

Margenes periódicos en la regla 110 con
correspondencia biyectiva en estructuras
periódicas que definen puntos de contacto y
velocidad máxima

Genaro Juárez Martínez
genaro@enigma.red.cinvestav.mx
genarojm@correo.unam.mx
Sección de Computación
CINVESTAV-IPN

Octubre 23, 2001

Resumen

En este trabajo se presenta como los márgenes del ether pueden definir márgenes periódicos en cualquier estructura que exista en el espacio de evoluciones, donde toda estructura tendrá al menos un margen impar o par, es decir, estos márgenes únicamente tomarán el valor de 3 ó 4. Además determina el desplazamiento y el período de una estructura de cualquier tipo, consecuentemente se puede comprobar que una estructura o fragmentos de ella tienen un desplazamiento máximo hacia la izquierda de $2/3$ y a la derecha de $1/2$, por lo tanto el desplazamiento de cualquier estructura en cualquier dirección se ve afectada por estos dos parámetros. Por otra parte, indica los puntos donde estas estructuras pueden chocar y los que no pueden ser puntos de contacto, finalmente se concluye que estos márgenes periódicos tienen una correspondencia biyectiva.

Contenido

1	Introducción	2
2	Margenes definidos por el ether	3
3	Estructuras con margenes periódicos	4
3.1	Glider A con velocidad $2/3$	4
3.2	Glider B con velocidad $-1/2$	5
3.3	Glider Bbar con velocidad $-1/2$	6
3.4	Glider Bbar8 con velocidad $-1/2$	7
3.5	Glider C1 con velocidad 0	8
3.6	Glider C2 con velocidad 0	9
3.7	Glider C3 con velocidad 0	10
3.8	Glider D1 con velocidad $1/5$	11
3.9	Glider D2 con velocidad $1/5$	12
3.10	Glider E con velocidad $-4/15$	13
3.11	Glider Ebar con velocidad $-4/15$	14
3.12	Glider F con velocidad $-1/9$	15
3.13	Glider G con velocidad $-1/3$	16
3.14	Glider H con velocidad $-9/46$	17
4	Conclusiones	18

1 Introducción

Regla 110 es un autómata celular unidimensional de orden $k = 2$ y $r = 1$, es decir, dos estados y un vecino a cada lado con respecto a una célula central. Este autómata celular ha sido extensamente analizado por Matthew Cook [1] encontrando comportamientos complejos a través de los gliders en el espacio de evoluciones. Por su parte Harold V. McIntosh realiza toda una investigación a partir de mosaicos en la regla 110 [4] [5], donde el espacio de evoluciones puede ser cubierto con dos tipos de triángulos de diferentes tamaños como si fueran mosaicos [2], la descripción de cada uno de los gliders se obtuvo de [3].

En este reporte se muestran algunas propiedades de las estructuras periódicas que existen en el espacio de evoluciones, encontrando características interesantes que puedan ayudar a explicar los comportamientos de la regla 110.

2 Margenes definidos por el ether

El ether esta constituido por un mosaico T3 beta [4] [3], esta estructura periódica es la que sirve de fondo en el espacio de evoluciones para la regla 110. El ether puede tener dos tipos de desplazamientos como se muestra en la Figura 1.

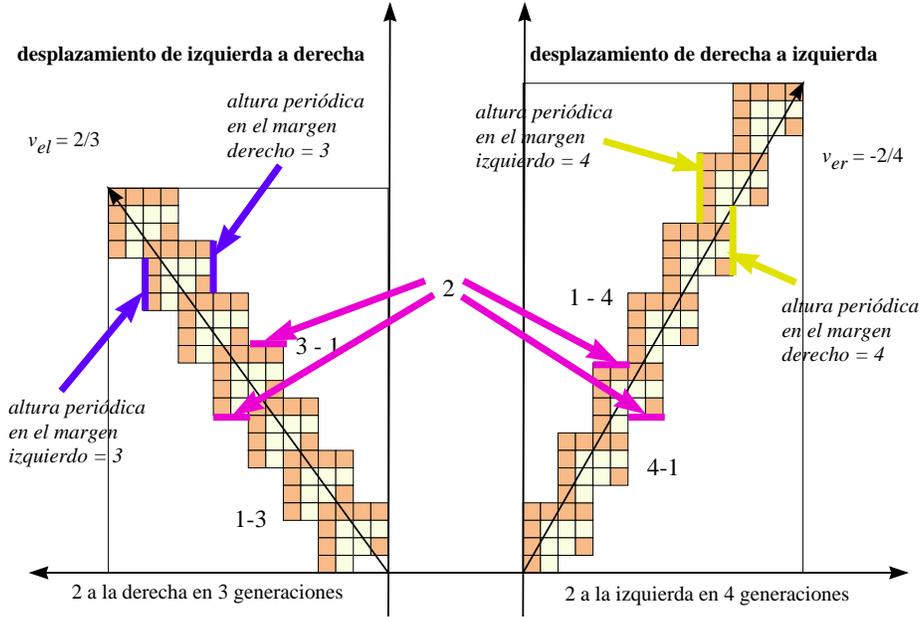


Figura 1: Altura máxima y mínima definida por el ether

- El ether no puede tener choques o descomponerse en su margen izquierdo (de izquierda a derecha), porque no tiene un intervalo periódico par.
- El ether no puede tener choques o descomponerse en su margen derecho (de derecha a izquierda), porque no tiene un intervalo periódico impar.
- Un glider no puede desplazarse más rápido (de izquierda a derecha) que $2/3$.
- Un glider no puede desplazarse más rápido (de derecha a izquierda) que $1/2$.
- Toda estructura deberá tener márgenes periódicos pares e impares, esta estructura debe conservar una correspondencia biyectiva determinada por el número de márgenes periódicos en ambos lados.
- El desplazamiento de cualquier estructura periódica que exista en el espacio de evoluciones será par de orden 2^n , donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

3 Estructuras con margenes periódicos

3.1 Glider A con velocidad 2/3

El glider A está formado por un mosaico T1 y se desplaza de izquierda a derecha como se ilustra en la Figura 2.

