

# Gliders en autómatas celulares de una dimensión

Juan Carlos Seck Tuoh Mora \*  
Sergio V. Chapa Vergara †  
Harold V. McIntosh ‡  
Genaro Juárez Martínez§

Diciembre 4, 2001

## Resumen

El estudio de los autómatas celulares con comportamientos complejos ha tomado mucho interés, tal es el caso del autómata celular unidimensional regla 110. Este autómata celular ha sido analizado extensamente por Matthew Cook, mostrando la complejidad de estructuras periódicas que se desplazan en un fondo periódico. En este trabajo se muestra la utilidad de los diagramas de de Bruijn para detectar y estudiar dichas estructuras, mostrando algunos ejemplos interesantes producto de la interacción de las mismas. Se comparan estos resultados con algunos de los obtenidos por Cook.

Palabras clave: Autómata celular, teoría de gráficas

---

\*Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, Sección Computación, correo-e: seck@computacion.cs.cinvestav.mx

†Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, Sección Computación, correo-e: schapa@cs.cinvestav.mx

‡Departamento de Aplicación de Microcomputadoras, Intituto de Ciencias, UAP, correo-e: mcintosh@servidor.unam.mx, Página personal: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>

§Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, Sección Computación, correo-e: genaro@enigma.red.cinvestav.mx y genarojm@correo.unam.mx

## Contenido

1	Introducción	3
2	Elementos de un autómata celular en una dimensión	3
3	Diagramas de de Bruijn	4
4	Características de la regla 110	5
5	Detección de estructuras periódicas	7
6	Contador binario con el glider E	11
7	Conclusiones	12

## 1 Introducción

Un área de interés que ha tomado importancia en los últimos años es el análisis de sistemas en los cuales la interacción local de sus partes es muy simple, pero esta interacción induce un comportamiento global capaz de soportar operaciones no triviales, este tipo de sistemas son conocidos como sistemas complejos.

El estudio de sistemas complejos se ha extendido en diferentes ramas de la ciencia, entre ellos se encuentra el modelo con autómatas celulares. Estos son sistemas dinámicos discretos que en base a interacciones locales muy sencillas y fijas, evolucionan a través del tiempo. Un ejemplo interesante de este tipo de sistemas es el autómata celular en una dimensión regla 110.

Matthew Cook hace todo un análisis de esta regla de evolución mostrando algunos resultados interesantes e importantes en [Cook98]. Por su parte Harold V. McIntosh presenta un enfoque diferente en [Mc99] y [Mc00], describiendo el comportamiento de la regla 110 como un problema de cubrir el espacio de evoluciones con polígonos.

Stephen Wolfram en [Wolf84] menciona que la regla 110 puede soportar comportamientos complejos, por su parte Wentian Li y Mats G. Nordahl en [LN92] realizan una clasificación de las estructuras periódicas que presenta la regla 110.

En este trabajo se muestra la utilidad y los alcances que tienen los diagramas de de Bruijn para detectar y analizar algunas de las estructuras periódicas que produce la regla 110. Se muestra además un ejemplo de la interacción de algunas estructuras periódicas las cuales producen incrementos y decrementos bajo ciertas condiciones.

El trabajo está organizado de la siguiente manera, la sección 2 presenta los elementos que conforman un autómata celular unidimensional, la sección 3 explica como la interacción local del autómata puede describirse por medio de diagramas de de Bruijn. La sección 4 describe las características de la regla 110 y algunas estructuras periódicas que produce, la sección 5 explica como estas estructuras pueden ser detectadas y analizadas con diagramas de de Bruijn. La sección 6 utiliza parte de estas estructuras para ejemplificar la acción de un contador binario y la sección 7 expone las conclusiones del trabajo.

## 2 Elementos de un autómata celular en una dimensión

Para construir un autómata celular unidimensional se toma un arreglo lineal de células, donde cada una de ellas tienen un elemento de un conjunto de estados  $K$ . Una célula tendrá  $r$  vecinos a la izquierda y  $r$  vecinos a la derecha, formando así una *vecindad*. Una función de transición  $\varphi$  evaluará cada una de las vecindades para determinar el nuevo valor de la célula central en la siguiente generación.

