.
>
> El capítulo 5 es un análisis concerniente a que tan grande puede ser el mínimo campo de acción requerido para el comportamiento inverso de un autómata reversible.
>
> Finalmente, se dan conclusiones sobre estos aspectos teóricos y los campos abiertos de investigación que aun quedan por abordar.

En la elaboración de este trabajo se ha utilizado para el estudio de ejemplos y cálculo numérico el sistema NXLCAU desarrollado por el Dr. Harold V. McIntosh en la Universidad Autónoma de Puebla [McIntosh WWW], además, junto con este escrirto se elaboró un modulo auxiliar al sistema NXLCAU denominado RLCAU para el análisis en particular de autómatas celulares lineales reversibles.

Capítulo 2

Fundamentos

2.1 Resumen

Este capítulo presenta los fundamentos de la teoría de autómatas celulares lineales. Dentro de los fundamentos se considera la descripción formal de un autómata celular y cual es su terminología básica que permite caracterizar a los mismos. Conceptos principales como el de ancestro y jardín del edén serán propiedades importantes para la caracterización de la reversibilidad de los autómatas celulares.

Con el fin de encontrar nuevos resultados en autómatas celulares lineales, uno de los objetivos de anteriores investigaciones [McIntosh 91a], citekn:mc4, [Gómez 96] y [Seck 98], ha sido la creación y uso de herramientas de análisis. De esta manera, en la última sección de este capítulo se dá un resumen de dichas herramientas que pueden ser consultadas en mas detalle en [McIntosh WWW].

2.2 Funcionamiento de un Autómata Celular Lineal

Podemos definir formalmente los elementos y el funcionamiento de un autómata celular lineal como un sistema de la forma:

$$\{K, r, \phi, C_0\} \tag{2.1}$$

en donde K representa al conjunto finito de estados con cardinalidad $|K| = k$; r es el radio de vecindad para cada célula; $\phi : K^{2r+1} \to K$; ϕ es la función de transición que mapea cada elemento del conjunto de vecindades a un elemento del conjunto de estados; y una configuración inicial $C_0 \in \mathcal{C}$ en donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las posibles configuraciones que pueden existir en el autómata celular.

Entonces la i-ésima configuración puede ser vista como el mapeo $C_i : \mathbb{Z}^+ \to K$; el mapeo del conjunto de los enteros positivos al conjunto de estados, para configuraciones finitas que son las que se estudian en el presente trabajo, dicho mapeo abarca desde 1 hasta nc en donde nc es el número de células que tenga la configuración inicial; al resto de las configuraciones que se vayan creando las denominaremos $C_1, C_2, \ldots C_i, C_{i+1}, \ldots$; en donde el subíndice indica en que lapso de tiempo se encuentra la evolución del autómata.

2.2.1 Características de un Autómata Celular Lineal

Con esta forma de funcionar de un autómata celular lineal podemos encontrar una serie de características básicas que cumplen dichos sistemas:

1. El tamaño de una vecindad es igual a $2r + 1$.

2. El numero posible de vecindades distintas es k^{2r+1}.
3. El núnero posible de reglas de evolución es $k^{k^{2r+1}}$.

Wolfram propone la notación (k, r) para diferenciar a cada tipo de autómata dado su número de estados k y su radio de vecindad r; cada uno de estos tipos hemos visto tiene en total tantas reglas como $k^{k^{2r+1}}$. Para diferenciar cada regla podemos ordenar a las vecindades en forma ascedente con lo que el conjunto de celulas a las que dan origen cada vecindad también forman una secuencia que es única, esta secuencia se puede codificar como un número en base k como hace Wolfram en el caso de autómatas de dos estados en donde dicha secuencia forma un número binario, o en caso de que el número de vecindades sea muy grande y este tratamiento resulte excesivo, podemos partir esta secuencia de estados en cadenas de longitud n y darle a cada cadena un número en base k^n como hace McIntosh, con lo que cada regla queda codificada.

2.3 Ancestro y Jardín del Edén

Dos importantes conceptos que se tienen dentro de la teoría de autómatas celulares son los de ancestro y jardín del edén, los cuales nos servirán para analizar las características y limitaciones de la evolución de un autómata celular.

Tomemos a K^* como el conjunto de todas las secuencias de cualquier longitud, desde longitud 0 en adelante; a la secuencia de longitud 0 o cadena vacía se denominará como λ.

Para $(i, j) \in \mathbb{Z}^+$, una secuencia de estados $s_i \in K^*$ se dice que es **ancestro** de otra secuencia $s_j \in K^*$ si al aplicar la regla de evolución ϕ a cada uno de sus elementos de s_i, la nueva cadena resultante es igual a s_j. Este concepto se puede aplicar para cualquier secuencia de estados, abarcando desde vecindades hasta la configuración completa; de este modo la configuración C_i es ancestro de la configuración C_j si C_i evoluciona a C_j bajo la aplicación de la regla de evolución ϕ.

Por supuesto, con esta misma idea podemos tener distintos casos, pueden existir una secuencia de estados $s_i \in K^*$ que carezca de ancestros, que tenga un único ancestro o que tenga más de un posible ancestro. A las secuencias que caigan en el primer caso se les denomina como pertenecientes al *jardín del edén* de dicho autómata, esta forma tan particular de describir este caso se debe a que dichas secuencias solo pueden aparecer en la configuración inicial y no pueden presentarse como producto de la evolución del autómata, sino solamente al inicio de dicho proceso.

2.4 Diagramas para el Análisis de Autómatas Celulares

Un primer estudio sobre el comportamiento de un autómata celular lineal puede hacerse a través de la observacion de su evolución; sin embargo, existen otras herramientas basadas en la teoría de gráficas que nos permiten hacer un estudio más a detalle y completo tanto de las propiedades globales como locales del comportamiento de un autómata.

La ventaja de utilizar gráficas radica en que visualmente hacen más claras la comprensión del comportamiento y las propiedades de la dinámica de cualquier sistema además del tratamiento que se puede hacer a sus representaciones matriciales.

Las herramientas que nos facilitan este estudio son el diagrama de *de Bruijun*, el diagrama de *parejas* y el diagrama de *subconjuntos*.

2.4.1 Diagrama de de Bruijn

Los orígenes del diagrama de de Bruijn se encuentran en trabajos orientados al estudio de registros de corrimientos de una secuencia de símbolos para la codificación de información, el nombre de este diagramas se debe a los trabajos hechos por N. G. de Bruijn [McIntosh 91a] y por Solomon W. Golomb [Golomb 67].

El uso del diagrama de de Bruijn en autómatas celulares es de gran importancia ya que puede representar de una manera natural y conveniente la evolución de las vecindades de un autómata celular lineal. Cada nodo del diagrama de de Bruijn representa un conjunto de $2r$ células, entonces tendremos tantos nodos como k^{2r}.

Estos nodos funcionan como vecindades parciales del autómata; las ligas van a partir de un nodo a otro si los ultimos $2r-1$ elementos del nodo inicial concuerdan con los primeros $2r-1$ elementos del nodo final, la liga representará una vecindad completa compuesta por la secuencia formada por el nodo inicial y el nodo final traslapando en $2r-1$ elementos; por lo tanto tendremos tantas ligas como vecindades posibles distintas haya en el autómata, es decir k^{2r+1}. La etiqueta o el color de la liga nos representa el estado que surge de la evolución del autómata. Por supuesto, hay que tener en cuenta que mientras mayor sea el número de estados y/o el tamaño de vecindad, también crece el número de nodos y de ligas del diagrama de de Bruijn lo que trae consigo problemas de representación gráfica.

Como toda gráfica, el diagrama de de Bruijn tiene una representación matricial asociada, a la cual se le conoce como *matriz de evolución*. La importancia del diagrama de de Bruijn es que nos dá una forma de representar graficamente la regla de evolución, por ejemplo, una aplicación sencilla podría ser recobrar todos los ancestros que forman una cadena dada con solo hacer un registro de todos los caminos distintos que tienen la forma de la cadena deseada.

2.4.2 Diagrama de Parejas

El producto cartesiano de dos gráficas se utiliza para comparar rutas entre éstas, si hacemos el producto cartesiano de una gráfica consigo misma lo que obtendremos son las distintas rutas que existen para recorrer un mismo camino en un diagrama. Esta es la idea que hay detrás del diagrama de parejas, utilizado como herramienta básica en el estudio de autómatas en general [McIntosh 91a], en este caso el diagrama de de Bruijn se utilizará como base para generar al diagrama de parejas.

Cada nodo del diagrama de parejas es una posible dupla de nodos del diagrama de de Bruijn, de este modo el diagrama de parejas tendrá tantos nodos como k^{4r}; las ligas en este diagrama partirán de un nodo a otro si el primer elemento del nodo inicial con el primer elemento del nodo final tiene el mismo color de liga en el diagrama de de Bruijn que el segundo elemento del nodo inicial con el segundo elemento del nodo final.

Debido a esta construcción, las rutas del diagrama de parejas corresponden a parejas de rutas iguales del diagrama de de Bruijn, este diagrama esta contenido tal cual en la diagonal principal del diagrama de parejas.

2.4.3 Diagrama de Subconjuntos

Hemos visto que el diagrama de de Bruijn nos da la oportunidad de trazar rutas en él y conocer sus ancestros, sin embargo, una pregunta importante es conocer si una ruta dada existe en el diagrama o lo que es lo mismo si el autómata tiene un jardín del edén, para responder esta pregunta se utiliza el diagrama de subconjuntos [Moore 62] el cual es bien conocido en su aplicación para la teoría general de autómatas para conocer si una cierta cadena es parte del lenguaje de un autómata, el uso de dicho diagrama en el contexto de autómatas celulares lo podemos encontrar en el trabajo de Amoroso y Patt [Amoroso 72].

Como su nombre lo indica, el diagrama de subconjuntos está formado por todos los subconjuntos posibles que se puedan formar con los nodos del diagrama de de Bruijn empezando desde el conjunto vacío hasta el conjunto que contenga todos los nodos, el diagrama de subconjuntos tendrá tantos nodos como $2^{k^{2r}}$. Va a existir una liga de un color dado de un nodo a otro si al menos un elemento del primer nodo tiene enlace con todos los elementos del segundo nodo en el diagrama de de Bruijn con esa misma liga, para el conjunto vacío todas las ligas que salgan de él llegan a el mismo.

La importancia del diagrama de subconjuntos radica en que nos da una funcionalidad que el diagrama de de Bruijn no tiene en el sentido que para cada nodo en el diagrama de subconjuntos todas las ligas están definidas gracias a la inclusión del conjunto vacío, y cada liga lleva exactamente a un nodo único. Uno de los usos importantes del diagrama es encontrar secuencias que no tengan ancestros, es decir que sean parte el jardín del edén; esto se puede detectar si existe un camino que nos lleve del conjunto completo hasta el conjunto vacío, ya que dicho camino indica que empezando desde cualquier nodo posible en el diagrama de de Bruijn llega un momento en que dicha secuencia no puede continuar formándose en dicho diagrama, por lo que no puede aparecer como efecto de la evolución del autómata.

2.5 Caso de Estudio: Autómata $(4, 1/2)$

Para ver en la práctica los conceptos anteriores, tomemos como ejemplo un autómata $(4, 1/2)$; es decir, de 4 estados y un radio de vecindad de $1/2$, entonces tenemos las siguientes características:

Número de estados:	$k = 4$
Radio de vecindad:	$r = 1/2$
Tamaño de vecindad:	$2r + 1 = 2$
Número de vecindades distintas:	$k^{2r+1} = 16$
Número de reglas de evolución distintas:	$k^{k^{2r+1}} = 4294967296$

Tabla 2.1: Características generales de un autómata $(4, 1/2)$

Escojamos una de estas reglas:

Vecindades	Evolución	Bloques de 2 elementos en base 4	Valor hexadecimal
33	0	4^1	3
32	3	4^0	
31	1	4^1	4
30	0	4^0	
23	0	4^1	2
22	2	4^0	
21	2	4^1	9
20	1	4^0	
13	0	4^1	1
12	1	4^0	
11	1	4^1	7
10	3	4^0	
03	3	4^1	C
02	0	4^0	
01	1	4^1	6
00	2	4^0	

Tabla 2.2: Autómata $(4, 1/2)$ con regla de evolución $342917C6$

Usando esta agrupación en la regla de evolución, ésta se puede representar por el número hexadecimal $342917C6$; una evolución típica de este autómat es la siguiente:

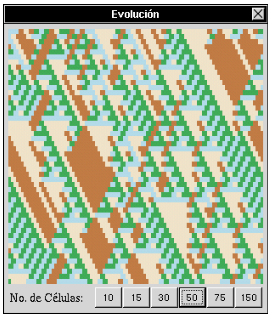


Figura 2.1: Ejemplo de una evolución del autómata $(4, 1/2)$ regla $342917C6$

Las características del diagrama de de Bruijn son las siguientes:

Número de nodos:	$k^{2r} = 4$
Número de ligas:	$k^{2r+1} = 16$

Tabla 2.3: Características del diagrama de de Bruijn en un autómata $(4, 1/2)$

El diagrama de de Bruijn y su representación matricial son las siguientes:

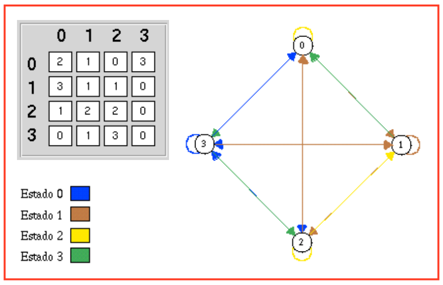


Figura 2.2: Diagrama de de Bruijn y su representación matricial para la regla $342917C6$

Por medio del diagrama de de Bruijn podemos conocer los ancestros de una secuencia dada, por ejemplo, para la secuencia 20 los ancestros son los siguientes:

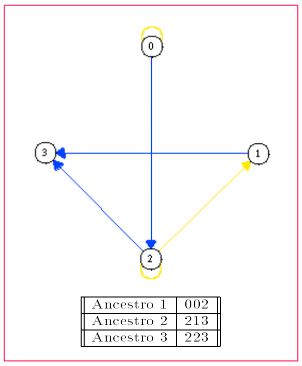


Figura 2.3: Ancestros de la cadena 20 en el diagrama de de Bruijn

El diagrama de parejas tiene $k^{4r} = 16$ nodos posibles, la gráfica es la siguiente:

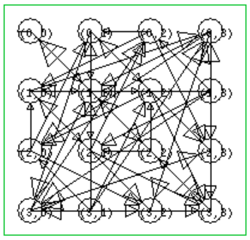


Figura 2.4: Diagrama de parejas del autómata $(4, 1/2)$ regla $342917C6$

Podemos editar este diagrama de tal modo que observemos los ciclos que este contenga además del de su diagonal principal, que como se dijo anteriormente es el mismo diagrama de de Bruijn; para la cadena 30 tenemos dos distintos ancestros, la secuencia 323 y la secuencia 030, dada la forma de estas secuencias, la cadena formada por la repetición indefinida de la secuencia 30 tendrá siempre dos posibles ancestros, uno formado por la repetición indefinida de 323 y otro con la misma forma usando la secuencia 030.

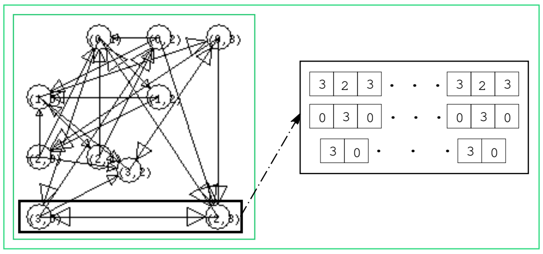


Figura 2.5: Ancestros de la secuencia $03 \ldots 03$

El diagrama de subconjuntos tendrá tantos nodos como $2^{k^{2r}} = 16$, que son todos los posibles subconjuntos que se pueden formar con los nodos del diagrama de de Bruijn, McIntosh [McIntosh 91a] codifica los distintos subconjuntos ordenando los nodos de de Bruijn, y formando un número binario colocando un uno si el nodo aparece en el subconjunto, de este modo cada subconjunto recibe un valor binario distinto, la clasificación de subconjuntos queda de la siguiente manera:

Subconjunto	Nodos de de Bruijn presentes				Clasificación binario
	0	1	2	3	
$\emptyset$	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	2
2	0	0	1	0	4
3	0	0	0	1	8
01	1	1	0	0	3
02	1	0	1	0	5
03	1	0	0	1	9
12	0	1	1	0	6
13	0	1	0	1	10
23	0	0	1	1	12
012	1	1	1	0	7
013	1	1	0	1	11
023	1	0	1	1	13
123	0	1	1	1	14
0123	1	1	1	1	15

Tabla 2.4: Clasificación de los subconjuntos de nodos del diagrama de de Bruijn del autómata $(4, 1/2)$

El diagrama de subconjuntos asociado a este autómata es el siguiente:

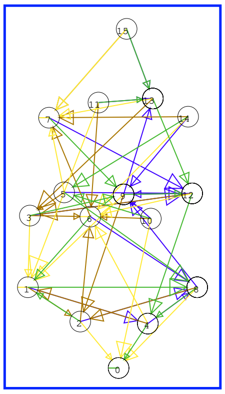


Figura 2.6: Diagrama de subconjuntos del autómata $(4, 1/2)$ regla $342917C6$

Si editamos este diagrama se puede observar que existe un camino formado por la secuencia 3333 que va del conjunto total al conjunto vacío, por lo que esta secuencia pertenece al jardín del edén de dicho autómata, como podemos observar si editamos el diagrama de de Bruijn y solo dibujamos los ancestros del estado 3.

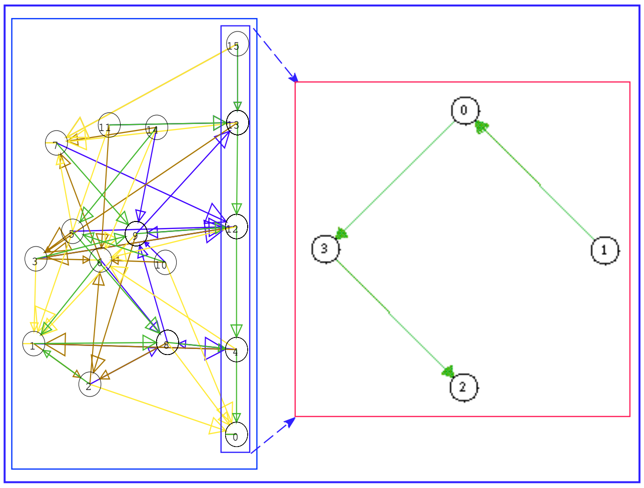


Figura 2.7: La configuración 3333 pertenece al jardín del Edén

Se observa en la Figura 2.7 que la secuencia más larga que se puede formar utilizando unicamente al estado 3 es de tamaño tres, por lo que tratar de generar un secuencia de tamaño mayor o igual a cuatro resulta imposible en la evolución como indica el diagrama de subconjuntos.

2.6 Observaciones Finales

Hemos visto que la descripción y funcionamiento de un autómata celular lineal es muy simple, se puede resumir en que secuencias de estados evolucionan en otras por medio de una regla homogénea de influencia local.

Dos conceptos importantes para analizar la evolución de un autómata celular lineal son el de ancestro y el de jardín del edén. El primero nos dice cuales son las configuraciones de las cuales surge una cierta secuencia y el segundo señala aquellas configuraciones que no tiene antecesores o una *historia anterior* y que solo pueden aparecer al inicio de la evolución del autómata celular lineal.

Las gráficas asociadas al estudio de estos sistemas nos ofrecen una forma directa y sencilla de encontrar los ancestros y el jardín del edén (si éste existe) para cada autómata celular lineal. El diagrama básico en este aspecto es el diagrama de de Bruijn. pues de él se desprenden los demás; el diagrama de parejas y el diagrama de subconjuntos.

Capítulo 3

Reversibilidad en Autómatas Celulares Lineales

3.1 Resumen

Una vez definido el concepto de autómata celular lineal así como su funcionamiento, estudiaremos las propiedades de una clase especial de autómatas celulares conocidos como *reversibles*. Estos autómats tienen la característica de que la historia de su evolución es invertible, es decir, podemos encontrar una manera tal que de una configuración C_i dada, regresemos a la configuración C_{i-1}; pudiendo realizar este proceso de manera indefinida.

Primero se presentará una pequeña reseña sobre el desarrollo del estudio de este tipo especial de autómatas celulares, después se expondrán toda una serie de resultados teóricos que describen las propiedades de dichos sistemas y como podemos detectar estas características utilizando las herramientas gráficas presentadas anteriormente. Por último para hacer más claro estos conceptos se presentará un caso de estudio para ejemplificar los resultados teóricos.

3.2 Antecedentes Históricos

Así como la teoría general de autómatas celulares se han tenido tres etapas importantes, en el caso de los reversibles, análogamente, se tienen tres épocas importantes:

La primera se presenta en los años 60's destacando en principio el trabajo de Edward F. Moore [Moore 62] y las ideas del Jardín del Edén. Desde un enfoque de dinámica simbólica y topología Gustav A. Hedlund, en 1969, contribuye a la teoría de los autómatas celulares reversibles con un estudio que ha sido piedra angular dentro del campo [Hedlund 69]. Hedlund logra un análisis muy detallado y profundo de las propiedades de los autómatas celulares reversibles destacando dos conceptos importantes; *Multiplicidad Uniforme* e *Indices de Welch* que se explicarán con detalle más adelante.

La segunda etapa importante la podemos encontrar a finales de los 70's gracias al trabajo de Serafino Amoroso y Yale N. Patt [Amoroso 72], los cuales dieron un primer algoritmo para detectar cuando un autómata celular lineal es reversible. Masakasu Nasu [Nasu 78], [Nasu 79] y [Nasu 82], retoma los resultados de Hedlund y les da un nuevo enfoque utilizando teoría de gráficas, en especial, dos herramientas: el diagrama de de Bruijn y las gráficas *Bundle* que aquí mencionaremos como diagramas de Welch.

La época más reciente se tiene en esta década con las contribuciones hechas por Jarkko Kari [Kari 92] y [Kari 96]. El hace uso implícito de los análisis hechos por Hedlund y Nasu ofreciendo una nueva perspectiva acerca de las causas que hacen que un autómata celular lineal sea reversible y de las propiedades que en estos se presentan.

De lo anterior podemos destacar que los autómatas celulares lineales reversibles han seguido un proceso de estudio intenso a pesar del corto tiempo de desarrollo que se tiene de esta teoría en comparación con otras. En este proceso se han retomado trabajos anteriores para enriquecerlos y darles un nuevo enfoque como sucede con Nasu y Kari, o simplemente se ha vuelto a rehacer parte del estudio como es el caso de Amoroso y Patt con respecto al trabajo de Hedlund.

3.3 Concepto de Reversibilidad

Una definicón general de reversibilidad es la cualidad que tiene un sistema de "ser capaz de ir a través de una serie de acciones (o cambios) ya sea *hacia adelante* o *hacia atrás*" [Digital Webster]. En otras palabras, la idea básica de un proceso reversible es que es capaz de regresar a etapas que anteriormente ya había visitado.

La reversibilidad es una característica universal de las leyes de la física; en particular, corresponde a una propiedad de los sistemas microscópicos definida en la segunda ley de termodinámica. Como un apunte, diremos que la segunda ley de termodinámica establece que ningún dispositivo que convierta calor en trabajo puede ser más eficiente que uno reversible trabajando entre dos temperaturas fijas [Toffoli 87] y [Kari 96].

En el ámbito de nuestro estudio, un autómata celular se dirá reversible si para cada posible configuración la regla de evolución especifica uno y sólo un único sucesor. Esto es, dada una regla de evolución podemos construir una nueva con la cual podamos volver a generar las configuraciones que se habían producido anteriormente.

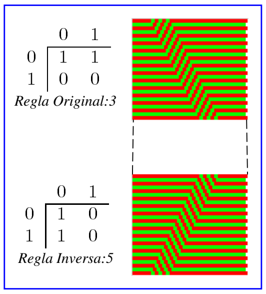


Figura 3.1: Autómata $(2, 1/2)$ reversible, cuya regla original es 3 y regla inversa 5. De una configuración inicial, evoluciona a una configuración dada tal que aplicando la regla inversa se pueda retornar a la configuración original

3.3.1 Propiedades de los Autómatas Celulares Lineales Reversibles

El problema de reversibilidad en autómatas celulares se puede plantear como un análisis del mapeo que existe del conjunto de configuraciones globales del autómata a si mismo. Si dicho mapeo es biyectivo entonces la evolución del autómata es reversible.

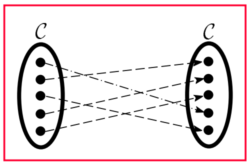


Figura 3.2: El mapeo biyectivo entre configuraciones globales define un autómata celular reversible

Hay que hacer notar que desde el punto de vista de comportamiento local no se puede hablar de autómatas reversibles, ya que la regla de evolución mapea un conjunto de vecindades a un conjunto de estados, esto es $\phi : K^{2r+1} \rightarrow K$ el cual es evidente que no es un mapeo biyectivo para $r > 0$; sin embargo, el interés y por qué no decirlo, la belleza de este tipo de sistemas es que la dinámica de los mismos dependiente de reglas de comportamiento local no reversibles inducen un comportamiento global que si es reversible. La cuestión a investigar es de que forma el funcionamiento del autómata es capaz de conservar la información del sistema para que en un momento dado podamos hacer uso de esta misma y poder reconstruir las configuraciones globales anteriores; con esta idea se pueden establecer dos propiedades importantes que deben tener estos sistemas:

- En un autómata celular reversible no existe Jardín del Edén.
- Cada configuración global tiene una única configuración de la cual precede.

3.4 Multiplicidad Uniforme

Sin duda alguna uno de los trabajos más elegantes y sobresalientes es el denominado *"Endomorphisms and Automorphisms of the Shift Dynamical Systems"* publicado por Gustav A. Hedlund en 1969 [Hedlund 69]. El escrito se presenta elegantemente mediante una exposición de dinámica simbólica y sistemas dinámicos de corrimiento. Los análisis de los sistemas dinámicos de corrimiento a través de sus aspectos topológicos y teóricos de medida permite llegar a resultados muy relevantes.

La elegancia del teorema fundamental de estructura hace posible la derivación de numerosos resultados concernientes a las transformaciones de corrimientos conmutativos.

La estructura local relacionada con la estructura global resulta ser una cuestión importante que se presenta en cualquier sistema dinámico en donde la existencia y las propiedades de las transformaciones contínuas conmutan con el grupo de acción. La inducción de un mapeo global a partir de uno local se presenta a través de la definición de un mapeo de bloques (palabras) de símbolos de una longitud específica en símbolos simples y extendiendo este mapeo en una manera natural en secuencias infinitas.

En el análisis de los autómatas celulares lineales reversibles, debemos empezar por conocer las propiedades que cumplen los autómatas sin Jardín del Edén, es decir, donde toda secuencia tenga al menos un ancestro. Relacionado a esta idea, en el trabajo de Hedlund encontramos un concepto fundamental al cual él denomina *Multiplicidad Uniforme.*

La multiplicidad uniforme en un autómata celular reversible nos dice que cada cadena de estados tiene el mismo número de ancestros que las demás cadenas; y este número es igual al número de nodos del diagrama de de Bruijn.

Se parte de un autómata celular reversible (K, r, ϕ, C_o), con las siguientes convensiones:

- ϕ^{-1} es la regla inversa de ϕ
- A los ancestros de una secuencia de estados $S \in K^*$ los representaremos como $\phi^{-1}(S)$
- La evolución de $S \in K^*$ la representaremos como $\phi(S)$
- La cardinalidad de un conjunto N elementos se representará con $|N|$

En seguida vamos a parafrasear algunos de los resultados más importantes del trabajo de Hedlund [Hedlund 69]. La indicación *(Resultado $(m.n)$)* en cada uno de los siguientes enunciados indica la sección en que aparece el mismo enunciado en el trabajo original de Hedlund.

Nuestro interés es usar estos resultados dentro del contexto de los autómatas celulares lineales. La relevancia para los casos reversibles estriba en que los siguientes resultados nos indicarán cuales son las propiedades que tienen los autómatas celulares sin Jardín del Edén. El primer resultado nos dá un comportamiento cuantitativo de los ancestros de una cadena y se presenta a continuación.

Hedlund 1 *(Resultado (5.2)) Sea m y $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $S \in K^m$ cumple que $|\phi^{-1}(S)| = n$ y para todo $s \in K$ se cumple que $|\phi^{-1}(Ss)| \geq n$. Entonces $|\phi^{-1}(Ss)| = n$ para todo $s \in K$.*

Prueba: Tomemos a $\phi^{-1}(S) = \{A_0, \ldots, A_{n-1}\} = \mathcal{A}$; tomemos a SK como las secuencias formadas al concatenar S con todo elemento de K. Si $\phi^{-1}(S) = \mathcal{A}$, entonces $\phi^{-1}(SK) = \mathcal{A}K$ lo cual cubre todas las posibilidades de ancestros de SK.

Para una cadena $As \in \mathcal{A}K$, su evolución, $\phi(As)$ pertenece a SK si y solo si A es un bloque de longitud $m + 2r$ tal que $\phi(A) = S$, es decir, si $A \in \mathcal{A}$.

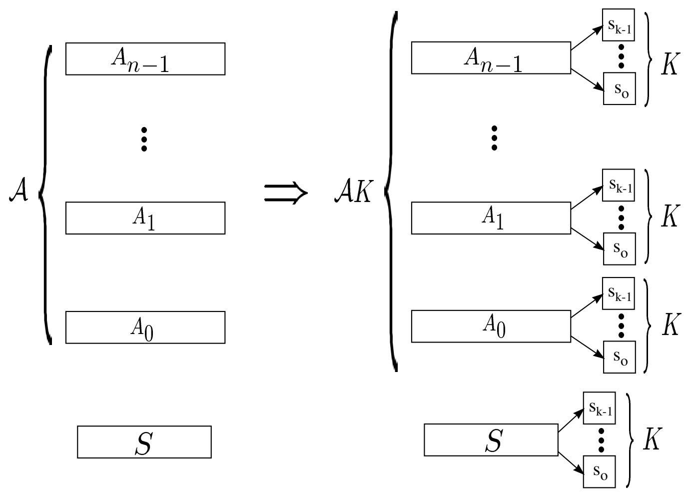


Figura 3.3: $\phi^{-1}(S) = \mathcal{A}$ y $\phi^{-1}(SK) = \mathcal{A}K$

De este modo el número de ancestros de las secuencias SK está dado por la suma de los ancestros de toda posible secuencia Ss; es decir:

$$|\phi^{-1}(SK)| = nk = \sum_{s \in K} |\ \phi^{-1}(Ss)\ | \tag{3.1}$$

Sabemos por el enunciado que $|\phi^{-1}(Ss)| \geq n$ para cada $s \in K$. Si para cualquier $s \in K$, se cumple que $|\phi^{-1}(Ss)| > n$, se tiene entonces que $|\phi^{-1}(SK)| > nk$ lo cual es una contradicción.

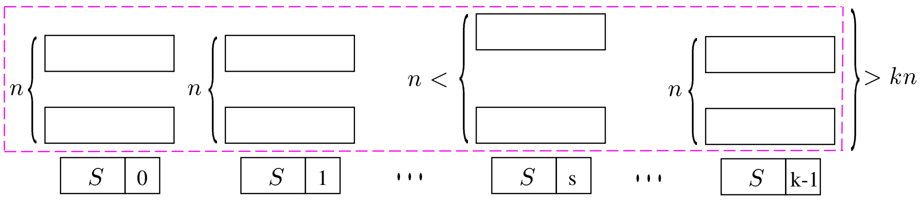


Figura 3.4: Si $|\phi^{-1}(Ss)| > n$ para alguna $s \in K$ no se cumple que $|\phi^{-1}(SK)| = nk$

De aquí concluimos que $|\phi^{-1}(Ss)| = n$ para cada $s \in K$.

Lo que indica el resultado anterior es que en un autómata celular lineal reversible, el número de ancestros de cualquier secuencia se mantendrá igual no importando que tanto extendamos la misma. Una cuestión importante ahora, es conocer cual es este número de ancestros, esto se responderá en el siguiente resultado.

Hedlund 2 *(Resultado (5.3)) Sea m y $n \in \mathbb{Z}^+$, sea K el conjunto de estados del autómata celular con $|K| = k$. Si $S \in K^m$ cumple que $|\phi^{-1}(S)| = n$ y $|\phi^{-1}(SES)| = n$ para cada $E \in K^{2r}$, entonces $n = k^{2r}$.*

Prueba: Definamos los siguientes conjuntos que utilizaremos en la demostración:

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(S) = \{A_1, \dots, A_n\} &= \mathcal{A} \\ \mathcal{E} &= K^{2r} \\ \mathcal{B} &= \mathcal{A}\mathcal{A} \end{aligned}$$

Como cada $A_i \in \mathcal{A}$ tiene tantos elementos como $m + 2r$, cada $B \in \mathcal{B}$ es de longitud $2m + 4r$ y su evolución, $\phi(B)$, es de longitud $2m + 2r$.

Ya que $\phi(A_i) = \phi(A_j) = S$, se tiene que $\phi(B)$ es de la forma SES; donde $E \in \mathcal{E}$ aparece en medio de cada evolución de $(A_i A_j)$. Es decir, $\mathcal{A}\mathcal{A} \subseteq \phi^{-1}(S\mathcal{E}S)$.

Toda evolución de cualquier secuencia B pertenece al conjunto $S\mathcal{E}S$ sin que falte ningún elemento de $\mathcal{E}$ pues el mapeo global es sobreyectivo (no existe el Jardín del Edén), en otras palabras, todos los ancestros del conjunto $S\mathcal{E}S$ están contenidos en el conjunto $\mathcal{A}\mathcal{A}$. Es decir, $\phi^{-1}(S\mathcal{E}S) \subseteq \mathcal{A}\mathcal{A}$; de aquí llegamos a que:

$$|\phi^{-1}(S\mathcal{E}S)| = \mathcal{A}\mathcal{A} \tag{3.2}$$

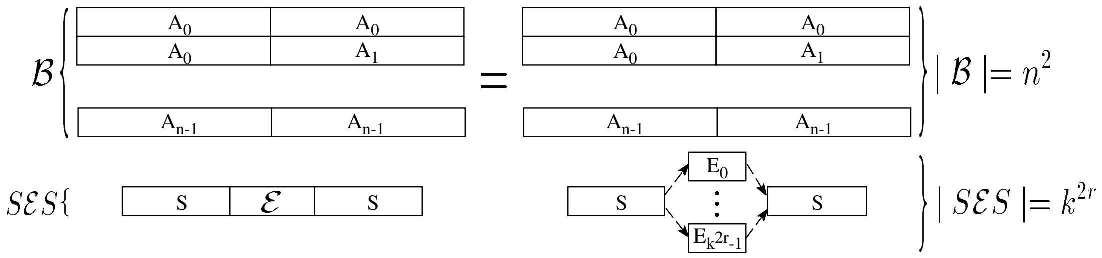


Figura 3.5: Ancestros de las secuencias $S\mathcal{E}S$

Dado que $|\mathcal{A}| = n$, se tiene que $|\mathcal{A}\mathcal{A}| = n^2$.

Del enunciado, sabemos que $|\phi^{-1}(SES)| = n$ para cada $E \in \mathcal{E}$ con $|\mathcal{E}| = k^{2r}$. Si tomamos en cuenta todos los ancestros de $S\mathcal{E}S$ entonces $|\phi^{-1}(S\mathcal{E}S)| = nk^{2r}$.

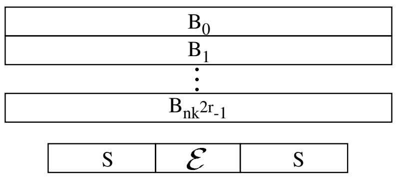


Figura 3.6: El total de ancestros de $S\mathcal{E}S$ es nk^{2r}

De este modo llegamos a que $n^2 = nk^{2r}$, por lo que $n = k^{2r}$.

Lo que este resultado nos aporta es que si el número de ancestros de una secuencia se mantiene para las extensiones de la misma, este número es igual a k^{2r}. Haciendo uso de los dos resultados anteriores, hagamos una generalización del comportamiento cuantitativo de los ancestros en un autómata celular lineal reversible.

Hedlund 3 *(Resultado (5.4)) En un autómata celular lineal reversible se cumplen dos condiciones:*

1. *Todas las secuencias tienen el mismo número de ancestros.*
2. *El número de ancestros de cada secuencia es k^{2r}.*

Prueba: Para m y $n \in \mathbb{Z}^+$, definamos a $\mathcal{S} = K^m$ como el conjunto de secuencias de longitud m. Por el hecho de que el autómata es reversible, el mapeo entre configuraciones es sobreyectivo, por lo que toda secuencia de estados tiene al menos un ancestro.

Tomemos a n como el mínimo número de ancestros que tenga alguna $S \in \mathcal{S}$. Para dicha secuencia, el valor de n se mantendrá (resultado 1) cumpliendo además que $n = k^{2r}$ (resultado 2).

Todos los posibles ancestros de $\mathcal{S}$ se encuentran en el conjunto K^{m+2r}; el total de número de elementos de este conjunto es $|K^{m+2r}| = k^{m+2r}$. Por otro lado, dado que n es el mínimo número de ancestros de toda cadena en $\mathcal{S}$, y como $|\mathcal{S}| = k^m$, entonces minimamente hay tantos ancestros como k^{m+n} con $n = k^{2r}$.

Si existe alguna cadena en $\mathcal{S}$ con un número de ancestros mayor que n, entonces se cumple que $|\phi^{-1}(\mathcal{S})| > k^{m+2r}$ lo cual no puede ser pues no hay mas ancestros que $|K^{m+2r}| = k^{m+2r}$. Por lo tanto cada cadena en $\mathcal{S}$ tiene n ancestros con $n = k^{2r}$.

Por los resultados anteriores sabemos entonces cual es el número de ancestros de una secuencia y que este valor es el mismo para todas las demás secuencias de un autómata celular lineal reversible. Hay que señalar que el número de ancestros concuerda con el número de nodos en el diagrama de de Bruijn.

3.5 Indices de Welch

Si bien el concepto de multiplicidad uniforme nos ofrece una caracterización cuantitativa del comportamiento de los ancestros de una secuencia de estados, este concepto no nos dice cual es la mecánica interna del comportamiento de estos antecesores. Para tratar este aspecto haremos uso de los índices de Welch. Este concepto se debe a Lloyd R. Welch el cual trabaja con Hedlund en la elaboración del artículo [Hedlund 69]; Welch expone los índices que llevan su nombre como las distintas partes de los ancestros de una secuencia y cuantos tipos distintos hay de cada parte.