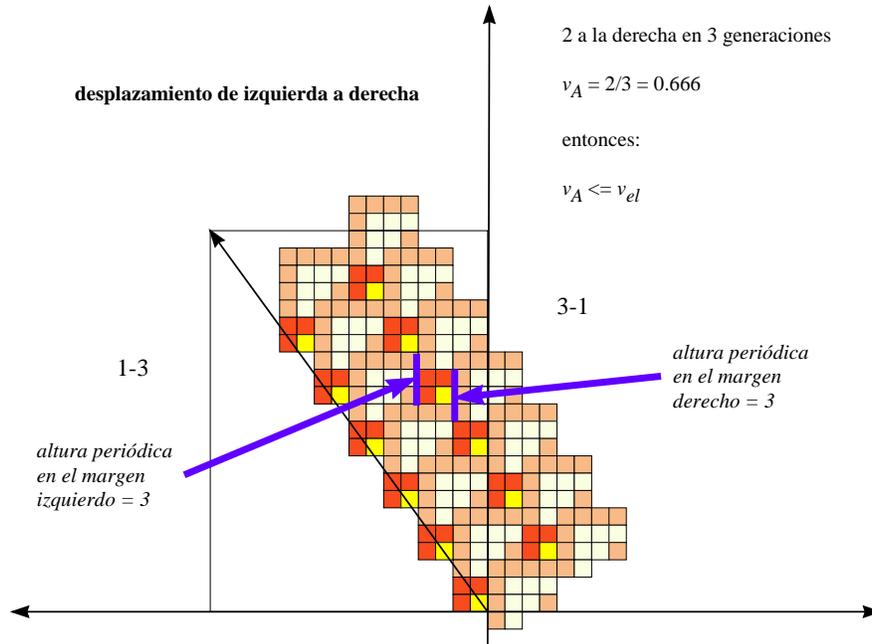


Figura 2: Glider A con velocidad de 2/3

- El glider A no puede tener choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider A sí puede tener choques en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podrá chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

3.2 Glider B con velocidad $-1/2$

El glider B está formado por un mosaico T1 y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 3.

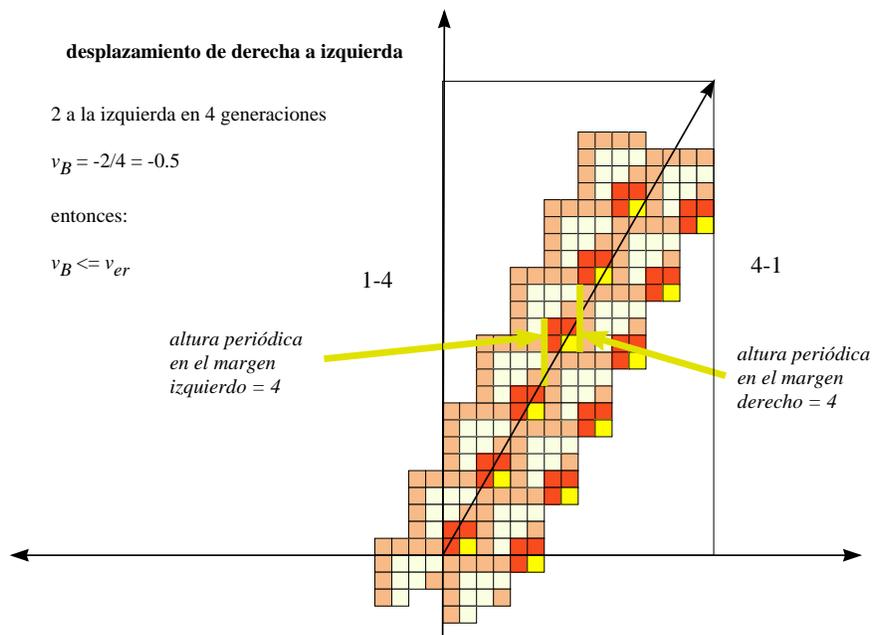


Figura 3: Glider B con velocidad de $-2/4$

- El glider B no puede tener choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider B si puede tener un choque en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podrá chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.

3.3 Glider Bbar con velocidad $-1/2$

El glider Bbar está formado por 20 mosaicos y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 4.