Para hacer referencia a un tipo de autómata celular unidimensional se hace uso de la notación definida por Stephen Wolfram [Wolf86]. Se denota a  $k$  como la cardinalidad del conjunto de estados  $K$ , entonces la pareja  $(k, r)$  representa

el orden de los autómatas celulares, donde  $k$  es el número de estados y  $r$  el radio de vecindad.

Nótese que si el arreglo lineal es finito, no se tendrán vecindades completas en los extremos del mismo; para esto el arreglo puede ser tratado como un anillo, es decir, se concatena la célula inicial con la célula final y de esta forma se conserva la uniformidad en todas las vecindades, esto es conocido como sus condiciones a la frontera. Por conveniencia se trabajará con vecindades simétricas cada una centrada en su propia célula y no con vecindades irregulares.

De esta forma, un autómata celular en una dimensión de orden  $(k, r)$  consta de  $k$  estados,  $2r+1$  vecinos,  $k^{2r+1}$  vecindades y  $k^{k^{2r+1}}$  reglas de evolución, donde  $k$  y  $2r \in \mathbb{Z}^+$ .

El autómata celular regla 110 es de orden  $(2, 1)$ , es decir, consta de dos estados y un vecino a cada lado, la regla de evolución para cada una de las vecindades es:  $000 \rightarrow 0$ ,  $001 \rightarrow 1$ ,  $010 \rightarrow 1$ ,  $011 \rightarrow 1$ ,  $100 \rightarrow 0$ ,  $101 \rightarrow 1$ ,  $110 \rightarrow 1$  y  $111 \rightarrow 0$ .

### 3 Diagramas de de Bruijn

Históricamente los diagramas de de Bruijn fueron creados para representar y analizar el problema de tener un registro de corrimientos de las distintas secuencias de un conjunto de símbolos dado. Esta idea puede ser aplicada en autómatas celulares para el estudio de períodos, cuestionándose que secuencias de células pueden aparecer con evoluciones periódicas.

Los nodos del diagrama de de Bruijn son secuencias de tamaño  $2r$  de símbolos de  $K$ , las ligas dirigidas del diagrama describen como tales secuencias pueden traslapar donde los  $2r - 1$  símbolos finales del nodo inicial deben concordar con  $2r - 1$  símbolos iniciales del nodo final. De este modo, cada liga representa una vecindad completa del autómata. La matriz de incidencia del diagrama de de Bruijn se representa como:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad j = \begin{cases} ki \\ ki + 1 \\ \vdots \\ ki + k - 1 \end{cases} \pmod{k^{2r}}.$$

A través del diagrama de de Bruijn se pueden representar configuraciones o clases de configuraciones en un autómata celular, el etiquetado de cada liga se asocia con la vecindad que representa y su evolución especificada por la regla  $\varphi$ .

En estos términos deben existir  $k$  ligas de entrada en cada nodo y  $k$  ligas de salida en cada nodo, en total se tienen  $k^{2r}$  nodos unidos con  $k^{2r+1}$  ligas, correspondiendo a el total de vecindades. El diagrama de de Bruijn es totalmente regular aunque es asimétrico; el diagrama de de Bruijn para la regla 110 se muestra en la Figura 1.

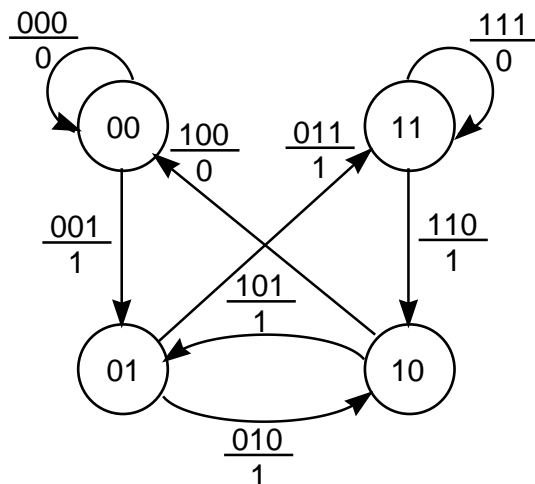


Figura 1: Diagrama de de Bruijn para la regla 110

## 4 Características de la regla 110

A finales de los 60's John Horton Conway presenta el autómata celular regla 2333, mejor conocido como "El juego de la vida". Este es un autómata celular binario y evoluciona en dos dimensiones con la vecindad de Moore [Gard70] [BCG82], es decir, para su evolución cada célula toma en cuenta sus vecinos tanto diagonales como ortogonales.