Indice R:

- Sea $S \in K^m$ para $m \in \mathbb{Z}^+$.
- Sea $\mathcal{R}_i \subseteq K^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Sea $E \in K^{m+n-2r}$
- Para que $\mathrm{R} \in \mathcal{R}_i$ debe cumplirse que $\phi(S\mathrm{R}) = E$.
- Se tendrá que $R = \max\{r_i\}$, donde $r_i = |\mathcal{R}_i|$ para toda i.

Es decir, dada una secuencia de estados S, se formará un conjunto $\mathcal{D}_i$ con aquellas cadenas que al concatenarse con S a la derecha generan la misma evolución. Por supuesto, para cada distinta evolución que sea posible existen distintos conjuntos $\mathcal{R}_i$. Se tomará aquel $\mathcal{R}_i$ con **mayor** número de estados y su cardinalidad se asignará al índice R.

Indice L:

- Sea $S \in K^m$ para $m \in \mathbb{Z}^+$.
- Sea $\mathcal{L}_i \subseteq K^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

- Sea $E \in K^{m+n-2r}$
- Para que $\mathrm{L} \in \mathcal{L}_i$ debe cumplirse que $\phi(\mathrm{L}S) = E$.
- Se tendrá que $L = \max\{l_i\}$, donde $l_i = |\mathcal{L}_i|$ para toda i.

En otras palabras, para una secuencia de estados S, se formará un conjunto $\mathcal{L}_i$ con aquellas cadenas que al concatenarse con S a la izquierda produzcan la misma evolución. Habrá tantos conjuntos $\mathcal{L}_i$ como evoluciones posibles. Tomaremos aquel de **mayor** número de estados y su cardinalidad se asignará al índice L. A cada conjunto $\mathcal{R}_i$ o $\mathcal{L}_i$ se le denomirá como *compatible* de S ya sea por la derecha o por la izquierda según corresponda.

Indice M:

- Sea $\mathcal{A}_i = K^m$ para $m \in \mathbb{Z}^+$.
- Sea $\mathcal{R}_i = K^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Sea $\mathcal{L}_i = K^p$ para $p \in \mathbb{Z}^+$.
- Sea $E \in K^{m+n+p-2r}$
- Para que $A \in \mathcal{A}_i$ debe cumplirse que $\phi(\mathcal{I}_i A \mathcal{D}_i) = E$.
- Se tendrá que $M = \min\{m_i\}$, donde $m_i = |\mathcal{A}_i|$ para toda i.

Lo que indica el índice M es el **mínimo** número de bloques de estados A; tal que su evolución con sus conjuntos compatibles izquierdos y derechos particulares es la misma.

Con estos índices se puede contabilizar todas las posibles secciones que tengan los ancestros de una secuencia: a la izquierda, al centro y a la derecha. Sabemos que en un autómata reversible, para toda secuencia $S \in K^m$, debe existir un único estado con el cual regresar en la evolución. Tomando esto como base, los elementos de $\phi^{-1}(S)$ concuerdan con un único estado en la misma posición y, de esta posición, se desprenden a la derecha y a la izquierda variaciones que producen las k^{2r} posibilidades. Así, podemos tomar esta posicion idéntica como el conjunto $\mathcal{A}_i$; dado que esta situación se presenta para todos los ancestros de cada S llegamos a que $|\mathcal{A}_i| = 1$ para toda $\mathcal{A}_i$.

Otra observación importante es acerca del comportamiento de estos ancestros. Una vez que los elementos de $\phi^{-1}(S)$ comparten un único estado común con $S \in K^m$; entonces para $T \in K^n$, con $n > m$, los elementos de $\phi^{-1}(T)$ siguen conservando a su vez un único estado en común; pues los ancestros de T, son originados por extensiones de los ancestros de S que ya comparten un elemento único. Con esto en mente se presenta otro resultado de Hedlund.

Hedlund 4 *(Resultado (14.9)) Si el autómata es reversible, entonces $LM = k^{2r}$*

Prueba: Sea $\mathcal{S} = K^m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$; numeremos los elementos de $\mathcal{S}$ con un subíndice. Sabemos que en un autómata reversible toda $S_i \in \mathcal{S}$ tiene k^{2r} ancestros, los cuales se pueden representar así: $\phi^{-1}(S_i) = \{\mathcal{L}_i \mathcal{A}_i \mathcal{R}_i\}$ en donde para toda S_i se cumple que $|\mathcal{A}_i| = 1$, un único elemento con el cual regresar en la evolución, esto indica que $M = 1$.

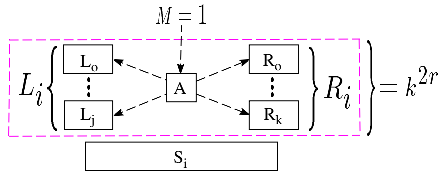


Figura 3.7: Ancestros de S_i, en donde $M = 1$

Para alguna S_i tenemos que $|\mathcal{L}_i| = L$ y para alguna otra S_j se cumple que $|\mathcal{R}_j| = R$, concatenemos las secuencias $S_iS_j \in K^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n > m$. S_iS_j sigue conservando un único elemento central $A^{'}$ y cumple, por el resultado (Hedlund 3) que $|\phi^{-i}(S_iS_j)| = k^{2r}$. La forma de estos ancestros es $(\mathcal{L}_iA^{'}\mathcal{R}_j)$ y se debe cumplir que $|(\mathcal{L}_iA^{'}\mathcal{R}_j)| = k^{2r}$.

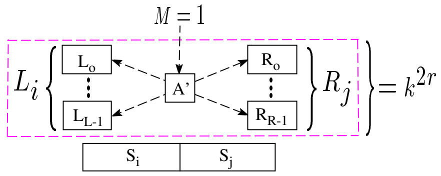


Figura 3.8: Ancestros de la secuencia S_iS_j con $|\mathcal{L}_i| = L$ y $|\mathcal{R}_j| = R$

Dado que $|A^{'}| = 1$, $|\mathcal{L}_i| = L$ y $|\mathcal{R}_j| = R$, se cumple que $LR = k^{2r}$.

Este resultado nos dice que en los autómatas reversibles, los índices de Welch contabilizan las diferencias que tienen los ancestros de cada $S \in K^m$ donde $M = 1$; el valor $LR = k^{2r}$ implica que estas diferencias se muestran en los extremos y que estos índices son multiplicativos para expresar el número de ancestros de S. Un punto a resaltar es que el mínimo valor de m para el cual toda $S \in K^m$ cumple con $M = 1$ es la mínima longitud que debe tener cada vecindad en ϕ^{-1} y el conjunto $S \in K^m$ especifica todas las posibles vecindades de ϕ^{-1}

3.6 Diagramas de Welch

Otro trabajo importante acerca del tema es *"Local Maps Inducing Surjective Global Maps of One-Dimensional Tessellation Automata"* de Masakazu Nasu [Nasu 78], en donde analiza la reversibilidad de los autómatas celulares lineales mediante gráficas *bundle* que aquí denominaremos como *diagramas de Welch* por su relación con los índices expuestos en la seccion 3.5.

3.6.1 Más Propiedades de los Indices de Welch

Nasu hace importantes observaciones sobre el comportamiento de los ancestros en un autómata reversible por medio de los índices de Welch. De la misma forma que se mostraron los resultados de Hedlund; el enfoque de Nasu es tratado en esta sección haciendo referencia de los resultados a usar con (*Resultado*$(m.n)$) que corresponden a la sección $(m.n)$ de la referencia [Nasu 78]. 1

Nasu 1 *(Resultado (5.1)) Sea m el tamaño mínimo de las vecindades de ϕ^{-1}, sea $\mathcal{S} = K^n, n \geq m$. Si $\mathcal{L}_i\mathcal{A}_i\mathcal{R}_i$ son los ancestros de cada $S \in \mathcal{S}$, entonces se cumple que:*

- $\mid \mathcal{L}_i \mid = L$
- $\mid \mathcal{R}_i \mid = R$

para toda $S \in \mathcal{S}$

Prueba: Iniciemos con la proposición que para cada $S \in \mathcal{S}$, se tiene que $|\mathcal{L}_i| \leq L$ y $|\mathcal{R}_i| \leq R$.

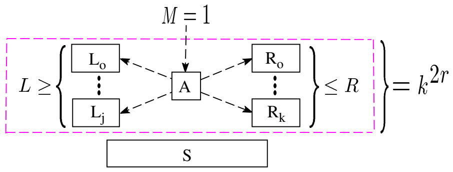


Figura 3.9: Ancestros de S con $|\mathcal{L}_i| \leq L$ y $|\mathcal{R}_i| \leq R$

Por el lado izquierdo, supongamos que para alguna $S \in \mathcal{S}$ se tiene que $|\mathcal{L}_i| < L$, Dado que para S ya se fijó un único elemento $\mathcal{A}_i$, los ancestros deben mostrar sus diferencias en $\mathcal{L}_i$ y en $\mathcal{R}_i$. Debido a que $|\mathcal{L}_i| < L$; se tiene $|\mathcal{I}_i||\mathcal{D}_i| < LR = k^{2r}$ lo cual contradice la multiplicidad uniforme (Resultado 2 en la sección 3.4).

De manera análoga la demostración se lleva para el lado derecho con $\mathcal{R}_i$. De los resultados anteriores concluimos que $|\mathcal{L}_i| = L$ y $|\mathcal{R}_i| = R$.

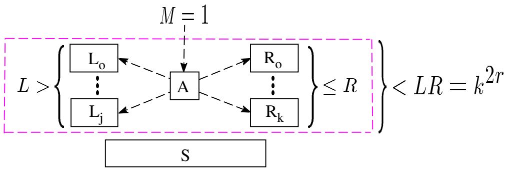


Figura 3.10: Si $| \mathcal{I}_i |< L$ entonces $| \mathcal{I}_i || \mathcal{D}_i |< LR = k^{2r}$ contradiciendo a la multiplicidad uniforme

Si extendamos a S hacia la izquierda concatenandole estados, entonces $\phi^{-1}(S) = \{\mathcal{L}'_i\mathcal{A}_i\mathcal{R}_i\}$. Dado que $|\mathcal{R}_i| = R$ y $|\mathcal{A}_i| = 1$ se mantienen , entonces $|\mathcal{L}'_i|$ debe seguir siendo igual a L pues de otro modo no se cumple con la multiplicidad uniforme; esto es análogo si extendemos S a la derecha.

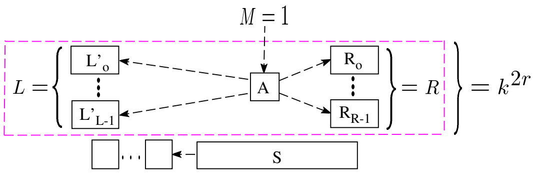


Figura 3.11: Extensiones de S siguen conservando el valor de los índices L y R

Por lo tanto, $|\mathcal{L}_i| = L$ y $|\mathcal{R}_i| = R$ para toda $S \in K^n$ con $n \geq m$.

La nota concluyente de este resultado es que en un autómata reversible, los ancestros de todas las posibles secuencias de longitud mayor o igual a las de las vecindades de la regla inversa ya tienen bien definidos sus índices L y R y estos valores se conservan no importando que tanto extendamos dichas secuencias ni en que dirección.
Del resultado anterior se desprende otro importante acerca de la relación entre los conjuntos compatibles izquierdos y derechos.

Nasu 2 *(Resultado (3)) Sea m el tamaño mínimo de las vecindades de ϕ^{-1}, sea $\mathcal{S} = K^n$ con $n \geq m$. Si $\mathcal{L}_i\mathcal{A}_i\mathcal{R}_i$ son los ancestros de cada $S_i \in \mathcal{S}$, entonces para S_i y $S_j \in \mathcal{S}$ se cumple que* $|\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j| = 1$.

Prueba: Tomemos a $\phi^{-1}(S_i) = (\mathcal{L}_i\mathcal{A}_i\mathcal{R}_i)$ y a $\phi^{-1}(S_j) = (\mathcal{L}_j\mathcal{A}_j\mathcal{R}_j)$. Si formamos la cadena S_iS_j, entonces $\phi^{-1}(S_iS_j) = (\mathcal{L}_i\mathcal{A}_i(\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j)\mathcal{A}_j\mathcal{R}_j)$. Si $(\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j) = \emptyset$ entonces no se podrá formar un ancestro de S_iS_j y ésta será una cadena del jardín del edén, situación que no puede ser en un autómata reversible.

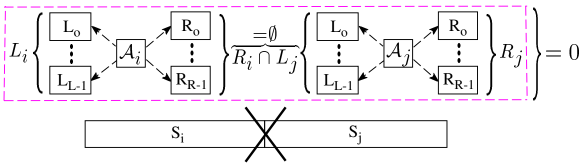


Figura 3.12: Si $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{I}_j = \emptyset$ entonces la cadena pertenece al jardín del edén y el autómata no es reversible

Por otro lado, si $|\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j| > 1$ para $\mathcal{A}_i$ se tendrá un conjunto compatible derecho de la forma $(\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j)\mathcal{A}_j\mathcal{R}_j)$ en donde $|(\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j)\mathcal{A}_j\mathcal{R}_j)| > R$ ya que para cada elemento de $(\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j)$ existirán tantas posibilidades de continuar a la derecha como $|\mathcal{R}_j| = R$ generando en total un valor mayor que R, lo cual contradice el resultado (Nasu 1).

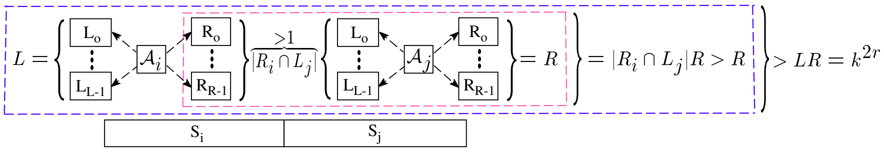


Figura 3.13: Si $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{I}_j > 1$ entonces la cadena tiene más ancestros que k^{2r} contradiciendo la multiplicidad uniforme

Por lo tanto $|\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_j| = 1$.

Lo que nos expone el resultado (Nasu 2) es que las extensiones compatibles derechas e izquierdas de toda vecindad inversa de ϕ^{-1} intersectan en un solo elemento y esto se mantiene para todas las posibles extensiones de cada vecindades de ϕ^{-1}. Algo más sútil que puede encontrarse en el resultado anterior es que, cuando solamente concatenamos los ancestros de las secuencias S_i y S_j, la evolución de estos antecesores tiene la forma $S_i E S_j$ donde $E \in K^{2r}$.

Si ahora solamente queremos a $S_i S_j$ en la evolución debemos traslapar los ancestros de ambas cadenas y estos solo deben traslapar de una forma posible como se demostró en (Nasu 2). Lo importante es ver que el tamaño del traslape es $2r$, es decir, los ancestros concuerdan en sus $2r$ elementos extremos, o lo que es lo mismo, en un nodo de de Bruijn.

3.6.2 Formando el Diagrama de Welch

Hemos establecido que en un autómata reversible, las cadenas de una longitud dada tienen un único elemento con el cual regresan hacia atrás en la evolución, por lo que estas cadenas funcionan como las vecindades de tamaño mínimo de la regla inversa, en dichas secuencias se cumplen las siguientes propiedades:

- Toda secuencia tiene el mismo número de ancestros.
- El número de ancestros es igual a k^{2r}.
- La forma de los ancestros de cada secuencia se puede representar como $(\mathcal{L}_i\mathcal{A}_i\mathcal{R}_i)$.
- $|\ \mathcal{L}_i\ |= L$
- $|\ \mathcal{A}_i\ |= 1$
- $|\ \mathcal{R}_i\ |= R$
- $LR = k^{2r}$.
- $|\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_i| = 1$ para todo posible $\mathcal{R}_i$ y $\mathcal{L}_i$.
- El tamaño del traslape de $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{L}_i$ es de $2r$.

De lo anterior se desprende que si para cada vecindad inversa solo utilizamos los $2r$ elementos extremos distintos de los ancestros, con estos podemos formar todos los posibles conjuntos $\mathcal{L}_i$ y $\mathcal{R}_i$. Tomemos todas las clases $\mathcal{L}_i$ y con éstas establezcamos un diagrama que será llamado diagrama de *Welch izquierdo*. Va a existir una arista de un nodo hacia otro si del inicial se tiene un conjunto de elementos con al menos un miembro; de tal modo que, en el diagrama de de Bruijn este conjunto este ligado con el mismo tipo de liga con todos los elementos del conjunto final, tal como se hizo en el diagrama de subconjuntos. Haciendo el proceso análogo para todas las clases $\mathcal{R}_i$ obtenemos el diagrama de *Welch derecho*.

Una vez construidos ambos diagramas para un autómata reversible particular, Nasu aplica en ellos la teoría de autómatas definidos dada en [Perles 63]. El diagrama de Welch derecho es $p-definido$ si empezando desde cualquier nodo, una misma secuencia de longitud mayor o igual a p finaliza en un único nodo; del mismo modo, el diagrama de Welch izquierdo es $q-definido$ si empezando desde cualquier nodo, una misma secuencia de longitud mayor o igual a q finaliza en un único nodo.

Una pregunta inmediata es: ¿que tan grandes pueden ser los valores de p y q?. Sea WI el número de nodos del diagrama de Welch izquierdo y sea WD el número de nodos del diagrama de Welch derecho, entonces del *Teorema 1* de [Perles 63] tenemos que:

$$\begin{aligned} p &\leq WD-1 \\ q &\leq WI-1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Un uso inmediato de los diagramas de Welch es conocer cual es elemento único con el que una cadena debe regresar hacia atrás en la evolución, esto se puede hacer tomando el diagrama de Welch izquierdo y encontrar a que nodo llega toda posible instancia de una ruta r_i dada, hacemos lo mismo con el diagrama de Welch derecho para toda instancia de una ruta r_j. Dado que los nodos del diagrama izquierdo son conjuntos $\mathcal{L}_i$, los nodos del diagrama derecho son conjuntos $\mathcal{R}_j$ y $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{R}_j = e$ con $e \in K^{2r}$; el nodo final de la ruta r_i y el nodo inicial de la ruta r_j concuerdan en una única secuencia e de tamaño $2r$, así, la cadena formada concatenando $r_i r_j$ tiene una sola forma de regresar hacia atrás en la evolución seleccionando un estado de e.

3.7 Propiedades de Reversibilidad Basadas en Diagramas

Veamos ahora como se manifiestan las propiedades de reversibilidad en los diversos diagramas que se usan para estudiar el comportamiento de los autómatas celulares lineales.

3.7.1 Diagrama de de Bruijn y Propiedades de Reversibilidad

Observaremos que cada liga aparecerá el mismo número de veces que el resto, es decir, cada estado es igualmente probable de aparecer en la regla de evolución que los demás, más aún, cada secuencia factible de estados tiene k^{2r} rutas diferentes que la producen y para toda secuencia de longitud mayor o igual a n, se tendrán L nodos iniciales, uno único nodo al que convergen la L rutas de comienzo y de ahí habrán R posibles nodos donde dichas rutas terminen.

3.7.2 Diagrama de Parejas y Propiedades de Reversibilidad

Como se mencionó en el capítulo 2 sección 2.4, el diagrama de parejas tiene en su diagonal principal contenido al diagrama de de Bruijn, y los ciclos que aparezcan fuera de la diagonal principal indican dos formas distintas de producir una misma secuencia indefinidamente, teniendo esto en mente, el diagrama de parejas de un autómata celular reversible no contendrá ningún ciclo fuera de la diagonal principal ni algún ciclo que esté conectado con esta diagonal pues no puede existir una secuencia que se pueda repetir indefinidamente y que tenga en todos los casos más de un ancestro posible pues se perdería la biyectividad entre configuraciones.

3.7.3 Diagrama de Subconjuntos y Propiedades de Reversibilidad

En el principio de este capítulo se hizo la observación que en un autómata reversible no puede existir una configuración que pertenezca al jardín del edén pues esto violaría la biyectividad que debe existir entre el conjunto de configuraciones globales, observar si dichas configuraciones existen o no se puede realizar inspeccionando el diagrama de subconjuntos, en un autómata reversible observaremos que no existirá una ruta que vaya desde el conjunto completo hasta el conjunto vacío en este diagrama.

Otra información importante es que por medio de esta gráfica podemos conocer cual es el valor de los índices de Welch, si observamos cual es el nivel máximo que podemos alcanzar empezando desde los conjuntos unitarios estaremos conociendo el valor del índice R, a continuación reflejemos la regla de evolución, esto es, tomemos en sentido inverso las vecindades conservando su mapeo original y de esta regla reflejada formemos su diagrama de subconjuntos, haciendo el mismo análisis, veamos hasta que nivel llegamos empezando desde las clases unitarias y este nivel indicará el valor de L.

El proceso anterior funciona ya que las clases unitarias son nodos aislados de de Bruijn, de estos nodos deben surgir todas las posibles variaciones a la derecha para una secuencia dada, y en todos los casos el número de variaciones debe ser R, de aquí que estas rutas lleguen hasta el nivel R al cual lo conforman subconjuntos con este número de elementos señalando las posibilidades existentes que tienen de terminar los ancestros de cada ruta, lo análogo sucede en la regla reflejada y el nivel L.

Se vio también que una vez se han fijado en los ancestros de una cadena los valores de L y R, estos se conservan no importando que tanto y hacia que dirección extendamos dicha cadena; por esta razón veremos que en el diagrama de subconjuntos empezando desde las clases unitarias, las rutas llegan al nivel R y ya no saldrán de este nivel conservando el valor del índice R, lo mismo ocurre con el diagrama de subconjuntos de la regla reflejada, de los conjuntos unitarios las rutas llegarán al nivel L y sus continuaciones se seguirán manteniendo en dicho nivel.

Gracias a la propiedad anterior, del diagrama de subconjuntos de la regla original podemos obtener el diagrama de Welch derecho, y del diagrama de subconjuntos de la regla reflejada se puede generar el diagrama de Welch izquierdo, pues como explicamos con anterioridad, los nodos de estos diagramas no son más que subconjuntos de R elementos y L elementos respectivamente y estos por definición deben aparecer en el diagrama de subconjuntos, así, si observamos en el diagrama de subconjuntos de la regla original que familia de nodos del nivel R tienen todas sus rutas autocontenidas en la misma, esta familia contiene los nodos del diagrama de Welch derecho, el proceso similiar ocurre para el diagrama de Welch izquierdo, en la gráfica de subconjuntos de la regla inversa observemos en el nivel L que familia de nodos conducen todas sus posibles rutas hacia si misma y en esta familia tendremos los nodos del diagrama de Welch izquierdo.

3.7.4 Diagramas de Welch y Propiedades de Reversibilidad

Dado que los diagramas de Welch heradan todas las propiedades del comportamiento de los índices de Welch, se pueden observar propiedades muy claras y evidentes en ellos. Todo nodo del diagrama derecho de Welch tiene tantos nodos de de Bruijn como R y todo nodo del diagrama izquierdo de Welch tiene tantos nodos de de Bruijn como L.

Si el diagrama derecho tiene WD nodos y el izquierdo WI nodos, tendremos que para $(1 \leq p < WD)$ y $(1 \leq q < WI)$, después de p pasos toda ruta converge a un único nodo en el caso derecho y para el caso izquierdo toda ruta después de q pasos llega a un sólo nodo. Por estos valores entonces tenemos que el máximo tamaño de la mínima vecindad de ϕ^{-1} está dado por $p + q - (2r - 1)$; la resta que se hace a la suma de $p + q$ se debe a que el elemento en que ambos nodos concuerdan esta conformado por un nodo de de Bruijn, es decir, concuerdan en $2r$ elementos, solo necesitando uno con el cual regresar hacia atrás en la evolución, es por eso que $2r - 1$ elementos son redundantes. El problema de cual es el máximo tamaño posible de la mínima vecindad inversa se tratará con mayor detalle el el capítulo 5.

3.8 Propiedades Matriciales

El diagrama de de Bruijn es la construcción fundamental que representa la regla de evolución y por lo tanto el comportamiento de un autómata celular. Aplicando conceptos básicos de teoría de gráficas, existe una matriz binaria para cada estado o tipo de liga. El diagrama de de Bruijn tiene una representación matricial para cada tipo de arista en donde los índices representan los nodos y los elementos las ligas que existen entre estos. Si un nodo está conectado con otro con ese tipo de arista, el elemento definido por estos índices será un 1, en otro caso será un 0; a esta matriz se le denominará la matriz de conectividad del tipo de liga o estado correspondiente.

Para una secuencia de estados dada, tomemos la matriz de conectividad de cada estado y multipliquemos éstas siguiendo el orden que dicta dicha secuencia, el resultado de este proceso dará lo siguiente:

- La suma de los elementos matriciales indica cuantas posibles formas tenemos de producir dicha secuencia.
- El número de renglones con elementos no todos 0 indica cuantas formas tenemos de iniciar la secuencia.
- Los renglones con elementos no todos 0 señalan de cuales nodos surge esta secuencia.
- El número de columnas con elementos no todos 0 indica cuantas formas existen de terminar dicha secuencia.
- Las columnas con elementos no todos 0 indican en cuales nodos finaliza dicha secuencia.

Con estas simples observaciones tenemos que en un autómata reversibles, la matriz de conectividad de toda secuencia debe cumplir que la suma de sus elementos sea igual a k^{2r}, la suma de sus renglones diferentes a 0 debe ser L y la suma de sus columnas con la misma propiedad debe ser R. En otras palabras, las representación matricial, nos manifiesta numéricamente la multiplicidad uniforme y los índices L y R, además de, presentarnos cuales son los elementos que conforman los extremos de los ancestros, o sea, los conjuntos $\mathcal{R}_i$ y $\mathcal{L}_i$ de dicha secuencia, con lo que se puede obtener con este proceso los nodos de los diagramas de Welch derecho e izquierdo; un análisis más detallado en este aspecto puede encontrarse en [Seck 98].

Al trabajar con matrices es una tentación aplicar la teoría de algebra matricial para obtener más información sobre el comportamiento de las mismas. La obtención de eigenvalores y eigenvectores indican, para los primeros, la proporción de proliferación de los elementos al elevar la matriz a potencias sucesivas; del mismo modo, viendo la matriz como una transformación en el espacio los eigenvectores nos indican sobre que ejes y en que medida se presentarán dichas transformaciones.

Trabajando con las matrices de conectividad del diagrama de de Bruijn, observaremos que para cada estado, su matriz de conectividad tendrá un único eigenvalor igual con 1, en otras palabras, los ancestros no proliferarán mś allá de como están definidos al principio, y los eigenvectores representarán de cuantos y cuales nodos en el diagrama de de Bruijn partirán las rutas que comienzen en dicho estado. Si quisieramos conocer lo contrario, es decir, de cuantos y a cuales nodos llegarán las rutas que terminen en dicho estado, solo basta con transponer la matriz y obtener el eigenvector correspondiente, los elementos del mismo nos mostrarán esa información.

En síntesis, el que las matrices de conectividad tengan un único eigenvalor igual con 1 es señal que el número de ancestros se mantendrá; si esto es igual para todas las matrices de conectividad posibles es debido a la multiplicidad uniforme. Por medio de los eigenvectores podemos reconstruir a las matrices de conectividad, multiplicando los eigenvectores renglón con los eigenvectores columna, formando así todas las posibles instancias de las matrices de conectividad.

3.9 Caso de Estudio: Autómata $(4, 1/2)$

Para ver como funcionan todos los resultados anteriores tomemos un autómata reversible $(4, 1/2)$ con $\phi = BB991133$ y $\phi^{-1} = 28F528F5$. En ambos casos las dos reglas tienen el mismo valor de $r = 1/2$ y, por lo tanto, el mismo tamaño de vecindad, $2r + 1 = 2$.

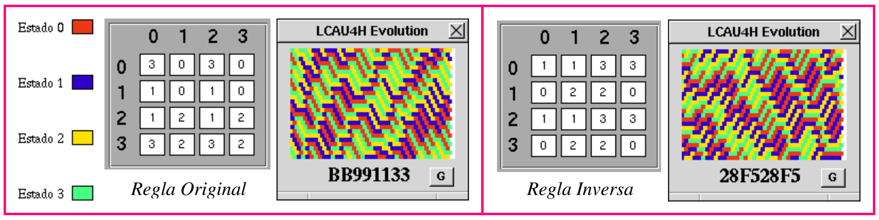


Figura 3.14: Autómata celular lineal reversible $(4, 1/2)$ regla $BB991133$

Se ve que cada estado tiene la misma probabilidad de generarse que el resto tanto en ϕ como en ϕ^{-1}; tomemos varias cadenas aleatorias de elementos y veamos cuales son sus ancestros para ϕ.

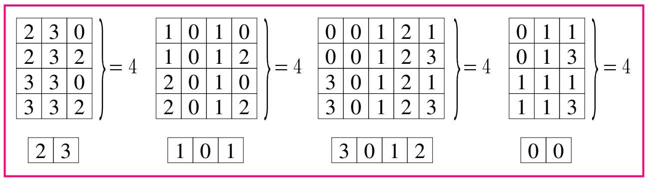


Figura 3.15: Ancestros de diversas cadenas

En todos los casos se observa que el número de ancestros es igual a $k^{2r} = 4^{2*(1/2)} = 4$. Ahora analizemos las distintas partes de los ancestros para dichas cadenas.

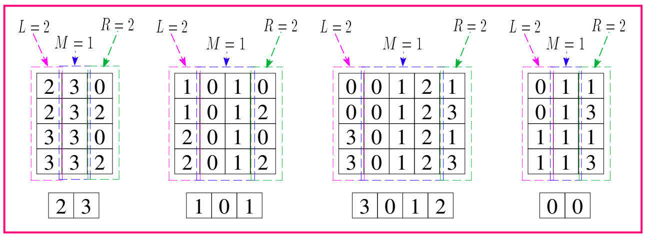


Figura 3.16: Indices de Welch para los ancestros del autómata $(4, 1/2)$

Se puede observar que en todos los casos se cumple que $L = 2$, $M = 1$ y $R = 2$; con $LR = 4 = k^{2r}$. Se cumple que las diferencias de los ancestros se presenten a los extremos, dejando una parte central única. Ahora observemos el diagrama de de Bruijn asociado a la regla de evolución.

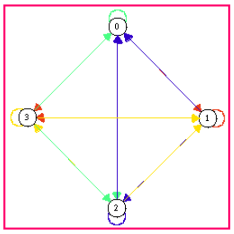


Figura 3.17: Diagrama de de Bruijn del autómata reversible $(4, 1/2)$, regla $BB991133$

Cada liga aparece el mismo número de veces que las demás, si tomamos las ligas que forman la secuencia 00, observamos lo siguiente:

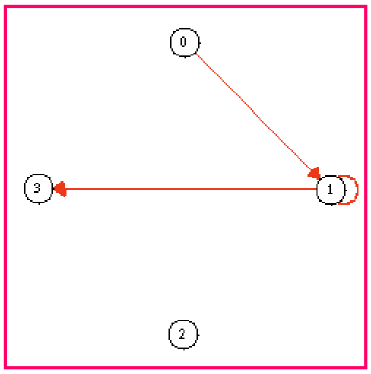


Figura 3.18: Rutas posibles de la secuencia 00

Esta ruta tiene $L = 2$ posibles nodos iniciales $((0), (1))$, comparten un único nodo central (1) indicando que $M = 1$ y terminan en $R = 2$ nodos distintos $((1), (3))$.

Tomemos ahora el diagrama de parejas de dicho autómata:

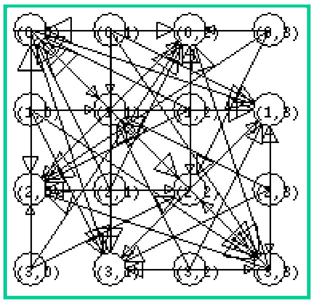


Figura 3.19: Diagrama de Parejas del autómata reversible $(4, 1/2)$, regla $BB991133$

Si editamos este diagrama de modo que solo presentemos los ciclos que existen en él obtenemos la siguiente construcción.

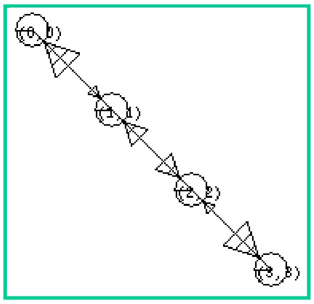


Figura 3.20: Diagrama de Parejas editado mostrando solamente sus ciclos

Los únicos ciclos que existen aparecen en la diagonal principal que es el diagrama de de Bruijn mismo, y aparte de esto no se presentan de ninguna otra forma, lo que indica que no es posible construir una secuencia de longitud indefinida de 2 o más modos distintos. Los diagramas de subconjuntos de la regla original y la regla reflejada son los siguientes:

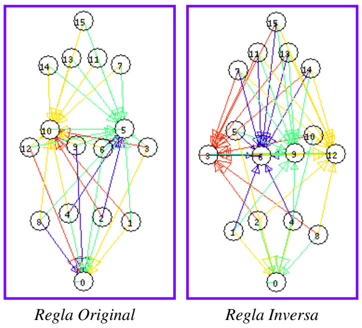


Figura 3.21: Diagramas de subconjuntos del autómata reversible $(4, 1/2)$, regla $BB991133$

Para la regla original el máximo nivel que se puede alcanzar empezando desde las clases unitarias es el nivel 2, lo que indica que $R = 2$, y de ahí, estas mismas rutas no salen de este nivel. Lo mismo ocurre con las clases unitarias del diagrama de la regla reflejada, en donde el máximo nivel al que se arriba es el 2 también, mostrando que $L = 2$ y tampoco estas rutas abandonan este nivel. Editemos los diagramas y tomemos los conjuntos que están auto-ligados en estos niveles.

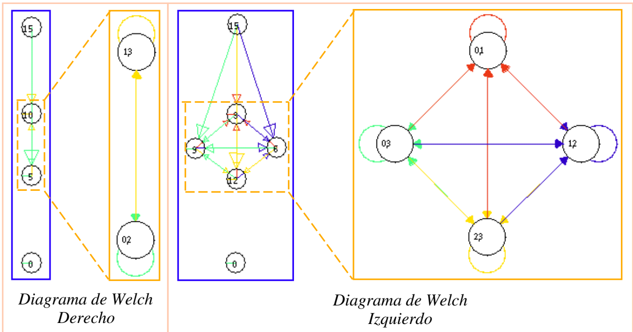


Figura 3.22: Diagramas de Welch del autómata $(4, 1/2)$ regla $BB991133$

De esta forma obtenemos los diagramas de Welch del autómata $(4, 1/2)$ regla $BB991133$. Veamos ahora en el diagrama derecho las rutas de la secuencia 0 y en el diagrama izquierdo las rutas de la secuencia 0.

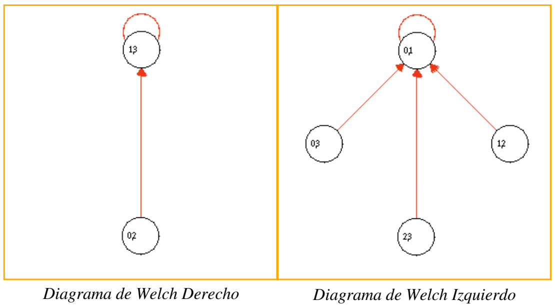


Figura 3.23: Rutas de la secuencia 0 en los diagramas de Welch

Ambas rutas convergen a un único nodo, estos nodos finales tiene un solo elemento en común que es 1; es decir, que la secuencia 00 regresa hacia atrás en la evolución con el estado 1 como se vio anteriormente. Del diagrama de de Bruijn obtengamos la matriz de conectivdad de 0 (M_0)

$$\mathrm{M}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta matriz existen $k^{2r} = 4^{(2*(1/2))} = 4$ elementos distintos de 0. Ahora bien, si elevamos M_0 al cuadrado, obtenemos la matriz de conectividad de la secuencia 00 denotada como M_{00}.

$$\mathrm{M}_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que el número de elementos distintos de 0 sigue siendo 4 cumpliendo con la multiplicidad uniforme, además, los renglones distintos de 0 son $(0, 1)$ y las columnas distintas de 0 son $(1, 3)$ indicando cuales son los nodos iniciales y finales de esta ruta. En ambos casos la suma de renglones distintos de 0 es igual a $L = 2$ y la suma de columnas con la misma propiedad es $R = 2$. Ahora vamos a resolver el problema de eigenvalores para la matriz de conectividad M_0. Calculando los eigenvalores tenemos $|\mathrm{M}_0 - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^4 - \lambda^3 = 0; \quad \lambda_1 = 0 \quad y \quad \lambda_2 = 1.$$

Los eigenvalores que se obtienen son $\lambda_1 = 0$ de multiplicidad tres que es el caso trivial y $\lambda_2 = 1$ el cual indica que si elevamos esta matriz, equivalente a obtener la matriz de conectividad de una secuencia formada concatenando el mismo estado repetidamente, se seguirá conservando el mismo número de ancestros.

$$\mathrm{M}_0^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{; para } n > 0.$$

En todos los casos el número de elementos distintos a 0 es $k^{2r} = 4$. Ahora obtengamos el eigenvector-renglón de M_0 denotado por $|\mathrm{e}_0>$ y el eigenvector-columna de M_0 transpuesta que denotaremos con $<\mathrm{e}_0|$.

$$|\mathrm{e}_0> \quad = \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$<\mathrm{e}_0| \quad = \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Si multiplicamos ambos eigenvectores obtenemos la siguiente matriz:

$$|\mathrm{e}_0 >< \mathrm{e}_0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_0$$

Esta es la matriz de conectividad de la secuencia 00 obtenida anteriormente, la cual hemos podido reconstruir por medio de los eigenvectores.

Trabajemos con estados distintos, tomemos la matriz de conectividad del estado 1.

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtengamos los eigenvalores de la matriz de conectividad de la secuencia 00 y del estado 1.

$$|\mathrm{M}_{00} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^4 - \lambda^3 = 0; \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

$$|\mathrm{M}_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^4 - \lambda^3 = 0; \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

Los eigenvalores no triviales en ambos casos son iguales a 1; calculemos el eigenvector-renglon de M_1 y el eigenvector-columna de M_{00}.

$$|\mathrm{e}_1 > \quad = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$< \mathrm{e}_{00}| \quad = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Multiplicando el eigenvector-renglon $|\mathrm{e}_1 >$ con el eigenvector-columna $< \mathrm{e}_{00}|$ se obtiene la siguiente matriz.

$$|\mathrm{e}_1 >< \mathrm{e}_{00}| \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tomamos las matrices de conectividad de 0 y de 1 y las multiplicamos en el orden que indica la secuencia 100 obtenemos:

$$(\mathrm{M}_1)(\mathrm{M}_0)(\mathrm{M}_0) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{100}$$

Que fue la matriz que obtuvimos por eigenvectores anteriormente.