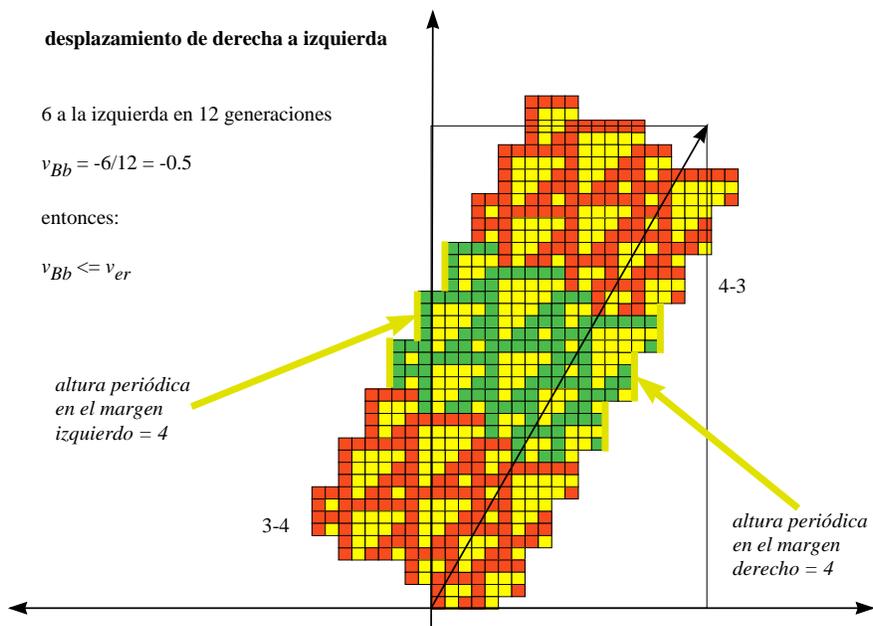


Figura 4: Glider Bbar con velocidad de $-6/12$

- El glider Bbar no puede tener choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider Bbar si puede tener tres choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen izquierdo.

3.4 Glider Bbar8 con velocidad $-1/2$

El glider Bbar8 está formado por 25 mosaicos y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 5.

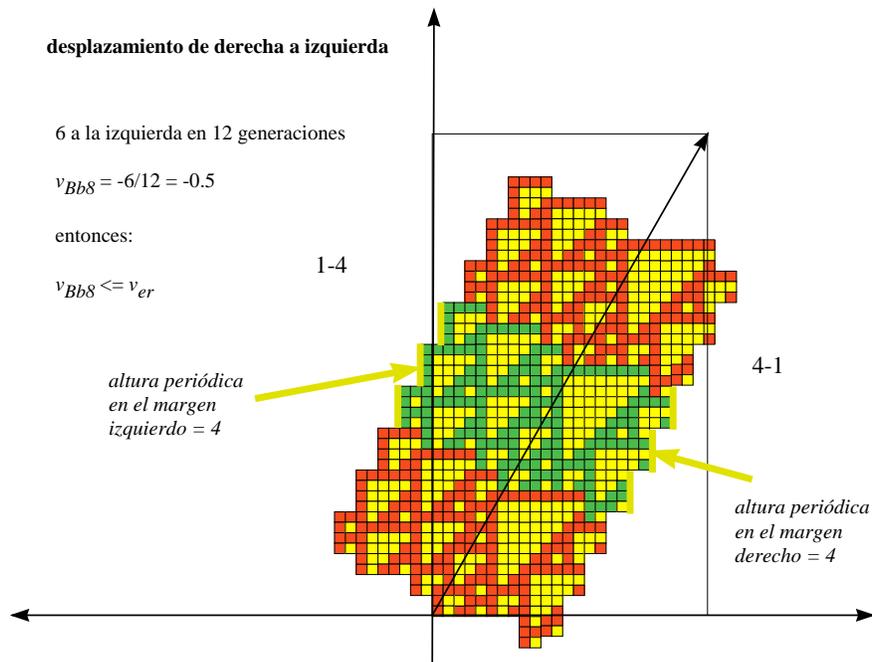


Figura 5: Glider Bbar8 con velocidad de $-6/12$

- El glider Bbar8 no puede tener choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider Bbar8 si puede tener tres choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podrá chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen izquierdo.

3.5 Glider C1 con velocidad 0

El glider C1 está formado por 4 mosaicos y se desplaza verticalmente como se ilustra en la Figura 6.

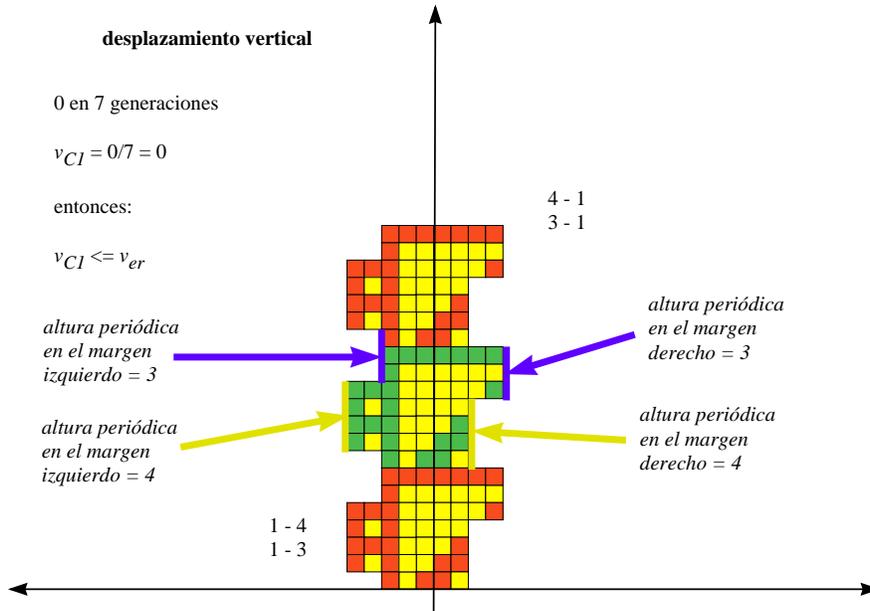


Figura 6: Glider C1 con velocidad 0/7

- El glider C1 puede tener choques en ambos márgenes, porque tiene márgenes periódicos pares e impares y su velocidad no es mayor que la del margen derecho/izquierdo que permite el ether.
- El glider C1 si puede tener un choque en su margen izquierdo, porque tiene un margen periódico que es par y siempre podrá chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho, que viaje de izquierda a derecha.
- El glider C1 si puede tener un choque en su margen derecho, porque tiene un margen periódico que es impar y siempre podrá chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo, que viaje de derecha a izquierda.