Cook menciona algunas similitudes entre la regla 110 y el juego de la vida, ya que ambas pueden soportar comportamientos complejos a través de la interacción de sus estructuras periódicas en el espacio de evoluciones [Mc90] [Jua00], pero una de sus principales diferencias es que el juego de la vida evoluciona sobre un fondo estable dominado por el estado nulo, mientras que la regla 110 sobre un fondo periódico llamado "ether" por Cook.

La regla 110 es similar a el juego de la vida en varios aspectos, ambas reglas tienen la propiedad de que si empiezan casi con cualquier configuración aleatoria, después de un tiempo dado el estado global del sistema mostrará comportamientos estables, por ejemplo la existencia de estructuras periódicas aisladas que se desplazan a través del tiempo o estructuras estacionarias que no se verán afectadas por otras estructuras en un tiempo infinito.

Para obtener alguna configuración en particular la configuración inicial puede ser definida con detalle, esto es lo que se hace comunmente para obtener algún comportamiento deseado. Un ejemplo de una evolución típica de la regla 110 la podemos ver en la Figura 2, donde se tiene un arreglo inicial de 480 células en 480 evoluciones y una densidad aleatoria de 0.5.

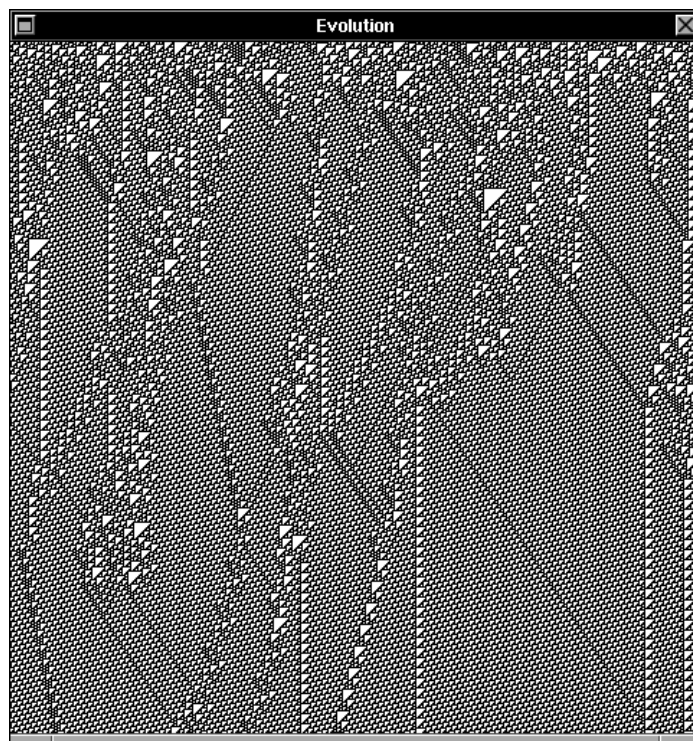


Figura 2: Evolución aleatoria de la regla 110

Como se puede ver en el espacio de evoluciones, existen zonas que muestran un comportamiento local complejo, sin embargo existen zonas que son estables o dominadas por el ether, es decir, el fondo periódico y por otro lado zonas donde viajan estructuras periódicas aisladas.

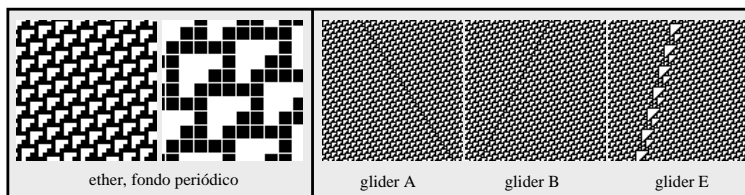


Figura 3: Fondo periódico y algunas estructuras periódicas

En la Figura 3 se ilustra en detalle primeramente el fondo periódico que domina en la regla 110 llamado ether, después las estructuras periódicas, glider<sup>1</sup> A, glider B y glider E respectivamente. La lista de gliders completa y sus características en general son detalladas en [Mc99] y [JM01].