3.10 Observaciones Finales

Dentro de los autómatas celulares lineales, un tipo especial son los denominados *reversibles*, los cuales pueden regresar hacia atrás en su evolución gracias a una regla inversa a la original. Los trabajos desarrollados por Hedlund [Hedlund 69] y Nasu [Nasu 78] nos han permitido conocer cuales son las propiedades del comportamiento local de estos autómatas, resumiéndose en las siguientes características:

1. Cada secuencia tiene el mismo número de ancestros que las demás.
2. El número de ancestros de cada secuencia es igual a k^{2r}.
3. Los ancestros de todas las secuencias de una longitud dada comparten un único elemento central, del cual surgen L variantes izquierdas y R variantes derechas.
4. $LR = k^{2r}$.

Los diagramas para el estudio de estos sistemas demuestran la reversibilidad de un modo propio, aunque en general estas manifestaciones del comportamiento reversible dependen del valor de los índices de Welch. El estudio matricial del diagrama de de Bruijn también nos muestra las características relevantes de dichos sistemas, equilibrio en el número de ancestros (observando los eigenvalores) y el poder conocer tanto los índices como los nodos de Welch (por medio de los eigenvectores).

Hasta el momento se ha explicado el funcionamiento de un autómata celular lineal reversible y las propiedades que exhibe a nivel local; sin embargo, aún no es claro cómo es que la información del sistema se va conservando de tal modo que es posible volver a utilizarla y reconstruir la historia global anterior del proceso, esto nos lleva a analizar un trabajo fundamental al respecto realizado por Jarkko Kari [Kari 96].

Capítulo 4

Permutaciones en Bloque

4.1 Resumen

Hasta ahora se ha expuesto cual es el comportamiento local de un autómata celular lineal reversible por medio de la multiplicidad uniforme y los índices de Welch. También se ha señalado como encontrar los índices L y R, ya sea por medio de el diagrama de subconjuntos, los diagramas de Welch, o bien, analizando las matrices de conectividad del diagrama de de Bruijn. Sin embargo, no se ha alcanzado una caracterización completa que explique el comportamiento reversible de un autómata, es decir, conocemos las propiedades y los efectos a un nivel local pero no se ha dado una perspectiva que nos indique como funcionan estas carcaterísticas de tal manera que se conserve la información del sistema y la manera en que ésta funciona para regresar en la evolución de un autómata.

Sin duda un trabajo de gran importancia e interés en este aspecto se debe a Jarkko Kari titulado *"Representation of Reversible Cellular Automata with Block Permutations"* [Kari 96]. A principios de los 90's Kari empezó a abordar el problema, explica el funcionamiento de cualquier autómata celular lineal reversible como una combinación de dos permutaciones en bloque y un corrimiento. El objetivo de este capítulo es ver como funciona este concepto, analizándolo con un ejemplo y haremos esta idea extensiva a todo tipo de autómata celular lineal reversible.

4.2 Proceso de Kari

La sección tres del trabajo de Kari [Kari 96] nos dice que todo autómata celular lineal reversible puede ser generado por medio de permutaciones en bloque y corrimiento parciales. Nosotros en esta sección daremos un paráfrasis del resultado de Kari, mediante el ejemplo del autómata reversible $(2,1)$ regla 204, visualizando paso a paso algunos resultados parciales que encontramos en el proceso.

El autómata reversible $(2,1)$ regla 204 tiene la siguiente evolución.

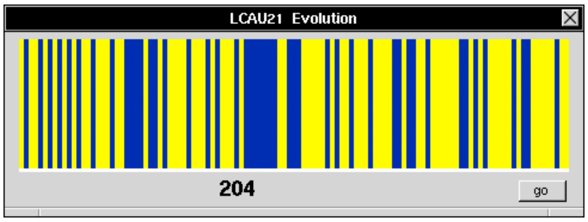


Figura 4.1: Autómata $(2,1)$ regla 204

La regla de evolución 204 es la siguiente.

	00	01	10	11
00	0	0		
01			1	1
10	0	0		
11			1	1

Tabla 4.1: Regla de evolución 204 de un autómata $(2,1)$

Como se puede observar en la Figura 4.1 la regla de evolución consiste en copiar el elemento central de la vecindad, por lo que a esta regla también se le conoce como la regla identidad.

La multiplicidad uniforme nos dice que cada secuencia tendrá tantos ancestros como $k^{2r} = 2^2 = 4$; los valores de los índices de Welch de esta regla de evolución son $L = 2$ y $R = 2$, cumpliendo con que $LR = k^{2r} = 4$. Además, tenemos que la regla inversa es la misma regla 204 debido a que solo se copia el elemento central de la vecindad.

Vamos a empezar ahora con la selección del radio de vecindad. Sabemos que si un autómata es reversible, para un radio de vecindad r, éste lo seguirá siendo para otros radios de vecindad mayores que r. De esta manera, seleccionaremos el valor de r mayor, entre la regla original ϕ y la regla inversa ϕ^{-1}, teniendo la seguridad que para ambos casos la reversibilidad se mantendrá. En el ejemplo como tanto la regla original como la inversa es la misma, entonces $r = 1$.

Para la regla original ϕ, definamos ahora dos conjuntos, el L_ϕ y el R_ϕ. Estos se forman con todas las posibles cadenas de tamaño $2r$ y las terminaciones izquierdas y derechas respectivamente de todos los posibles ancestros de cada cadena, siendo cada una de estas terminaciones también de tamaño $2r$.

Para obtener dichos conjuntos L_ϕ y R_ϕ, formemos todas aquellas secuencias posibles de tamaño $6r$, para obtener posteriormente su evolución, la cual será una secuencia de tamaño $4r$. Finalmente tomaremos de dichas secuencias los siguientes elementos según indiquen f_{L_ϕ} y f_{R_ϕ}.

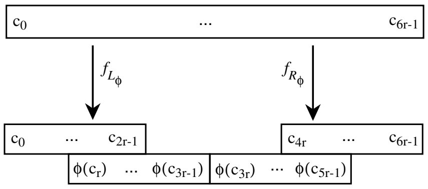


Figura 4.2: Elementos de L_ϕ y R_ϕ

Sabemos que dicho autómata es reversible con un radio de vecindad r; de este modo, si un bloque de tamaño $2r+1$ define una única célula central en sus ancestros, un bloque de tamaño $4r$ define a su vez un único bloque central de tamaño $2r$ en sus ancestros, dejando las discrepancias de los mismos en los extremos, dichas diferencias estarán contenidas en los conjuntos L_ϕ y R_ϕ.

Del ejemplo tomemos todas las secuencias de tamaño $4r$, es decir, de 4 células y sus ancestros.

000000 000001 100000 100001 0000	000010 000011 100010 100011 0001	000100 000101 100100 100101 0010	000110 000111 100110 100111 0011	001000 001001 101000 101001 0100	001010 001011 101010 101011 0101	001100 001101 101100 101101 0110	001110 001111 101110 101111 0111
010000 010001 110000 110001 1000	010010 010011 110010 110011 1001	010100 010101 110100 110101 1010	010110 010111 110110 110111 1011	011000 011001 111000 111001 1100	011010 011011 111010 111011 1101	011100 011101 111100 111101 1110	011110 011111 111110 111111 1111

Tabla 4.2: Ancestros de las secuencias de longitud 4

Ahora de estas secuencias obtengamos los conjuntos L_ϕ y R_ϕ.

$$L_\phi = \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \\ & 0 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 0 & \\ & 0 & 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ & 1 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 1 & 0 & \\ & 0 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 1 & 0 & \\ & 0 & 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 0 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right\}$$

$$R_\phi = \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \end{smallmatrix} \end{array} \right\}$$

Tabla 4.3: Conjuntos L_{204} y R_{204}

En este punto, en el cual nos encontramos, el primer resultado que vamos a parafrasear es el *(Lema 3.1)* de [Kari 96] en el que señala que $|L_\phi||R_\phi| = k^{6r}$.

Los conjuntos L_ϕ y R_ϕ se obtuvieron de las secuencias de tamaño $4r$ y sus ancestros, existiendo tantas secuencias distintas de esta forma como k^{4r}. Debido a que el autómata es reversible cumple con el principio de multiplicidad uniforme y cada una de estas secuencias tiene k^{2r} ancestros, dando como resultado un total de $k^{4r}k^{2r} = k^{6r}$ construcciones de este tipo.

Como se menciono anteriormente, cada bloque de tamaño $4r$ tienen en sus ancestros una única parte central de tamaño $2r$, dejando las diferencias en sus partes izquierdas y derechas, cuantificadas por los índices L y R respectivamente. Por medio de f_{L_ϕ} y f_{R_ϕ} obtenemos los conjuntos L_ϕ y R_ϕ, formados por bloques de tamaño $2r$ y los extremos de sus ancestros también de tamaño $2r$.

En el caso de L_ϕ existen tantos bloques de tamaño $2r$ como k^{2r} y tantos extremos diferentes de ancestros como L; teniéndose lo mismo en el caso análogo R_ϕ. Con lo que respecta a la cardinalidad de estos conjuntos está dada por

$$|L_\phi| = Lk^{2r} \text{ y } |R_\phi| = Rk^{2r} \tag{4.1}$$

multiplicando

$$|L_\phi||R_\phi| = Lk^{2r}Rk^{2r} = LRk^{4r} \tag{4.2}$$

Debido a que el autómata es reversible $LR = k^2r$ por lo que:

$$LRk^{4r} = k^{2r}k^{4r} = k^{6r} \tag{4.3}$$

justamente lo que Kari señala.

En el ejemplo del autómata $(2,1)$ vemos que $|L_\phi| = 8$, $|R_\phi| = 8$, obteniendo 64 con el producto $|L_\phi||R_\phi|$. Justamente es el resultado que dá Kari con $k^{6r} = 2^6 = 64$.

Kari define dos indices h_- y h_+, que se pueden tomar como una normalización de $|L_\phi|$ y $|R_\phi|$ respectivamente.

$$h_- = \tfrac{|L_\phi|}{k^3r} \qquad y \qquad h_+ = \tfrac{|R_\phi|}{k^3r} \tag{4.4}$$

Se puede observar que uno es el recíproco del otro.

$$h_- * h_+ = \frac{|L_\phi|R_\phi|}{k^{3r}k^{3r}} = \frac{k^6r}{k^6r} = 1 \tag{4.5}$$

El segundo resultado importante de Kari es el *(Lema 3.2)*, señalando que

$$h_+(\phi \circ \psi) = h_+(\phi) * h_+(\psi) \tag{4.6}$$

para dos reglas de evolución reversibles ϕ y ψ en un autómata celular; siendo esto igual para h_-. Esto es fácil de ver en el siguiente diagrama:

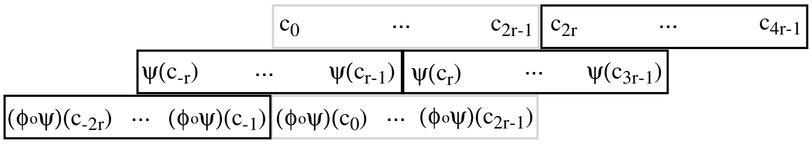


Figura 4.3: Composición de dos reglas de evolución

Observamos en la Figura 4.3 que mientras la primera y la segunda línea son miembros del conjunto R_ϕ, la segunda y tercer línea son miembros de R_ψ. Sin embargo, los bloques en gris claro, son determinados de manera única por el segundo bloque ya que son reglas reversibles; lo que significa finalmente que solo depende de $h_+(\phi) * h_-(\psi)$.

Mostremos esto con el autómata $(2,1)$ regla 204 como ϕ y otro autómata reversible $(2,1)$ regla 15, como ψ.

Regla 204

	00	01	10	11
00	0	0		
01			1	1
10	0	0		
11			1	1

Regla 15

	00	01	10	11
00	1	1		
01			1	1
10	0	0		
11			0	0

Tabla 4.4: Regla 204 y 15 del autómata $(2,1)$

Observemos en detalle como hacen evolucionar en composición ambas reglas un secuencia de estados.

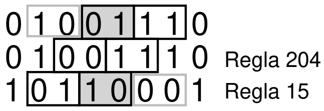


Figura 4.4: Composición de las reglas 204 y 15 en el autómata $(2,1)$

Analizando la Figura 4.4, para formar un elemento $R_{204,15}$ primero de la secuencia inicial, tomaremos en cuenta dos bloques de tamaño $2r$ con dos bloques de la segunda secuencia; producto de aplicar la regla 204 con la 15, obteniendo dos elementos del conjunto R_{204}. Después, estos dos bloques junto con otros dos de igual longitud de la última línea, son elementos de R_{15}. Los dos bloques en la segunda línea tienen definidos de manera única a los bloques con fondo gris tanto en la primera y tercer línea. Lo anterior debido a que la longitud de estos dos bloques les permite tener una única parte central en sus ancestros tanto en el sentido original como en el inverso y que estos ancestros muestren sus diferencias a los extremos, de lado derecho en los bloques con margen negro y del lado izquierdo con los bloques con margen gris.

Tomando estos resultados preliminares como base, llegamos al resultado más importante del trabajo de Kari [Kari 96].

Kari 1 *(Resultado (3.3)) Cada autómata celular lineal reversible en el kernel de h_- es una composición de dos permutaciones en bloque.*

Definamos una permutación en bloque dada como $p = (B_t^{(n)})^{-1} \circ \hat{\pi} \circ B_t^{(n)}$. B_t^n primero divide la configuración en secuencias de longitud n, empezando en la posición t; posteriormente mediante la composición aplicamos la permutación π a cada secuencia (donde Kari denota la aplicación de π con $\hat{\pi}$) obteniendo una nueva configuración de estados.

La prueba se basa en que el valor de $h_- = 1$ establece que los conjuntos R_ϕ y L_ϕ tienen el mismo número de elementos el cual es k^{3r}, por lo que cual podemos definir cualquier tipo de biyecciones

$$\begin{array}{c} b_L : L_\phi \to K^{3r} \\ y \\ b_R : R_\phi \to K^{3r} \end{array} \tag{4.7}$$

Las permutaciones estarán dadas de la siguiente manera:

$$\pi_1(c_0, \ldots, c_{6r-1}) = [(b_L \circ f_{L_\phi})(c_0, \ldots, c_{6r-1}), (b_R \circ f_{R_\phi})(c_0, \ldots, c_{6r-1}] \tag{4.8}$$

$$\pi_2(c_0, \ldots, c_{6r-1}) = [(b_L \circ f_{L_\phi^{-1}})(c_0, \ldots, c_{6r-1}), (b_R \circ f_{R_\phi^{-1}})(c_0, \ldots, c_{6r-1}] \tag{4.9}$$

Es decir, realizar cada una de ellas será una composición en donde primero se aplica a cada secuencia de tamaño $6r$ las funciones f_{L_ϕ} y f_{R_ϕ}, después, cada miembro de L_ϕ y R_ϕ se mapea con la biyección que se haya estipulado en b_L y b_R respectivamente. En síntesis, la permutación π mapea una secuencia de estados de tamaño $6r$ a otra secuencia del mismo tamaño formada por dos elementos de K^{3r} y queda representada en la Figura 4.5.

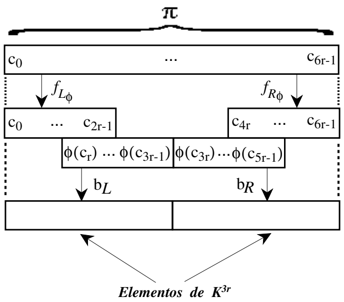


Figura 4.5: Permutación π de un bloque de tamaño $6r$

Entonces, en la evolución de un autómata reversible el paso de una configuración a otra por la regla de evolución puede ser definido por dos permutaciones en bloque, la primera, $p_1 = (B_t^{(6r)})^{-1} \circ \hat{\pi_1} \circ B_t^{(6r)}$, la cual divide la configuración antecesora en bloques de tamaño $6r$, empezando desde la posición 0 y aplicando a cada bloque la permutación π_1. Y la segunda permutación, $p_2 = (B_{3r}^{(6r)})^{-1} \circ \hat{\pi_2} \circ B_{3r}^{(6r)}$, la cual divide la configuración sucesora en bloques de tamaño $6r$, empezando desde la posición $3r$ y aplicando a cada bloque la permutación π_2.

Al final en ambos casos, las permutaciones coinciden en parte con un desfase de $3r$ posiciones (bloque gris en la Figura 4.6), aplicándolas desde el sentido original y el inverso. El mapeo global entre configuraciones inducido por la regla de evolución ϕ puede representarse como la composición de dos permutaciones en bloque $p_1 \circ p_2^{-1}$.

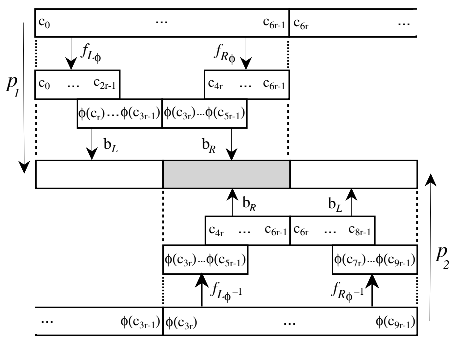


Figura 4.6: Representación del funcionamiento de un autómata reversible por medio de dos permutaciones en bloque y un corrimiento

Veamos este proceso tomando el autómata $(2,1)$ regla 204. Primero formemos b_L asignando al conjunto L_ϕ un mapeo biyectivo con el conjunto K^{3r}; como la regla de evolución original y la inversa es la misma, ambas tienen los mismos conjuntos L_ϕ y R_ϕ; además, tenemos que se cumple que $L_\phi = R_\phi^{-1}$ y $R_\phi = L_\phi^{-1}$, por lo que $L_\phi = R_\phi$ para este caso. De este modo, dado el mapeo b_L, el mapeo b_R queda definido al mismo tiempo.

b_L			b_R		
0 0 / 0 0	→	1 1 1	0 0 / 0 0	→	1 1 1
0 0 / 0 1	→	1 1 0	0 1 / 0 0	→	1 1 0
0 1 / 1 0	→	0 0 0	1 0 / 0 1	→	0 0 0
0 1 / 1 1	→	1 0 1	1 1 / 0 1	→	1 0 1
1 0 / 0 0	→	0 1 0	0 0 / 1 0	→	0 1 0
1 0 / 0 1	→	1 0 0	0 1 / 1 0	→	1 0 0
1 1 / 1 0	→	0 1 1	1 0 / 1 1	→	0 1 1
1 1 / 1 1	→	0 0 1	1 1 / 1 1	→	0 0 1

Tabla 4.5: Mapeo b_L y b_R para el autómata $(2,1)$ regla 204

Tomemos ahora una configuración inicial cualquiera y su evolución con la regla 204.

Configuración Inicial ⟶ 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1
Evolución ⟶ 0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1

Figura 4.7: Evolución de un autómata $(2,1)$ regla 204

Apliquemos ahora las permutaciones p_1 y p_2, es decir, dividamos dichas configuraciones en bloques de tamaño $6r$, en este caso en bloques de longitud 6; posteriormente hacemos un corrimiento de estas divisiones entre la primera y segunda configuración de tamaño $3r$ o de tamaño 3. Por último apliquemos a cada bloque de la primera configuración la permutación π_1 y a cada bloque de la segunda configuración la permutación π_2.

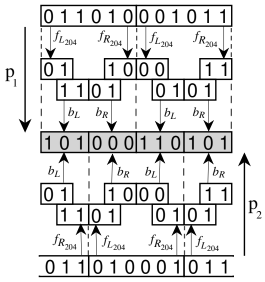


Figura 4.8: Funcionamiento de las permutaciones en bloque en el autómata $(2, 1)$ regla 204

Hagamos más claro este proceso, asignemos a cada posible configuración de tamaño $6r$ sus permutaciones correspondientes a π_1 y π_2, dado que en este autómata las reglas de evolución original e inversa son idénticas, las permutaciones π_1 y π_2 lo son también, por lo que basta enumerar sólo una de ellas.

Bloque		$\pi_1(\pi_2)$	*Bloque*		$\pi_1(\pi_2)$	*Bloque*		$\pi_1(\pi_2)$	*Bloque*		$\pi_1(\pi_2)$
000000	$\leftrightarrow$	111111	010000	$\leftrightarrow$	000111	100000	$\leftrightarrow$	010111	110000	$\leftrightarrow$	011111
000001	$\leftrightarrow$	111110	010001	$\leftrightarrow$	000110	100001	$\leftrightarrow$	010110	110001	$\leftrightarrow$	011110
000010	$\leftrightarrow$	111000	010010	$\leftrightarrow$	000000	100010	$\leftrightarrow$	010000	110010	$\leftrightarrow$	011000
000011	$\leftrightarrow$	111101	010011	$\leftrightarrow$	000101	100011	$\leftrightarrow$	010101	110011	$\leftrightarrow$	011101
000100	$\leftrightarrow$	111010	010100	$\leftrightarrow$	000010	100100	$\leftrightarrow$	010010	110100	$\leftrightarrow$	011010
000101	$\leftrightarrow$	111100	010101	$\leftrightarrow$	000100	100101	$\leftrightarrow$	010100	110101	$\leftrightarrow$	011100
000110	$\leftrightarrow$	111011	010110	$\leftrightarrow$	000011	100110	$\leftrightarrow$	010011	110110	$\leftrightarrow$	011011
000111	$\leftrightarrow$	111001	010111	$\leftrightarrow$	000001	100111	$\leftrightarrow$	010001	110111	$\leftrightarrow$	011001
001000	$\leftrightarrow$	110111	011000	$\leftrightarrow$	101111	101000	$\leftrightarrow$	100111	111000	$\leftrightarrow$	000111
001001	$\leftrightarrow$	110110	011001	$\leftrightarrow$	101110	101001	$\leftrightarrow$	100110	111001	$\leftrightarrow$	000110
001010	$\leftrightarrow$	110000	011010	$\leftrightarrow$	101000	101010	$\leftrightarrow$	100000	111010	$\leftrightarrow$	000000
001011	$\leftrightarrow$	110101	011011	$\leftrightarrow$	101101	101011	$\leftrightarrow$	100101	111011	$\leftrightarrow$	000101
001100	$\leftrightarrow$	110010	011100	$\leftrightarrow$	101010	101100	$\leftrightarrow$	100010	111100	$\leftrightarrow$	000010
001101	$\leftrightarrow$	110100	011101	$\leftrightarrow$	101100	101101	$\leftrightarrow$	100100	111101	$\leftrightarrow$	000100
001110	$\leftrightarrow$	110011	011110	$\leftrightarrow$	101011	101110	$\leftrightarrow$	100011	111110	$\leftrightarrow$	000011
001111	$\leftrightarrow$	110001	011111	$\leftrightarrow$	101001	101111	$\leftrightarrow$	100001	111111	$\leftrightarrow$	000001

Tabla 4.6: Permutaciones π_1 y π_2 para la regla 204

Tomemos una configuración inicial aleatoria, dividamos esta en bloques de tamaño 6 y permutemos cada bloque como lo indica π_1.

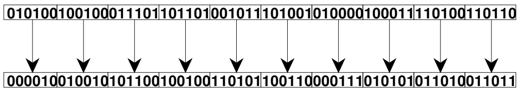


Figura 4.9: Aplicando p_1 a una configuración inicial aleatoria

Hemos obtenido una nueva configuración resultado de las permutaciones de cada bloque. Esta nueva configuración la dividimos también en bloques de tamaño 6 pero empezando ahora 3 posiciones más a la derecha de donde comenzamos a dividir la configuración inicial y a cada bloque resultante lo permutamos como indica p_2^{-1}.

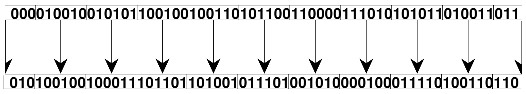


Figura 4.10: Aplicando p_2^{-1} después de p_1 con un corrimiento de 3 posiciones

Por último, observemos la configuración inicial y la configuración producida al aplicar las permutaciones en bloque p_1 y p_2^{-1}.

010100100100011101101101001011101001010000100011110100110110
010100100100011101101101001011101001010000100011110100110110

Figura 4.11: Evolución final producida por dos permutaciones en bloque

Como podemos verificar, esta construcción corresponde a la evolución de la configuración inicial bajo la regla 204; es decir, hemos podido representar dicha evolución por medio de corrimientos y permutaciones en bloque, siguiendo el proceso descrito por Kari.

4.3 Generalizando el Proceso

Usando los conceptos anteriores hemos podido representar la evolución de un autómata celular lineal reversible; sin embargo, la pregunta que se presenta es: ¿este proceso funciona para representar a todo tipo de sistemas de esta clase?. En esta sección trataremos de dar respuesta a dicha cuestión.

Una de las primeras preguntas que surgen es: ¿qué sucede cuando el tamaño de vecindad es par, o sea si el valor de r no es entero?. En el proceso de Kari, se definen las biyecciones $b_L : L_\phi \to K^{3r}$ y $b_R : R_\phi \to K^{3r}$, las cuales son fundamentales para definir la permutación en bloque.

Tomemos el siguiente ejemplo, un autómata reversible $(2, 1/2)$, es decir de 2 estados y $r = 1/2$, con la regla de evolución 12 el cual es un corrimiento a la derecha, y cuya regla inversa es la 10 un corrimiento a la izquierda.

Regla 12	0	1
0	0	0
1	1	1

Regla 10	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabla 4.7: Regla 12 y 10 del autómata $(2, 1/2)$

En este caso en que $r = 1/2$; el conjunto de K^{3r} estará formado por todas las posibles secuencias de longitud $3r = 3(1/2) = 3/2$, es decir, secuencias de célula y media de longitud, lo que trae consigo el problema de partir las células. Para solventar este problema, lo que se puede hacer es que en vez de tomar el valor de r para el cual ambas reglas son reversibles, utilizaremos el valor $\lceil r \rceil$, en donde $\lceil r \rceil$ es la función techo de r, el menor entero mayor o igual a r. Este paso es válido ya que con esto se tomará un valor que es mayor o igual al mínimo r para el cual el autómata es reversible y por lo tanto seguirá cumpliendo con serlo con la ventaja de que $3r$ ya tendrá siempre un valor entero.

En el ejemplo, aplicando $\lceil 1/2 \rceil = 1$, entonces llevemos al autómata reversible $(2, 1/2)$ a un autómata $(2, 1)$, agregando una célula más a cada vecindad y siguiendo con el comportamiento de corrimiento a la derecha para ϕ y de corrimiento a la izquierda para ϕ^{-1} que corresponden a las reglas 240 y 170 repectivamente.

Regla 240	00	01	10	11
00	0	0		
01			0	0
10	1	1		
11			1	1

Regla 170	00	01	10	11
00	0	1		
01			0	1
10	0	1		
11			0	1

Tabla 4.8: Regla 240 y 170 del autómata $(2, 1)$

Con este cambio, tenemos ahora que el tamaño de las secuencias de el conjunto $K^{3\lceil r \rceil}$ siempre será entero; pero, observemos las nuevas reglas generadas. La regla original tiene como característica que los valores de sus índice de Welch son $L = 1$ y $R = 4$, lo cual nos lleva a una segunda pregunta con respecto a la definición de Kari: ¿qué sucede si los índices de Welch son distintos entre sí ?.

Veamos una vez mas como definimos las permutaciones en bloque; cada permutación de un bloque de longitud $6r$ consiste en aplicar a los $3r$ elementos izquierdos la composición $(b_L \circ f_{L_\phi})$ y aplicar a los $3r$ elementos derechos la composición $(b_R \circ f_{R_\phi})$. Sabemos que tanto b_L como b_R mapean de manera biyectiva los elementos de los conjuntos L_ϕ y R_ϕ al mismo conjunto K^{3r}, es decir, ambos conjuntos L_ϕ y R_ϕ tienen la misma cardinalidad, ya que $|L_\phi| = Lk^{2r}$ y $|R_\phi| = Rk^{2r}$, esto indica que $L = R$, o que ambos índices de Welch son iguales.

Tomemos el caso en que esto no ocurra, tendremos que $|L_\phi| \neq |R_\phi|$, y las biyecciones b_L y b_R no podrán aplicarse, pongamos como ejemplo el autómata $(2, 1)$ anteriormente presentado, el valor de $|L_{240}| = Lk^{2r} = 4$ y $|R_{240}| = Rk^{2r} = 16$, sabemos también que $k^{3r} = 2^{3(1)} = 8$. Tenemos que el conjunto L_{240} tiene 4 elementos, el conjunto R_{240} tiene 16 elementos y el conjunto K^{3r} tiene 8 elementos; si deseáramos aplicar los mapeos b_L y b_R, en el primer caso tenemos que mapear de un conjunto de 4 elementos a uno de 8, es decir, nos sobran elementos a mapear en K^{3r}, lo cual no puede ser muy importante, pero en el segundo caso, debemos mapear 16 elementos de un conjunto a otro con sólo 8 elementos, aquí nos faltan elementos y por lo tanto las permutaciones no se pueden definir.

En la demostración de su teorema, Kari toma el valor del índice $h_- = 1$ como base para definir las biyecciones b_L y b_R. El que $h_- = 1$ indica que a la vez $h_+ = 1$ ya que $h_- * h_+ = 1$, recordando que $h_- = \frac{|L_\phi|}{k^{3r}}$ y $h_+ = \frac{|R_\phi|}{k^{3r}}$.

Entonces, podemos redefinir a los índices h_- y h_+, haciendo un uso explícito de los índices de Welch L y R, quedando entonces:

$$h_- = \frac{|L_\phi|}{Lk^{2r}} \qquad y \qquad h_+ = \frac{|R_\phi|}{Rk^{2r}} \tag{4.10}$$

Esta pequeña redefinición provoca que tanto h_- como h_+ siempre valgan 1 y por lo tanto, se puedan definir las biyecciones b_L y b_R, ahora bien, dichas biyecciones ya no serán hacia el conjunto K^{3r}, sino que quedarán definidas como sigue:

$$b_L : L_\phi \rightarrow \text{conjunto de secuencias de } K \text{ con cardinalidad } Lk^{2r} \tag{4.11}$$
$$b_R : R_\phi \rightarrow \text{conjunto de secuencias de } K \text{ con cardinalidad } Rk^{2r} \tag{4.12}$$

Debemos señalar con cuidado algo, la definición de b_L y b_R parece ser muy sencilla, sin embargo tienen mucha más relevancia de lo que uno podría suponer a primera vista, el que estas biyecciones vayan al conjunto K^{3r} indica, primero, que la longitud de cada secuencia en este conjunto es de $3r$, y en segunda, indica de que longitud debe ser el corrimiento a realizar entre la primera y la segunda permutación en bloque. Hemos visto que esto funciona muy bien en el caso en donde los índices de Welch L y R son iguales, pero cuando no lo son, b_L y b_R ya no pueden mapear al conjunto K^{3r}, sino deben mapear a otros conjuntos de secuencias de K cuyas cardinalidades deben ser Lk^{2r} y Rk^{2r} respectivamente para definir una biyección con L_ϕ y R_ϕ. En principio, la pregunta que planteamos es: ¿qué longitud deben tener entonces las secuencias en ambos conjuntos?.

Tomemos primero el caso izquierdo, para conocer esto debemos poner a la expresión Lk^{2r} en forma de un exponente de k, aplicando logaritmos

$$L = k^{\log_k L} \tag{4.13}$$

resultando

$$Lk^{2r} = k^{\log_k L} k^{2r} = k^{2r + \log_k L} \tag{4.14}$$

Procediendo de la misma forma para el lado derecho

$$Rk^{2r} = k^{2r+\log_k R} \tag{4.15}$$

De lo anterior se desprende que la longitud de las secuencias en L_ϕ y R_ϕ son:

$$2r + \log_k L \tag{4.16}$$
$$2r + \log_k R \tag{4.17}$$

respectivamente.

Además, el corrimiento debe tener una longitud de $2r + \log_k L$ entre la primera y la segunda permutación en bloque.

Retomando nuestro ejemplo del autómata $(2, 1)$, vemos que los índices de Welch son $L = 1$ y $R = 4$, con cardinalidades $|L_{240}| = 4$, $|R_{240}| = 16$. De las ecuaciones 4.16 y 4.17 tenemos

$$2r + \log_k L = 2(1) + \log_2 1 = 2 \text{ y } 2r + \log_k R = 2(1) + \log_2 4 = 4 \tag{4.18}$$

entonces

$$k^{2r+\log_k L} = 2^2 = 4 \text{ y } k^{2r+\log_k R} = 2^4 = 16 \tag{4.19}$$

Por consecuencia las biyecciones $b_L : L_{240} \to K^2$ y $b_R : R_{240} \to K^4$ están bien definidas al igual que las longitudes de las secuencias tanto para K^2 como para K^4, siendo 2 y 4 respectivamente. Por último, el corrimiento entre la primera y la segunda permutación en bloque debe ser de longitud 2.

Asignemos el mapeo $b_{L_{240}}$ de la siguiente manera:

$\begin{array}{ccc}0&0&\\&0&0\end{array} \to 01$	$\begin{array}{ccc}0&1&\\&0&1\end{array} \to 11$	$\begin{array}{ccc}1&0&\\&1&0\end{array} \to 10$	$\begin{array}{ccc}1&1&\\&1&1\end{array} \to 00$

Tabla 4.9: Mapeo $b_{L_{240}}$

Ahora asignemos el mapeo $b_{R_{240}}$.

$\begin{array}{ccc}&0&0\\0&0&\end{array} \to 1101$	$\begin{array}{ccc}&0&0\\0&1&\end{array} \to 0101$	$\begin{array}{ccc}&0&0\\1&0&\end{array} \to 0001$	$\begin{array}{ccc}&0&0\\1&1&\end{array} \to 0010$
$\begin{array}{ccc}&0&1\\0&0&\end{array} \to 1001$	$\begin{array}{ccc}&0&1\\0&1&\end{array} \to 0100$	$\begin{array}{ccc}&0&1\\1&0&\end{array} \to 1110$	$\begin{array}{ccc}&0&1\\1&1&\end{array} \to 0111$
$\begin{array}{ccc}&1&0\\0&0&\end{array} \to 0110$	$\begin{array}{ccc}&1&0\\0&1&\end{array} \to 0000$	$\begin{array}{ccc}&1&0\\1&0&\end{array} \to 1010$	$\begin{array}{ccc}&1&0\\1&1&\end{array} \to 1100$
$\begin{array}{ccc}&1&1\\0&0&\end{array} \to 0011$	$\begin{array}{ccc}&1&1\\0&1&\end{array} \to 1111$	$\begin{array}{ccc}&1&1\\1&0&\end{array} \to 1000$	$\begin{array}{ccc}&1&1\\1&1&\end{array} \to 1011$

Tabla 4.10: Mapeo $b_{R_{240}}$

Sabemos que $R_\phi = L_\phi^{-1}$ y que $L_\phi = R_\phi^{-1}$, es decir, podemos obtener a L_{170} y a R_{170} por medio de R_{240} y L_{240} respectivamente, esto se hace intercambiando la posición de los bloques en cada elemento de R_{240} y de L_{240}, por supuesto, se deben conservar los mismos mapeos b_L y b_R; basándonos en la biyección b_L en L_{240}, asignemos ésta misma al conjunto R_{170}.

$\begin{array}{ccc}&0&0\\0&0&\end{array} \to 01$	$\begin{array}{ccc}&0&1\\0&1&\end{array} \to 11$	$\begin{array}{ccc}&1&0\\1&0&\end{array} \to 10$	$\begin{array}{ccc}&1&1\\1&1&\end{array} \to 00$

Tabla 4.11: Mapeo $b_{R_{170}}$

Por último, asignemos b_R en R_{240} a L_{170}.

0 0 / 0 0 → 1101	0 1 / 0 0 → 0101	1 0 / 0 0 → 0001	1 1 / 0 0 → 0010
0 0 / 0 1 → 1001	0 1 / 0 1 → 0100	1 0 / 0 1 → 1110	1 1 / 0 1 → 0111
0 0 / 1 0 → 0110	0 1 / 1 0 → 0000	1 0 / 1 0 → 1010	1 1 / 1 0 → 1100
0 0 / 1 1 → 0011	0 1 / 1 1 → 1111	1 0 / 1 1 → 1000	1 1 / 1 1 → 1011

Tabla 4.12: Mapeo $b_{L_{170}}$

El proceso funcionará de la siguiente manera, tomemos una secuencia de estados y veamos como evoluciona bajo la regla 240.

1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0
0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1

Figura 4.12: Evolución de un autómata $(2, 1)$ regla 240

Observamos el típico comportamiento de un corrimiento a la derecha, ya tenemos una configuración inicial y conocemos su evolución, veamos si llegamos al mismo resultado utilizando la nueva definición de las biyecciones, apliquemos a la configuiración inicial la permutación en bloque p_1.

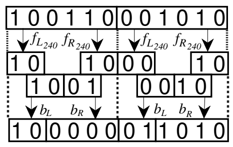


Figura 4.13: Permutación en bloque p_1 sobre la configuración inicial

Así hemos obtenido una nueva secuencia de estados, a continuación apliquemos a esta secuencia la permutación p_2^{-1} con un corrimiento de tamaño 2.

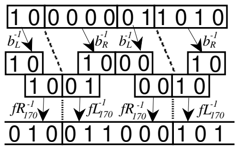


Figura 4.14: Permutación p_2^{-1} con un corrimiento de tamaño 2

En la Figura 4.14 se observa que al aplicar p_2^{-1} los bloques de tamaño 2 generan construcciones de longitud 3 ocurriendo lo mismo para los bloques de tamaño 4. Por consecuencia las biyecciones se tienen que realinear para conservar la simetría con las permutaciones en bloque de p_1.

Al final se ha obtenido una secuencia la cual concuerda con la evolución de la configuración inicial bajo la regla 240; entonces el resultado de este proceso ha sido poder representar la evolución de este autómata $(2, 1)$ como la composición de dos permutaciones en bloque $p_1 \circ p_2^{-1}$, pero redefiniendo $b_L : L_\phi \to K^{2r+\log_k L}$ y $b_R : R_\phi \to K^{2r+\log_k R}$ y con un corrimiento entre ambas permutaciones de tamaño $2r + \log_k L$.