3.6 Glider C2 cero velocidad 0

El glider C2 está formado por 4 mosaicos y se desplaza verticalmente como se ilustra en la Figura 7.

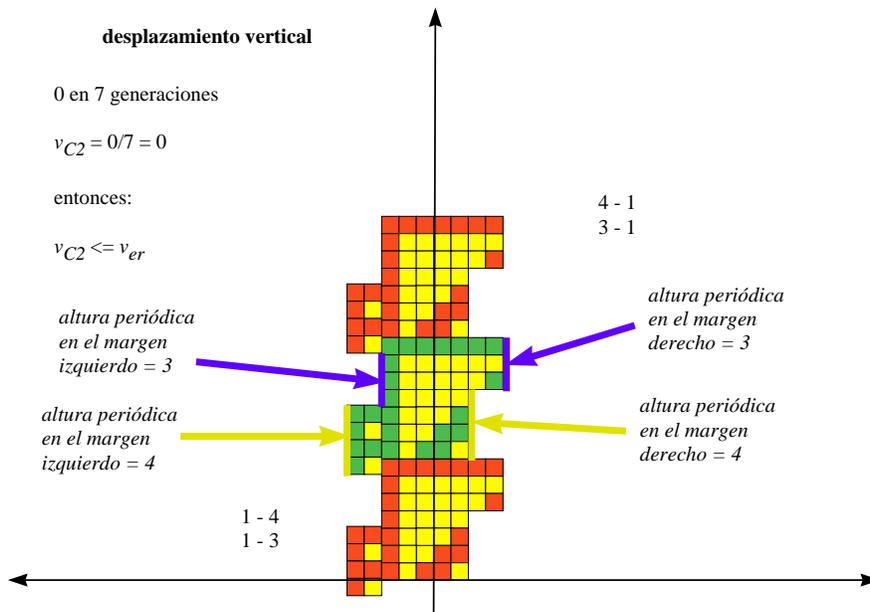


Figura 7: Glider C2 con velocidad 0/7

- El glider C2 puede tener choques en ambos márgenes, porque tiene márgenes periódicos pares e impares y su velocidad no es mayor que la del margen derecho/izquierdo que permite el ether.
- El glider C2 si puede tener un choque en su margen izquierdo, porque tiene un margen periódico que es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho, que viaje de izquierda a derecha.
- El glider C2 si puede tener un choque en su margen derecho, porque tiene un margen periódico que es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo, que viaje de derecha a izquierda.

3.7 Glider C3 con velocidad 0

El glider C3 está formado por 4 mosaicos y se desplaza verticalmente como se ilustra en la Figura 8.

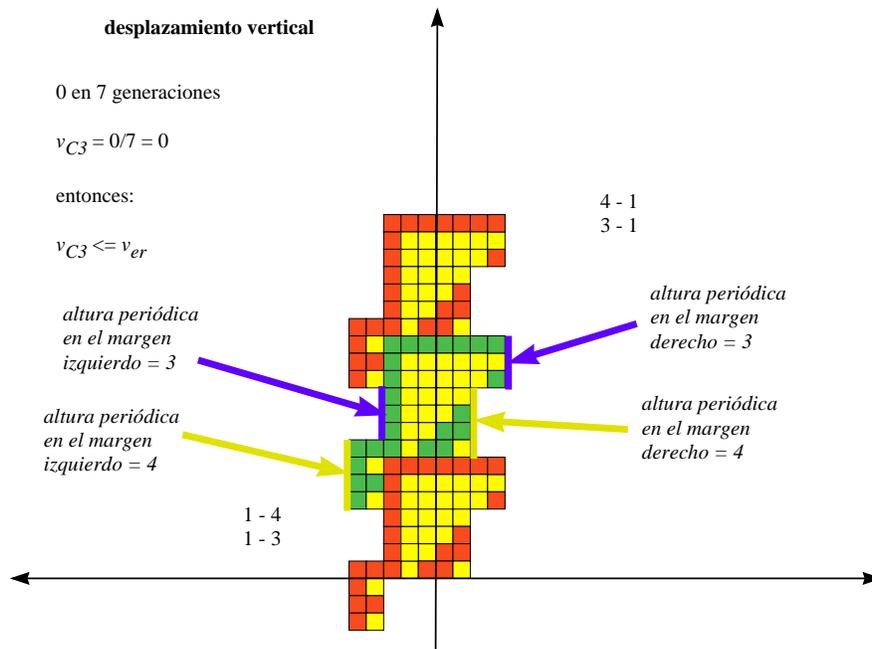


Figura 8: Glider C3 con velocidad 0/7

- El glider C3 puede tener choques en ambos márgenes, porque tiene márgenes periódicos pares e impares y su velocidad no es mayor que la del margen derecho/izquierdo que permite el ether.
- El glider C3 si puede tener un choque en su margen izquierdo, porque tiene un margen periódico que es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho, que viaje de izquierda a derecha.
- El glider C3 si puede tener un choque en su margen derecho, porque tiene un margen periódico que es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo, que viaje de derecha a izquierda.

3.8 Glider D1 con velocidad 1/5

El glider D1 está formado por 11 mosaicos y se desplaza de izquierda a derecha como se ilustra en la Figura 9.