<sup>1</sup>Un *glider* es una estructura periódica que se desplaza en el espacio de evoluciones

Hay que señalar que hablar de gliders en este contexto es algo subjetivo, ya que podemos formar casos en donde la evolución sea equilibrada entre la aparición de gliders y el ether, con lo que la identificación del ether no resulta tan evidente o peor aún que los gliders no permitan la existencia del ether como se ilustra en la Figura 4.

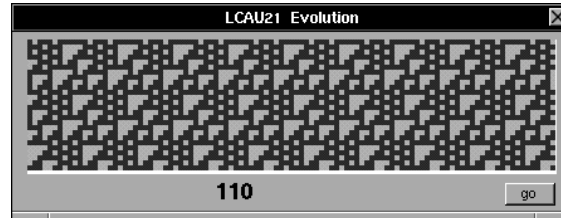


Figura 4: Gliders D1 sin el fondo periódico

## 5 Detección de estructuras periódicas

El diagrama de de Bruijn básico define los ancestros de una secuencia para una generación, sin embargo, podemos extender este proceso para un número  $t$  de generaciones, donde  $t \in \mathbb{N}$ . Para esto se tomará un mayor número de elementos para formar cada nodo del diagrama, en el caso  $(2, 1)$  en una generación cada vecindad consta de 3 elementos, para calcular la evolución en dos generaciones se tienen 5 elementos en cada vecindad, en general para cada generación serán necesarias vecindades de  $(2rt + 1)$  células.

Una forma de obtener estas estructuras periódicas a las que Cook denomina como gliders, es detectando los ciclos que existen en el diagrama de de Bruijn. La característica principal de estos gliders es que se desplazan en el espacio de evoluciones en un período dado, con dirección negativa (a la izquierda), positiva (a la derecha) o neutral.

Encontrar dichos gliders con el diagrama de de Bruijn consiste en analizar los ciclos que pueden formarse dentro del diagrama lo que indica la presencia de estructuras periódicas, si la secuencia que forman los nodos del ciclo se repite (no necesariamente en el mismo orden) después de  $t$  generaciones, entonces podemos conocer tanto la periodicidad como el desplazamiento del glider. Este proceso aprovecha que el diagrama de de Bruijn contiene toda la información de la evolución del autómata.

Existen tres tipos de comportamientos asociado a estos ciclos:

- I. *Ciclos aislados*. Los ciclos aislados cubren todo el plano con un solo tipo de estructura, un ejemplo de este tipo lo podemos observar en la Figura 5, esta formación se denomina ether en fase alfa [Mc99].

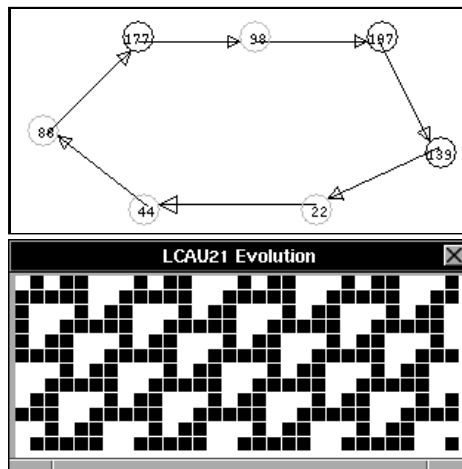


Figura 5: Ciclo aislado

- II. *Ciclos conectados en una dirección.* El espacio de evoluciones es cubierto por estructuras donde cada una ocupa un espacio independiente de las otras, lo que en el juego de la vida se conoce como fusibles como se ilustra en la Figura 6.