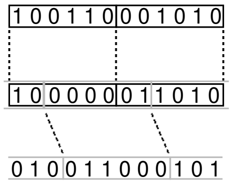


Figura 4.15: Funcionamiento de un autómata $(2, 1)$ regla 240 por medio de dos permutaciones en bloque

En la Figura 4.15 se observa de manera simplificada este proceso en donde las permutaciones p_1 aparece de color negro y las permutaciones p_2^{-1} en color gris.

Las redefiniciones hechas anteriormente han brindado al proceso de Kari una generalidad mayor, sin embargo, propongamos el siguiente escenario; tomemos un autómata celular lineal reversible $(6,1)$, en el cual se cumple que $k^{2r} = 6^2 = 36$; por lo tanto, valores factibles de los índices de Welch pueden ser $L = 4$ y $R = 9$, hemos dicho que la expresión $2r + \log_k L$ define tanto la longitud de las secuencias en que se van a mapear los elementos de L_ϕ bajo b_L así como el tamaño del corrimiento entre las permutaciones en bloque, retomando el ejemplo, si sustituimos k, r y L en la expresión obtenemos que el resultado es $2(1) + \log_6 4 = 2.7737056$.

El valor obtenido es correcto, el conjunto L_ϕ tendrá tantos elementos como $Lk^{2r} = 4 * 6^{2(1)} = 144$, si no exite ninguna equivocación esto debe ser igual a $k^{2r+\log_k L}$, sustituyamos los valores, encontramos que $6^{2.7737056} = 144$, sin embargo, no podemos representar secuencias de longitud 2.7737056 ni podemos hacer un corrimiento de ese tamaño en un espacio discreto donde el autómata celular se desenvuelve, entonces, aunque analíticamente no hay error, es imposible representar todos los autómatas celulares lineales reversibles con estas redefiniciones.

Se podría pensar en utilizar nuevamente $\lceil 2r + \log_k L \rceil$ para hacer entero este valor, sin embargo, en algunos casos tendríamos el problema de que las permutaciones serían de bloques de tamaño $6r$ a bloques de una longitud mayor, trayendo consigo problemas de realineación entre las permutaciones en bloque para representar correctamente la evolución del autómata.

Otra posible solución entonces sería llevar a todo autómata reversible a una forma en donde sus índices de Welch sean iguales, y el valor de r sea entero para poder utilizar el proceso descrito por Kari sin modificación alguna, esto podría hacerse tomando valores de r más grandes que el inicial de ser necesario, o haciendo productos cartesiano de la regla de evolución original con su reflexión para igualar los índices de Welch, por supuesto, esto trae los inconvenientes de manejar un mayor tamaño de vecindad y/o un mayor número de estados, pero es factible en teoría.

El problema que se ha visto con las redefiniciones es que, ni la longitud de las secuencias ni el corrimiento son siempre representables. Esto se debe por una parte a que las biyecciones b_L y b_R mapean L_ϕ y R_ϕ al conjunto K^{nl} y K^{nr} respectivamente, los cuales no siempre pueden formar secuencias de longitud exactamente igual a nl o nr según corresponda. Tampoco es posible aplicar siempre un corrimiento entre las permutaciones en bloque de tamaño nl. Si es así entonces surge la pregunta: ¿por qué no tomar otros conjuntos a donde mapear L_ϕ y R_ϕ?.

La importancia de este proceso radica en las diferencias de los ancestros que guardan L_ϕ y R_ϕ en un autómata reversible; es decir, contabilizan de alguna forma los índices de Welch, y las biyecciones b_L y b_R solo enumeran dichos conjuntos, pero hemos visto que hasta ahora la manera de enumerarlos no siempre es factible por medio de secuencias del conjunto K, entonces busquemos enumerarlos de alguna otra forma que siempre sea factible.

Definamos los siguientes conjuntos:

$$X = \{x_0, x_1, ..., x_{(Lk^{2r}-1)}\} \tag{4.20}$$
$$Y = \{y_0, y_1, ..., y_{(Rk^{2r}-1)}\} \tag{4.21}$$

claramente, $|L_\phi| = |X|$ y $|R_\phi| = |Y|$; tomemos nuevamente las definiciones de h_- y h_+ como:

$$h_- = \frac{|L_\phi|}{Lk^{2r}} \qquad y \qquad h_+ = \frac{|R_\phi|}{Rk^{2r}} \tag{4.22}$$

Volvamos al resultado de Kari y reescribamos su prueba.

Kari 2 *(Resultado (3.3)) Cada autómata celular lineal reversible en el kernel de h_- es una composición de dos permutaciones en bloque.*

Prueba: Considere a r tal que representa a las vecinades de ϕ y ϕ^{-1}. Debido a que $|L_\phi| = |X|$ y $|R_\phi| = |Y|$, las biyecciones

$$b_L : L_\phi \to X \tag{4.23}$$

$$y$$

$$b_R : R_\phi \to Y \tag{4.24}$$

existen, el mapeo puede ser cualquiera siempre y cuando cumpla con ser biyectivo.

Ahora bien, si consideramos

$$f_{L_\phi} : K^{6r} \to L_\phi$$
$$y$$
$$f_{R_\phi} : K^{6r} \to R_\phi$$

como ya han definido en la sección 4.2 y sean

$$f_{L_{\phi^{-1}}} : K^{6r} \to L_{\phi^{-1}} = R_\phi$$
$$y$$
$$f_{R_{\phi^{-1}}} : K^{6r} \to R_{\phi^{-1}} = L_\phi$$

las funciones correspondientes para la regla inversa ϕ^{-1}.

Tanto con las funciones para ϕ como para ϕ^{-1} nosotros podemos encontrar las permutaciones π_1 y π_2 de K^{6r} dados por:

$$\pi_1(c_0, ..., c_{6r-1}) = [(b_L \circ f_{L_\phi})(c_0, ..., c_{6r-1}), (b_R \circ f_{R_\phi})(c_0, ..., c_{6r-1})] \tag{4.25}$$

$$\pi_2(c_0, ..., c_{6r-1}) = [(b_R \circ f_{L_{\phi^{-1}}})(c_0, ..., c_{6r-1}), (b_L \circ f_{R_{\phi^{-1}}})(c_0, ..., c_{6r-1})] \tag{4.26}$$

Obteniendo una evolución de un autómata reversible.

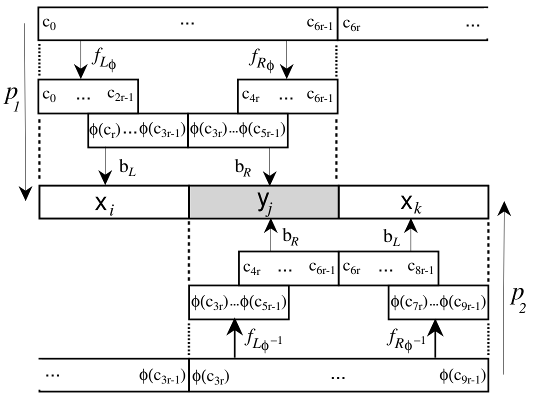


Figura 4.16: Evolución de un autómata reversible por medio de dos permutaciones en bloque y un corrimiento de tamaño 1

Cada elemento en X y y representa a una longitud $3r$.

P_1 resulta ser la permutación en bloque definida para un bloque de tamaño $6r$ en la primera configuración de estados, aplicándole a este bloque la permutación π_1. P_2 es la permutación en bloque definida para un bloque de tamaño $6r$ en la segunda configuración y haciendo un corrimiento de longitud 1 en la secuencia $\{x_i y_j ... x_m y_n\}$ correspondiente a un corrimiento de longitud $3r$ en la segunda configuración.

Entonces tenemos que $\phi = p_2^{-1} \circ p_1$.

4.4 Casos de Estudio

A continuación presentemos algunos casos de autómatas celulares lineales reversibles y como funcionan en estos las permutaciones en bloque para representar su evolución.

4.4.1 Autómata $(2, 1/2)$ Regla 12.

Tomemos nuevamente el caso de un auómata de 2 estados y un radio de vecindad $r = 1/2$, cuya regla original 12 es un corrimiento a la derecha y la regla inversa 10 es por supuesto, un corrimiento a la izquierda, sabiendo que los indices de Welch tiene valores $L = 1$ y $R = 2$ para la regla 12 y $L = 2$ y $R = 1$ para la regla 10.

Regla 12

	0	1
0	0	0
1	1	1

Regla 10

	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabla 4.13: Autómata $(2, 1/2)$ regla 12 y regla 10

Formemos las posibles secuencias de tamaño $4r$, es decir, de 2 estados y todos los ancestros de tamaño $6r$, o sea de 3 estados, de cada secuencia.

000	010	100	110
001	011	101	111
00	01	10	11

Tabla 4.14: Secuencias de tamaño 2 y sus ancestros

De las secuencias anteriores y sus ancestros, obtengamos los conjuntos L_{12} y R_{12}.

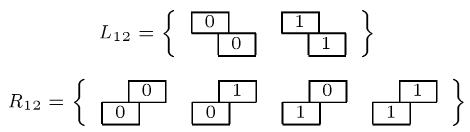


Tabla 4.15: Conjuntos L_{12} y R_{12}

En ambos casos se cumple que $|L_{12}| = Lk^{2r} = 2$ y $|R_{12}| = Rk^{2r} = 4$.

Tomemos ahora los conjuntos $X = \{x_0, x_1\}$ y $y = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$, y especifiquemos los siguientes mapeos b_L y b_R.

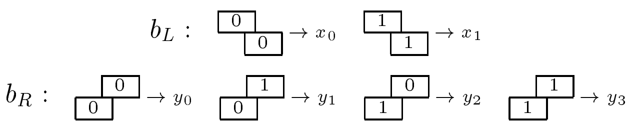


Tabla 4.16: Conjuntos $b_{L_{12}}$ y $b_{R_{12}}$

Como $L_{12} = R_{10}$ y $R_{12} = L_{10}$, con estos elementos podemos formar entonces las permutaciones π_1 y π_2.

Bloque		π_1
000	$\leftrightarrow$	x_0y_0
001	$\leftrightarrow$	x_0y_1
010	$\leftrightarrow$	x_0y_2
011	$\leftrightarrow$	x_0y_3
100	$\leftrightarrow$	x_1y_0
101	$\leftrightarrow$	x_1y_1
110	$\leftrightarrow$	x_1y_2
111	$\leftrightarrow$	x_1y_3

Bloque		π_2
000	$\leftrightarrow$	y_0x_0
001	$\leftrightarrow$	y_0x_1
010	$\leftrightarrow$	y_1x_0
011	$\leftrightarrow$	y_1x_1
100	$\leftrightarrow$	y_2x_0
101	$\leftrightarrow$	y_2x_1
110	$\leftrightarrow$	y_3x_0
111	$\leftrightarrow$	y_3x_1

Tabla 4.17: Permutaciones π_1 y π_2 para la regla 12

A partir de una configuración aleatoria inicial podemos ver una evolución típica de este autómata $(2, 1/2)$.

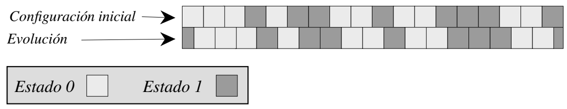


Figura 4.17: Evolución de un autómata $(2, h)$ regla 12

Tomemos la primera configuración y apliquemos la permutación p_1.

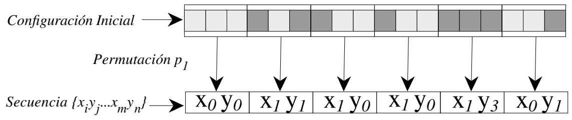


Figura 4.18: Permutación en bloque p_1 sobre la configuración inicial

Sobre esta nueva secuencia de la forma $(x_iy_j...x_my_n)$ usemos p_2^{-1}, es decir, hagamos un corrimiento de un elemento y apliquemos a cada pareja de la forma y_ix_j la permutación π_2.

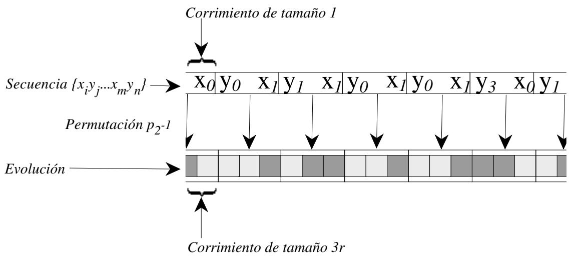


Figura 4.19: Permutación en bloque p_2^{-1} después de p_1 con un corrimiento igual a 1 equivalente a una longitud de $3r$

En este caso podemos concluir que la evolución obtenida anteriormente coincide con la construida haciendo dos permutaciones en bloque a la configuración inicial, es decir, el método funcionó como se esperaba en este ejemplo.

4.4.2 Autómata $(2,1)$ Regla 15.

Este es el caso de un auómata de 2 estados y un radio de vecindad $r = 1$, con la regla de evolución 15 y la regla inversa 85. Para la regla 15 los indices de Welch tiene valores $L = 1$ y $R = 4$, para la regla 85, $L = 4$ y $R = 1$ son los índices de Welch.

Regla 15

	00	01	10	11
00	1	1		
01			1	1
10	0	0		
11			0	0

Regla 85

	00	01	10	11
00	1	0		
01			1	0
10	1	0		
11			1	0

Tabla 4.18: Autómata $(2,1)$ regla 15 y regla 85

De manera análoga al primer ejemplo, se obtuvieron los conjuntos L_{15} y R_{15}.

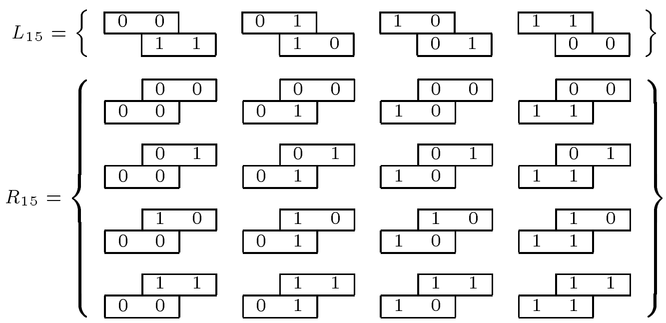


Tabla 4.19: $|L_{15}| = Lk^{2r} = 4$ y $|R_{15}| = Rk^{2r} = 16$

Cumpliéndose en ambos casos se cumple que

$$|L_{15}| = Lk^{2r} = 4$$
$$y$$
$$|R_{15}| = Rk^{2r} = 16$$

Tomemos ahora los conjuntos $X = \{x_0, ..., x_3\}$ y $y = \{y_0, ..., y_{15}\}$. Especificando los mapeos b_L y b_R, los podemos ver con detalle en la siguiente tabla.

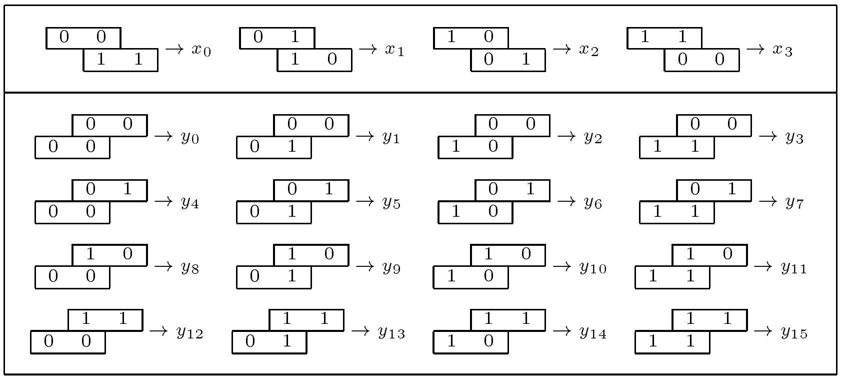


Tabla 4.20: Mapeos $b_{L_{15}}$ y $b_{R_{15}}$

Como $L_{15} = R_{85}$ y $R_{15} = L_{85}$, con estos elementos podemos formar entonces las permutaciones π_1 y π_2.

Bloque		π_1
000000	$\leftrightarrow$	x_0y_3
000001	$\leftrightarrow$	x_0y_7
000010	$\leftrightarrow$	x_0y_{11}
000011	$\leftrightarrow$	x_0y_{15}
000100	$\leftrightarrow$	x_0y_2
000101	$\leftrightarrow$	x_0y_6
000110	$\leftrightarrow$	x_0y_{10}
000111	$\leftrightarrow$	x_0y_{14}

Bloque		π_1
001000	$\leftrightarrow$	x_0y_1
001001	$\leftrightarrow$	x_0y_5
001010	$\leftrightarrow$	x_0y_9
001011	$\leftrightarrow$	x_0y_{13}
001100	$\leftrightarrow$	x_0y_0
001101	$\leftrightarrow$	x_0y_4
001110	$\leftrightarrow$	x_0y_8
001111	$\leftrightarrow$	x_0y_{12}

Bloque		π_1
010000	$\leftrightarrow$	x_1y_3
010001	$\leftrightarrow$	x_1y_7
010010	$\leftrightarrow$	x_1y_{11}
010011	$\leftrightarrow$	x_1y_{15}
010100	$\leftrightarrow$	x_1y_2
010101	$\leftrightarrow$	x_1y_6
010110	$\leftrightarrow$	x_1y_{10}
010111	$\leftrightarrow$	x_1y_{14}

Bloque		π_1
011000	$\leftrightarrow$	x_1y_1
011001	$\leftrightarrow$	x_1y_5
011010	$\leftrightarrow$	x_1y_9
011011	$\leftrightarrow$	x_1y_{13}
011100	$\leftrightarrow$	x_1y_0
011101	$\leftrightarrow$	x_1y_4
011110	$\leftrightarrow$	x_1y_8
011111	$\leftrightarrow$	x_1y_{12}

Bloque		π_1
100000	$\leftrightarrow$	x_2y_3
100001	$\leftrightarrow$	x_2y_7
100010	$\leftrightarrow$	x_2y_{11}
100011	$\leftrightarrow$	x_2y_{15}
100100	$\leftrightarrow$	x_2y_2
100101	$\leftrightarrow$	x_2y_6
100110	$\leftrightarrow$	x_2y_{10}
100111	$\leftrightarrow$	x_2y_{14}

Bloque		π_1
101000	$\leftrightarrow$	x_2y_1
101001	$\leftrightarrow$	x_2y_5
101010	$\leftrightarrow$	x_2y_9
101011	$\leftrightarrow$	x_2y_{13}
101100	$\leftrightarrow$	x_2y_0
101101	$\leftrightarrow$	x_2y_4
101110	$\leftrightarrow$	x_2y_8
101111	$\leftrightarrow$	x_2y_{12}

Bloque		π_1
110000	$\leftrightarrow$	x_3y_3
110001	$\leftrightarrow$	x_3y_7
110010	$\leftrightarrow$	x_3y_{11}
110011	$\leftrightarrow$	x_3y_{15}
110100	$\leftrightarrow$	x_3y_2
110101	$\leftrightarrow$	x_3y_6
110110	$\leftrightarrow$	x_3y_{10}
110111	$\leftrightarrow$	x_3y_{14}

Bloque		π_1
111000	$\leftrightarrow$	x_3y_1
111001	$\leftrightarrow$	x_3y_5
111010	$\leftrightarrow$	x_3y_9
111011	$\leftrightarrow$	x_3y_{13}
111100	$\leftrightarrow$	x_3y_0
111101	$\leftrightarrow$	x_3y_4
111110	$\leftrightarrow$	x_3y_8
111111	$\leftrightarrow$	x_3y_{12}

Bloque		π_2
000000	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_3$
000001	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_2$
000010	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_1$
000011	$\leftrightarrow$	$y_{12}x_0$
000100	$\leftrightarrow$	y_8x_3
000101	$\leftrightarrow$	y_8x_2
000110	$\leftrightarrow$	y_8x_1
000111	$\leftrightarrow$	y_8x_0

Bloque		π_2
001000	$\leftrightarrow$	y_4x_3
001001	$\leftrightarrow$	y_4x_2
001010	$\leftrightarrow$	y_4x_1
001011	$\leftrightarrow$	y_4x_0
001100	$\leftrightarrow$	y_0x_3
001101	$\leftrightarrow$	y_0x_2
001110	$\leftrightarrow$	y_0x_1
001111	$\leftrightarrow$	y_0x_0

Bloque		π_2
010000	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_3$
010001	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_2$
010010	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_1$
010011	$\leftrightarrow$	$y_{13}x_0$
010100	$\leftrightarrow$	y_9x_3
010101	$\leftrightarrow$	y_9x_2
010110	$\leftrightarrow$	y_9x_1
010111	$\leftrightarrow$	y_9x_0

Bloque		π_2
011000	$\leftrightarrow$	y_5x_3
011001	$\leftrightarrow$	y_5x_2
011010	$\leftrightarrow$	y_5x_1
011011	$\leftrightarrow$	y_5x_0
011100	$\leftrightarrow$	y_1x_3
011101	$\leftrightarrow$	y_1x_2
011110	$\leftrightarrow$	y_1x_1
011111	$\leftrightarrow$	y_1x_0

Bloque		π_2
100000	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_3$
100001	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_2$
100010	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_1$
100011	$\leftrightarrow$	$y_{14}x_0$
100100	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_3$
100101	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_2$
100110	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_1$
100111	$\leftrightarrow$	$y_{10}x_0$

Bloque		π_2
101000	$\leftrightarrow$	y_6x_3
101001	$\leftrightarrow$	y_6x_2
101010	$\leftrightarrow$	y_6x_1
101011	$\leftrightarrow$	y_6x_0
101100	$\leftrightarrow$	y_2x_3
101101	$\leftrightarrow$	y_2x_2
101110	$\leftrightarrow$	y_2x_1
101111	$\leftrightarrow$	y_2x_0

Bloque		π_2
110000	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_3$
110001	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_2$
110010	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_1$
110011	$\leftrightarrow$	$y_{15}x_0$
110100	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_3$
110101	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_2$
110110	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_1$
110111	$\leftrightarrow$	$y_{11}x_0$

Bloque		π_2
111000	$\leftrightarrow$	y_7x_3
111001	$\leftrightarrow$	y_7x_2
111010	$\leftrightarrow$	y_7x_1
111011	$\leftrightarrow$	y_7x_0
111100	$\leftrightarrow$	y_3x_3
111101	$\leftrightarrow$	y_3x_2
111110	$\leftrightarrow$	y_3x_1
111111	$\leftrightarrow$	y_3x_0

Tabla 4.21: Permutaciones π_1 y π_2 para la regla 15

A partir de una configuración aleatoria inicial, vamos a observar primero como evoluciona el autómata. Empezando desde el instante t_0 hasta llegar al instante t_3. Después tratemos de reproducir este resultado por medio de las permutaciones en bloque.

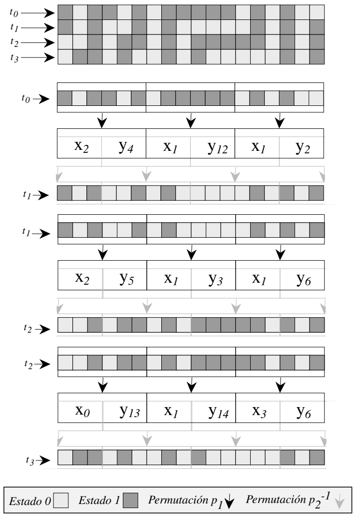


Figura 4.20: Evolución de un autómata $(2, 1)$ con regla 15, aplicando las permutaciones en bloque

Para este caso nuestra conclusión es que la evolución del autómata es idéntica a la construida aplicando las dos permutaciones en bloque a la configuración inicial.

4.4.3 Autómata $(4, 1/2)$ Regla $F5A0F5A0$.

Ahora nuestro caso de estudio es un auómata de: 4 estados, radio de vecindad $r = 1/2$, regla de evolución $F5A0F5A0$ y la regla inversa $EEEE4444$. Para este caso los índices de Welch tienen valores $L = 2$ y $R = 2$ tanto para la regla $F5A0F5A0$ como para la regla $EEEE4444$; que a continuación se muestran.

Regla F5A0F5A0

	0	1	2	3
0	0	0	2	2
1	1	1	3	3
2	0	0	2	2
3	1	1	3	3

Regla EEEE4444

	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
2	2	3	2	3
3	2	3	2	3

Tabla 4.22: Autómata $(4, 1/2)$, regla $F5A0F5A0$ y regla $EEEE4444$

Los conjuntos $L_{F5A0F5A0}$ y $R_{F5A0F5A0}$ se presentan a continuación y como se ha dicho anteriormente, se obtuvieron de la misma forma que en el primer ejemplo.

$$L_{F5A0F5A0} = \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{smallmatrix}\boxed{0}&\\&\boxed{0}\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\boxed{0}&\\&\boxed{2}\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\\&\boxed{1}\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\\&\boxed{3}\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\&\boxed{0}\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\&\boxed{2}\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\&\boxed{1}\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\&\boxed{3}\end{smallmatrix} \end{array} \right\}$$

$$R_{F5A0F5A0} = \left\{ \begin{array}{cccc} \begin{smallmatrix}&\boxed{0}\\\boxed{0}&\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}&\boxed{0}\\\boxed{1}&\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}&\boxed{1}\\\boxed{0}&\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}&\boxed{1}\\\boxed{1}&\end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix}&\boxed{2}\\\boxed{2}&\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}&\boxed{2}\\\boxed{3}&\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}&\boxed{3}\\\boxed{2}&\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}&\boxed{3}\\\boxed{3}&\end{smallmatrix} \end{array} \right\}$$

Tabla 4.23: Conjuntos $L_{F5A0F5A0}$ y $R_{F5A0F5A0}$

En ambos casos se cumple que $|L_{F5A0F5A0}| = Lk^{2r} = 8$ y $|R_{F5A0F5A0}| = Rk^{2r} = 8$. Tomemos los conjuntos $X = \{x_0, ..., x_7\}$ y $Y = \{y_0, ..., y_7\}$, y especifiquemos los siguientes mapeos b_L y b_R.

$$\begin{array}{cccc} \begin{smallmatrix}\boxed{0}&\\&\boxed{0}\end{smallmatrix} \to x_0 & \begin{smallmatrix}\boxed{0}&\\&\boxed{2}\end{smallmatrix} \to x_1 & \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\\&\boxed{1}\end{smallmatrix} \to x_2 & \begin{smallmatrix}\boxed{1}&\\&\boxed{3}\end{smallmatrix} \to x_3 \\ \begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\&\boxed{0}\end{smallmatrix} \to x_4 & \begin{smallmatrix}\boxed{2}&\\&\boxed{2}\end{smallmatrix} \to x_5 & \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\&\boxed{1}\end{smallmatrix} \to x_6 & \begin{smallmatrix}\boxed{3}&\\&\boxed{3}\end{smallmatrix} \to x_7 \\ \hline \begin{smallmatrix}&\boxed{0}\\\boxed{0}&\end{smallmatrix} \to y_0 & \begin{smallmatrix}&\boxed{0}\\\boxed{1}&\end{smallmatrix} \to y_1 & \begin{smallmatrix}&\boxed{1}\\\boxed{0}&\end{smallmatrix} \to y_2 & \begin{smallmatrix}&\boxed{1}\\\boxed{1}&\end{smallmatrix} \to y_3 \\ \begin{smallmatrix}&\boxed{2}\\\boxed{2}&\end{smallmatrix} \to y_4 & \begin{smallmatrix}&\boxed{2}\\\boxed{3}&\end{smallmatrix} \to y_5 & \begin{smallmatrix}&\boxed{3}\\\boxed{2}&\end{smallmatrix} \to y_6 & \begin{smallmatrix}&\boxed{3}\\\boxed{3}&\end{smallmatrix} \to y_7 \end{array}$$

Tabla 4.24: Mapeos $b_{L_{F5A0F5A0}}$ y $b_{R_{F5A0F5A0}}$

Obtengamos las permutaciones π_1 y π_2.

Bloque		π_1
000	$\leftrightarrow$	x_0y_0
001	$\leftrightarrow$	x_0y_2
002	$\leftrightarrow$	x_0y_4
003	$\leftrightarrow$	x_0y_6
010	$\leftrightarrow$	x_0y_1
011	$\leftrightarrow$	x_0y_3
012	$\leftrightarrow$	x_0y_5
013	$\leftrightarrow$	x_0y_7

Bloque		π_1
020	$\leftrightarrow$	x_1y_0
021	$\leftrightarrow$	x_1y_2
022	$\leftrightarrow$	x_1y_4
023	$\leftrightarrow$	x_1y_6
030	$\leftrightarrow$	x_1y_1
031	$\leftrightarrow$	x_1y_3
032	$\leftrightarrow$	x_1y_5
033	$\leftrightarrow$	x_1y_7

Bloque		π_1
100	$\leftrightarrow$	x_2y_0
101	$\leftrightarrow$	x_2y_2
102	$\leftrightarrow$	x_2y_4
103	$\leftrightarrow$	x_2y_6
110	$\leftrightarrow$	x_2y_1
111	$\leftrightarrow$	x_2y_3
112	$\leftrightarrow$	x_2y_5
113	$\leftrightarrow$	x_2y_7

Bloque		π_1
120	$\leftrightarrow$	x_3y_0
121	$\leftrightarrow$	x_3y_2
122	$\leftrightarrow$	x_3y_4
123	$\leftrightarrow$	x_3y_6
130	$\leftrightarrow$	x_3y_1
131	$\leftrightarrow$	x_3y_3
132	$\leftrightarrow$	x_3y_5
133	$\leftrightarrow$	x_3y_7

Bloque		π_1
200	$\leftrightarrow$	x_4y_0
201	$\leftrightarrow$	x_4y_2
202	$\leftrightarrow$	x_4y_4
203	$\leftrightarrow$	x_4y_6
210	$\leftrightarrow$	x_4y_1
211	$\leftrightarrow$	x_4y_3
212	$\leftrightarrow$	x_4y_5
213	$\leftrightarrow$	x_4y_7

Bloque		π_1
220	$\leftrightarrow$	x_5y_0
221	$\leftrightarrow$	x_5y_2
222	$\leftrightarrow$	x_5y_4
223	$\leftrightarrow$	x_5y_6
230	$\leftrightarrow$	x_5y_1
231	$\leftrightarrow$	x_5y_3
232	$\leftrightarrow$	x_5y_5
233	$\leftrightarrow$	x_5y_7

Bloque		π_1
300	$\leftrightarrow$	x_6y_0
301	$\leftrightarrow$	x_6y_2
302	$\leftrightarrow$	x_6y_4
303	$\leftrightarrow$	x_6y_6
310	$\leftrightarrow$	x_6y_1
311	$\leftrightarrow$	x_6y_3
312	$\leftrightarrow$	x_6y_5
313	$\leftrightarrow$	x_6y_7

Bloque		π_1
320	$\leftrightarrow$	x_7y_0
321	$\leftrightarrow$	x_7y_2
322	$\leftrightarrow$	x_7y_4
323	$\leftrightarrow$	x_7y_6
330	$\leftrightarrow$	x_7y_1
331	$\leftrightarrow$	x_7y_3
332	$\leftrightarrow$	x_7y_5
333	$\leftrightarrow$	x_7y_7

Bloque		π_2
000	$\leftrightarrow$	y_0x_0
001	$\leftrightarrow$	y_0x_2
002	$\leftrightarrow$	y_0x_1
003	$\leftrightarrow$	y_0x_3
010	$\leftrightarrow$	y_2x_0
011	$\leftrightarrow$	y_2x_2
012	$\leftrightarrow$	y_2x_1
013	$\leftrightarrow$	y_2x_3

Bloque		π_2
020	$\leftrightarrow$	y_0x_4
021	$\leftrightarrow$	y_0x_6
022	$\leftrightarrow$	y_0x_5
023	$\leftrightarrow$	y_0x_7
030	$\leftrightarrow$	y_2x_4
031	$\leftrightarrow$	y_2x_6
032	$\leftrightarrow$	y_2x_5
033	$\leftrightarrow$	y_2x_7

Bloque		π_2
100	$\leftrightarrow$	y_1x_0
101	$\leftrightarrow$	y_1x_2
102	$\leftrightarrow$	y_1x_1
103	$\leftrightarrow$	y_1x_3
110	$\leftrightarrow$	y_3x_0
111	$\leftrightarrow$	y_3x_2
112	$\leftrightarrow$	y_3x_1
113	$\leftrightarrow$	y_3x_3

Bloque		π_2
120	$\leftrightarrow$	y_1x_4
121	$\leftrightarrow$	y_1x_6
122	$\leftrightarrow$	y_1x_5
123	$\leftrightarrow$	y_1x_7
130	$\leftrightarrow$	y_3x_4
131	$\leftrightarrow$	y_3x_6
132	$\leftrightarrow$	y_3x_5
133	$\leftrightarrow$	y_3x_7

Bloque		π_2
200	$\leftrightarrow$	y_4x_0
201	$\leftrightarrow$	y_4x_2
202	$\leftrightarrow$	y_4x_1
203	$\leftrightarrow$	y_4x_3
210	$\leftrightarrow$	y_6x_0
211	$\leftrightarrow$	y_6x_2
212	$\leftrightarrow$	y_6x_1
213	$\leftrightarrow$	y_6x_3

Bloque		π_2
220	$\leftrightarrow$	y_4x_4
221	$\leftrightarrow$	y_4x_6
222	$\leftrightarrow$	y_4x_5
223	$\leftrightarrow$	y_4x_7
230	$\leftrightarrow$	y_6x_4
231	$\leftrightarrow$	y_6x_6
232	$\leftrightarrow$	y_6x_5
233	$\leftrightarrow$	y_6x_7

Bloque		π_2
300	$\leftrightarrow$	y_5x_0
301	$\leftrightarrow$	y_5x_2
302	$\leftrightarrow$	y_5x_1
303	$\leftrightarrow$	y_5x_3
310	$\leftrightarrow$	y_7x_0
311	$\leftrightarrow$	y_7x_2
312	$\leftrightarrow$	y_7x_1
313	$\leftrightarrow$	y_7x_3

Bloque		π_2
320	$\leftrightarrow$	y_5x_4
321	$\leftrightarrow$	y_5x_6
322	$\leftrightarrow$	y_5x_5
323	$\leftrightarrow$	y_5x_7
330	$\leftrightarrow$	y_7x_4
331	$\leftrightarrow$	y_7x_6
332	$\leftrightarrow$	y_7x_5
333	$\leftrightarrow$	y_7x_7

Tabla 4.25: Permutaciones π_1 y π_2

Con una configuración aleatoria inicial, obtengamos 3 evoluciones de este autómata y tratemos de reproducir el mismo resultado aplicando las permutaciones en bloque.

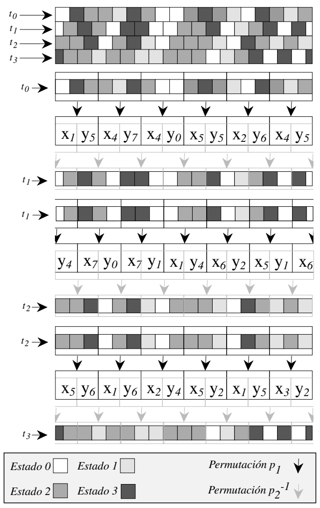


Figura 4.21: Autómata $(4, 1/2)$ con regla de evolución $F5A0F5A0$, aplicando las permutaciones en bloque

Como en el ejemplo anterior, se obtuvo la misma evolución por las dos formas; observemos que al aplicar las permutaciones del instante t_1 al instante t_2, la permutación p_1 se efectuó en las mismas posiciones en que lo había hecho la permutación p_2^{-1} del instante t_0 a t_1; esto se hizo para hacer más claro el diagrama pero no obedece a alguna condición necesaria, la permutación p_1 se puede empezar a aplicar en donde se quiera y el proceso funcionará igual siempre y cuando p_2^{-1} se empiece a aplicar con un corrimiento igual a uno con respecto a p_1, lo que es similar a un corrimiento de tamaño $3r$ entre configuraciones.

4.4.4 Autómata $(6, 1)$

Como se definió en la sección 4.3, un autómata reversible $(6, 1)$ tiene 36 nodos en su diagrama de de Bruijn, que es el total de secuencias distintas de tamaño 2 que se pueden hacer con 6 estados. En especial al autómata cuyos índices de Welch son $L = 4$ y $R = 9$, donde no era posible aplicar las permutaciones en bloque por medio de logaritmos, debido a que no obteníamos resultados discretos manejables. Veamos, ahora, si con la nueva redefinición hecha al proceso de Kari si podemos aplicar dichas permutaciones en bloque.

El autómata $(6, 1)$ a tomar será el resultado del producto cartesiano de un autómata $(2, 1)$ y un autómata $(3, 1)$. El primero usa la regla 170 la cual sabemos es un corrimiento a la izquierda y tiene índices de Welch $L = 4$ y $R = 1$. El segundo un autómata $(3, 1)$ usa la regla $QQQDDD000$ que es un corrimiento a la derecha con índices de Welch $L = 1$ y $R = 9$. Con estos dos autómatas obtenemos un autómata 6, 1 con regla *ZWEZWEZWEZWEZWEZWESP7SP7SP7SP7SP7SP7LI0LI0LI0LI0LI0 LI0ZWEZWEZWEZWEZWEZWESP7SP7SP7SP7SP7SP7LI0LI0LI0LI0LI0LI0*, la cual tiene índices de Welch $L = 4$ y $R = 9$.

	00	01	02	03	04	05	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40	41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55
00	0	0	0	3	3	3																														
01							0	0	0	3	3	3																								
02													0	0	0	3	3	3																		
03																			0	0	0	3	3	3												
04																									0	0	0	3	3	3						
05																															0	0	0	3	3	3
10	1	1	1	4	4	4																														
11							1	1	1	4	4	4																								
12													1	1	1	4	4	4																		
13																			1	1	1	4	4	4												
14																									1	1	1	4	4	4						
15																															1	1	1	4	4	4
20	2	2	2	5	5	5																														
21							2	2	2	5	5	5																								
22													2	2	2	5	5	5																		
23																			2	2	2	5	5	5												
24																									2	2	2	5	5	5						
25																															2	2	2	5	5	5
30	0	0	0	3	3	3																														
31							0	0	0	3	3	3																								
32													0	0	0	3	3	3																		
33																			0	0	0	3	3	3												
34																									0	0	0	3	3	3						
35																															0	0	0	3	3	3
40	1	1	1	4	4	4																														
41							1	1	1	4	4	4																								
42													1	1	1	4	4	4																		
43																			1	1	1	4	4	4												
44																									1	1	1	4	4	4						
45																															1	1	1	4	4	4
50	2	2	2	5	5	5																														
51							2	2	2	5	5	5																								
52													2	2	2	5	5	5																		
53																			2	2	2	5	5	5												
54																									2	2	2	5	5	5						
55																															2	2	2	5	5	5

Tabla 4.26: Autómata reversible $(6, 1)$ resultado del producto cartesiano de un autómata $(2, 1)$ regla 170 (corrimiento a la izquierda) y un autómata $(3, 1)$ regla $QQQDDD000$ (corrimiento a la derecha).