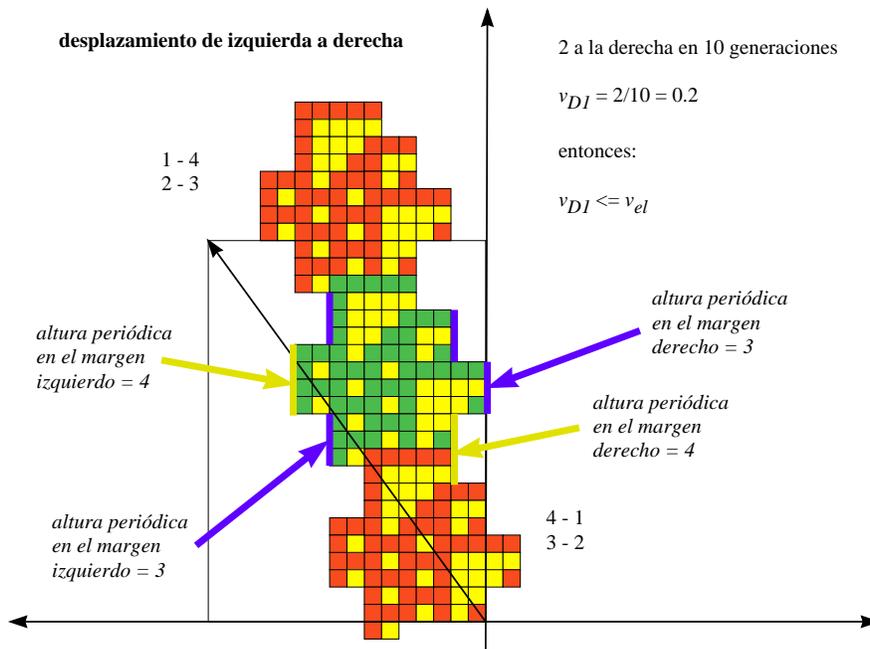


Figura 9: Glider D1 con velocidad de 2/10

- El glider D1 no puede tener dos choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider D1 si puede tener un choque en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.
- El glider D1 no puede tener un choque en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider D1 si puede tener dos choques en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

3.9 Glider D2 con velocidad 1/5

El glider D2 está formado por 10 mosaicos y se desplaza de izquierda a derecha como se ilustra en la Figura 10.

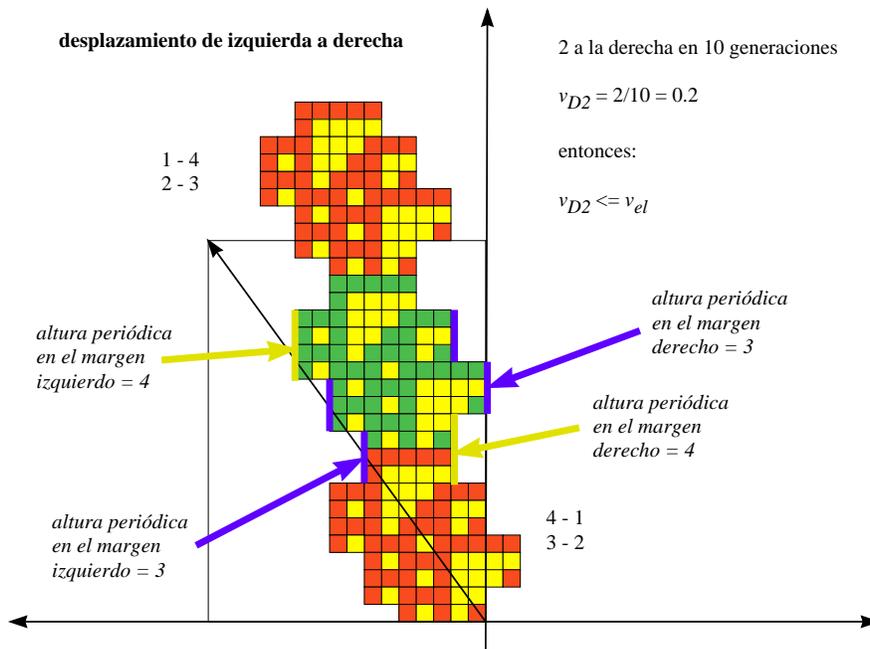


Figura 10: Glider D2 con velocidad de 2/10

- El glider D2 no puede tener dos choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider D2 si puede tener un choque en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.
- El glider D2 no puede tener un choque en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider D2 si puede tener dos choques en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

3.10 Glider E con velocidad $-4/15$

El glider E está formado por 11 mosaicos y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 11.