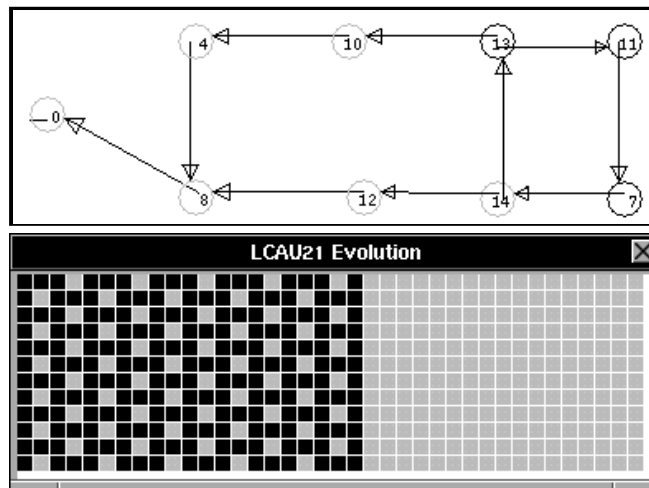


Figura 6: Ciclo fusible



III. *Ciclos conectados en ambas direcciones.* El espacio de evoluciones es cubierto por estructuras que se alternan, esta situación es la que se presenta en los gliders interactuando con el ether como se puede observar en la Figura 7.

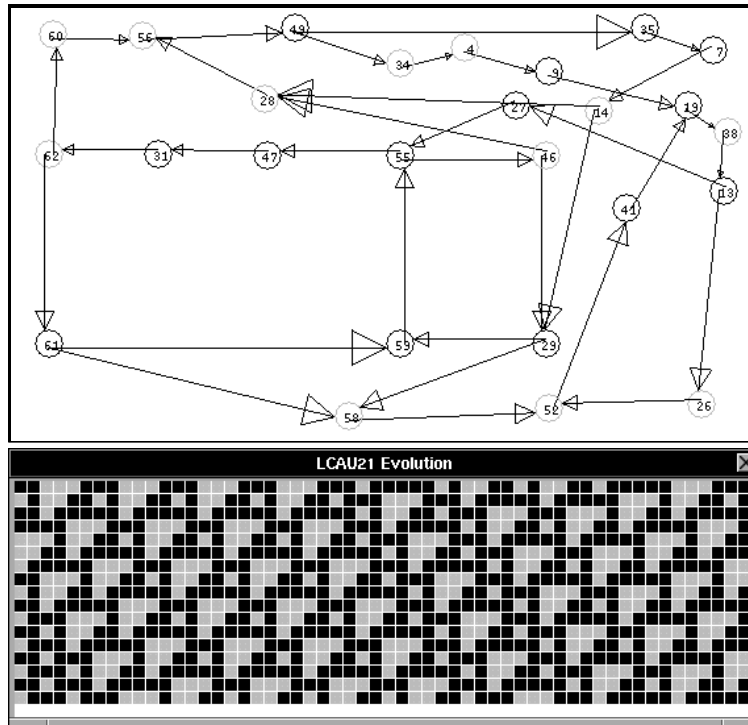


Figura 7: Ciclo conectado en ambas direcciones

Al extender el diagrama de de Bruijn para determinar el desplazamiento de las células en más generaciones, produce diagramas más grandes y complicados de calcular, por ejemplo en la Tabla 1 se calculan las vecindades de tamaño cinco y su evolución en dos generaciones.

En la Tabla 1 las vecindades parciales bajo el traslape 'o' forman secuencias de tamaño impar; aplicando la regla 110 sin tomar en cuenta la propiedad a la frontera, se generan vecindades de tamaño  $2r + 1$ . Se aplica nuevamente la regla en estas vecindades y se obtienen los estados en los cuales las vecindades de tamaño cinco evolucionan en dos pasos.

Por ejemplo la secuencia 0110 traslapa con la secuencia 1101 para formar la vecindad 01101, al aplicar la regla 110 se tiene que 01101 genera la secuencia 111 que es una vecindad más pequeña, si se vuelve aplicar la regla de evolución a la secuencia 111 se tiene el estado 0, entonces la vecindad 01101 evoluciona a 0 en dos generaciones.