Como podemos observar en la Figura 4.22, el comportamiento de este autómata reversible $(6, 1)$ es de un corrimiento cruzado, conservando las características de la evolución de los autómatas $(2, 1)$ y $(3, 1)$ de los cuales se originó.

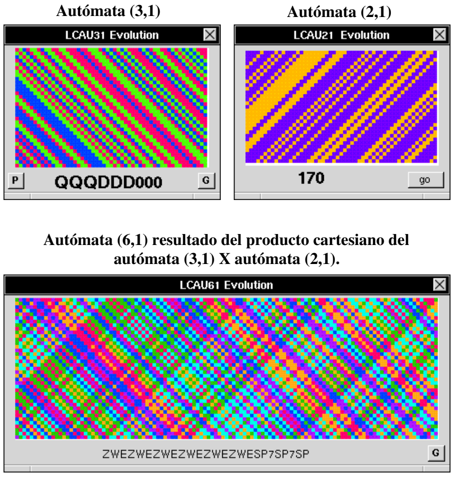


Figura 4.22: Autómata reversible $(6, 1)$ resultado del producto cartesiano de un autómata $(2, 1)$ y un autómata $(3, 1)$

Debido a que el autómata tiene 36 nodos en su diagrama de de Bruijn, su diagrama de parejas y de subconjuntos resultan demasiado extensos para graficar; sin embargo, podemos ver el valor de sus índices por medio de el producto de sus matrices de conectividad. Como un ejemplo, tomemos las matrices de conectividad de cada estado y formemos la matriz correspondiente a la cadena 222, que se obtendrá elevando ala tercera potencia la matriz de conectividad del estado 2.

	00	01	02	03	04	05	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40	41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55
00																																				
01																																				
02																																				
03																																				
04																																				
05																																				
10																																				
11																																				
12																																				
13																																				
14																																				
15																																				
20																																				
21																																				
22	1	1	1				1	1	1				1	1	1																					
23																																				
24																																				
25	1	1	1				1	1	1				1	1	1																					
30																																				
31																																				
32																																				
33																																				
34																																				
35																																				
40																																				
41																																				
42																																				
43																																				
44																																				
45																																				
50																																				
51																																				
52	1	1	1				1	1	1				1	1	1																					
53																																				
54																																				
55	1	1	1				1	1	1				1	1	1																					

Tabla 4.27: Matriz de conectividad de la cadena 222 del autómata $(6, 1)$.

Podemos ver que la matriz anterior nos dicen que la cadena 222 tiene un total de 36 ancestros, que es la suma de todos los elementos en la matriz, además se puede observar que estos ancestros tienen 4 formas distintas de generarse a la izquierda y 9 formas distintas a la derecha ($L = 4$ y $R = 9$); cumpliendo con lo que se esperaba de sus índices de Welch. Esto ocurre para todas las demás cadenas de longitud 3 en adelante.

	00	01	02	03	04	05	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40	41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55
00																																				
01																																				
02																																				
03																																				
04																																				
05																																				
10				1	1	1				1	1	1				1	1	1																		
11																																				
12																																				
13				1	1	1				1	1	1				1	1	1																		
14																																				
15																																				
20																																				
21																																				
22																																				
23																																				
24																																				
25																																				
30																																				
31																																				
32																																				
33																																				
34																																				
35																																				
40				1	1	1				1	1	1				1	1	1																		
41																																				
42																																				
43				1	1	1				1	1	1				1	1	1																		
44																																				
45																																				
50																																				
51																																				
52																																				
53																																				
54																																				
55																																				

	00	01	02	03	04	05	10	11	12	13	14	15	20	21	22	23	24	25	30	31	32	33	34	35	40	41	42	43	44	45	50	51	52	53	54	55
00																																				
01																						1	1	1				1	1	1				1	1	1
02																																				
03																																				
04																						1	1	1				1	1	1				1	1	1
05																																				
10																																				
11																																				
12																																				
13																																				
14																																				
15																																				
20																																				
21																																				
22																																				
23																																				
24																																				
25																																				
30																																				
31																						1	1	1				1	1	1				1	1	1
32																																				
33																																				
34																						1	1	1				1	1	1				1	1	1
35																																				
40																																				
41																																				
42																																				
43																																				
44																																				
45																																				
50																																				
51																																				
52																																				
53																																				
54																																				
55																																				

Tabla 4.28: Matrices de conectividad de las cadenas 105 y 043 respectivamente del autómata $(6, 1)$.

Dado que en este autómata existen tantas secuencias de tamaño $6r$ como 6^6, resulta muy extenso enumerar todas las permutaciones de estas cadenas como se ha venido haciendo con los ejemplos anteriores, sin embargo, se enumeraran unas cuentas para ejemplificar el proceso.

Generemos una secuencia inicial de 12 células y hagamos tres evouciones de las mismas.

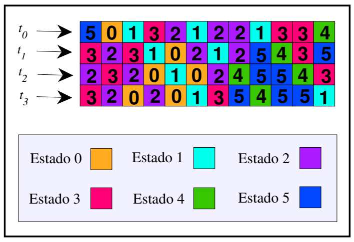


Figura 4.23: Evolución del autómata $(6, 1)$

Tomemos las secuencias que aparecen en la evolución, utilizando el proceso descrito en la sección 4.3 formemos las permutaciones π_1 y π_2 para estas cadenas, como se hizo con los ejemplos anteriores.

Bloque		π_1
501321	$\leftrightarrow$	$x_0 y_0$
221334	$\leftrightarrow$	$x_1 y_1$
102125	$\leftrightarrow$	$x_2 y_2$
435323	$\leftrightarrow$	$x_3 y_3$
245543	$\leftrightarrow$	$x_4 y_4$
232010	$\leftrightarrow$	$x_5 y_5$

Bloque		π_2
102125	$\leftrightarrow$	$y_0 x_1$
435323	$\leftrightarrow$	$y_1 x_0$
245543	$\leftrightarrow$	$y_2 x_3$
232010	$\leftrightarrow$	$y_3 x_2$
551320	$\leftrightarrow$	$y_4 x_5$
201354	$\leftrightarrow$	$y_5 x_4$

Tabla 4.29: Permutaciones π_1 y π_2 para algunos bloques del autómata $(6, 1)$

Con estas permutaciones, tratemos de reproducir la evolución del autómata empezando desde la misma secuencia inicial.

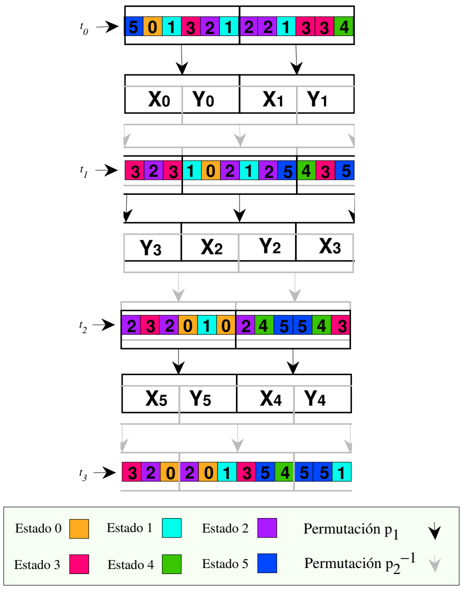


Figura 4.24: Evolución del autómata $(6, 1)$

El proceso funciona de la manera esperada; con estos ejemplos hemos podido visualizar que el ajuste hecho al método de Kari nos brinda una manera de representar la evolución de un autómata reversible por medio de dos permutaciones en bloque y un corrimiento, sin importar el valor que tengan los índices de Welch ni que su tamaño de vecindad sea par o impar.

4.5 Observaciones Finales

La idea de Kari de representar un autómata celular lineal por medio de permutaciones en bloque explica de manera sencilla la conservación de información en la dinámica del sistema y como esta información es utilizada para regresar hacia atrás en la evolución del autómata. Sin embargo, el proceso por el cual Kari demuestra este concepto no es aplicable para todo tipo de autómata celular lineal reversible; de hecho, solo funciona con aquellos autómatas donde sus índices de Welch sean idénticos.

La generalización que hemos presentado de este procedimiento aprovecha que los conjuntos L_ϕ y R_ϕ son los que guardan las diferencias de los ancestros; en otras palabras, la información del sistema y los mapeos b_L y b_R son solo una forma de renombrar los elementos de dichos conjuntos. Nosostros simplemente hicimos estos mapeos mas flexibles, permitiendo con esto que todo tipo de autómata celular lineal reversible pueda ser representado.

Capítulo 5

Formas Válidas de las Permutaciones en Bloque

5.1 Resumen

Hemos visto que para un autómata reversible en donde ϕ y ϕ^{-1} tengan el mismo valor de r, el comportamiento se puede representar por medio de dos permutaciones en bloque y un corrimiento, y hemos generalizado este proceso para cualquier valor de los índices de Welch utilizando los conjuntos X y Y. Una pregunta inmediata que podemos formular es ¿de qué forma deben ser estas permutaciones de tal forma que cumplan con el proceso descrito?.

5.2 Autómatas Celulares Lineales con r=1/2

Antes de continuar con el análisis de autómatas reversibles, revisaremos, en especial, a los autómatas con radio de vecindad $r = 1/2$. La finalidad es poder representar a todo autómata celular lineal de cualquier radio de vecindad como se muestra en los trabajos de Jarkko Kari [Kari 92] y de Tim Boykett [Boykett 97].

Supongamos que tenemos un autómata celular (k, r) cuyo tamaño de vecindad es $2r + 1$, para reducir este tamaño a 2, aumentaremos el número de estados, de este modo, un autómata $(k^{2r}, 1/2)$, se puede utilizar para representar a la misma evolución, es decir, tomaremos del autómata general todas las posibles secuencias de tamaño $2r$ o lo que es lo mismo, todos los posibles nodos de de Bruijn [McIntosh 91a].

Sabemos que originalmente, para todo estado $e \in K$, sobre una secuencia de estados $S \in K^{2r+1}$ la regla de evolución original tiene el siguiente comportamiento:

$$\phi(S_0, \ldots, S_{2r}) \to e \tag{5.1}$$

Esta regla se aplica a cada célula en la configuración, ahora, para dicha configuración agrupemos sus celulas en secuencias de tamaño $2r$, obtendremos tantas secuencias distintas como k^{2r} que serán nuestros nuevos estados, para cada par de estos nuevos elementos, la nueva regla de evolución funcionará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi'((S_0, \ldots, S_{2r-1}), (S_{2r}, \ldots, S_{4r-1})) \quad = \quad & (\phi(S_0, \ldots, S_{2r}), \phi(S_1, \ldots, S_{2r+1}) \\ & \ldots \phi(S_{2r-1}, \ldots, S_{4r-1})) \end{aligned} \tag{5.2}$$

La nueva regla será el producto de aplicar repetidamente la regla original sobre dos secuencias de nuevos estados. Como producto de aplicar la regla original obtendremos una nueva secuencia de $2r$ elementos, es decir, un nodo de de Bruijn o una secuencia dentro del conjunto de nuevos estados.

Veamos como funciona esto en un autómata $(2,1)$ con regla 111.

	00	01	10	11
00	1	1		
01			1	1
10	0	1		
11			1	0

Tabla 5.1: Autómata $(2,1)$ regla 111

Aplicando la regla de evolución al autómata a partir de la confiuración inicial se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Configuración Inicial} &\rightarrow 001011101101 \\ \text{Evolución} &\rightarrow 011110111111 \end{aligned}$$

Tomemos ahora todas las posibles secuencias de tamaño $2r$ y renombremos estas para obtener un nuevo conjunto de estados.

Secuencia		Estado nuevo
00	$\rightarrow$	0
01	$\rightarrow$	1
10	$\rightarrow$	2
11	$\rightarrow$	3

Tabla 5.2: Renombrando las secuencias de tamaño 2 con nuevos estados

De las cadenas de 2 elementos, obtengamos su evolución al aplicar la regla original.

0000 11	0001 11	0010 11	0011 11	0100 10	0101 11	0110 11	0111 10
1000 01	1001 01	1010 11	1011 11	1100 10	1101 11	1110 01	1111 00

Tabla 5.3: Secuencias de tamaño 4 y su evolución

Si agrupamos en bloques de tamaño $2r$ cada una de estas secuencias, lo que producirá es:

00 00 11	00 01 11	00 10 11	00 11 11	01 00 10	01 01 11	01 10 11	01 11 10
10 00 01	10 01 01	10 10 11	10 11 11	11 00 10	11 01 11	11 10 01	11 11 00

Tabla 5.4: Agrupación de las secuencias en bloque de tamaño 2

Si sustituimos cada bloque por el estado nuevo asignado anteriormente obtendremos:

0 0 3	0 1 3	0 2 3	0 3 3	1 0 2	1 1 3	1 2 3	1 3 2
2 0 1	2 1 1	2 2 3	2 3 3	3 0 2	3 1 3	3 2 1	3 3 0

Tabla 5.5: Sustitución de los bloques de tamaño 2 por los nuevos estados

La nueva regla $(4, 1/2)$ que simula la evolución del autómata original es:

	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	2	3	3	2
2	1	1	3	3
3	2	3	1	0

Tabla 5.6: Autómata $(4, 1/2)$ que simula el comportamiento del autómata $(2, 1)$

Con la configuracion inicial que utilizamos al principio, hagamos con sus elementos secuencias de tamaño $k^{2r} = 2^{(2*1/2)} = 2$, cada una de estas secuencias se sustituirá por los estados nuevos cada secuencia. Después de aplicar la regla $(4, 1/2)$ a esta nueva secuencia de símbolos, se regresa cada estado a la secuencia original de tamaño 2.

C.I.	$\rightarrow$	$\boxed{00}$ 0		$\boxed{10}$ 2		$\boxed{11}$ 3		$\boxed{10}$ 2		$\boxed{11}$ 3		$\boxed{01}$ 1	
Evolución	$\rightarrow$		3 $\boxed{11}$		3 $\boxed{11}$		1 $\boxed{01}$		3 $\boxed{11}$		3 $\boxed{11}$		2 $\boxed{10}$

Tabla 5.7: Secuencias de tamaño 2 que evolucionan con la regla $(4, 1/2)$

De esta manera, reordenando las secuencias de 2 elementos tenemos el funcionamiento original del autómata.

0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	
	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0

$\downarrow$

0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Tabla 5.8: Simulación del autómata $(2, 1)$ por medio de la regla $(4, 1/2)$

5.3 Propiedades Básicas de las Permutaciones

Analizaremos en detalle el caso en donde $r = 1/2$, ya que los demás casos se pueden llevar a éste como hemos visto en la sección 5.2. El proceso indica que debemos hacer permutaciones desde el conjunto K^{6r}, para el caso $r = 1/2$ el conjunto es K^3; para este mismo valor de r tenemos que $| L_\phi |= Lk^{2r} = Lk$ y que $| R_\phi |= Rk^{2r} = Rk$.

Primero, comprendamos el funcionamiento del autómata reversible con $r = 1/2$, basta una secuencia de 2 células para que en sus ancestros se fije una única célula central para poder regresar en la evolución. Esta única célula central tiene asociadas L células izquierdas y R células derechas, sin tomar en cuenta esta célula, la parte izquierda de esta construcción es parte de L_ϕ y la parte derecha es parte de R_ϕ.

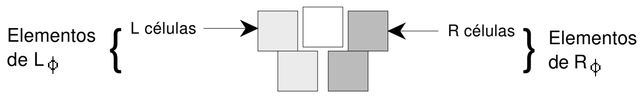


Figura 5.1: Estructura de un autómata reversible con $r = 1/2$

Por supuesto, en las células sucesoras toda combinación es posible, es decir, no puede faltar ninguna vecindad en la regla inversa ϕ^{-1}. De esta construcción podemos notar que cada célula sucesora tiene asociadas L células izquierdas ancestras y R células derechas ancestras.

Para cada elemento del conjunto L_ϕ, la parte sucesora esta relacionada con todas los posibles estados del autómata, lo que hace un total de k extensiones, y como cada una de estas células tiene R células ancestras derechas, cada elemento de L_ϕ tiene Rk posibles extensiones derechas, es decir, a todo el conjunto R_ϕ.

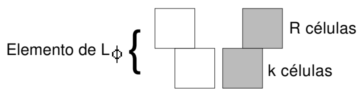


Figura 5.2: Estructura de un autómata reversible con $r = 1/2$

Esto nos lleva a las dos primeras propiedades que cumplen estas permutaciones:

Propiedad 1 *Sea* $(0 \leq i < Lk)$, *para cada* $x_i \in X$ *se tiene asociados a todos los elementos de* Y.

Como cada elemento de X tiene el mismo número de asociaciones, se mantiene una segunda propiedad.

Propiedad 2 *Sean* $(0 \leq i < Lk)$ *y* $(0 \leq j < Rk)$, *para cada* $x_i \in X$ *aparece el mismo número de veces que el resto de los elementos de* X*; tanto en el conjunto de secuencias de la forma* $(x_i y_j)$ *para* ϕ *como; para el conjunto de secuencias* $(y_j x_i)$ *para* ϕ^{-1}. *Lo anterior es análogo para cada* $y_j \in Y$.

Para las siguientes propiedades, tomemos la siguiente construcción (Figura 5.3) como referencia:

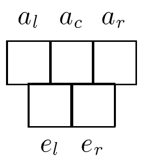


Figura 5.3: Tres células y su evolución

La construcción en la Figura 5.3 representa tres células ancestras, $(a_l a_c a_r)$ y al aplicar la regla su evolución $\phi(e_l e_r)$. Estas letras subindizadas deben ser entendidas como posiciones específicas de cada célula en la construcción y no deben confundirse con estados del conjunto K. Supongamos que en las células $(a_l a_c)$ se encuentran en dos elementos fijos del conjunto K, entonces, estas células especifican un único estado en e_l, en donde el bloque $(a_l e_l)$ es un elemento de L_ϕ; desprendiéndose de esto otra propiedad importante.

Propiedad 3 *Sean* $(0 \leq i < Lk)$ *y* $(0 \leq j < Rk)$. *Si las células* $(a_l a_c)$ *toman dos valores fijos de* K, *entonces a la secuencia completa* $(a_l a_c a_r)$ *le corresponde un único elemento* $x_i \in X$ *sin importar que valores tome la célula* a_r. *Del mismo modo, si la misma secuencia* $(a_l a_c a_r)$ *toma dos valores fijos de* K *en* $(a_c a_r)$, *le corresponde un único elemento* $y_j \in Y$ *sin importar que valores toma la célula* a_l.

En la posición a_c de la Figura 5.3 pueden estar todos los posibles estados de K, esto indica que cada estado debe tener L células a la izquierda para formar a un mismo estado y R células a la derecha para el mismo caso, lo que se generaliza para cada estado sin importar en que posición se encuentre en las células ancestras de la construcción utilizada. La observación anterior produce una propiedad mas:

Propiedad 4 *Para todo bloque* $(a_l e_l) \in L_\phi$ *deben existir* R *posibles estados en la posición* a_c *tal que con el estado en* a_l *formen el mismo estado en* e_l. *Similarmente para todo bloque* $(a_r e_r) \in R_\phi$ *deben existir* L *posibles estados en la posición* a_c *tal que con el estado en* a_r *formen el mismo estados en* e_r.

Usemos nuevamente la construcción en la Figura 5.3, sabemos que para generar un estado particular en e_l, la célula a_c tiene L posibilidades en a_l y para generar un estado específico en e_r, ocurre que a_c tiene R posibilidades. Tomando los L distintos bloques $(a_l e_l)$ que solo varían en la posición a_l cuando a_c ese mantiene fijo en un estado, tenemos que en todos estos bloques, las células en $(a_r e_r)$ se extienden de la misma forma, si ordenamos de manera descendente las secuencias $(a_l a_c a_r)$, variando el estado de a_r desde 0 a $k-1$, tenemos que los L distintos bloques $(a_l e_l)$ compartirán el mismo orden de aparición de las extensiones derechas en $(a_r e_r)$.

En este caso, sabemos que a_c tiene R extensiones para generar un estado en particular en e_r, dado que el total de extensiones posibles de a_c es k, entonces el total de estados que puede tomar e_r es $k/R = L$, entonces, si a_c permanece en un estado fijo, los L bloques en $(a_l e_l)$ comparten el mismo orden en las extensiones a la derecha en $(a_r e_r)$, donde e_r toma L posibles valores y para cada uno, a_r tiene R posibilidades, entonces, los L elementos de L_ϕ comparten las mismas LR extensiones derechas en el mismo orden para a_c fija.

Por la propiedad 4, R estados en a_c son posibles de colocar junto a los L bloques $(a_l e_l)$ para formar el mismo elemento en e_l, y si para cada estado en a_c existen LR extensiones derechas compartidas, tenemos un total de RLR extensiones derechas a los L bloques $(a_l e_l)$ compartiendo el mismo orden, pero como $RLR = Rk$, esto quiere decir que cada uno de los bloques $(a_l e_l)$ tiene Rk extensiones derechas compartidas con los demás bloques, en otras palabras, cada uno estos L elementos de L_ϕ está conectado con todos los elementos de R_ϕ, lo que nos lleva ha otra propiedad:

Propiedad 5 *Para las células $(a_l a_c a_r)$, el conjunto X agrupa k particiones de L elementos cada una. En cada partición los elementos están concatenados en el mismo orden con todos los elementos de Y; considerando que las secuencias $(a_l a_c a_r)$ se ordenan de manera descendente variando primero los estados de a_r y después los de a_c.*

Por último, tenemos que para la construcción en la Figura 5.3, cada estado en la célula e_l tiene L estados posibles en la posición a_l, a este conjunto de L estados llamémoslo A_l; y cada estado en e_r tiene R estados posibles en la posición a_r, a este conjunto de R estados denominémoslo A_r; dado que el valor de $r = 1/2$ es el mismo para ϕ como para ϕ^{-1}, entonces la secuencia $(e_r e_l)$ forma una vecindad de ϕ^{-1}, la cual genera un único estado en a'_c.

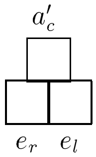


Figura 5.4: Vecindad inversa formada por $(e_r e_l)$

En la Figura 5.4; para un estado en e_r existe un conjunto A_r en donde cada elemento de éste puede estar en la célula a'_c y para un estado en e_l existe un conjunto A_l en donde cada elemento es un posible estado de a'_c, esto nos induce esta propiedad:

Propiedad 6 *Sea $i \in K$ un estado del autómata. Tomemos al conjunto L_ϕ dividido en k particiones de L elementos, en donde los elementos de cada partición sólo concuerdan en la posición e_l que puede tomar cualquier valor i, los L estados posibles en a_l forman el conjunto A_{l_i}. Similarmente dividamos al conjunto R_ϕ en k particiones de R elementos, en donde los elementos de cada partición sólo concuerdan en la posición e_r que puede tomar cualquier valor i, los R estados posibles en a_r forman el conjunto A_{r_i}; entonces:*

$$|A_{l_i} \cap A_{r_i}| = 1 \tag{5.3}$$

Hay que hacer notar que esta propiedad no es más que el resultado (*Nasu 2*) del capítulo 3.

5.3.1 Obteniendo la Regla Inversa ϕ^{-1} de las Permutaciones p_1

Hasta ahora hemos visto que propiedades deben cumplir las permutaciones p_1 en un autómata reversible, veamos entonces como se puede obtener la regla inversa ϕ^{-1} de una permutación p_1 dada. Usemos como referencia los bloques correspondientes tanto a L_ϕ como a R_ϕ descritos en la Figura 5.5.

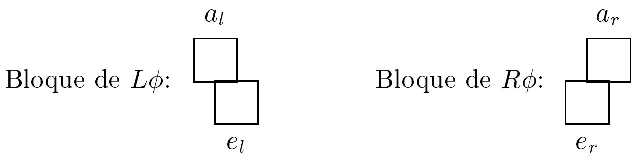


Figura 5.5: Bloques que forman los conjuntos L_ϕ y R_ϕ

Para la regla inversa ϕ^{-1} el papel de estas posiciones se intercambia. Es decir, en los bloques de L_ϕ, lo que era la parte izquierda del ancestro ahora es la evolución derecha y, lo que era la parte de la evolución izquierda, pasa a ser la parte derecha del ancestro. En los bloques de R_ϕ, lo que era la parte derecha del ancestro ahora actua como evolución izquierda y lo que era evolución derecha actuará como parte izquierda del ancestro.

L_ϕ	$\rightarrow$	R_ϕ^{-1}
a_l	$\rightarrow$	e'_r
e_l	$\rightarrow$	a'_r

R_ϕ	$\rightarrow$	L_ϕ^{-1}
a_r	$\rightarrow$	e'_l
e_r	$\rightarrow$	a'_l

Tabla 5.9: Papel que juegan las celulas de los bloques $(a_l e_l)$ y $(a_r e_r)$ para la regla original y la regla inversa

Entonces, podemos hacer particiones en el conjunto L_ϕ, en donde los elementos de cada partición coincidan en la posición a_l; y del mismo modo podemos particionar el conjunto R_ϕ en donde los elementos de cada partición coincidan en la posición a_r. En ambos casos tendremos k particiones pues en estas posiciones se encuentran todos los elementos de K. Sea $i \in K$ un estado del autómata, para cada partición i en L_ϕ se tendrán L elementos distintos en la posición e_l; que son al mismo tiempo elementos de la posición a'_r en R_ϕ^{-1}, sabiendo que el indice de Welch derecho de ϕ^{-1} es igual a L. De esta manera para cada partición i formemos el conjunto E_{l_i} con los elementos en e_l. De manera análoga, para cada partición i en R_ϕ se tendrán R elementos distintos en e_r que a su vez es a'_l, tomemos estos y formemos el conjunto E_{r_i} con los elementos en e_r.

Con estas particiones podemos entonces formar a ϕ^{-1}, para $i \in K$, en la regla inversa cada estado i tendrá R estados izquierdos ancestros especificados en E_{r_i} y L estados derechos ancestros especificados en E_{l_i}, entonces, la concatenación de todos los elementos del conjunto E_{r_i} con todos los elementos del conjunto E_{l_i} nos darán todas las vecindades ancestras del estado i.

5.3.2 Relación entre la Permutación p_1 y la Permutación p_2.

Como es de suponer existe una fuerte relación entre ambas permutaciones, ya que estan compuestas por los mismos conjuntos L_ϕ y R_ϕ, pero jugando un distinto rol en ambos casos, mientras que para ϕ los bloques se forman por la concatenación XY, en ϕ^{-1} la concatenación es YX; ademas, en el primer caso L_ϕ representa extremos izquierdos y en el segundo forman extremos derechos, cuestión que es análoga para R_ϕ.

Para $r = 1/2$, a cada bloque de $6r = 3$ células le corresponde dos permutaciones, dependiendo de su evolución; para $(0 \leq i < Lk$ y $(0 \leq j < Rk)$ con $|K| = k$, tenemos que p_1 se especifica como indica la construcción en la Figura 5.6.

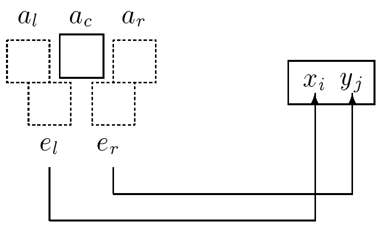


Figura 5.6: Permutación p_1 que se especifica con los bloques $(a_l e_l)$ y $(a_r e_r)$

En la Figura 5.6; se observa que $(a_l e_l) \in L_\phi$ y $(a_r, e_r) \in R_\phi$. Ahora, para la construcción de la Figura 5.7, p_2 funciona de la siguiente manera:

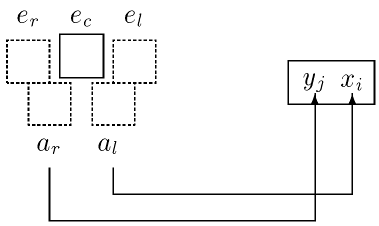


Figura 5.7: Permutación p_2 que se especifica con los bloques $(e_r a_r)$ y $(e_l a_l)$

Como indica la Figura 5.7; se cumple que $(e_r a_r) \in L_{\phi^{-1}} = R_\phi$ y $(e_l, a_l) \in R_{\phi^{-1}} = L_\phi$. De esta manera concluimos que las permutaciones p_1 y p_2 varían dependiendo del papel que jueguen (a_l, a_r, e_l, e_r), ya sea como parte de los ancestros o como evolución.

5.4 Casos de Estudio

Con las propiedades anteriores se desarrolló un paquete denominado **RLCAU** que hace la computación de autómatas celulares reversibles formando primero las permutaciones en bloque.

5.4.1 Caso $(4, 1/2)$, $L = 1$, $R = 4$

Para este caso se obtuvo el siguiente autómata.

Regla Original:$FFAA5500$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3

Regla Inversa:$E4E4E4E4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	0	1	2	3
2	0	1	2	3
3	0	1	2	3

Tabla 5.10: Autómata reversible $(4, 1/2)$ regla original $FFAA5500$ y regla inversa $E4E4E4E4$

Las permutaciones en bloque son las siguientes:

Cadena	p_1	p_2
000	x_0y_0	y_0x_0
001	x_0y_4	y_0x_1
002	x_0y_8	y_0x_2
003	x_0y_{12}	y_0x_3
010	x_0y_5	y_4x_0
011	x_0y_1	y_4x_1
012	x_0y_9	y_4x_2
013	x_0y_{13}	y_4x_3
020	x_0y_6	y_8x_0
021	x_0y_10	y_8x_1
022	x_0y_2	y_8x_2
023	x_0y_{14}	y_8x_3
030	x_0y_7	$y_{12}x_0$
031	x_0y_{11}	$y_{12}x_1$
032	x_0y_{15}	$y_{12}x_2$
033	x_0y_3	$y_{12}x_3$

Cadena	p_1	p_2
100	x_1y_0	y_5x_0
101	x_1y_4	y_5x_1
102	x_1y_8	y_5x_2
103	x_1y_{12}	y_5x_3
110	x_1y_5	y_1x_0
111	x_1y_1	y_1x_1
112	x_1y_9	y_1x_2
113	x_1y_{13}	y_1x_3
120	x_1y_6	y_9x_0
121	x_1y_{10}	y_9x_1
122	x_1y_2	y_9x_2
123	x_1y_{14}	y_9x_3
130	x_1y_7	$y_{13}x_0$
131	x_1y_{11}	$y_{13}x_1$
132	x_1y_{15}	$y_{13}x_2$
133	x_1y_3	$y_{13}x_3$

Cadena	p_1	p_2
200	x_2y_0	y_6x_0
201	x_2y_4	y_6x_1
202	x_2y_8	y_6x_2
203	x_2y_{12}	y_6x_3
210	x_2y_5	$y_{10}x_0$
211	x_2y_1	$y_{10}x_1$
212	x_2y_9	$y_{10}x_2$
213	x_2y_{13}	$y_{10}x_3$
220	x_2y_6	y_2x_0
221	x_2y_{10}	y_2x_1
222	x_2y_2	y_2x_2
223	x_2y_{14}	y_2x_3
230	x_2y_7	$y_{14}x_0$
231	x_2y_{11}	$y_{14}x_1$
232	x_2y_{15}	$y_{14}x_2$
233	x_2y_3	$y_{14}x_3$

Cadena	p_1	p_2
300	x_3y_0	y_7x_0
301	x_3y_4	y_7x_1
302	x_3y_8	y_7x_2
303	x_3y_{12}	y_7x_3
310	x_3y_5	$y_{11}x_0$
311	x_3y_1	$y_{11}x_1$
312	x_3y_9	$y_{11}x_2$
313	x_3y_{13}	$y_{11}x_3$
320	x_3y_6	$y_{15}x_0$
321	x_3y_{10}	$y_{15}x_1$
322	x_3y_2	$y_{15}x_2$
323	x_3y_{14}	$y_{15}x_3$
330	x_3y_7	y_3x_0
331	x_3y_{11}	y_3x_1
332	x_3y_{15}	y_3x_2
333	x_3y_3	y_3x_3

Tabla 5.11: Permutaciones p_1 y p_2 para el autómata $(4, 1/2)$

Para reducir la forma en que escribiremos estas permutaciones, observemos la Figura 5.3; en cada una de las posiciones (a_la_c) aparecerán los k posibles estados teniendo en total k^2 instancias distintas, cada instancia posible se repite k veces antes de pasar a la siguiente, y para las posiciones (a_ca_r), las k^2 instancias aparecen en forma continua y esta sucesión se repite k veces. Entonces, para las dos permutaciones apuntemos solo una vez la x_i correspondiente a cada instancia (a_la_c), y hagamos lo mismo para las y_i de cada instancia (a_ca_r).

$$Lista_{X_{p_1}} : \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$
$$Lista_{Y_{p_1}} : \{0, 4, 8, 12, 5, 1, 9, 13, 6, 10, 2, 14, 7, 11, 15, 3\}$$

$$Lista_{Y_{p_2}} : \{0, 4, 8, 12, 5, 1, 9, 13, 6, 10, 2, 14, 7, 11, 15, 3, \}$$
$$Lista_{X_{p_2}} : \{0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3\}$$

Tabla 5.12: Representación abreviada de las permuatciones p_1 y p_2 del autómata $(4, 1/2)$

Con esto, para obtener la permutación p_1 tenemos:

1. De la tabla original tomemos el primer elemento de la lista de X_{p_1} y repitámoslo k veces.
2. Repitamos el paso anterior para el resto de la lista.
3. De nuevo desde el inicio de la tabla, pongamos la lista de Y_{p_1} completa.
4. Repitamos el paso anterior $k - 1$ veces.

Para obtener la permutación p_2 se hace el proceso análogo utilizando primero Y_{p_2} y depués X_{p_2}.

Los diagramas de Welch de este autómata son:

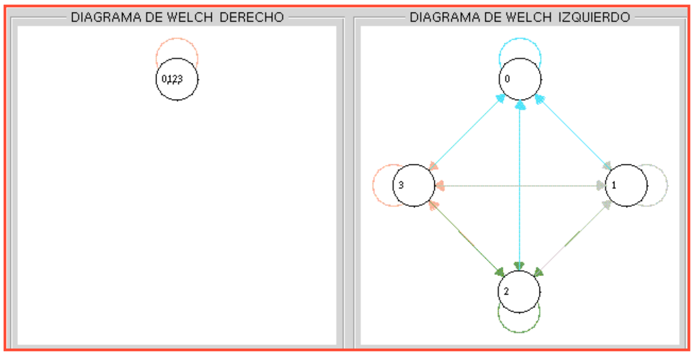


Figura 5.8: Diagramas de Welch del autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $FFAA5500$

El nodo del diagrama derecho tiene tantos elementos como $R = 4$ y los nodos del diagrama izquierdo tienen tantos elementos como $L = 1$, además de que la intersección del nodo derecho con cada uno de los nodos izquierdos es con un solo elemento.

Tomemos una configuración aleatoria y veamos como evoluciona con la regla de evolución original y aplicando las permutaciones en bloque.

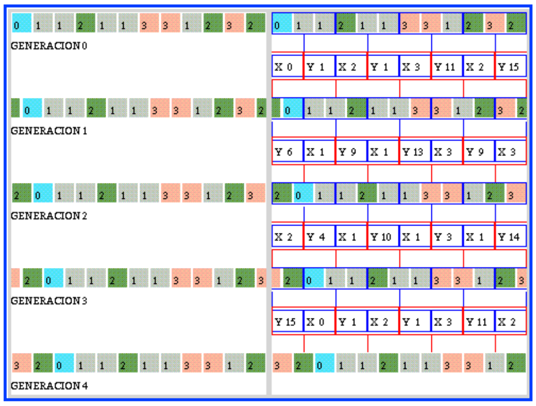


Figura 5.9: Evolución del autómata celular reversible $(4, 1/2)$ regla $FFAA5500$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2

Tal como se esperaba, hemos obtenido la misma evolución.

5.4.2 Caso $(4, 1/2)$, $L = 2$, $R = 2$

Para este caso tenemos los siguientes ejemplos:

Regla Original:$5F0A5F0A$	0	1	2	3
0	2	2	0	0
1	3	3	1	1
2	2	2	0	0
3	3	3	1	1

Regla Inversa:$4444EEEE$	0	1	2	3
0	2	3	2	3
1	2	3	2	3
2	0	1	0	1
3	0	1	0	1

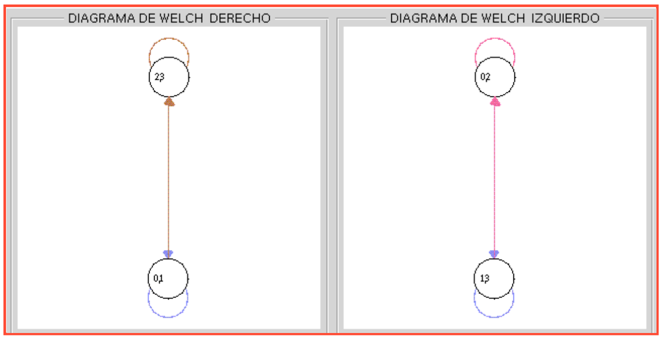
Tabla 5.13: Autómata $(4, 1/2)$ regla original $5F0A5F0A$ y regla inversa $4444EEEE$

Las permutaciones son las siguientes:

$$
\begin{array}{l}
Lista_{X_{p1}} : \{2, 2, 4, 4, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 0, 0, 7, 7, 1, 1\} \\
Lista_{Y_{p1}} : \{2, 6, 0, 4, 7, 3, 5, 1, 2, 6, 0, 4, 7, 3, 5, 1\} \\
\\
Lista_{Y_{p2}} : \{0, 4, 0, 4, 5, 1, 5, 1, 2, 6, 2, 6, 7, 3, 7, 3\} \\
Lista_{X_{p2}} : \{0, 1, 6, 7, 0, 1, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3\}
\end{array}
$$

Tabla 5.14: Permutaciones p_1 y p_2 para el autómata $(4, 1/2)$

Los diagramas de Welch de este autómata son:



Propiedades:

$\lvert L_i \rvert$	$=$	2
$\lvert R_i \rvert$	$=$	2
$\lvert L_i \cap R_i \rvert$	$=$	1

Figura 5.10: Diagramas de Welch del autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $5F0A5F0A$

Tomando una configuración, veamos su evolución normal y por permutaciones en bloque.