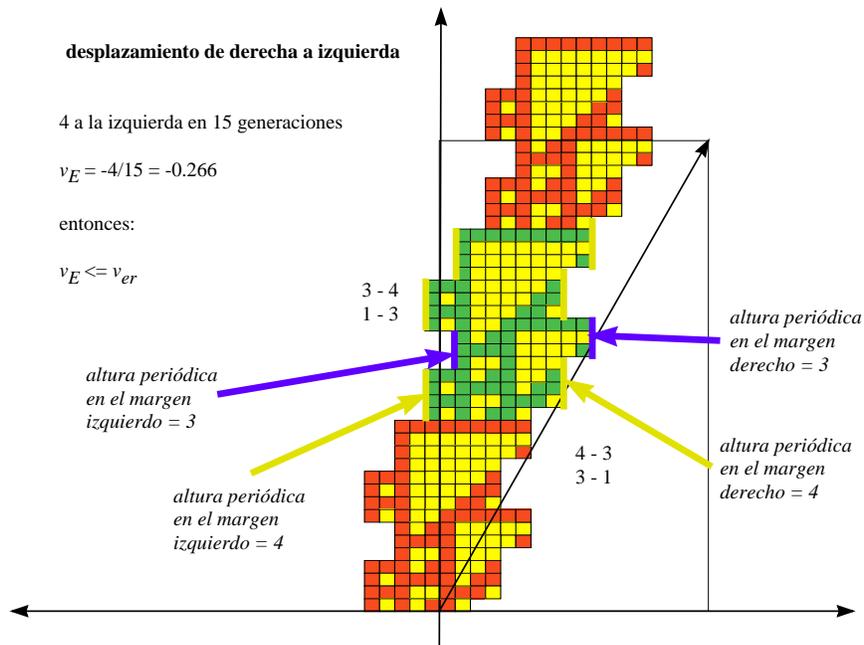


Figura 11: Glider E con velocidad de $-4/15$

- El glider E no puede tener un choque en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider E si puede tener tres choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.
- El glider E no puede tener tres choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider E si puede tener un choque en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

3.11 Glider Ebar con velocidad $-4/15$

El glider Ebar está formado por 41 mosaicos y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 12.

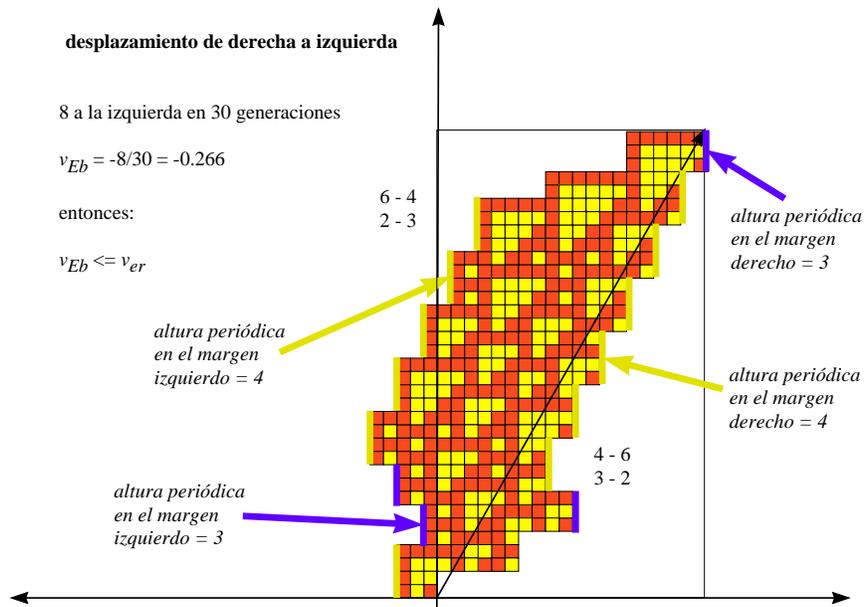


Figura 12: Glider Ebar con velocidad de $-8/30$

- El glider Ebar no puede tener dos choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider Ebar si puede tener seis choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.
- El glider Ebar no puede tener seis choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider Ebar si puede tener dos choques en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

3.12 Glider F con velocidad $-1/9$

El glider F está formado por 43 mosaicos y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 13.

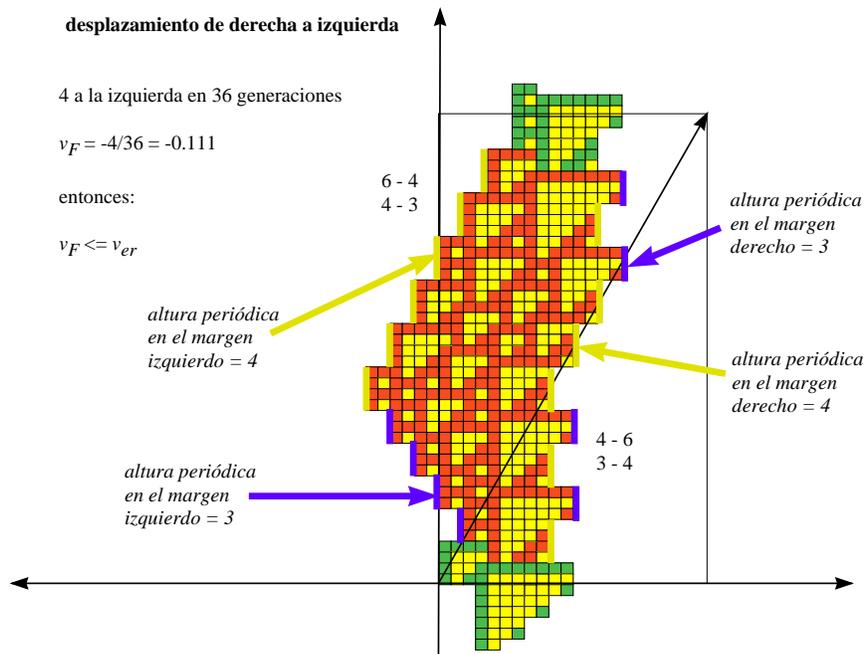


Figura 13: Glider F con velocidad de $-4/36$

- El glider F no puede tener cuatro choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider F si puede tener seis choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.
- El glider F no puede tener seis choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider F si puede tener cuatro choques en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

3.13 Glider G con velocidad $-1/3$

El glider G está formado por 74 mosaicos y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 14.