Vecindades de tamaño cinco para la regla 110				
traslape	vecindad	generación 0	generación 1	generación 2
$(0, 0, 0, 0) \diamond (0, 0, 0, 0)$	00000	000	0	
$(0, 0, 0, 0) \diamond (0, 0, 0, 1)$	00001	001	1	
$(0, 0, 0, 1) \diamond (0, 0, 1, 0)$	00010	011	1	
$(0, 0, 0, 1) \diamond (0, 0, 1, 1)$	00011	011	1	
$(0, 0, 1, 0) \diamond (0, 1, 0, 0)$	00100	110	1	
$(0, 0, 1, 0) \diamond (0, 1, 0, 1)$	00101	111	0	
$(0, 0, 1, 1) \diamond (0, 1, 1, 0)$	00110	111	0	
$(0, 0, 1, 1) \diamond (0, 1, 1, 1)$	00111	110	1	
$(0, 1, 0, 0) \diamond (1, 0, 0, 0)$	01000	100	0	
$(0, 1, 0, 0) \diamond (1, 0, 0, 1)$	01001	101	1	
$(0, 1, 0, 1) \diamond (1, 0, 1, 0)$	01010	111	0	
$(0, 1, 0, 1) \diamond (1, 0, 1, 1)$	01011	111	0	
$(0, 1, 1, 0) \diamond (1, 1, 0, 0)$	01100	110	1	
$(0, 1, 1, 0) \diamond (1, 1, 0, 1)$	01101	111	0	
$(0, 1, 1, 1) \diamond (1, 1, 1, 0)$	01110	101	1	
$(0, 1, 1, 1) \diamond (1, 1, 1, 1)$	01111	100	0	
$(1, 0, 0, 0) \diamond (0, 0, 0, 0)$	10000	000	0	
$(1, 0, 0, 0) \diamond (0, 0, 0, 1)$	10001	001	1	
$(1, 0, 0, 1) \diamond (0, 0, 1, 0)$	10010	011	1	
$(1, 0, 0, 1) \diamond (0, 0, 1, 1)$	10011	011	1	
$(1, 0, 1, 0) \diamond (0, 1, 0, 0)$	10100	110	1	
$(1, 0, 1, 0) \diamond (0, 1, 0, 1)$	10101	111	0	
$(1, 0, 1, 1) \diamond (0, 1, 1, 0)$	10110	111	0	
$(1, 0, 1, 1) \diamond (0, 1, 1, 1)$	10111	110	1	
$(1, 1, 0, 0) \diamond (1, 0, 0, 0)$	11000	100	0	
$(1, 1, 0, 0) \diamond (1, 0, 0, 1)$	11001	101	1	
$(1, 1, 0, 1) \diamond (1, 0, 1, 0)$	11010	111	0	
$(1, 1, 0, 1) \diamond (1, 0, 1, 1)$	11011	111	0	
$(1, 1, 1, 0) \diamond (1, 1, 0, 0)$	11100	010	1	
$(1, 1, 1, 0) \diamond (1, 1, 0, 1)$	11101	011	1	
$(1, 1, 1, 1) \diamond (1, 1, 1, 0)$	11110	001	1	
$(1, 1, 1, 1) \diamond (1, 1, 1, 1)$	11111	000	0	

Tabla 1: Extensión de vecindades en el diagrama de de Bruijn con la regla 110

Las fracciones de vecindad compuestas por 4 células derivan 16 vértices para el diagrama de de Bruijn de este orden y 32 aristas que son las vecindades, despues se calcula la célula de evolución que le corresponde a cada vecindad de ese tamaño. Este método es el que se emplea para generar diagramas de de Bruijn extendidos. Un mayor detalle de este tipo de estudio se puede ver en [Mc99] y [Jua00].

El interés sobre la regla 110 surge a partir de los estudios realizados por Cook, uno de estos temas es la realización de ciertas operaciones lógicas en el espacio de evoluciones a través de la interacción de las estructuras periódicas.

## 6 Contador binario con el glider E

Para implementar la utilización de un registro y realizar la operación de incremento y decremento en la regla 110, se hará uso de tres tipos de gliders interactuando sobre el ether. El glider E representará el registro donde se realizarán las operaciones, el glider A realizará los decrementos al chocar con el glider E y el glider B realizará los incrementos al chocar con el glider E, cada uno de estos gliders pueden verse en la Figura 3.

La idea básica es que el glider  $E_n$  se transforme en un glider  $E_{n+1}$  originado por un incremento al chocar con un glider B, por otro lado el glider  $E_n$  se transforma en un glider  $E_{n-1}$  originado por un decremento al chocar con un glider A como se ilustra en la Figura 8.