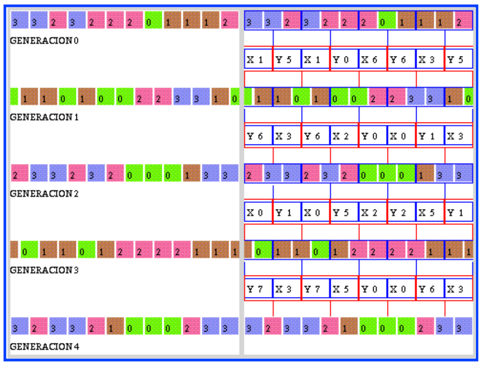


Figura 5.11: Evolución del autómata celular reversible $(4, 1/2)$ regla $5F0A5F0A$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2

5.4.3 Caso $(4, 1/2)$, $L = 2$, $R = 2$

Otro ejemplo de autómata celular lineal reversible $(4, 1/2)$ es:

Regla Original: $BB991133$	0	1	2	3
0	3	0	3	0
1	1	0	1	0
2	1	2	1	2
3	3	2	3	2

Regla Inversa: $28F528F5$	0	1	2	3
0	1	1	3	3
1	0	2	2	0
2	1	1	3	3
3	0	2	2	0

Tabla 5.15: Autómata $(4, 1/2)$ regla original $BB991133$ y regla inversa $28F528F5$

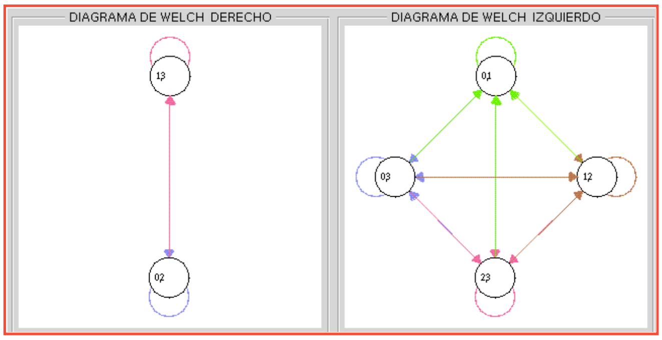
Las permutaciones son las siguientes:

$$Lista_{X_{p1}} : \{3, 4, 3, 4, 5, 0, 5, 0, 1, 6, 1, 6, 7, 2, 7, 2\}$$
$$Lista_{Y_{p1}} : \{3, 0, 7, 4, 5, 0, 1, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 6, 7, 2\}$$

$$Lista_{Y_{p2}} : \{0, 0, 4, 4, 5, 1, 1, 5, 6, 6, 2, 2, 3, 7, 7, 3\}$$
$$Lista_{X_{p2}} : \{0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3, 0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3\}$$

Tabla 5.16: Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(4, 1/2)$

Los diagramas de Welch de este autómata son:



Propiedades:

$\lvert L_i \rvert$	=	2
$\lvert R_i \rvert$	=	2
$\lvert L_i \cap R_i \rvert$	=	1

Figura 5.12: Diagramas de Welch del autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $BB991133$

Tomando una configuración, veamos su evolución normal y por permutaciones en bloque.

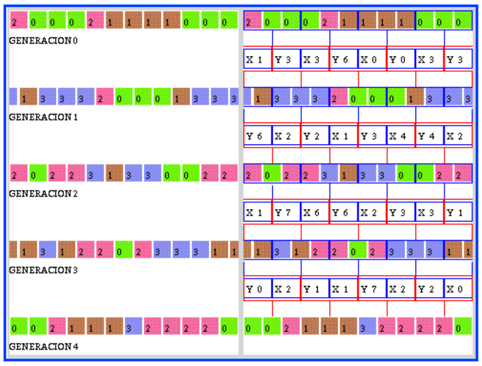


Figura 5.13: Evolución del autómata celular reversible $(4, 1/2)$ regla $BB991133$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2

5.4.4 Caso $(6, 1/2)$, $L = 2$, $R = 3$

Para este caso tenemos los siguientes ejemplos:

Regla Original:$0CESMLSYZ7VZ7DE0IL$	0	1	2	3	4	5
0	3	3	0	3	0	0
1	2	2	1	2	1	1
2	5	5	1	5	1	1
3	5	5	4	5	4	4
4	3	3	4	3	4	4
5	2	2	0	2	0	0

Regla Inversa:$L16GTHL16L16GTHGTH$	0	1	2	3	4	5
0	5	2	5	4	4	2
1	5	2	5	4	4	2
2	0	1	1	0	3	3
3	0	1	1	0	3	3
4	5	2	5	4	4	2
5	0	1	1	0	3	3

Tabla 5.17: Autómata $(6, 1/2)$ regla original $0CESMLSYZ7VZ7DE0IL$ y regla inversa $L16GTHL16L16GTHGTH$

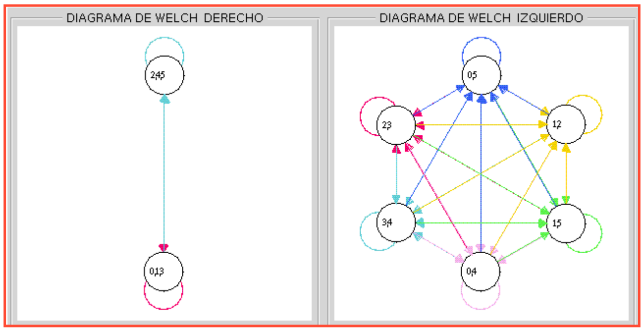
Las permutaciones son las siguientes:

$$Lista_{X_{p1}} : \{3, 3, 6, 3, 6, 6, 2, 2, 7, 2, 7, 7, 11, 11, 1, 11, 1, 1, 5, 5, 10, 5, 10, 10, 9, 9, 4, 9, 4, 4, 8, 8, 0, 8, 0, 0\}$$
$$Lista_{Y_{p1}} : \{3, 9, 6, 15, 12, 0, 8, 2, 1, 14, 7, 13, 11, 17, 1, 5, 7, 13, 11, 17, 10, 5, 4, 16, 3, 9, 10, 15, 4, 16, 8, 2, 6, 14, 12, 0\}$$

$$Lista_{Y_{p2}} : \{0, 6, 0, 12, 12, 6, 13, 1, 13, 7, 7, 1, 8, 2, 2, 8, 14, 14, 3, 9, 9, 3, 15, 15, 16, 10, 16, 4, 4, 10, 11, 17, 17, 11, 5, 5\}$$
$$Lista_{X_{p2}} : \{0, 1, 8, 9, 4, 11, 0, 1, 8, 9, 4, 11, 6, 7, 2, 3, 10, 5, 6, 7, 2, 3, 10, 5, 0, 1, 8, 9, 4, 11, 6, 7, 2, 3, 10, 5\}$$

Tabla 5.18: Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(6, 1/2)$

Los diagramas de Welch de este autómata son:



Propiedades:

$\lvert L_i \rvert$	=	2
$\lvert R_i \rvert$	=	3
$\lvert L_i \cap R_i \rvert$	=	1

Figura 5.14: Diagramas de Welch del autómata reversible $(6, 1/2)$ regla $0CESMLSYZ7VZ7DE0IL$

Tomando una configuración, veamos su evolución normal y por permutaciones en bloque.

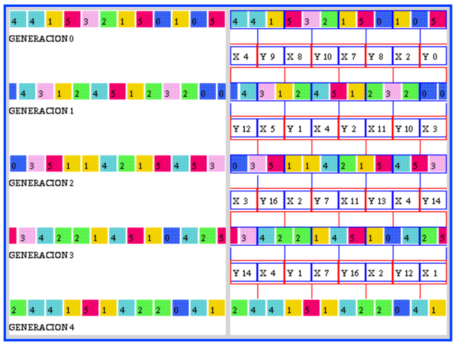


Figura 5.15: Evolución del autómata celular reversible $(6, 1/2)$ regla $0CESMLSYZ7VZ7DE0IL$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2

5.4.5 Caso $(6,1/2)$, $L=2$, $R=3$

Otro ejemplo de un autómata celular lineal reversible $(6,1/2)$ es:

Regla Original: $RRRPPPHHHHHH111333$	0	1	2	3	4	5
0	3	0	3	0	3	0
1	1	0	1	0	1	0
2	5	2	5	2	5	2
3	5	2	5	2	5	2
4	1	4	1	4	1	4
5	3	4	3	4	3	4

Regla Inversa: $G2ONX7G2ONX7G2ONX7$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	3	5	5	3
1	0	4	2	0	4	2
2	1	1	3	5	5	3
3	0	4	2	0	4	2
4	1	1	3	5	5	3
5	0	4	2	0	4	2

Tabla 5.19: Autómata $(6,1/2)$ regla original $RRRPPPHHHHHH111333$ y regla inversa $G2ONX7G2ONX7G2ONX7$

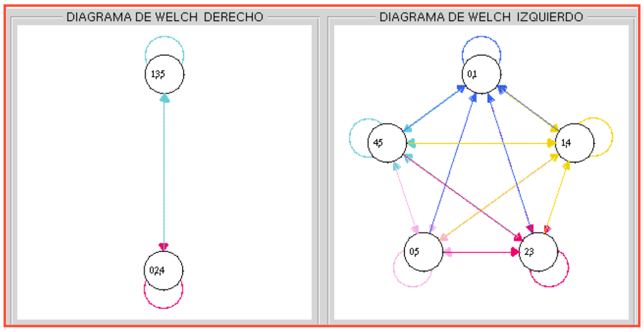
Las permutaciones son las siguientes:

$Lista_{X_{p1}}$: $\{3, 6, 3, 6, 3, 6, 7, 0, 7, 0, 7, 0, 5, 8, 5, 8, 5, 8, 11, 2, 11, 2, 11, 2, 1, 10, 1, 10, 1, 10, 9, 4, 9, 4, 9, 4\}$
$Lista_{Y_{p1}}$: $\{3, 0, 9, 6, 15, 12, 7, 0, 13, 6, 1, 12, 11, 8, 5, 2, 17, 14, 11, 8, 5, 2, 17, 14, 7, 10, 13, 16, 1, 4, 3, 10, 9, 16, 15, 4\}$

$Lista_{Y_{p2}}$: $\{0, 0, 6, 12, 12, 6, 7, 1, 13, 7, 1, 13, 8, 8, 2, 14, 14, 2, 13, 15, 9, 3, 15, 9, 10, 10, 16, 4, 4, 16, 11, 17, 5, 11, 17, 5\}$
$Lista_{X_{p2}}$: $\{0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5, 0, 7, 2, 9, 4, 11, 6, 1, 8, 3, 10, 5\}$

Tabla 5.20: Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(6,1/2)$

Los diagramas de Welch de este autómata son:



Propiedades:

$\lvert L_i \rvert$	$=$	2
$\lvert R_i \rvert$	$=$	3
$\lvert L_i \cap R_i \rvert$	$=$	1

Figura 5.16: Diagramas de Welch del autómata reversible $(6,1/2)$ regla $RRRPPPHHHHHH111333$

Tomando una configuración, veamos su evolución normal y por permutaciones en bloque.

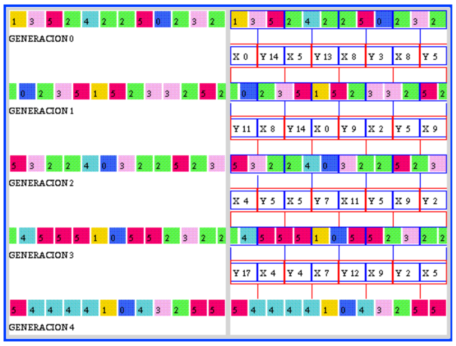


Figura 5.17: Evolución del autómata celular reversible $(6,1/2)$ regla $RRRPPPHHHHHH111333$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2

5.4.6 Caso $(12, 1/2)$, $L = 2$, $R = 6$

Regla Original

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	8	1	8	1	8	1	8	8	1	1	8	1
1	7	5	7	5	7	5	7	7	5	5	7	5
2	2	3	2	3	2	3	2	2	3	3	2	3
3	6	11	6	11	6	11	6	6	11	11	6	11
4	4	11	4	11	4	11	4	4	11	11	4	11
5	10	9	10	9	10	9	10	10	9	9	10	9
6	6	5	6	5	6	5	6	6	5	5	6	5
7	10	0	10	0	10	0	10	10	0	0	10	0
8	8	3	8	3	8	3	8	8	3	3	8	3
9	4	1	4	1	4	1	4	4	1	1	4	1
10	7	9	7	9	7	9	7	7	9	9	7	9
11	2	0	2	0	2	0	2	2	0	0	2	0

Regla Inversa

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	11	9	11	8	9	1	3	1	8	5	5	3
1	11	9	11	8	9	1	3	1	8	5	5	3
2	7	0	2	2	4	6	6	10	0	10	7	4
3	11	9	11	8	9	1	3	1	8	5	5	3
4	7	0	2	2	4	6	6	10	0	10	7	4
5	11	9	11	8	9	1	3	1	8	5	5	3
6	7	0	2	2	4	6	6	10	0	10	7	4
7	7	0	2	2	4	6	6	10	0	10	7	4
8	7	0	2	2	4	6	6	10	0	10	7	4
9	11	9	11	8	9	1	3	1	8	5	5	3
10	7	0	2	2	4	6	6	10	0	10	7	4
11	11	9	11	8	9	1	3	1	8	5	5	3

Tabla 5.21: Autómata reversible $(12, 1/2)$

Las permutaciones son las siguientes:

$$Lista_{X_{p_1}} : \quad \{ \quad \begin{array}{l} 8,13,8,13,8,13,8,8,13,13,8,13,19,5,19,5,19,5,19,19,5,5,19,5, \\ 2,15,2,15,2,15,2,2,15,15,2,15,18,11,18,11,18,11,18,18,11,11,18,11, \\ 4,23,4,23,4,23,4,4,23,23,4,23,22,9,22,9,22,9,22,22,9,9,22,9, \\ 6,17,6,17,6,17,6,6,17,17,6,17,10,12,10,12,10,12,10,10,12,12,10,12, \\ 20,3,20,3,20,3,20,20,3,3,20,3,16,1,16,1,16,1,16,16,1,1,16,1, \\ 7,21,7,21,7,21,7,7,21,21,7,21,14,0,14,0,14,0,14,14,0,0,14,0 \end{array} \quad \}$$

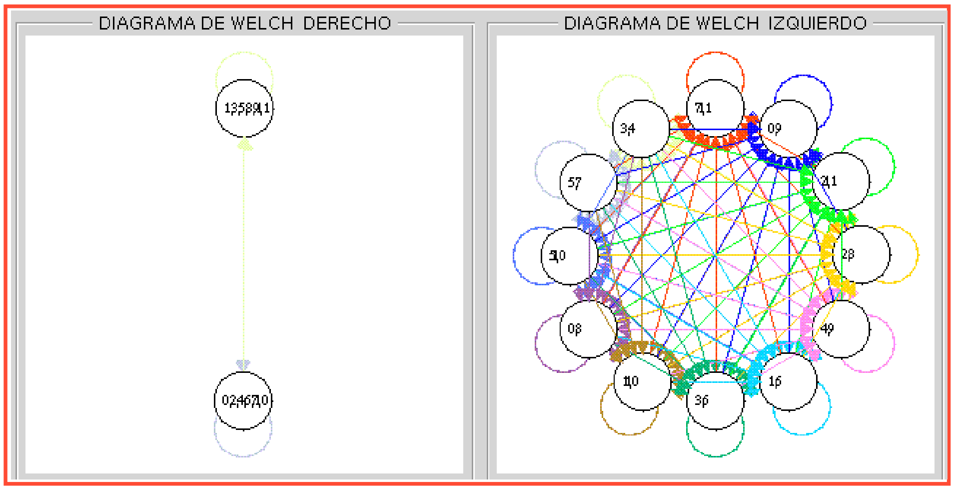
$$Lista_{Y_{p_1}} : \quad \{ \quad \begin{array}{l} 8,13,20,25,32,37,44,56,49,1,68,61,19,5,31,17,43,29,55,67,41,53,7,65, \\ 14,15,2,27,26,39,38,50,3,51,62,63,18,23,30,11,42,35,6,54,47,59,66,71, \\ 16,23,28,11,4,35,40,52,47,59,64,71,22,21,34,33,46,9,58,10,45,57,70,69, \\ 18,5,30,17,42,29,6,54,41,53,66,65,22,12,34,24,46,36,58,10,48,60,70,0, \\ 8,15,20,27,32,39,44,56,3,51,68,63,16,13,28,25,4,37,40,52,49,1,64,61, \\ 19,21,31,33,43,9,55,67,45,57,7,69,14,12,2,24,26,36,38,50,48,60,62,0 \end{array} \quad \}$$

$$Lista_{Y_{p_2}} : \quad \{ \quad \begin{array}{l} 0,60,0,48,60,12,24,12,48,36,36,24,61,1,61,49,1,13,25,13,49,37,37,25, \\ 50,14,2,2,26,38,38,62,14,62,50,26,63,51,63,3,51,15,27,15,3,39,39,27, \\ 52,16,28,28,4,40,40,64,16,64,52,4,65,53,65,41,53,5,17,5,41,29,29,17, \\ 54,18,30,30,42,6,6,66,18,66,54,42,67,19,31,31,43,55,55,7,19,7,67,43, \\ 56,8,20,20,32,44,44,68,8,68,56,32,69,57,69,45,57,21,33,21,45,9,9,33, \\ 10,22,34,34,46,58,58,70,22,70,10,46,71,59,71,47,59,23,11,23,47,35,35,11 \end{array} \quad \}$$

$$Lista_{X_{p_2}} : \quad \{ \quad \begin{array}{l} 0,1,14,3,16,5,18,19,20,9,22,11,0,1,14,3,16,5,18,19,20,9,22,11, \\ 12,13,2,15,4,17,6,7,8,21,10,23,0,1,14,3,16,5,18,19,20,9,22,11, \\ 12,13,2,15,4,17,6,7,8,21,10,23,0,1,14,3,16,5,18,19,20,9,22,11, \\ 12,13,2,15,4,17,6,7,8,21,10,23,12,13,2,15,4,17,6,7,8,21,10,23, \\ 12,13,2,15,4,17,6,7,8,21,10,23,0,1,14,3,16,5,18,19,20,9,22,11, \\ 12,13,2,15,4,17,6,7,8,21,10,23,0,1,14,3,16,5,18,19,20,9,22,11 \end{array} \quad \}$$

Tabla 5.22: Permutación p_1 y p_2 del autómata $(12, 1/2)$

Los diagramas de Welch de este autómata son:



Propiedades:

$\lvert L_i\rvert$	$=$	2
$\lvert R_i\rvert$	$=$	6
$\lvert L_i \cap R_i\rvert$	$=$	1

Figura 5.18: Diagramas de Welch del autómata reversible $(12, 1/2)$

Tomando una configuración, veamos su evolución normal y por permutaciones en bloque.

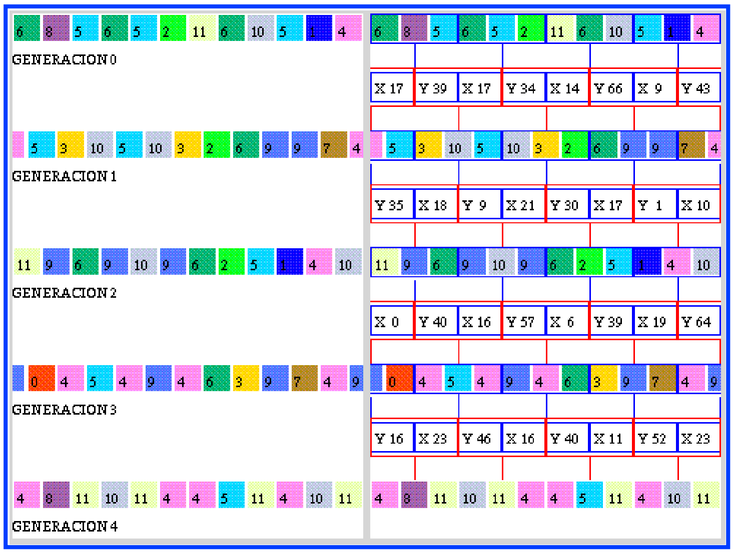


Figura 5.19: Evolución del autómata celular reversible $(12, 1/2)$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2

5.4.7 Caso $(12, 1/2)$, $L = 3$, $R = 4$

Regla Original												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	2	2	8	8	6	6	8	2	6	8	2	6
1	3	3	4	4	10	10	4	3	10	4	3	10
2	5	5	4	4	10	10	4	5	10	4	5	10
3	2	2	1	1	11	11	1	2	11	1	2	11
3	2	2	4	4	10	10	4	2	10	4	2	10
3	0	0	7	7	11	11	7	0	11	7	0	11
6	3	3	8	8	6	6	8	3	6	8	3	6
6	5	5	7	7	9	9	7	5	9	7	5	9
6	5	5	8	8	6	6	8	5	6	8	5	6
9	0	0	7	7	9	9	7	0	9	7	0	9
9	0	0	1	1	11	11	1	0	11	1	0	11
9	3	3	1	1	9	9	1	3	9	1	3	9

Regla Inversa												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	10	10	0	1	1	7	0	7	0	7	1	10
1	9	3	3	6	2	2	6	9	6	9	2	3
2	10	10	0	1	1	7	0	7	0	7	1	10
3	10	10	0	1	1	7	0	7	0	7	1	10
4	9	3	3	6	2	2	6	9	6	9	2	3
5	10	10	0	1	1	7	0	7	0	7	1	10
6	5	11	4	11	4	8	8	5	8	11	4	5
7	9	3	3	6	2	2	6	9	6	9	2	3
8	9	3	3	6	2	2	6	9	6	9	2	3
9	5	11	4	11	4	8	8	5	8	11	4	5
10	5	11	4	11	4	8	8	5	8	11	4	5
11	5	11	4	11	4	8	8	5	8	11	4	5

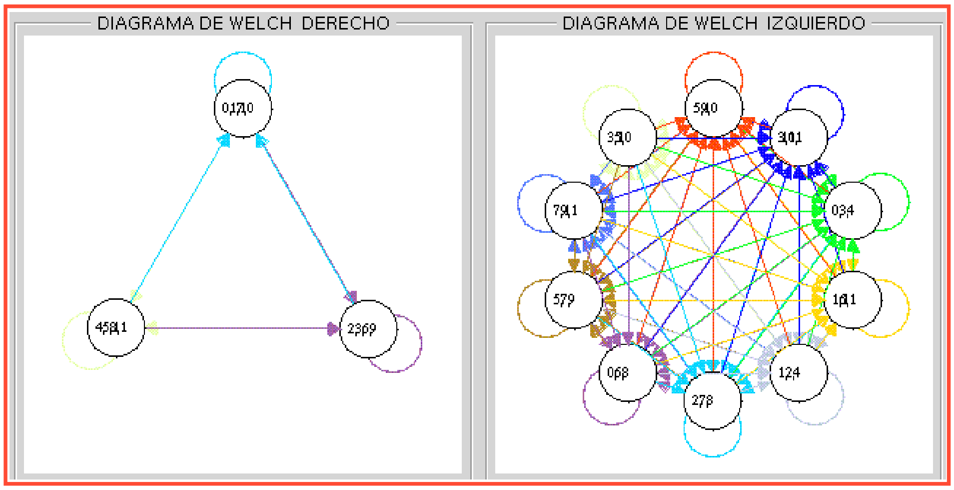
Tabla 5.23: Autómata reversible $(12, 1/2)$

Las permutaciones son las siguientes:

$$
\begin{array}{lll}
Lista_{X_{p_1}} : & \{ & 2,2,20,20,18,18,20,2,18,20,2,18,3,3,16,16,22,22,16,3,22,16,3,22, \\
& & 17,17,4,4,34,34,4,17,34,4,17,34,14,14,1,1,23,23,1,14,23,1,14,23, \\
& & 26,26,28,28,10,10,28,26,10,28,26,10,12,12,19,19,11,11,19,12,11,19,12,11, \\
& & 15,15,8,8,30,30,8,15,30,8,15,30,5,5,31,31,21,21,31,5,21,31,5,21, \\
& & 29,29,32,32,6,6,32,29,6,32,29,6,24,24,7,7,33,33,7,24,33,7,24,33, \\
& & 0,0,13,13,35,35,13,0,35,13,0,35,27,27,25,25,9,9,25,27,9,25,27,9 \quad \} \\
Lista_{Y_{p_1}} : & \{ & 2,14,20,32,18,30,8,26,6,44,38,42,15,3,4,16,10,22,28,27,34,40,39,46, \\
& & 17,29,4,16,10,22,28,5,34,40,41,46,2,14,13,1,23,11,25,26,35,37,38,47, \\
& & 2,14,4,16,10,22,28,26,34,40,38,46,12,24,19,31,23,11,43,36,35,7,0,47, \\
& & 15,3,20,32,18,30,8,27,6,44,39,42,17,29,19,31,21,33,43,5,45,7,41,9, \\
& & 17,29,20,32,18,30,8,5,6,44,41,42,12,24,19,31,21,33,43,36,45,7,0,9, \\
& & 12,24,13,1,23,11,25,36,35,37,0,47,15,3,13,1,21,33,25,27,45,37,39,9 \quad \} \\
Lista_{Y_{p_2}} : & \{ & 0,0,12,24,24,36,12,36,12,36,24,0,37,1,1,25,13,13,25,37,25,37,13,1, \\
& & 38,38,2,14,14,26,2,26,2,26,14,38,39,39,15,3,3,27,15,27,15,27,3,39, \\
& & 40,16,16,28,4,4,28,40,28,40,4,16,41,41,17,29,29,5,17,5,17,5,29,41, \\
& & 30,42,18,42,18,6,6,30,6,42,18,30,7,31,31,43,19,19,43,7,43,7,19,31, \\
& & 44,32,32,8,20,20,8,44,8,44,20,32,33,9,21,9,21,45,45,33,45,9,21,33, \\
& & 22,46,10,46,10,34,34,22,34,46,10,22,11,47,23,47,23,35,35,11,35,47,23,11 \quad \} \\
Lista_{X_{p_2}} : & \{ & 0,13,2,3,16,5,18,31,20,21,22,35,24,1,14,15,4,17,30,7,8,33,34,23, \\
& & 0,13,2,3,16,5,18,31,20,21,22,35,0,13,2,3,16,5,18,31,20,21,22,35, \\
& & 24,1,14,15,4,17,30,7,8,33,34,23,0,13,2,3,16,5,18,31,20,21,22,35, \\
& & 12,25,26,27,28,29,6,19,32,9,10,11,24,1,14,15,4,17,30,7,8,33,34,23, \\
& & 24,1,14,15,4,17,30,7,8,33,34,23,12,25,26,27,28,29,6,19,32,9,10,11, \\
& & 12,25,26,27,28,29,6,19,32,9,10,11,12,25,26,27,28,29,6,19,32,9,10,11 \quad \}
\end{array}
$$

Tabla 5.24: Permutación p_1 y p_2 del autómata $(12, 1/2)$

Los diagramas de Welch de este autómata son:



Propiedades:

$\lvert L_i\rvert$	$=$	3
$\lvert R_i\rvert$	$=$	4
$\lvert L_i \cap R_i\rvert$	$=$	1

Figura 5.20: Diagramas de Welch del autómata reversible $(12, 1/2)$

Tomando una configuración, veamos su evolución normal y por permutaciones en bloque.

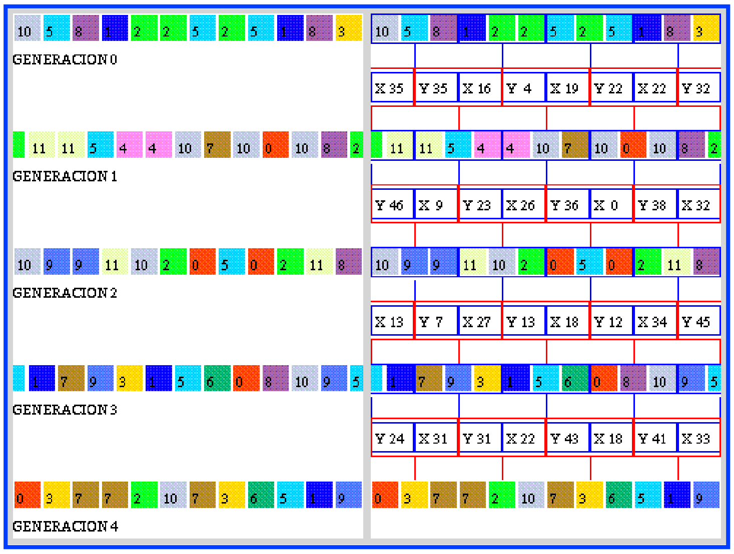


Figura 5.21: Evolución del autómata celular reversible $(12, 1/2)$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2

5.5 Observaciones Finales

El resultado de este capítulo es que el comportamiento reversible de un autómata celular lineal depende de como la regla de evolución trabaja de acuerdo a la forma en que lo hacen las dos permutaciones en bloque en las configuraciones. Estas permutaciones para ser válidas deben guardar un orden muy estricto, su comportamiento esta principalmente influenciado por los índices de Welch, como lo demuestran en las siguientes características:

- Secuencias de céulas de tamaño $6r$ similares tendrán permutaciones muy parecidas.
- La cardinalidad de los conjuntos X y Y.
- La forma en que los elementos de X y Y se concatenan.

Al entender como funcionan estas permutaciones para el caso de autómatas con $(r = 1/2)$ lo estamos haciendo para todos los casos, ya que con el primero se pueden simular los demás si no de forma elegante si de manera efectiva.

La relación entre las permutaciones p_1 y p_2 es muy sútil e inmediata, el determinar p_1 automáticamente determina también p_2 y visceversa ya que se construyen de los mismos bloques en L_ϕ y R_ϕ, solo variando el papel en que los elementos de cada bloque funcionan, si como ancestros o como evolución; pero aun podemos ir mas allá; la asignación del conjutno X a las distintas secuencias determina a su vez la asignación del conjunto Y, ya que para establecer la relación entre las secuencias y el conjunto X debemos ver el estado de las células a_l, a_c y e_l; es decir, como mínimo tenemos ya una vecindad completa y su evolución, lo que determina a ϕ completamente, y esto ya nos indica la forma que debemos posicionar al conjunto Y con respecto a las secuencias.

Cada autómata reversible tendrá sus conjuntos L_ϕ y R_ϕ particulares y estos lo harán único del resto, la forma en se definan las biyecciones b_L y b_R son las que nos ofrecen distintas permutaciones para un mismo tipo de autómata, por ejemplo, tomemos un caso $(2, 1/2)$ con $L = 1$ y $R = 2$:

Regla Original: C		
	0	1
0	0	0
1	1	1

Regla Inversa: A		
	0	1
0	0	1
1	0	1

Tabla 5.25: Autómata $(2, 1/2)$ regla original C y regla inversa A

Los elementos de L_ϕ y R_ϕ son los siguientes:

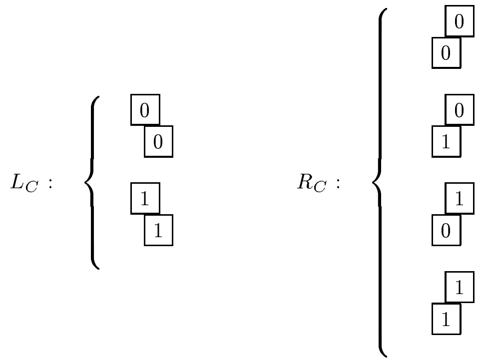


Tabla 5.26: Conjuntos L_C y R_C

Hagamos ahora la siguiente asignación de las biyecciones b_L y b_R:

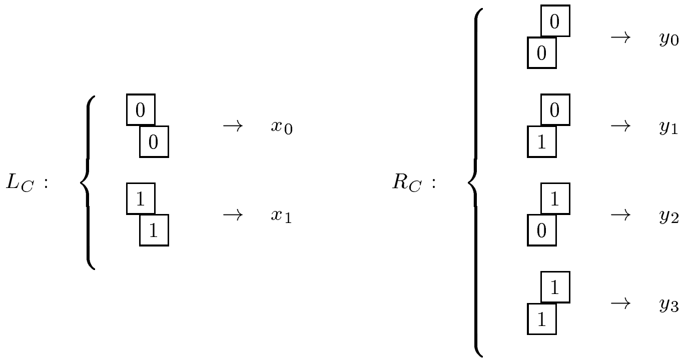


Tabla 5.27: Mapeos b_{L_C} y b_{R_C}

Con esto, las permutaciones p_1 y p_2 son las siguientes:

Secuencia	p_1	p_2
000	x_0y_0	y_0x_0
001	x_0y_2	y_0x_1
010	x_0y_1	y_2x_0
011	x_0y_3	y_2x_1
100	x_1y_0	y_0x_0
101	x_1y_2	y_0x_1
110	x_1y_1	y_2x_0
111	x_1y_3	y_2x_1

Tabla 5.28: Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(2, 1/2)$

Tomando una configuración aleatoria, una evolución seía de la siguiente forma:

0 1 1 0 0 1
 0 1 1 0 1 1

Figura 5.22: Autómata $(2, 1/2)$ regla C

Y aplicando las permutaciones tenemos:

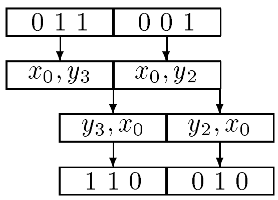


Figura 5.23: Evolución del autómata $(2, 1/2)$ con permutaciones en bloque

Ahora bien, hagamos y nueva asignación entre L_ϕ y X.

$$L_C : \begin{cases} \begin{array}{l} \boxed{0} \\ \quad \boxed{0} \end{array} & \rightarrow \quad x_1 \\[2ex] \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \quad \boxed{1} \end{array} & \rightarrow \quad x_0 \end{cases}$$

Tabla 5.29: Nuevo mapeo b_{L_C}

Esto nos lleva a las siguientes permutaciones p_1 y p_2.

Secuencia	p_1	p_2
000	x_1y_0	y_0x_1
001	x_1y_2	y_0x_0
010	x_1y_1	y_2x_1
011	x_1y_3	y_2x_0
100	x_0y_0	y_0x_1
101	x_0y_2	y_0x_0
110	x_0y_1	y_2x_1
111	x_0y_3	y_2x_0

Tabla 5.30: Nuevas permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(2, 1/2)$

Volviendo aplicar estas permutaciones sobre la misma configuración inicial de la Figura 5.23, obtenemos:

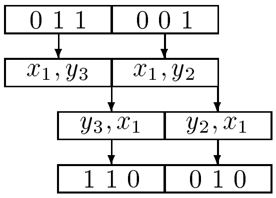


Figura 5.24: Evolución del autómata $(2, 1/2)$ con distintas permutaciones en bloque

Se ha llegado a obtener el mismo resultado que con las permutaciones anteriores, en síntesis, obtendremos tantas permutaciones repetidas como asignaciones distintas podamos hacer de b_L y b_R, dado que $\mid X \mid = Lk$ y $\mid Y \mid = Rk$, existe tantas asignaciones posibles para b_L como $Lk!$ y tantas para b_R como $Rk!$, entonces para dos conjuntos L_ϕ y R_ϕ dados, tendremos tantas asignaciones distintas a XY y YX como $((Lk)! * (Rk)!)$.

Cada autómta reversible tiene conjuntos propios L_ϕ y R_ϕ que a su vez se pueden renombrar de $((Lk)! * (Rk)!)$ maneras por las biyecciones b_L y b_R para obtener el mismo número de permutaciones distintas que especifiquen el mismo autómata.

Capítulo 6

Máxima Longitud de la Mínima Vecindad Inversa

6.1 Resumen

En este último capítulo se expone el problema de que tan grande puede ser la mínima vecindad inversa en un autómata celular lineal reversible [Culik 87] [McIntosh 91b], para esto se retoma como base los trabajos de Masakasu Nasu [Nasu 78] y de Jarkko Kari [Kari 92], los cuales han resuelto este problema para autómatas en donde el valor de alguno de sus índices de Welch, L o R, es igual a 1; se utilizarán las ideas expuestas en dichos trabajos para tratar el problema con cualquier valor de L y R.

6.2 Abordando el Problema por medio de Gráficas.

Es común que en un autómata celular lineal reversible, el tamaño de la vecindad inversa puede ser distinto que el de la vecindad original, por ejemplo, tomemos el siguiente autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$:

	0	1	2	3
0	1	3	2	0
1	2	3	1	0
2	1	3	2	0
3	3	2	1	0

Tabla 6.1: Autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$

Este autómata reversible tiene índices $L = 4$ y $R = 1$, o sea, en este autómata, una secuencia tendrá solo una posible extensión a la derecha y cuatro posibles extensiones a la izquierda para formar la misma cadena. Se tiene que el valor de $r = 1/2$, es decir, que el tamaño completo de la vecindad es $2r + 1 = 2$; veamos ahora que tan larga debe ser una secuencia formada solamente por el estado 2 y sus ancestros para fijar un único elemento con el cual regresar en la evolución.

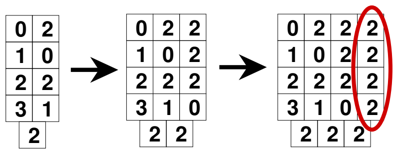


Figura 6.1: Secuencia formada concatenando el estado 2 y sus ancestros

En este caso, es necesario que la secuencia así formada tenga una longitud de 3 elementos al menos para fijar un único elemento con el cual regresar hacia atrás en la evolución, diferente al tamaño original de la vecindad que es 2.

6.2.1 Diagrama de de Bruijn

Una ruta que se forme en el diagrama de de Bruijn indica la evolución de una cierta secuencia; así, tenemos que en un autómata reversible, cada secuencia debe tener tantas rutas distintas que la generen como nodos existan en el diagrama cumpliendo con la multiplicidad uniforme. Además, para una cierta longitud, estas rutas que forman la misma secuencia deben empezar de L maneras distintas, llegar a un nodo en común y de ahí continuar de R formas diferentes. Veamos ahora el diagrama de de Bruijn del autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$:

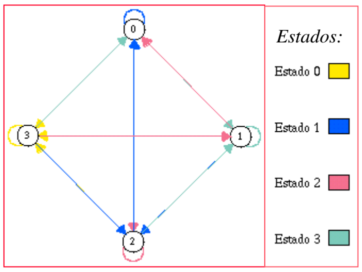


Figura 6.2: Diagrama de de Bruijn del autómata celular lineal reversible $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$

En el caso de autómatas de con radio de vecindad $r = 1/2$, cada nodo está formado exactamente por una cadena de longitud 1, también en este caso existen tantos nodos como estados en el autómata y cada nodo está conectado con todos los demás. En adelante al número de nodos en el diagrama de de Bruijn lo denominaremos como d.