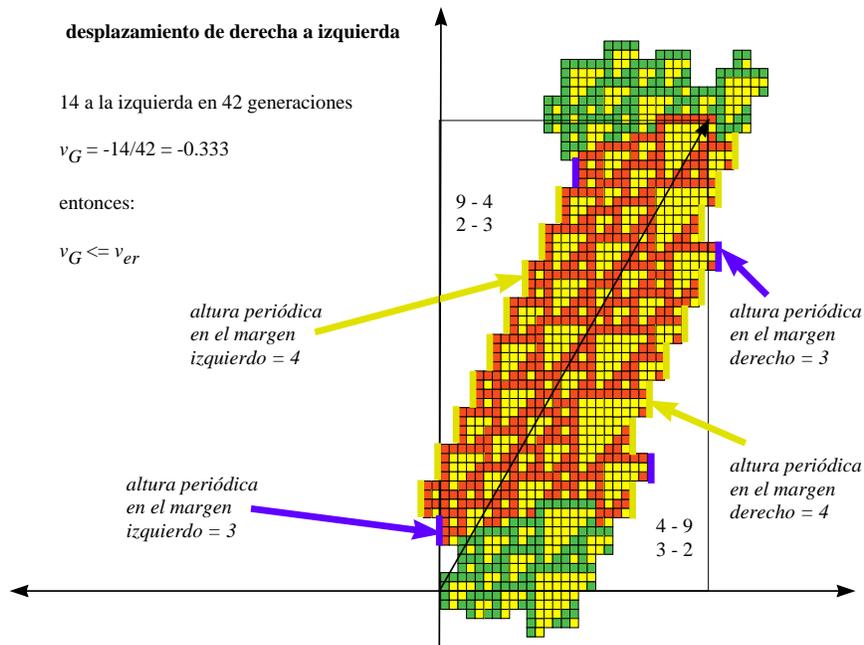


Figura 14: Glider G con velocidad de $-14/42$

- El glider G no puede tener dos choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider G si puede tener nueve choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.
- El glider G no puede tener nueve choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider G si puede tener dos choques en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

3.14 Glider H con velocidad $-9/46$

El glider H está formado por 224 mosaicos y se desplaza de derecha a izquierda como se ilustra en la Figura 15.

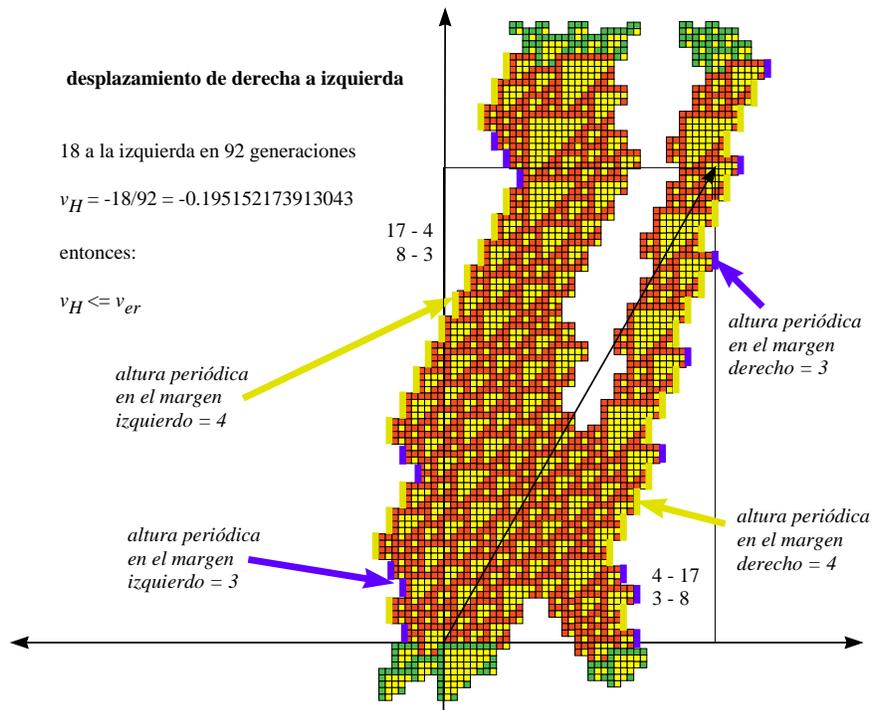


Figura 15: Glider H con velocidad de $-18/92$

- El glider H no puede tener ocho choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es impar y su velocidad no es mayor que la del margen izquierdo que permite el ether.
- El glider H si puede tener diecisiete choques en su margen izquierdo, porque su margen periódico es par y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen impar en su margen derecho.
- El glider H no puede tener diecisiete choques en su margen derecho, porque su margen periódico es par y su velocidad no es mayor que la del margen derecho que permite el ether.
- El glider H si puede tener ocho choques en su margen derecho, porque su margen periódico es impar y siempre podra chocar con otra estructura que tenga al menos un margen par en su margen izquierdo.

4 Conclusiones

La estructura periódica que define el ether un T3 beta, puede ordenar las estructuras periódicas con dos números 3 y 4. El ether muestra dos pendientes distintas de desplazamiento, la primera viaja de izquierda a derecha y la segunda en sentido contrario, estos desplazamientos son los que permite el ether en el espacio de evoluciones para cualquier estructura posible.

El desplazamiento del ether que viaja de izquierda a derecha tiene una velocidad de $2/3$ ya que se desplaza 2 células a la derecha en 3 generaciones, esto implica que no puede existir una velocidad mayor a $2/3$ que viaje de izquierda a derecha en el espacio de evoluciones, porque el margen periódico que existe entre uno y otro T3 es igual a 3, por lo tanto toda estructura o fragmento de estructura tendrá un desplazamiento menor o igual a $2/3$.