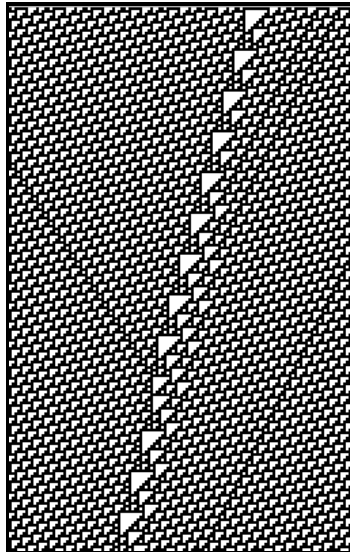


Figura 8: Registro con el glider E

En la Figura 8 se puede ver que viene un glider  $E_1$  viajando de derecha a izquierda, en un tiempo dado tiene un choque con un glider B, en ese momento el glider E se incrementa en uno y se transforma en  $E_2$ . Un instante después se incrementa con otro glider B para transformarse en  $E_3$ . El último choque es con un glider A que viene de izquierda a derecha y transforma el glider E decrementado su valor en uno, de manera que finalmente queda  $E_2$ .

Uno de los puntos a tomar en cuenta es el tipo de choques que existen entre los gliders, definidos por las fases en que estos vienen y sus puntos de contacto tal como se explica en [JM01]. De esta manera se sabe que el glider E siempre se incrementará con un glider B, pero no para todos los casos cuando se trata del glider A, por esa razón hay que definir bien las fases de los gliders en la configuración inicial.

## 7 Conclusiones

La regla 110 tiene un comportamiento muy interesante tal como lo menciona Cook. Hablar de gliders en este ambiente es solo una convención pues en realidad se debe ser cuidadoso para reproducir estas estructuras. El diagrama de de Bruijn y sus extensiones facilitan la localización y determinación de dichas estructuras, tanto gliders como ether, pues en este diagrama se encuentran todas las posibilidades que existen para formarlas.

El diagrama de de Bruijn permite representar cada una de la reglas de evolución para un autómata celular dado y sus extensiones permiten obtener todas las secuencias periódicas. La principal limitación de este análisis es que para más generaciones el diagrama de de Bruijn crece exponencialmente, lo que implica que para obtener gliders más grandes se necesitan de diagramas cada vez mayores y por lo tanto más recursos computacionales.

El caso del contador binario es en realidad muy sencillo y puede ser encontrado también en algunas configuraciones aleatorias ya que los choques que existen entre el glider A y el glider E no siempre producen el mismo resultado.

## Referencias

- [BCG82] Elwyn Berlekamp, John Conway and Richard Gut, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, vol. 2, chapter 25, 817–849, Academic Press, 1982.
- [Cook98] Matthew Cook, “Introduction to the activity of rule 110” (copyright 1994-1998 Matthew Cook), <http://w3.datanet.hu/~cook/Workshop/CellAut/Elementary/Rule110/110pics.html>, January 1998.
- [Gard70] Martin Gardner, “Mathematical Games - The fantastic combinations of John H. Conway’s new solitaire game Life”, *Scientific American* **223**, 120-123, 1970.
- [Jua00] Genaro Juárez Martínez, “Teoría del campo promedio en autómatas celulares similares a The Game of Life”, Tesis de Maestría, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, Octubre 2000.
- [JM01] Genaro Juárez Martínez and Harold V. McIntosh, “ATLAS: Collisions of gliders like phases of ether in rule 110”, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, August 2001.
- [LN92] Wentian Li and Mats G. Nordahl, “Transient behavior of cellular automaton rule 110”, *Physics Letters A* **166** 335-339 (1992).
- [Mc90] Harold V. McIntosh, “Wolfram’s Class IV and a Good Life”, *Physica D* **45**, 105–121, 1990.

- [Mc91] Harold V. McIntosh, “Linear Cellular Automata via de Bruijn Diagrams”, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, August 1991.
- [Mc99] Harold V. McIntosh, “Rule 110 as it relates to the presence of gliders”, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, January 1999.
- [Mc00] Harold V. McIntosh, “A Concordance for Rule 110”, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, April 2000.
- [Wolf84] Stephen Wolfram, “Universality and complexity in cellular automata”, *Physica D* **10**, 1-35, 1984.
- [Wolf86] Stephen Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Press, Singapore 1986.