6.2.2 Diagrama de Parejas

El diagrama de parejas del autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$ es:

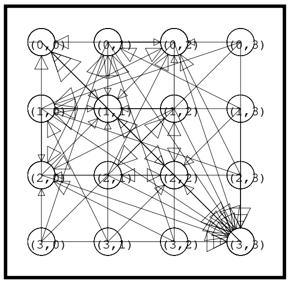


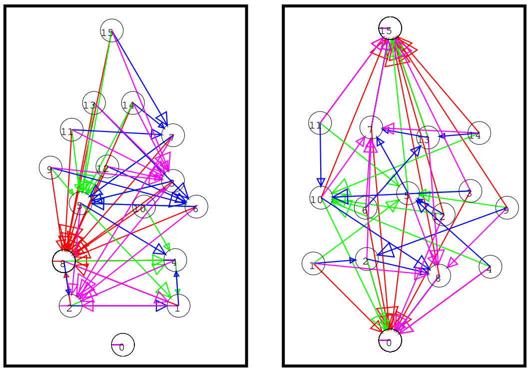
Figura 6.3: Diagrama de parejas del autómata celular lineal reversible $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$

Para saber si un autómata es reversible por medio del diagrama de parejas basta con observar si no existen ciclos fuera de la diagonal principal. Una observación importante es que este diagrama nos da una solución a nuestro problema, con sólo observar que tan larga podemos hacer una ruta de tal forma que no existan ciclos, esto lo podemos hacer a lo más tomando una ruta tan larga como nodos exitan en el diagrama; ya que hay tantos nodos como pares ordenados de los nodos del diagram de de Bruijn, este valos es d^2, en otras palabras, la mínima vecindad inversa no puede exceder más allá de tener d^2 elementos.

Si tenemos esta cota, ¿por qué seguir investigando?. La experiencia práctica ([Gómez 96], [Seck 98]) al calcular autómatas reversibles indica que esta cota es mucho menor, pues no se ha encontrado un autómata cuya mínima vecindad inversa sea tan grande. Esta misma evidencia no señala a d^2 como la cota máxima sino a d, por lo que la cuestión es ahora si es posible formalizar este resultado.

6.2.3 Diagrama de Subconjuntos

Los diagramas de subconjuntos para el autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$ y su reflexión son:



1B2D1E2D 0066BFD9

Figura 6.4: Diagramas de subconjuntos del autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$ y su reflexión

Observemos en la Figura 6.4 que el diagrama de la regla original indica que el índice $R = 1$ y el diagrama de la reflexión señala que el índice $L = 4$. Obtener por medio de estos diagramas la máxima longitud de la mínima vecindad inversa no es un proceso tan directo como en el diagrama de parejas, se tiene que observar en cuantos pasos se alcanza el nivel de Welch desde las clases unitarias y por el momento no tenemos ningún criterio que nos explique como se da este comportamiento; podemos encontrar rutas que visiten niveles diferentes ya sea mayores o menores antes de llegar y estacionarse en las clases de Welch.

6.2.4 Diagramas de Welch

Tomemos los diagramas de Welch del autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$.

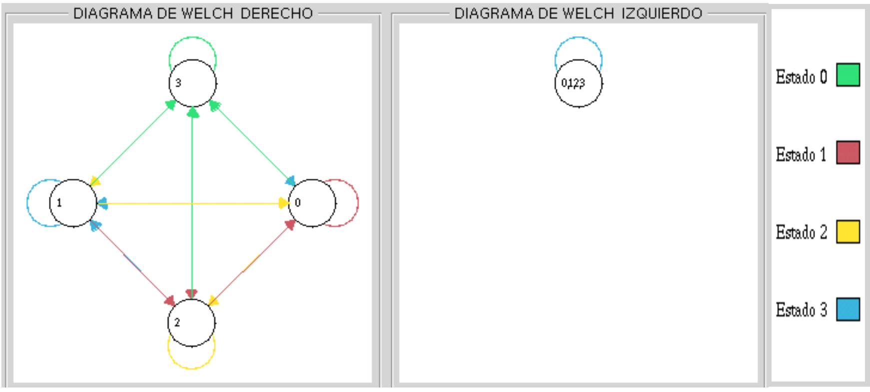


Figura 6.5: Diagramas de Welch del autómata celular lineal reversible $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$

Como se señaló en el capítulo 3, Nasu aplica la teoría de autómatas definidos desarrollada en [Perles 63] a los diagramas de Welch. Con esto se tiene que el diagrama derecho de Welch es $p-definido$ si empezando desde cualquier subconjunto, una misma secuencia de estados con longitud mayor o igual que p finaliza en un único subconjunto; análogamente, el diagrama izquierdo de Welch es $q-definido$ si empezando desde cualquier subconjunto, una misma secuencia de estados con longitud mayor o igual a q finaliza en un único subconjunto.

Por ejemplo; en la Figura 6.5, para el diagrama de Welch derecho del autómata $(4, 1/2)$ vemos que empezando desde cualquier subconjunto, para la secuencia 2, existen 3 subconjuntos finales distintos, para la secuencia 22 existen 2 subconjunto finales diferentes y para la secuencia 222, sólo hay un único subconjunto final. Haciendo un estudio completo para todas las demás secuencias, llegamos a que este diagrama es $3-definido$.

Un resultado importante relacionado con nuestro problema lo da Nasu en [Nasu 78] en el Teorema 7, en donde define que el tamaño de la mínima vecindad de la regla inversa está dado por $p+q-(2r+1)+2$, donde r es el radio de vecindad de la regla original y p, q son las longitudes para las cuales son *definidos* los diagramas de Welch derecho e izquierdo respectivamente del autómata. Entonces, para contestar que tan grande puede ser la mínima vecindad inversa sólo necesitamos saber que tan grande puede ser p y q en un autómata reversible.

Sea W_r el número de nodos del diagrama derecho de Welch, en el trabajo de Nasu [Nasu 78] Teorema g, encontramos que si este diagrama de $p-definido$, entonces $p \leq W_r - 1$, esto es análogo para el diagrama de Welch izquierdo. Así, nuestro problema se puede resolver si contestamos cual es el máximo número de nodos que pueden tener ambos diagramas, lo cual tampoco es algo sencillo de responder.

Sin embargo, si en el autómata reversible alguno de sus índices L o R es igual a 1, entonces conocemos como va a ser la estructura de ambos diagramas. Si $R = 1$, el diagrama de Welch derecho es isomorfo al diagrama de de Bruijn, y tendrá tantos nodos como éste, en tanto que el diagrama de Welch izquierdo estará formado por un único nodo, en otras palabras a lo más $p = d-1$ y $q = 0$. Si aplicamos el resultado de Nasu al autómata $(4, 1/2)$ que hemos estado manejando, tenemos que el máximo tamaño de la mínima vecindad inversa está dado de la siguiente forma.

$$p + q - (2r + 1) - 2 = d - 1 + 0 - (2(1/2) + 1) - 2 = d - 1 \tag{6.1}$$

El máximo tamaño es igual al número de nodos del diagrama de de Bruijn menos uno.

6.3 Utilizando Relaciones de Equivalencia

Los resultados obtenidos por Nasu responden nuestra cuestión en términos del número de nodos en los diagramas de Welch. En particular, para los casos en donde algunos de los índices L o R sea 1, conocer el número de nodos es inmediato y tenemos una solución igual a $d-1$. No obstante, si ninguno de los índices es 1, ya la respuesta no es inmediata ni sencilla, pues nada sabemos de cuantos nodos podrían tener ambos diagramas de Welch en estos casos.

Revisemos ahora otro trabajo análogo debido a Jarkko Kari [Kari 92], el cual llega al mismo resultado para los casos en donde $L = 1$ o $R = 1$ utilizando relaciones de equivalencia.

6.3.1 Proceso de Kari

Kari define el siguiente proceso para autómatas con $r = 1/2$ ya que con estos podemos simular todo tipo de aut'omatas como se mostró en el capítulo 5 sección 5.2. Tomemos para ejemplificar este procedimiento el autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $FFA91640$.

	0	1	2	3
0	0	0	0	1
1	2	1	1	0
2	1	2	2	2
3	3	3	3	3

Tabla 6.2: Autómata $(4, 1/2)$ regla $FFA91640$

Este autómata tiene como valores de sus índices de Welch, $L = 1$ y $R = 4$; debido a esto en la regla de evolución cada columna tiene una sola entrada para cada estado, es decir, cada columna es una permutación del conjunto K. Esta cualidad, que siempre se presenta en este tipo de autómatas, Kari la aprovecha de la siguiente manera: sabemos que la regla de evolución ϕ mapea vecindades a estados.

$$\phi(ab) \rightarrow s \text{ para } ab \in K^2 \text{ y } s \in K \tag{6.2}$$

Por lo tanto, como en la regla de evolución cada columna tiene a todos los estados y estos parecen una sola vez cada uno, podemos definir la siguiente función.

$$\varphi_s(b) = a, \text{ si } \phi(ab) = s \tag{6.3}$$

Por ejemplo, el autómata $(4, 1/2)$ regla $FFA91640$ especificado en la Tabla 6.2 cumple que $\phi(20) = 1$ por lo que $\varphi_1(0) = 2$. Podemos extender esta definición para cadenas arbitrarias de elementos de la siguiente manera.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\lambda(b) & = & b, \text{ para toda } b \in K \\ \varphi_{sw}(b) & = & \varphi_s(\varphi_w(b)), \text{ para toda } w \in K^* \text{ y } b, s \in K. \end{array} \tag{6.4}$$

En donde λ simboliza a la palabra vacía, así, retomando el autómata $(4, 1/2)$ regla $FFA91640$ que se muestra en la Tabla 6.2, tenemos que:

$$\begin{array}{l} \varphi_0(3) = 1 \\ \varphi_{30}(3) = \varphi_3(\varphi_0(3)) = \varphi_3(1) = 3 \\ \varphi_{130}(3) = \varphi_1(\varphi_{30}(3)) = \varphi_1(3) = 0 \end{array}$$

Usemos la función φ_w y definamos una jerarquía de relaciones $\rho_i \subseteq K \times K, i \geq 0$ de la siguiente forma:

$$(a, b) \in \rho_i \text{ si y solo si } \rho_w(a) = \rho_w(b) \textbf{ para todo } w \in K^i \tag{6.5}$$

Kari demuestra en [Kari 92] que las relaciones así definidas cumples con las siguientes propiedades:

1. ρ_i son relaciones de equivalencia.

2. ρ_0 es la relación identidad sobre K.

3. $\rho_i \subseteq \rho_{i+1}$ para cada $i \geq 0$.

4. ρ_t es la relación completa $K \times K$ para alguna $t \geq 0$.

5. $\rho_i \neq \rho_{i+1}$ si $\rho_i \neq K \times K$.

Al número de clases de equivalencia distintas de φ_i lo denotaremos como c_i. Para ρ_0 tenemos que existen tantas clases de equivalencia como estados haya en el autómata o nodos en el diagrma de de Bruijn pues $r = 1/2$, es decir, $c_0 = d = k$. De las propiedades 3 y 5, llegamos a que $c_{i+1} \leq c_i$ para toda $i \geq 0$, y $c_{i+1} < c_i$ si $c_i > 1$. Así tenemos que en el peor caso $c_{k-1} = 1$ y que $\rho_{k-1} = K \times K$, esto significa que en los ancestros de toda cadena de longitud menor o igual a $k-1$ exiten tantas terminaciones derechas como k y una única terminación izquierda, por lo que para esa cadena, ha quedado fijo un único elemento con el cual regresar hacia atrás en la evolución, concluyendo así que el máximo tamaño de la mínima vecindad inversa es $k-1$.

Utlizando el autómata $(4,1/2)$ de la Tabla 6.2, primero tomemos las 4 clases distintas que por definición existen para ρ_0, o sea, tomando la palabra vacía λ.

Clase 0

	0	1	2	3
0	1			
1				
2				
3				

Clase 1

	0	1	2	3
0				
1		1		
2				
3				

Clase 2

	0	1	2	3
0				
1				
2			1	
3				

Clase 3

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				1

Tabla 6.3: Clases de equivalencia ρ_0

Formemos ahora las relaciones ρ_1, observemos que para construir ρ_1, basta con revisar cada columna de la regla de evolución en la Tabla 6.2. Las columnas 1 y 2 son idénticas, por lo que estos elementos forman una única clase, las columnas 0 y 3 siguen formando clases individuales.

Clase 0

	0	1	2	3
0	1			
1				
2				
3				

Clase 1,2

	0	1	2	3
0				
1		1	1	
2		1	1	
3				

Clase 3

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				1

Tabla 6.4: Clases de equivalencia ρ_1

Para obtener ρ_2, se toman todas las cadenas de 2 elementos y sus ancestros:

000 001 002 013 00	020 011 012 003 01	010 021 022 023 02	130 131 132 133 03	200 201 202 113 10	120 111 112 203 11	110 121 122 123 12	030 031 032 033 13
100 101 102 213 20	220 211 212 103 21	210 221 222 223 22	230 231 232 233 23	300 301 302 303 30	320 311 312 303 31	310 321 322 323 32	330 331 332 333 33

Tabla 6.5: Cadenas de longitud 2 y sus ancestros

Se observa en la Tabla 6.5 que en los ancestros de estas secuencias, los estados $0,1,2$ forman una sola clase ya que para toda cadena $w \in K^2$, se tiene que $\varphi_w(0) = \varphi_w(1) = \varphi_w(2)$. Esto no ocurre con el estado 3, que sigue conservándose como una clase individual.

Clase 0,1,2

	0	1	2	3
0	1	1	1	
1	1	1	1	
2	1	1	1	
3				

Clase 3

	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				1

Tabla 6.6: Clases de equivalencia ρ_2

Continuando con el proceso, construyamos las relaciones ρ_3, para esto se toman todas las posibles cadenas de tres elementos y sus ancestros.

Cadenas de longitud 3 y sus ancestros.							
0000 0001 0002 0013 000	0020 0011 0012 0003 001	0010 0021 0022 0023 002	0130 0131 0132 0133 003	0200 0201 0202 0113 010	0120 0111 0112 0203 011	0110 0121 0122 0123 012	0030 0031 0032 0033 013
0100 0101 0102 0213 020	0220 0211 0212 0103 021	0210 0221 0222 0223 022	0230 0231 0232 0233 023	1300 1301 1302 1313 030	1320 1311 1312 1303 031	1310 1321 1322 1323 032	1330 1331 1332 1333 033
2000 2001 2002 2013 100	2020 2011 2012 2003 101	2010 2021 2022 2023 102	1130 1131 1132 1133 103	1200 1201 1202 1113 110	1120 1111 1112 1203 111	1110 1121 1122 1123 112	2030 2031 2032 2033 113
1100 1101 1102 1213 120	1220 1211 1212 1103 121	1210 1221 1222 1223 122	1230 1231 1232 1233 123	0300 0301 0302 0313 130	0320 0311 0312 0303 131	0310 0321 0322 0323 132	0330 0331 0332 0333 133
1000 1001 1002 1013 200	1020 1011 1012 1003 201	1010 1021 1022 1023 202	2130 2131 2132 2133 203	2200 2201 2202 2113 210	2120 2111 2112 2203 211	2110 2121 2122 2123 212	1030 1031 1032 1033 213
2100 2101 2102 2213 220	2220 2211 2212 2103 221	2210 2221 2222 2223 222	2230 2231 2232 2233 223	2300 2301 2302 2313 230	2320 2311 2312 2303 231	2310 2321 2322 2323 232	2330 2331 2332 2333 233
3000 3001 3002 3013 300	3020 3011 3012 3003 301	3010 3021 3022 3023 302	3130 3131 3132 3133 303	3200 3201 3202 3113 310	3120 3111 3112 3203 311	3110 3121 3122 3123 312	3030 3031 3032 3033 313
3100 3101 3102 3213 320	3220 3211 3212 3103 321	3210 3221 3222 3223 322	3230 3231 3232 3233 323	3300 3301 3302 3313 330	3320 3311 3312 3303 331	3310 3321 3322 3323 332	3330 3331 3332 3333 333

Tabla 6.7: Cadenas de longitud 3 y sus ancestros

Podemos ver que para toda cadena $w \in K^3$, se cumple que $\varphi_w(0) = \varphi_w(1) = \varphi_w(2) = \varphi_w(3)$, por lo que se tiene una única clase de equivalencia formada por todos los estados del autómata.

Clase 0,1,2,3

	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1

Tabla 6.8: Clase de equivalencia ρ_3

Esta última clase de equivalencia es identica a $K \times K$, como se esperaba según el proceso, lo que quiere decir que para toda cadena de longitud 3, los ancestros de cada una tienen 4 posibles terminaciones derechas y una única terminación izquierda, esta única terminación ya define una regla de evolución inversa a la original.

Una observación a este proceso es que implicitamente nos dice que todos los autómatas reversibles con un tamaño de vecindad igual a 2 que tenga su índice de Welch izquierdo $L = 1$, tiene en su regla de evolución por lo menos dos columnas idénticas, del mismo modo, si tal autómata tuviera su índice de Welch derecho $R = 1$, en su regla de evolución al menos existen dos renglones idénticos.

El proceso de Kari utilizando relaciones de equivalencia aprovecha de manera elegante que si el índice $L = 1$, en cada columna aparecen todos los estados una sola vez cada uno, por lo que la función φ_w simpre es aplicable para todo estado y para toda $w \in K^*$. Otro punto crucial en este proceso lo da la contención $\rho_i \subseteq \rho_{i+1}$ y que si ocurre que $\rho_i = \rho_{i+1}$, esta igualdad se debe conservar de ahí en adelante, ilustrando de manera sencilla que las variaciones en los ancestros disminuyen paso a paso.

Dado que para emular un autómata celular con otro de radio de vecindad $1/2$ debemos reagrupar los ancestros del primero en nodos de de Bruijn, entonces la forma en que este resultado se extiende a todo tipo de autómata es que la máxima longitud de su mínima vecindad inversa es $d - 1$.

Hasta el momento, se han presentado dos formas de demostrar que el máximo tamaño de la mínima vecindad inversa en un autómata reversible en donde su índice $L = 1$ o $R = 1$ es $d - 1$. El objetivo es ahora extender estas ideas para encontrar la misma respuesta para autómatas reversibles en donde ninguno de sus índices de Welch sea igual con 1.

El proceso de Nasu [Nasu 78] utilizando los diagramas de Welch tiene la desventaja de que no es evidente como calcular el número máximo de nodos que pueden tener estos diagramas en autómatas reversibles donde ambos índices de Welch sean distintos de 1, la pregunta es: ¿podemos utilizar las ideas de Kari para este fin?.

6.4 Reversibles con Indices L y R Distintos de 1.

El proceso anteriormente descrito utilizando relaciones de equivalencia para encontrar la máxima longitud de la mínima vecindad inversa, cuando se trata de autómatas reversibles con índices de Welch L y R distintos de 1 presenta algunos inconvenientes. Para ver esto tomemos el siguiente autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $CCA566CC$.

	0	1	2	3
0	0	3	0	3
1	2	1	2	1
2	1	1	2	2
3	0	3	0	3

Tabla 6.9: Autómata $(4, 1/2)$ regla $CCA566CC$

Los diagramas de parejas y de subconjuntos de este autómata son los siguientes:

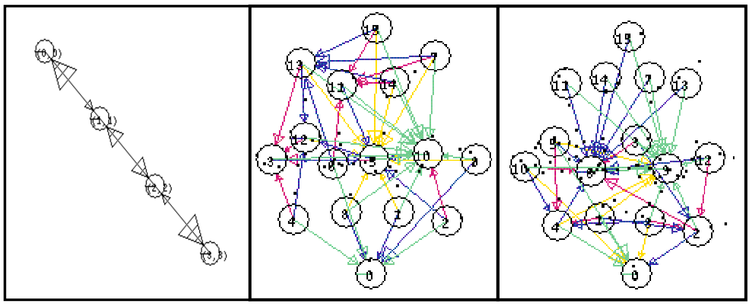


Diagrama de Parejas **Subconjuntos Original** **Subconjuntos Reflexión**
R=2 **L=2**

Figura 6.6: Diagramas de parejas y de subconjuntos del autómata $(4, 1/2)$ regla $CCA566CC$

Este autómata tiene ambos índices de Welch distintos de 1; revisando la regla de evolución en la Tabla 6.9, primero se observa que no podemos definir una función $\varphi_s(b) = a$ ya que para este caso las columnas no son permutaciones del conjunto K, por lo que φ no está definido para toda $s \in K$ en cada columna b. En segundo lugar, $\varphi_s(b)$ puede tener más de un resultado, esto es ya que en cada columna puede haber más de una entrada de un mismo elemento, esto impide que $\varphi_s(b)$ se pueda definir como función.

Se ha definido a ρ_i como una relación de $a, b \in K$ si $\varphi_s(a) = \varphi_s(b)$ **para toda** secuencia $s \in K^i$, esto funcionará en los autómatas donde $L = 1$, ya que para toda cadena se tiene que sus ancestros usan todos los estados en sus terminaciones derechas y solo es cuestion de que se utilice una longitud conveniente para que los ancestros de toda cadena fijen una misma terminación izquierda para las terminaciones derechas a, b. Esta situación no sucederá en autómatas con índices distintos de 1.

Para ejemplificar lo anterior, usando el autómata de la Tabla 6.9, se formarán las cadenas $\{02, 002, \ldots, 0\ldots02\}$ y veamos cuales son sus posibles ancestros.

32**3**	302**3**	3002**3**	30 ... 02**3**
02**3**	002**3**	0002**3**	00 ... 02**3**
32**2**	302**2**	3002**2**	30 ... 02**2**
02**2**	002**2**	0002**2**	00 ... 02**2**
02	002	0002	0 ... 02

Tabla 6.10: Ancestros de las cadenas $\{0\ldots02\}$

Hagamos lo mismo pero ahora para las secuencias $\{12, 112, \ldots, 1\ldots12\}$ obteniendo sus ancestros.

11**2**	111**2**	1111**2**	11 ... 11**2**
21**2**	211**2**	2111**2**	21 ... 11**2**
11**0**	111**0**	1111**0**	11 ... 11**0**
21**0**	211**0**	2111**0**	21 ... 11**0**
12	112	1112	1 ... 12

Tabla 6.11: Ancestros de las cadenas $\{1\ldots12\}$

Analizando estas secuencias sobresalen dos cosas:

1. Para las diferentes terminaciones derechas no existe una única terminación izquierda como sucedía cuando el índice de Welch $L = 1$, sino que existen 2 distintas terminaciones y estas se seguiran conservando no importando que tan grande hagamos la cadena.

2. Para la cadena de la forma $0\ldots02$ las terminaciones derechas forman la clase $3, 2$ mientras que para la cadena con la estructura $1\ldots12$ las terminaciones derechas forman la clase $2, 0$; es decir, ninguna de estas clases se mantiene **para toda** secuencia de una longitud dada.

Dados estos argumentos, ¿llegamos a que no es posible utilizar el concepto de relaciones de equivalencia para tratar el problema del máximo tamaño de la mínima vecindad inversa?. Entonces, por qué no hacemos una redefinición del proceso para el caso de autómatas reversibles con tamaño de vecindad 2.

Sabemos que para este caso el diagrama de de Bruijn tendrá tantos nodos como estados haya en el autómata, en el caso de los autómatas reversibles, cada secuencia de estados tendrá tantos ancestros como nodos en el diagrama de de Bruijn, y para una cierta longitud n, toda secuencia de estados tendrá un único estado con el cual regresar hacia atrás en la evolución del autómata.

Tomemos una secuencia $w \in K^n$ y sus posibles ancestros, en total serán k^{2r}. En el diagrama de de Bruijn solo dibujemos aquellas rutas que tengan la forma de w, las cuales tendrán, la siguiente estructura, empezarán desde L nodos distintos, después de m pasos convergerán a un nodo único u con $0 < m < n$, y de este nodo único surgiran R variantes.

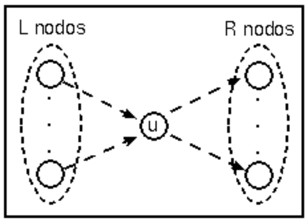


Figura 6.7: Estructura de los ancestros de una cadena en el diagrama de de Bruijn para un autómata reversible

Intuitivamente, si se quiere demostrar que la máxima longitud de la mínima vecindad inversa es igual a $d-1$, entonces debemos probar que conforme una ruta crece en el diagrama de de Bruijn, se van perdiendo alternativas intermedias por las cuales estas rutas pasan, hasta que en la longitud deseada $(d-1)$ solo exista una alternativa intermedia y por lo tanto una única forma de regresar en la evolución del autómata.

Sea la secuencia $s \in K^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$; en un autómata reversible, s tiene d posibles rutas que la representan en el diagrama de de Bruijn cumpliendo con la multiplicidad uniforme. Para $0 \leq i \leq n$, sea A_i el conjunto de nodos de de Bruijn que conforma la secuencia s en cada paso. Por ejemplo, si $n = 1$ entonces tenemos dos conjuntos de nodos, A_0 y A_1, donde A_0 es el conjunto de nodos iniciales y A_1 el conjunto de nodos finales.

Para $s \in K^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $V = \min\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, es decir, el conjunto A_i con el mínimo número de elementos. Entonces V representa el mínimo conjunto de variantes que tiene la secuencia s en el diagrama de de Bruijn en un paso dado; además $|V|$ es el mínimo número de variantes que existen en un paso dado al recorrer la secuencia s en el diagrama de de Bruijn.

Con estos simples conceptos se expone el siguiente resultado.

Teorema 1 *En el diagrama de de Bruijn de un autómata celular lineal reversible, cada secuencia s de longitud $d-1$ cumple que $V = 1$, es decir, el mínimo número de variantes de las rutas que forman cada secuencia s es* 1.

Prueba. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, con $1 \leq i \leq n$. Sea $s \in K^n$ una secuencia de longitud n donde s_i representa la i-ésima parte de la secuencia teniendo que $s_i \in K$. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de nodos del diagrama de de Bruijn con $|\mathcal{D}| = d$.

Representemos cualquier secuencia de longitud 1 con s_1; para s_1 tenemos a A_0, el conjunto de nodos iniciales y A_1 el conjunto de nodos finales que forman a s_1 en el diagrama de de Bruijn. Si $|A_0| > 1$ y $|A_1| > 1$, entonces se debe cumplir que $A_0 \neq A_1$, pues de otro modo la secuencia de la forma $\{s_1\}^*$ compuesta por repeticiones sucesivas de s_1 tendrá $|A_0|$ rutas posibles que la representen en el diagrama de de Bruijn, y como todos los nodos de A_0 funcionan tanto como inicios como terminaciones de cada s_1, entonces siempre existirán $|A_0|$ alternativas internas en dichas rutas evitando que el autómata sea reversible.

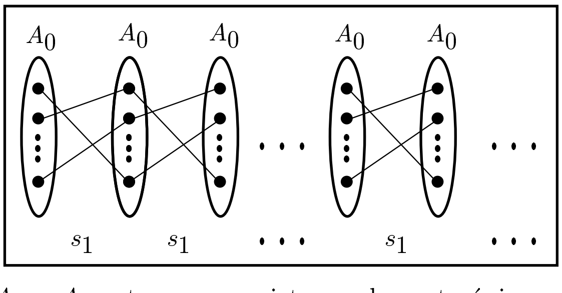


Figura 6.8: Si $A_0 = A_1$ entonces no existe un elemento único común en las rutas

Ya que $A_0 \neq A_1$, existe un elemento $e \in \mathcal{D}$ tal que $e \in A_0$ pero $e \notin A_1$ por lo que $|V| = |A_1| \leq d-1$; es decir, a lo más V tiene $d-1$ elementos.

En el caso más sencillo, si conforme la secuencia s se extiende $|V|$ decrece paso a paso, entonces después de $d-1$ pasos a lo más $|V| = 1$ teniendo una sola alternativa en algún punto de las rutas que forman s y la prueba está completa.

Supongamos que para la secuencia $s \in K^n$, una extensión de s en un elemento conserva el valor de $|V|$ con $|V| > 1$; es decir, el mínimo número de alternativas internas en las rutas no decrece. Como $V = A_i$ para alguna i con $0 < i \leq n$; se debe cumplir para $0 \leq j \leq n+1$ con $j \neq i$, que $A_j \neq V$, pues de otro modo se tendrán dos casos:

1. Si $j < i$, entonces la secuencia $\{s_j s_{j+1} \dots s_i\}^*$ que se forma repitiendo sucesivamente la cadena $\{s_j s_{j+1} \dots s_i\}$ tendrá al menos $|V|$ posibles alternativas internas en las rutas que la forman.
2. Si $j > i$, entonces la secuencia $\{s_i s_{i+1} \dots s_j\}^*$ que se forma repitiendo sucesivamente la cadena $\{s_i s_{i+1} \dots s_j\}$ tendrá al menos $|V|$ posibles alternativas internas en las rutas que la forman.

En ambos casos se impide que el autómata sea reversible.

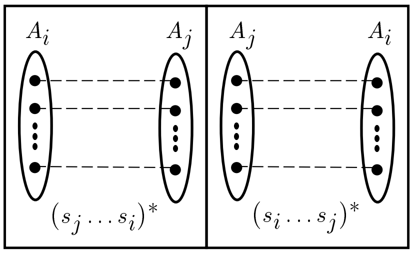


Figura 6.9: Si $A_i = A_j$ la secuencia de $\{s_j \dots s_i\}^*$ o $\{s_i \dots s_j\}^*$)tendrá más de una variante interna posible

Esta restricción es mucho más fuerte; para $0 \leq j < k \leq n+1$, se debe cumplir que $A_j \neq A_k$; pues de otro modo la secuencia $\{s_j \dots s_k\}^*$ formada repitiendo sucesivamente la cadena $\{s_j \dots s_k\}$ tendrá más de una alternativa interna en las rutas que la generan ya que $|V| > 1$.

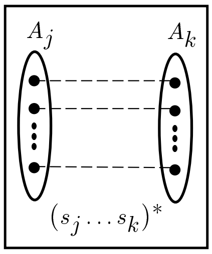


Figura 6.10: Si $A_j = A_k$ la secuencia de $\{s_j \dots s_k\}^*$ tendrá más de una variante interna posible

De aquí llegamos a que $V \neq A_j$ **para toda** j con $0 \leq j \leq n+1$ y $j \neq i$. Cada una de estas diferencias debe ser distinta a las demás; dado que V es el conjunto A_i con menos elementos, entonces cada A_j tiene al menos un elemento $e_j \in A_j$ pero $e_j \notin A_i$. Para que se presenten estas $n+1$ diferencias distintas se deben utilizar al menos $n+1$ elementos de $\mathcal{D}$ que no aparecen en A_i, por lo que $|A_i| \leq d-(n+1)$ y a lo más $|V|$ es igual a $d-(n+1)$.

Teniendo esto, si $n = d-2$, entonces $n+1 = d-1$ y $|V| \leq d-(d-1)$ por lo que para una secuencia s de longitud $d-1$ el mínimo número de variantes internas en las rutas que la producen esta dado por $|V| = d-(d-1) = 1$.

De este resultado podemos obtener las siguientes extensiones.

Corolario 1 *En un autómata celular lineal reversible, para una secuencia s de longitud n, tenemos que:*

$$V = \begin{cases} d-n & si\ n \leq d-1 \\ 1 & si\ n > d-1 \end{cases}$$

Ya que para una secuencia s de longitud $d-1$ se cumple que $|V| = 1$ entonces se tiene ya una única forma de regresar en la evolución de s; con esta observación podemos responder cual es la máxima longitud de la mínima vecindad inversa.

Corolario 2 *En un autómata celular lineal reversible, la máxima longitud de la mínima vecindad inversa es igual a $d-1$.*

Como los ancestros de una secuencia S con una longitud de $d-1$ fijan un único elemento en común, se cumple que estos tienen L extremos de de Bruijn distintos y R extremos de de Bruijn derechos distintos, entonces otra consecuencia del resultado es:

Corolario 3 *En un autómata celular lineal reversible, para una secuencia s de longitud $d-1$, el conjunto A_0 especifica un nodo de Welch izquierdo y el conjunto A_{d-1} especifica un nodo de Welch derecho.*

Este resultado nos presenta una nueva característica a observar en el diagrama de subconjuntos; cada ruta en este diagrama en realidad representa a un conjunto de rutas del diagrama de de Bruijn. Así en el caso de autómatas con índices de Welch distintos de 1 se verá que desde la clase completa todas las rutas irán decreciendo al nivel de Welch correspondiente y en el n-ésimo paso el mínimo número de variantes internas estará dado por $d-n$ si $n < d$ o 1 en otro caso, es decir, es permitido que el mínimo número de variantes internas se conserve si este número y la longitud de la ruta son relativamente pequeños en comparación con d.

A continuación se presentan algunos casos de estudio que ejemplifican el funcionamiento de este proceso.

6.5 Casos de Estudio

Para ilustrar el proceso se tomarán dos tipos de autómatas reversibles.

6.5.1 Caso $(4, 1/2)$.

Tomemos el autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $E728D718$.

	0	1	2	3
0	0	2	1	0
1	3	1	1	3
2	0	2	2	0
3	3	1	2	3

Tabla 6.12: Autómata $(4, 1/2)$ regla $E728D718$

Un ejemplo de la evolución de este autómta es el siguiente.

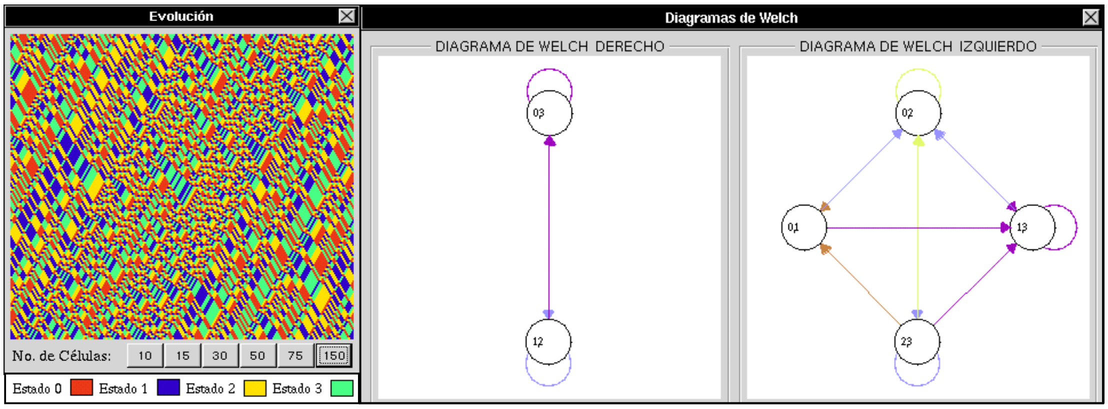


Figura 6.11: Autómata $(4, 1/2)$ regla $E728D718$ y sus diagramas de Welch

Este autómata tiene índices de Welch $L = R = 2$, tomemos los ancestros del estado 3.

10
13
30
33
3

Tabla 6.13: Ancestros del estado 3

Vemos en la Tabla 6.13 que los ancestros del estado 3 tienen al conjunto $V = \{0, 3\}$ con $|V| = 2$. Extendamos la secuencia a 32 y veamos sus ancestros.

101
132
301
332
32

Tabla 6.14: Ancestros de la secuencia 32

En la Tabla 6.14 se observa que todas las terminaciones derechas anteriores prosiguieron, con lo cual se conservó al conjunto $V = \{0, 3\}$ con $|V| = 2$. Ya que la ruta es de longitud 2 se cumple que $|V| \leq d - 2 = 2$, donde los estados 1, 2 marcan las diferencias distintas de V con respecto a A_0 y A_2 como indica el proceso. Veamos como se comportan los ancestros de 323.

1010
1013
3010
3013
323

Tabla 6.15: Ancestros de la secuencia 323

En la Tabla 6.15 ya no se pueden conservar todos los elementos de V al extender la secuencia; por lo tanto existe una disminución en el valor de $|V|$ teniendo que $|V| = 1$. De este modo ya se tiene un único nodo en común en los ancestros de la secuencia; los ancestros tienen así $L = 2$ formas de empezar, $M = 1$ variantes intermedias y $R = 2$ formas de finalizar, haciendo un total de $LR = d = 4$ ancestros.

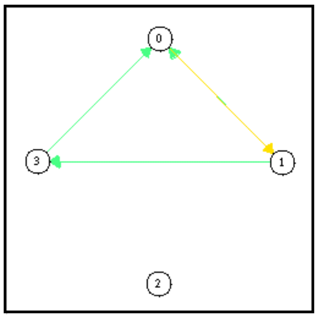


Figura 6.12: Rutas del diagrama de de Bruijn de la forma 323

En la Figura 6.12 el conjunto $A_0 = \{1, 3\}$ es un nodo izquierdo de Welch y el conjunto $A_3 = \{0, 3\}$ es un nodo derecho de Welch. Editando el diagrama de subconjuntos hagamos especial énfasis en la ruta 323 empezando desde la clase completa y observando como se comporta en su recorrido.

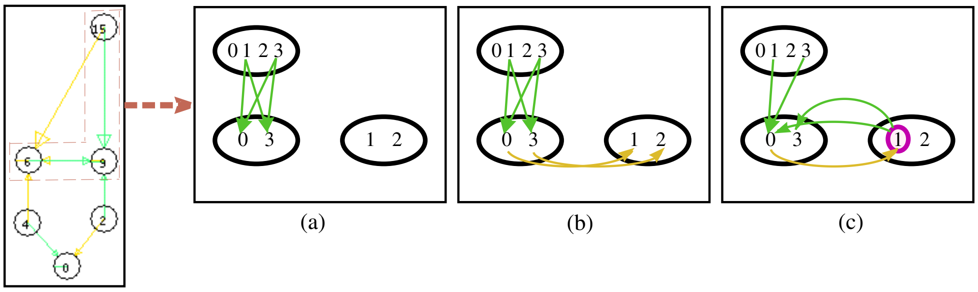


Figura 6.13: Ruta 323 en el diagrama de subconjuntos del autómata $(4, 1/2)$ regla $E728D718$

Se observa en la Figura 6.13 que:

(a) Al comenzar el recorrido existen 2 formas distintas de terminar.