En el caso contrario cuando el ether se desplaza de derecha a izquierda, el ether se desplaza 2 células a la izquierda en 4 generaciones, de esta manera la velocidad máxima que puede tener una estructura o fragmento de estructura que viaje de derecha a izquierda es menor o igual a $1/2$, en este caso el margen periódico que existe en el ether es igual a 4.

Entonces se puede decir que:

1. Toda estructura que se desplaza de izquierda a derecha, tendrá una velocidad menor o igual que $2/3$.
2. Toda estructura que se desplaza de derecha a izquierda, tendrá una velocidad menor o igual que $1/2$.
3. Toda estructura que se desplaza de izquierda a derecha, avanzará con incrementos de $2/3$ y retrocederá con decrementos de $1/2$.
4. Toda estructura que se desplaza de derecha a izquierda, avanzará con incrementos de $1/2$ y retrocederá con decrementos de $2/3$.
5. Toda estructura que se desplaza de izquierda a derecha, puede ser afectada por otra estructura que se desplaza en sentido contrario, solo si la primera tiene al menos un margen periódico impar y la segunda tiene al menos un margen periódico par.
6. Toda estructura que se desplaza de derecha a izquierda, puede ser afectada por otra estructura que se desplaza en sentido contrario, solo si la primera tiene al menos un margen periódico par y la segunda tiene al menos un margen periódico impar.
7. Toda estructura periódica se desplazará hacia adelante o hacia atrás 2 células en el espacio de evoluciones por cada margen par o impar que tenga la estructura. Por lo tanto el desplazamiento esta determinado por:

$$d_g = (2 * mi) - (2 * mp) \quad (1)$$

donde mi representa el número de márgenes impares y mp el número de márgenes pares y g una estructura dada.

8. Toda estructura periódica tendrá un período definido por la cantidad de márgenes pares e impares, por lo tanto el período de una estructura en particular está determinado por:

$$p_g = (3 * mi) + (4 * mp). \quad (2)$$

9. Entonces una estructura periódica tendrá una velocidad determinada por:

$$v_g = \frac{(2 * mi) - (2 * mp)}{(3 * mi) + (4 * mp)}. \quad (3)$$

Finalmente el número de márgenes periódicos pares e impares tienen una correspondencia biyectiva respectivamente en cualquier estructura que exista en el espacio de evoluciones.

Se puede ver que para toda estructura que existe en el espacio de evoluciones, si tiene al menos un margen periódico izquierdo impar entonces existe el mismo número de márgenes derechos impares. Por otro lado, si tiene al menos un margen izquierdo periódico par entonces existe el mismo número de márgenes izquierdos pares.

- (a) Para toda estructura que se desplaza de izquierda a derecha, si tiene al menos un margen periódico par izquierdo, entonces implica que tiene mp puntos de contacto a la izquierda y $-mp$ puntos que no son de contacto del lado derecho.
- (b) Para toda estructura que se desplaza de derecha a izquierda, si tiene al menos un margen periódico impar derecho, entonces implica que tiene mi puntos de contacto a la derecha y $-mi$ puntos que no son de contacto del lado izquierdo.
- (c) Para cada mp y mi que existan en un margen dado, implica la existencia de su contraimagen en el margen opuesto.

estructura	margenes izquierdo - derecho				v_g
	mp	mi	mp	mi	
ether izquierda	.	1	.	1	$2/3 \approx 0.666$
ether derecha	1	.	1	.	$-1/2 = -0.5$
A	.	1	.	1	$2/3 \approx 0.666$
B	1	.	1	.	$-1/2 = -0.5$
Bbar	3	.	3	.	$-1/2 = -0.5$
Bbar8	3	.	3	.	$-1/2 = -0.5$
C1	1	1	1	1	0
C2	1	1	1	1	0
C3	1	1	1	1	0
D1	1	2	1	2	$1/5 = 0.2$
D2	1	2	1	2	$1/5 = 0.2$
E	3	1	3	1	$-4/15 \approx -0.266$
Ebar	6	2	6	2	$-4/15 \approx -0.266$
F	6	4	6	4	$-1/9 \approx -0.111$
G	9	2	9	2	$-1/3 \approx -0.333$
H	17	8	17	8	$-9/46 \approx -0.195$

Tabla 1: Margenes y velocidades de los gliders

Aplicando la ecuación de velocidad determinada por los margenes periódicos y los desplazamientos de orden par tenemos por ejemplo:

- Para el glider A,

$$v_A = \frac{(2 * 1) - (2 * 0)}{(3 * 1) + (4 * 0)} = \frac{2}{3}$$

- Para el glider C1,

$$v_{C1} = \frac{(2 * 1) - (2 * 1)}{(3 * 1) + (4 * 1)} = \frac{0}{7}$$

- Para el glider H,

$$v_H = \frac{(2 * 8) - (2 * 17)}{(3 * 8) + (17 * 4)} = -\frac{18}{92}$$

Las margenes periódicos mp y mi siempre tendrán una altura de 4 y 3 respectivamente.

Referencias

- [1] Matthew Cook, “Introduction to the activity of rule 110” (copyright 1994-1998 Matthew Cook), <http://w3.datanet.hu/~cook/Workshop/CellAut/Elementary/Rule110/110pics.html>, January 1998.
- [2] Branko Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and Company, New York 1987 (ISBN 0-7167-1193-1).
- [3] Genaro Juárez Martínez and Harold V. McIntosh, “ATLAS: Collisions of gliders like phases of ether in rule 110”, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, August 2001.
- [4] Harold V. McIntosh, “Rule 110 as it relates to the presence of gliders”, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, January 1999.
- [5] Harold V. McIntosh, “A Concordance for Rule 110”, <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, April 2000.