(b) Dado que ya nos encontramos en el nivel de Welch $R = 2$, las dos formas terminales anteriores se mantienen como variantes internas y $|V| = 2$.

(c) La ruta se extiende a una longitud 3, si queremos que todas las variantes internas se conserven se deberá tener que $|V| = d - 3 = 1$ cosa que no ocurre, o se debe perder al menos una alternativa en el recorrido lo cual si sucede, conservando solamente al estado 1 como alternativa interna.

Las d rutas finales en el diagrama de subconjuntos muestran $L = 2$ nodos de de Bruijn izquierdos iniciales, $M = 1$ variantes internas y $R = 2$ nodos de de Bruijn derechos finales.

6.5.2 **Caso** $(6, 1/2)$.

Tomemos al autómata reversible $(6, 1/2)$ regla $VZ7GQK3IOMEGVZ7RI0$.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	3	3	4
1	1	1	5	5	1	5
2	4	2	2	2	4	3
3	0	4	0	3	3	0
4	1	1	5	5	1	5
5	2	3	2	4	4	2

Tabla 6.16: Autómata $(4, 1/2)$ regla $E728D718$

Una evolución de este autómata se presenta a continuación.

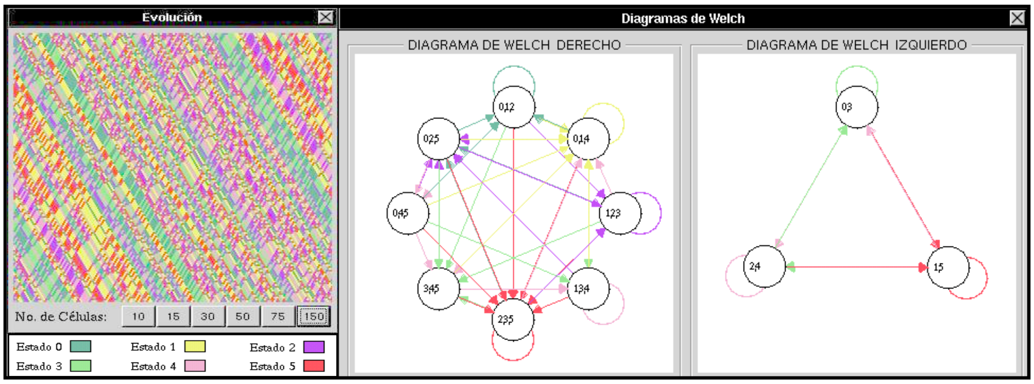


Figura 6.14: Autómata $(6, 1/2)$ regla $VZ7GQK3IOMEGVZ7RI0$ y sus diagramas de Welch

Este autómata tiene índices de Welch con $L = 2$ y $R = 3$; veamos los ancestros de la cadena 2

21
22
23
40
42
45
2

Tabla 6.17: Ancestros del estado 2

Para los ancestros de la Tabla 6.17 se tiene que el conjunto $V = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ y $|V| = 5$; también se cumple que existe un elemento de A_0 que no se presenta en A_1 en este caso el nodo 4. Formemos los ancestros de 24.

220
224
231
405
420
424
24

Tabla 6.18: Ancestros de la secuencia 24

En la Tabla 6.18 se puede observar ahora que el conjunto $V = \{2, 3, 0\}$ con $|V| = 3$; es decir, hubo un drecemento en el mínimo de alternativas internas.

Los ancestros de la secuencia 245 son:

2312
2313
2315
4052
4053
4055
245

Tabla 6.19: Ancestros de la secuencia 245

En la Tabla 6.19 los ancestros de la secuencia 245 muestran otro decremento en $|V| = 2$; existen dos alternativas para el conjunto V, ya sea $V = \{3, 0\}$ o $V = \{1, 5\}$. Los ancestros de la secuencia 2454 se presentan en seguida.

23120
23124
23131
40520
40524
40531
2454

Tabla 6.20: Ancestros de la secuencia 2454

La Tabla 6.20 expone que el valor de $|V| = 2$ se conservó como estaba en la Tabla 6.19. Si tomamos a $V = A_1 = \{3, 0\}$ se observa que para los demás conjuntos A_i, con $0 \leq i \leq 4$ e $i \neq 1$, los nodos de de Bruijn $2, 4, 1, 5$ se utilizan para hacer las 4 diferencias distintas de V con los demás conjuntos A_i. Esto también se manifiesta si tomamos a A_2 o a A_3 como V.

Cualquier extensión que se haga de esta cadena debe ya presentar a $|V| = 1$ pues el valor de de $|V|$ no se puede conservar por la longitud de la cadena, veamos estos ancestros.

231200	231310	231240	231203	231205	231312
231201	231311	231242	231204	231243	231313
231202	231314	231245	231241	231244	231315
405200	405310	405240	405203	405205	405312
405201	405311	405242	405204	405243	405313
405202	405314	405245	405241	405244	405315
24540	24541	24542	24543	24544	24545

Tabla 6.21: Ancestros de la secuencia 2454e para toda $e \in D$

Cada una de las distintas familias de ancestros en la Tabla 6.21 muestran un único elemento en común, y los conjuntos A_0 y A_5 de cada familia son nodos de Welch izquierdo y derecho respectivamente. En el diagrama de de Bruijn los ancestros de la cadena 24545 tienen la presente construcción.

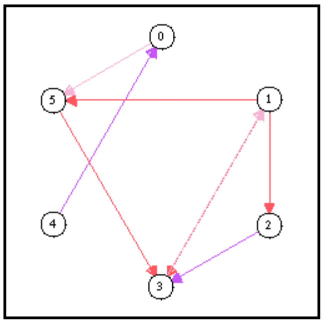


Figura 6.15: Rutas del diagrama de de Bruijn de la forma 24545

La Figura 6.15 presenta $L = 2$ nodos iniciales en el conjunto $A_0 = \{2, 4\}$, $M = 1$ variantes internas en el conjunto $A_3 = \{3\}$ y $R = 3$ nodos finales con el conjunto $A_5 = \{2, 3, 5\}$. La ruta 24545 en el diagrama de subconjuntos tiene la siguiente forma.

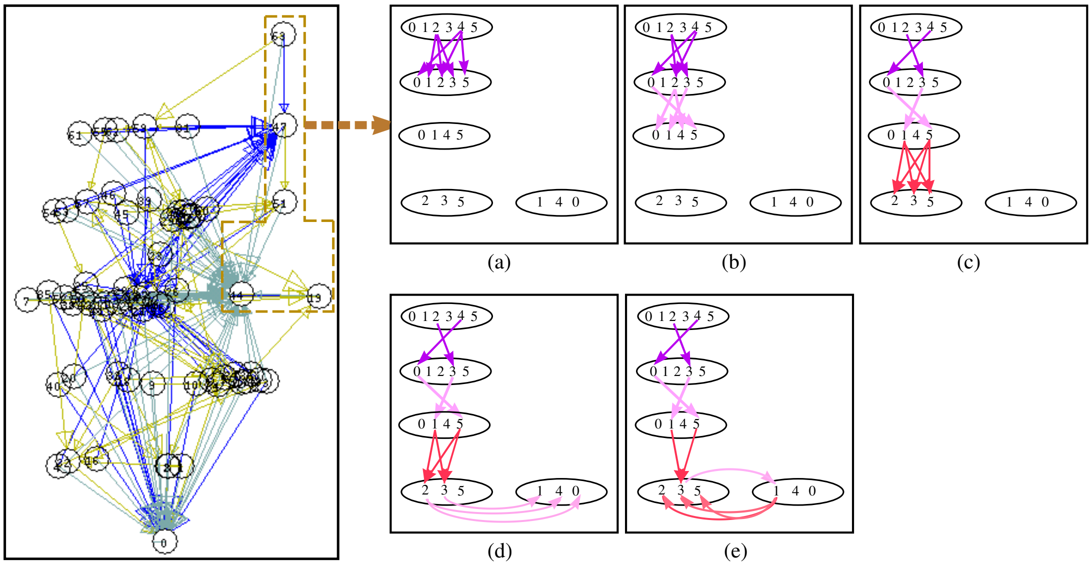


Figura 6.16: Ruta 24545 en el diagrama de subconjuntos del autómata $(6, 1/2)$ regla $VZ7GQK3IOMEGVZ7RI0$

En la Figura 6.16 podemos ver que:

(a) El valor de $|V| = 5$.

(b) El valor de $|V|$ decrece en dos elementos.

(c) El valor de $|V|$ decrece en un elemento.

(d) El número de alternativas internas se mantiene.

(e) Las alternativas internas convergen a un punto en común y el valor de $|V| = 1$.

Las d rutas representadas en la Figura 6.16 se constituyen en principio por $L = 2$ nodos de de Bruijn, un mínimo de $M = 1$ variantes internas y $R = 3$ nodos de de Bruijn finales.

6.6 Observaciones Finales

El problema de encontrar el máximo tamaño de la mínima vecindad inversa en un autómata celular lineal reversible tiene una solución simple cuando algunos de sus índices de Welch L o R es igual con 1. Esto lo hemos visto a través de el proceso de Nasu [Nasu 78] o el de Kari [Kari 92], lo siguiente sucede ya que podemos fijar en un extremo el elemento inverso en el conjunto de ancestros.

El tener un índice de Welch igual con 1 implica que para un autómata reversible con radio de vecindad $r = 1/2$, las columnas o los renglones son permutaciones del conjunto de estados, lo que sirve para definir una función entre lo que se produce y un lado de la vecindad.

El problema de los autómatas reversibles con índices de Welch distintos de 1 es que el elemento único se fija en las partes internas del conjunto de ancestros y no se puede definir una función entre la evolución de una vecindad y un extremo de la misma, ya que esta correspondencia no es biyectiva.

La evidencia práctica [Gómez 96] [Seck 98] apunta a que en ambos casos el máximo tamaño es igual a $d - 1$, donde d es el número de nodos del diagrama de de Bruijn correspondiente a cada autómata reversible. Tratar el problema de conocer la máxima longitud de la mínima vecindad inversa por medio del diagrama de de Bruijn no es nuevo, en el trabajo de Klaus Sutner [Sutner 97] encontramos que esto se discute pero construyendo el diagrama de parejas, por lo que el límite vuelve a ser d^2.

En este capítulo se ha presentado un resultado el cual indica que en el diagrama de de Bruijn, conforme una secuencia se recorre, sus rutas o bien van decreciendo en el mínimo número de sus variantes internas, o este mínimo número de variantes se puede conservar si es más pequeño que la longitud actual de la secuencia, y de aquí llegamos a resolver el problema.

Por supuesto, un mayor número de observaciones y análisis detallado es necesario para enriquecer este resultado, hay que señalar que el resultado actual es puramente cuantitativo, pues no indica en cual conjunto A_i se establece el elemento común.

Otro punto a notar es que tanto el resultado de Nasu, el de Kari y el presentado aquí no hacen un uso explícito de la teoría clásica desarrollada por Hedlund (Multiplicidad Uniforme e Indices de Welch) para atacar el problema, ya que las demostraciones de Nasu y Kari tienen mucha más influencia de la teoría de autómatas definidos desarrollada en [Perles 63] y la presentada aquí es una descripción cuantitativa del comportamiento del índice M.

Capítulo 7

Conclusiones

El énfasis en el estudio de los autómatas celulares lineales reversibles se debe al interés que existe en entender los sistemas dinámicos discretos, y en particular para comprender el comportamiento global de estos sistemas por medio de la iteracción de sus partes. Desde el punto de vista práctico este tipo de autómatas se han estudiado para su utilización en codificación de información [Gutowitz 93-2] [Gutowitz 93-1], o en la simulación de ciertos sistemas físicos, químicos o biológicos que muestran un comportamiento invertibe [Wolfram 86] [Preston 84] [Toffoli 87].

7.1 Comportamiento Reversible

Una caracterización del comportamiento reversible se ha presentado en este trabajo tomando como base la teoría de sistemas dinámicos de corrimiento desarrollada por Hedlund en [Hedlund 69]. Conforme esta base hemos tomado los trabajos posteriores de Nasu en [Nasu 78],[Nasu 79] y [Nasu 82] y de Kari en [Kari 92] y [Kari 96] los cuales explican este comportamiento por medio de teoría de gráficas y utilizando permutaciones en bloque y un corrimiento.

Lo que se ha logrado en este escrito es caracterizar el funcionamiento de estas permutaciones por medio de los conceptos de Multiplicidad Uniforme e Indices de Welch. Hemos comprendido como es que la Multiplicidad Uniforme y los índices multiplicativos de Welch deben trabajar para que la información contenida en cada evolución del autómata sólo se permute, con lo cual se conserva y se puede utilizar para regresar en la evolución del autómata simplemente aplicando la permutación en sentido inverso.

Un punto importante alcanzado es hacer este concepto extensivo a cualquier tipo de autómata reversible, no importando su número de estados, su tamaño de vecindad ni el valor de sus índices de Welch.

Se observa que estas permutaciones deben tener un orden muy específico; secuencias de estados similares tendrán permutaciones similares y cada elemento que compone un extremo permutación aparece el mismo número de veces que los demás elementos especificados para ese extremo, es decir, no cualquier permutación especifica a un autómata reversible.

Distintas permutaciones pueden representar al mismo tipo de autómata reversible; esto explica que, aunque en realidad existan un número muy grande de permutaciones para un caso dado, estas sólo representan a un número mucho menor de autómatas celulares lineales reversibles diferentes.

Un problema importante que también se aborda es el de la máxima longitud de la mínima vecindad inversa. Esto es importante para tener un límite en el cálculo de autómatas celulares reversibles de un tipo dado [Gómez 96] [Kari 92] [Seck 98] y explicar la complejidad de estos sistemas [Culik 87].

Si bien el valor de d^2 explica satisfactoriamente esta cuestión [McIntosh 91b] [Sutner 97], la evidencia práctica indica que este valor es mucho menor [Gómez 96] [Seck 98]. El uso de la teoría de autómatas definidos [Perles 63] [Nasu 78] [Kari 92] y relaciones de equivalencia establecen este límite en $d-1$ par el caso de autómatas con un ídice de Welch igual a 1. Aquí se ha presentado una prueba muy sencilla que usando un argumento cuantitativo, establece el mismo resultado para todo tipo de autómata.

7.2 Trabajo Futuro

Sin duda un acercamiento más teórico al tema puede arrojar resultados mejor definidos y precisos, en particular el uso de teoría de matrices [Das 92] en el análisis de las matrices de conectividad, o un acercamiento topológico cuidadoso; hasta ahora, muchos conceptos de dinámica simbólica se han tratado de utilizar para formalizar este tipo de sistemas sin haberlo logrado aún.

El cálculo de autómatas reversibles por medio de permutaciones en bloque ha permitido hacer este proceso más rápido en el sentido que ya no se construyen todos los posibles autómatas y se van descartando los que son reversibles o no, sino que en base a los resultados teóricos podemos construir directamente dichos sistemas.

Hemos visto también que todo tipo de autómata celular se puede simular por medio de uno con radio de vecindad igual a 1/2 [Boykett 97], por suspuesto, este proceso no es limpio dado que implica extender el número de estados, lo que trae consigo limitaciones prácticas para el cálculo de reversibles por medios computacionales, ya que mientras mayor sea el número de estados yøel tamaño de vecindad, más tiempo de cálculo será requerido para formar la permutación.

Un anaálisis cualitativo del comportamiento del índice M aún no se tiene, entender este comportamiento no solo en que medida se dá sino también en que lugar, enriquecerá en mucho la comprensión de estos sistemas.

Bibliografía

[Akari 78] Testsuo Akari, Shoichi Noguchi, *Bijective Global Funtions of Finite Cellular Automata with Complete Group-Graph Connection*, Systems • Computers • Controls, Vol 9, No. 2, pp 68-77, 1978.

[Amoroso 72] Serafino Amoroso y Yale N. Patt, *Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tesselation Structures*, Journal of Computer and System Sciences 6, pp 448-464, 1972.

[Boccara 93] N. Boccara, *Transformations of one-dimensional cellular automaton rules by translation-invariant local surjective mappings*, Physica D 68, pp 416-426, 1993.

[Boykett 97] Tim Boykett, *Comparism of Radius 1/2 and Radius 1 Paradigms in One Dimensional Reversible Cellular Automata*, http://www.algebra.uni-linz.ac.at/~tim/radiuscomp.ps.gz, Universidad Johannes Kepler, Linz, Austria, noviembre 1997.

[Codd 68] E. F. Codd, *Cellular Automata*, Academic Press, New York, 1968.

[Culik 87] Karel Culik II, *On Invertible Cellular Automata*, Complex Systems 1, pp 1035-1044, 1987.

[Das 92] Aloke K. Das, A. Sanyal, P. Palchaudhuri, *On Characterization of Cellular Automata with Matriz Algebra*, Information Sciences 61, pp 251-277, 1992.

[Dow 97] R. A. Dow, *Additive cellular automata and global injectivity*, Physica D 110, pp 67-91, 1997.

[Gardner 70] Martin Gardner, *Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game Life*, Scientific American, pp 120-123, October 1970.

[Golomb 67] Solomn W. Golomb, *Shift Register Sequences*, Holden-Day, Inc, San Francisco, 1967.

[Gómez 96] Jose Manel Gómez Soto y Harold V. McIntosh, *Los Indices de Welch en el Cálculo de Autómatas Celulares Reversibles*, XXIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, junio de 1996.

[Gutowitz 93-2] Howard A. Gutowitz, *A Massively Parallel Cryptosystem Based on Cellular Automata*, 1993, www.santafe.edu/ hag/.

[Gutowitz 93-1] Howard A. Gutowitz, *Cryptography with Dynamical Systems*, En: Cellular Automata and Cooperative Phenomena, Eds: E. Goles and N. Boccara, Kluwer Academic Press, 1993, www.santafe.edu/ hag/.

[Hillman 91] David Hillman, *The structure of reversible one-dimensional cellular automata*, Physica D 52, pp 277-292, 1991.

[Hedlund 69] Gustav A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Mathematical Systems Theory 3, pp 320-375, 1969.

[Kari 92] Jarkko Kari, *On the Inverse Neighborhoods of Reversible Cellular Automata*, en Lindenmayer Systems, pp 477-495, Springer, Berlin, 1992.

[Kari 96] Jarkko Kari, *Representation of Reversible Cellular Automata with Block Permutations*, Mathematical Systems Theory 29, pp 47-61, 1996.

[Kari 92] Jarkko Kari, *Reversibility of* 2*D cellular automata is undecidible*, en Cellular automata: theory and experiment (Los Alamos, NM, 1989), Physica D 45, No. 1-3, pp 379-385, 1990.

[Kari 92] Jarkko Kari, *Reversibility and surjectivity problems of cellular automata.*, Journal of Computer and System Sciences 48, No. 1, pp 149-182, 1994.

[Kotoh 80] Kaoru Kotoh, Hisao Yamada, *An Incompleteness Problem on a Tessellation Automaton with Injective Functions*, Systems • Computers • Controls, Vol. 11, No. 3, pp 66-74, 1980.

[Manzini 98] Giovanni Manzini, Luciano Margara, *invertible Linear Cellular Automata over Z_m: Algorithmic and Dynamical Aspects*, Journal of Computer and System Sciences 56, pp 60-67, 1998.

[Maruoka 76] Akira Maruoka, Masayuki Kimura, *Condition for Inyectivity of Global Maps for Tesellation Automata*, Information and Control 32, pp 158-162, 1976.

[McIntosh 87] Harold V. McIntosh, *Linear Cellular Automata*, Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla, 1987.

[McIntosh 91a] Harold V. McIntosh, *Linear Cellular Automata via de Bruijn Diagrams*, por publicarse.

[McIntosh 91b] Harold V. McIntosh, *Reversible Cellular Automata*, por publicarse.

[McIntosh WWW] El sistema NXLCAU y gran trabajo relacionado con autómatas celulares se puede encontrar en la página personal del Dr. McIntosh cuya dirección es: *delta.cs.cinvestav.mx/˜mcintosh.*

[Moore 62] Edward F. Moore, *Machine models of self reproduction*, American Mathematical Society Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 14, pp17-33, 1962.

[Nasu 78] Masakazu Nasu, *Local Maps Inducing Surjective Global Maps of One-Dimensional Tessellation Automata*, Mathematical Systems Theory 11, pp 327-351, 1978.

[Nasu 79] Masakazu Nasu, *Indecomposable Local Maps of Tessellation Automata*, Mathematical Systems Theory 13, pp 81-93, 1979.

[Nasu 82] Masakazu Nasu, *Uniformly Finite-to-One and Onto extensions of Homomorphisms between strongly connected graphs*, Discrete Mathematics 39, pp 171-197, 1982.

[Perles 63] M. Perles, M.O. Rabin, E. Shamir, *The Theory of Definite Automata*, IEEE Transactions on Electronic Computers, EC-12, pp 233-243, 1963.

[Preston 84] Kendall Preston, Jr. y Michael J. B. Duff, *Modern Cellular Automata, Theory and Applications*, Plenum Press, New York, 1984.

[Richardson 72] Daniel Richardson, *Tessellations with Local Transformations*, Journal of Computer and System Sciences 6, pp 373-388, 1972.

[Seck 98] Juan Carlos Seck Tuoh Mora, *Autómatas Celulares Lineales Reversibles*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 1998.

[Sutner 97] Klaus Sutner, *Linear Cellular Automata and de Bruijn Automata*,www.cs.cmu.edu/afs /cs.cmu.edu/user/sutner/www/index.html, Carnegie Mellon University, Pittsburgh.

[Toffoli 87] Tommaso Toffoli, Norman Margolus *Cellular Automata Machines* The MIT Press, Cambridge Massachusetts, 1987.

[von Neumann 66] John von Neumann, *Theory of Self-reproducing Automata (edited and completed by A. W. Burks)*, University of Illinois Press, 1966.

[Voorhes 96] Burton H. Voorhees, *Computational Analysis of One-Dimensional Cellular Automata*, World Scientific Publishing, Singapore, 1996.

[Digital Webster] Webster's Ninth New Collegiate Dicttionary and Webster's Collegiate Thesaurus, First Digital Edition, 1992.

[Wolfram 86] Stephen Wolfram (Ed.), *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Press, Singapore, 1986.

[Wolfram 94] Stephen Wolfram, *Cellular Automata and Complexity*, Addison-Wesley, 1994.

Lista de Figuras

1.1 Vecindad de von Neumann 2
1.2 Vecindad de Moore 2
1.3 Ejemplo de una evolucion de Life 3
1.4 Clases de Wolfram 3
1.5 Mecanismo de evolución de un autómata celular lineal tanto en vecindades impares como pares. 4

2.1 Ejemplo de una evolución del autómata $(4, 1/2)$ regla $342917C6$ 9
2.2 Diagrama de de Bruijn y su representación matricial para la regla $342917C6$ 10
2.3 Ancestros de la cadena 20 en el diagrama de de Bruijn 10
2.4 Diagrama de parejas del autómata $(4, 1/2)$ regla $342917C6$ 10
2.5 Ancestros de la secuencia $03 \ldots 03$ 11
2.6 Diagrama de subconjuntos del autómata $(4, 1/2)$ regla $342917C6$ 11
2.7 La configuración 3333 pertenece al jardín del Edén 12

3.1 Autómata $(2, 1/2)$ reversible, cuya regla original es 3 y regla inversa 5. De una configuración inicial, evoluciona a una configuración dada tal que aplicando la regla inversa se pueda retornar a la configuración original 14
3.2 El mapeo biyectivo entre configuraciones globales define un autómata celular reversible 14
3.3 $\phi^{-1}(S) = \mathcal{A}$ y $\phi^{-1}(SK) = \mathcal{A}K$ 16
3.4 Si $|\phi^{-1}(Ss)| > n$ para alguna $s \in K$ no se cumple que $|\phi^{-1}(SK)| = nk$ 16
3.5 Ancestros de las secuencias $S\mathcal{E}S$ 17
3.6 El total de ancestros de $S\mathcal{E}S$ es nk^{2r} 17
3.7 Ancestros de S_i, en donde $M = 1$ 19
3.8 Ancestros de la secuencia S_iS_j con $|\mathcal{L}_i| = L$ y $|\mathcal{R}_j| = R$ 20
3.9 Ancestros de S con $|\mathcal{L}_i| \leq L$ y $|\mathcal{R}_i| \leq R$ 20
3.10 Si $| \mathcal{I}_i |< L$ entonces $| \mathcal{I}_i || \mathcal{D}_i |< LR = k^{2r}$ contradiciendo a la multiplicidad uniforme 21
3.11 Extensiones de S siguen conservando el valor de los índices L y R 21
3.12 Si $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{I}_j = \emptyset$ entonces la cadena pertenece al jardín del edén y el autómata no es reversible 21
3.13 Si $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{I}_j > 1$ entonces la cadena tiene más ancestros que k^{2r} contradiciendo la multiplicidad uniforme 22
3.14 Autómata celular lineal reversible $(4, 1/2)$ regla $BB991133$ 26
3.15 Ancestros de diversas cadenas 26
3.16 Indices de Welch para los ancestros del autómata $(4, 1/2)$ 26
3.17 Diagrama de de Bruijn del autómata reversible $(4, 1/2)$, regla $BB991133$ 26
3.18 Rutas posibles de la secuencia 00 27
3.19 Diagrama de Parejas del autómata reversible $(4, 1/2)$, regla $BB991133$ 27
3.20 Diagrama de Parejas editado mostrando solamente sus ciclos 27
3.21 Diagramas de subconjuntos del autómata reversible $(4, 1/2)$, regla $BB991133$ 28
3.22 Diagramas de Welch del autómata $(4, 1/2)$ regla $BB991133$ 28

3.23 Rutas de la secuencia 0 en los diagramas de Welch 28

4.1 Autómata $(2, 1)$ regla 204 32
4.2 Elementos de L_ϕ y R_ϕ 33
4.3 Composición de dos reglas de evolución 35
4.4 Composición de las reglas 204 y 15 en el autómata $(2, 1)$ 35
4.5 Permutación π de un bloque de tamaño $6r$ 36
4.6 Representación del funcionamiento de un autómata reversible por medio de dos permutaciones en bloque y un corrimiento 37
4.7 Evolución de un autómata $(2, 1)$ regla 204 37
4.8 Funcionamiento de las permutaciones en bloque en el autómata $(2, 1)$ regla 204 . . . 38
4.9 Aplicando p_1 a una configuración inicial aleatoria 38
4.10 Aplicando p_2^{-1} después de p_1 con un corrimiento de 3 posiciones 38
4.11 Evolución final producida por dos permutaciones en bloque 39
4.12 Evolución de un autómata $(2, 1)$ regla 240 42
4.13 Permutación en bloque p_1 sobre la configuración inicial 42
4.14 Permutación p_2^{-1} con un corrimiento de tamaño 2 42
4.15 Funcionamiento de un autómata $(2, 1)$ regla 240 por medio de dos permutaciones en bloque 42
4.16 Evolución de un autómata reversible por medio de dos permutaciones en bloque y un corrimiento de tamaño 1 44
4.17 Evolución de un autómata $(2, h)$ regla 12 46
4.18 Permutación en bloque p_1 sobre la configuración inicial 46
4.19 Permutación en bloque p_2^{-1} después de p_1 con un corrimiento igual a 1 equivalente a una longitud de $3r$ 46
4.20 Evolución de un autómata $(2, 1)$ con regla 15, aplicando las permutaciones en bloque 48
4.21 Autómata $(4, 1/2)$ con regla de evolución $F5A0F5A0$, aplicando las permutaciones en bloque . . . 50
4.22 Autómata reversible $(6, 1)$ resultado del producto cartesiano de un autómata $(2, 1)$ y un autómata $(3, 1)$ 52
4.23 Evolución del autómata $(6, 1)$ 54
4.24 Evolución del autómata $(6, 1)$ 54

5.1 Estructura de un autómata reversible con $r = 1/2$ 58
5.2 Estructura de un autómata reversible con $r = 1/2$ 59
5.3 Tres células y su evolución 59
5.4 Vecindad inversa formada por $(e_r e_l)$ 60
5.5 Bloques que forman los conjuntos L_ϕ y R_ϕ 61
5.6 Permutación p_1 que se especifica con los bloques $(a_l e_l)$ y $(a_r e_r)$ 62
5.7 Permutación p_2 que se especifica con los bloques $(e_r a_r)$ y $(e_l a_l)$ 62
5.8 Diagramas de Welch del autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $FFAA5500$ 64
5.9 Evolución del autómata celular reversible $(4, 1/2)$ regla $FFAA5500$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2 64
5.10 Diagramas de Welch del autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $5F0A5F0A$ 65
5.11 Evolución del autómata celular reversible $(4, 1/2)$ regla $5F0A5F0A$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2 65
5.12 Diagramas de Welch del autómata reversible $(4, 1/2)$ regla $BB991133$ 66
5.13 Evolución del autómata celular reversible $(4, 1/2)$ regla $BB991133$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2 66
5.14 Diagramas de Welch del autómata reversible $(6, 1/2)$ regla $0CESMLSYZ7VZ7DE0IL$ 67
5.15 Evolución del autómata celular reversible $(6, 1/2)$ regla $0CESMLSYZ7VZ7DE0IL$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2 67
5.16 Diagramas de Welch del autómata reversible $(6, 1/2)$ regla $RRRPPPHHHHHH111333$ 68

5.17 Evolución del autómata celular reversible $(6,1/2)$ regla $RRRPPPHHHHHH111333$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2 68
5.18 Diagramas de Welch del autómata reversible $(12,1/2)$ 70
5.19 Evolución del autómata celular reversible $(12,1/2)$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2 70
5.20 Diagramas de Welch del autómata reversible $(12,1/2)$ 72
5.21 Evolución del autómata celular reversible $(12,1/2)$ aplicando ϕ y utilizando las permutaciones en bloque p_1 y p_2 72
5.22 Autómata $(2,1/2)$ regla C 74
5.23 Evolución del autómata $(2,1/2)$ con permutaciones en bloque 74
5.24 Evolución del autómata $(2,1/2)$ con distintas permutaciones en bloque 75

6.1 Secuencia formada concatenando el estado 2 y sus ancetros 76
6.2 Diagrama de de Bruijn del autómata celular lineal reversible $(4,1/2)$ regla $1B2D1E2D$ 77
6.3 Diagrama de parejas del autómata celular lineal reversible $(4,1/2)$ regla $1B2D1E2D$ 77
6.4 Diagramas de subconjuntos del autómata $(4,1/2)$ regla $1B2D1E2D$ y su reflexión . 78
6.5 Diagramas de Welch del autómata celular lineal reversible $(4,1/2)$ regla $1B2D1E2D$ 78
6.6 Diagramas de parejas y de subconjuntos del autómata $(4,1/2)$ regla $CCA566CC$ . . 83
6.7 Estructura de los ancestros de una cadena en el diagrama de de Bruijn para un autómata reversible 85
6.8 Si $A_0 = A_1$ entonces no existe un elemento único común en las rutas 85
6.9 Si $A_i = A_j$ la secuencia de $\{s_j \ldots s_i\}^*$ o $\{s_i \ldots s_j\}^*$)tendrá más de una variante interna posible 86
6.10 Si $A_j = A_k$ la secuencia de $\{s_j \ldots s_k\}^*$ tendrá más de una variante interna posible . 86
6.11 Autómata $(4,1/2)$ regla $E728D718$ y sus diagramas de Welch 88
6.12 Rutas del diagrama de de Bruijn de la forma 323 89
6.13 Ruta 323 en el diagrama de subconjuntos del autómata $(4,1/2)$ regla $E728D718$ . . 89
6.14 Autómata $(6,1/2)$ regla $VZ7GQK3IOMEGVZ7RI0$ y sus diagramas de Welch . . 90
6.15 Rutas del diagrama de de Bruijn de la forma 24545 91
6.16 Ruta 24545 en el diagrama de subconjuntos del autómata $(6,1/2)$ regla $VZ7GQK3IOMEGVZ7RI0$ 92

Lista de Tablas

2.1 Características generales de un autómata $(4, 1/2)$ 9
2.2 Autómata $(4, 1/2)$ con regla de evolución $342917C6$ 9
2.3 Características del diagrama de de Bruijn en un autómata $(4, 1/2)$ 10
2.4 Clasificación de los subconjuntos de nodos del diagrama de de Bruijn del autómata $(4, 1/2)$ 11

4.1 Regla de evolución 204 de un autómata $(2, 1)$ 33
4.2 Ancestros de las secuencias de longitud 4 33
4.3 Conjuntos L_{204} y R_{204} 34
4.4 Regla 204 y 15 del autómata $(2, 1)$ 35
4.5 Mapeo b_L y b_R para el autómata $(2, 1)$ regla 204 37
4.6 Permutaciones π_1 y π_2 para la regla 204 38
4.7 Regla 12 y 10 del autómata $(2, 1/2)$ 39
4.8 Regla 240 y 170 del autómata $(2, 1)$ 39
4.9 Mapeo $b_{L_{240}}$ 41
4.10 Mapeo $b_{R_{240}}$ 41
4.11 Mapeo $b_{R_{170}}$ 41
4.12 Mapeo $b_{L_{170}}$ 42
4.13 Autómata $(2, 1/2)$ regla 12 y regla 10 45
4.14 Secuencias de tamaño 2 y sus ancestros 45
4.15 Conjuntos L_{12} y R_{12} 45
4.16 Conjuntos $b_{L_{12}}$ y $b_{R_{12}}$ 45
4.17 Permutaciones π_1 y π_2 para la regla 12 46
4.18 Autómata $(2, 1)$ regla 15 y regla 85 47
4.19 $|L_{15}| = Lk^{2r} = 4$ y $|R_{15}| = Rk^{2r} = 16$ 47
4.20 Mapeos $b_{L_{15}}$ y $b_{R_{15}}$ 47
4.21 Permutaciones π_1 y π_2 para la regla 15 48
4.22 Autómata $(4, 1/2)$, regla $F5A0F5A0$ y regla $EEEE4444$ 49
4.23 Conjuntos $L_{F5A0F5A0}$ y $R_{F5A0F5A0}$ 49
4.24 Mapeos $b_{L_{F5A0F5A0}}$ y $b_{R_{F5A0F5A0}}$ 49
4.25 Permutaciones π_1 y π_2 50
4.26 Autómata reversible $(6, 1)$ resultado del producto cartesiano de un autómata $(2, 1)$ regla 170 (corrimiento a la izquierda) y un autómata $(3, 1)$ regla $QQQDDD000$ (corrimiento a la derecha). 51
4.27 Matriz de conectividad de la cadena 222 del autómata $(6, 1)$. 52
4.28 Matrices de conectividad de las cadenas 105 y 043 respectivamente del autómata $(6, 1)$. 53
4.29 Permutaciones π_1 y π_2 para algunos bloques del autómata $(6, 1)$ 54

5.1 Autómata $(2, 1)$ regla 111 57
5.2 Renombrando las secuencias de tamaño 2 con nuevos estados 57
5.3 Secuencias de tamaño 4 y su evolución 57
5.4 Agrupación de las secuencias en bloque de tamaño 2 57

5.5 Sustitución de los bloques de tamaño 2 por los nuevos estados 57
5.6 Autómata $(4, 1/2)$ que simula el comportamiento del autómata $(2, 1)$ 58
5.7 Secuencias de tamaño 2 que evolucionan con la regla $(4, 1/2)$ 58
5.8 Simulación del autómata $(2, 1)$ por medio de la regla $(4, 1/2)$ 58
5.9 Papel que juegan las celulas de los bloques $(a_l e_l)$ y $(a_r e_r)$ para la regla original y la regla inversa . 61
5.10 Autómata reversible $(4, 1/2)$ regla original $FFAA5500$ y regla inversa $E4E4E4E4$. 62
5.11 Permutaciones p_1 y p_2 para el autómata $(4, 1/2)$ 63
5.12 Representación abreviada de las permuatciones p_1 y p_2 del autómata $(4, 1/2)$ 63
5.13 Autómata $(4, 1/2)$ regla original $5F0A5F0A$ y regla inversa $4444EEEE$ 65
5.14 Permutaciones p_1 y p_2 para el autómata $(4, 1/2)$ 65
5.15 Autómata $(4, 1/2)$ regla original $BB991133$ y regla inversa $28F528F5$ 66
5.16 Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(4, 1/2)$ 66
5.17 Autómata $(6, 1/2)$ regla original $0CESMLSYZ7VZ7DE0IL$ y regla inversa $L16GTHL16L16GTHGTH$ 67
5.18 Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(6, 1/2)$ 67
5.19 Autómata $(6, 1/2)$ regla original $RRRPPPHHHHHH111333$ y regla inversa $G2ONX7G2ONX7G2ONX7$ 68
5.20 Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(6, 1/2)$ 68
5.21 Autómata reversible $(12, 1/2)$ 69
5.22 Permutación p_1 y p_2 del autómata $(12, 1/2)$ 69
5.23 Autómata reversible $(12, 1/2)$ 71
5.24 Permutación p_1 y p_2 del autómata $(12, 1/2)$ 71
5.25 Autómata $(2, 1/2)$ regla original C y regla inversa A 73
5.26 Conjuntos L_C y R_C 73
5.27 Mapeos b_{L_C} y b_{R_C} 74
5.28 Permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(2, 1/2)$ 74
5.29 Nuevo mapeo b_{L_C} 75
5.30 Nuevas permutaciones p_1 y p_2 del autómata $(2, 1/2)$ 75

6.1 Autómata $(4, 1/2)$ regla $1B2D1E2D$ 76
6.2 Autómata $(4, 1/2)$ regla $FFA91640$ 80
6.3 Clases de equivalencia ρ_0 81
6.4 Clases de equivalencia ρ_1 81
6.5 Cadenas de longitud 2 y sus ancestros 81
6.6 Clases de equivalencia ρ_2 81
6.7 Cadenas de longitud 3 y sus ancestros 82
6.8 Clase de equivalencia ρ_3 82
6.9 Autómata $(4, 1/2)$ regla $CCA566CC$ 83
6.10 Ancestros de las cadenas $\{0 \ldots 02\}$ 84
6.11 Ancestros de las cadenas $\{1 \ldots 12\}$ 84
6.12 Autómata $(4, 1/2)$ regla $E728D718$ 88
6.13 Ancestros del estado 3 88
6.14 Ancestros de la secuencia 32 88
6.15 Ancestros de la secuencia 323 89
6.16 Autómata $(4, 1/2)$ regla $E728D718$ 90
6.17 Ancestros del estado 2 90
6.18 Ancestros de la secuencia 24 90
6.19 Ancestros de la secuencia 245 91
6.20 Ancestros de la secuencia 2454 91
6.21 Ancestros de la secuencia $2454e$ para toda $e \in D$ 91