

Autómatas celulares en tres dimensiones similares a *The Game of Life* clasificados con la teoría del campo promedio y polinomios de Bernstein

Genaro Juárez Martínez
genaro@enigma.red.cinvestav.mx
Sección de Computación
CINVESTAV-IPN

Mayo 24, 2001

Resumen

“The Game of Life” es un autómata celular de alfabeto binario que evoluciona con la vecindad de Moore en dos dimensiones, el interés que ha originado el estudio de este autómata celular es la complejidad global que produce su regla de evolución, sin embargo a pesar de ser un modelo muy sencillo en la actualidad no existe una caracterización formal que explique sus comportamientos. Carter Bays hace una extensión de The Game of Life en tres dimensiones, encontrando varias reglas de evolución que muestran comportamientos similares a dicho autómata. Aplicando la teoría del campo promedio simplificamos este número de reglas de evolución propuestas por Bays de acuerdo al modelo original de John Horton Conway. La clasificación se realizó con respecto a la curva de probabilidad que muestra cada regla de evolución y el comportamiento de sus puntos fijos, la curva calcula la densidad de los estados para un largo tiempo. Además se utilizan los polinomios de Bernstein para calcular el polinomio del campo promedio de manera directa, mostrando la utilidad de éstos en el cálculo de los polinomios de la teoría del campo promedio en reglas de evolución totalísticas y semitotalísticas.

Palabras clave: Autómata celular, campo promedio, The Game of Life

1 Introducción

El autómata celular The Game of Life (también conocido como “Life”) muestra comportamientos muy complejos en su espacio de evoluciones, este tipo de comportamientos han encontrado su culminación demostrando que Life puede realizar computación universal en [BCG82], entre otro tipo de descubrimientos importantes que se han realizado durante su estudio. Sin embargo en la actualidad no se tienen estudios formales que expliquen los comportamientos de Life, solo se han realizado estudios de tipo estadísticos como en [SS78], [Wol83], [PW85], [GV87], [McI90] y [GGJ93]. En estos estudios se ha logrado calcular la densidad de los estados en Life para un largo tiempo. En este artículo se hace uso de la teoría del campo promedio para reproducir dicho resultado, además se muestra la utilidad de los polinomios de Bernstein para calcular de manera directa el polinomio del campo promedio y determinar el comportamiento de la curva de probabilidad de generación en generación.

Primero se hace un análisis de Life determinando sus características a través de su curva de probabilidad y la existencia de sus puntos fijos, en base a estos resultados se aplica el mismo análisis a los autómatas celulares en tres dimensiones similares a Life propuestos por Bays. Con este estudio comparativo es claro ver que reglas de evolución presentan características similares a Life desde un punto de vista estadístico.

A principios del año 1970, Conway muestra varios de sus resultados en la columna mensual de Martin Gardner en la revista *Scientific American* [Gard70]. Entre estos, Conway presenta un juego llamado The Game of Life, un autómata celular con dos estados en su alfabeto $\{0,1\}$, $\{\text{blanco, negro}\}$ o $\{\text{muerto, vivo}\}$, donde cada uno de estos estados es representado en un arreglo de células bidimensional infinito. La función de transición está definida por la vecindad de Moore, donde la célula central depende de la suma de sus vecinos de generación en generación.

El mecanismo de Life es muy sencillo en general, sin embargo cumple con dos propiedades fundamentales dentro de la teoría de autómata celular, la primera es que pueda soportar comportamientos complejos y la segunda es que el sistema pueda auto-reproducirse. John von Neumann precursor de la teoría de autómata celular ya había desarrollado un modelo que cumplía con estas propiedades en [Neu66], su modelo es en dos dimensiones pero con 29 estados en su alfabeto y la función de transición está definida por la vecindad de von Neumann. El modelo de von Neumann resulta ser complejo de desarrollar, en cambio el modelo de Conway es más fácil de analizar, por esta razón el modelo de Conway ha sido muy estudiado. Por otra parte Conway demostró que el modelo de von Neumann no es el único, ni el más sencillo modelo que pueda demostrar las propiedades fundamentales establecidas en la teoría de autómata celular.

En el año 1986 Bays presento varios autómatas celulares que son similares a Life en tres dimensiones. El estudio es muy extenso y presentado en varios artículos [Bays87], [Bays88b], [Bays90], [Bays91], [Bays92] y [Bays94]. Bays plantea el problema en ver que regla de evolución es “meritoria” a ser llamada Life en tres dimensiones. La relación que presenta Bays en sus reportes se

basan en simulaciones dentro del espacio tridimensional, encontrando que varias reglas de evolución mantienen una cierta cantidad de células vivas en un largo tiempo, además de que estas reglas de evolución pueden generar estructuras fijas, estructuras periódicas fijas y estructuras periódicas con desplazamientos.

La teoría del campo promedio determina la densidad de los estados en el espacio de evoluciones en un largo tiempo de manera global. Howard Gutowitz utiliza la teoría del campo promedio como un caso especial de la teoría de estructura local en [GVK87], para caracterizar el tipo de clases que pueden derivar los autómatas celulares en una dimensión a través de la densidad de sus estados. Hugues Chaté y Paul Manneville utilizan la teoría del campo promedio en [CM92] para determinar comportamientos colectivos periódicos y quasiperiódicos no triviales en autómatas celulares de altas dimensiones utilizando mallas acopladas.

Harold V. McIntosh hace notar la relación y utilidad que existe entre la teoría del campo promedio y los polinomios de Bernstein en [McI90]. Utilizando el enfoque dado por McIntosh y Chaté-Manneville obtenemos los polinomios de las reglas de evolución en autómatas celulares de tres dimensiones que sean similares a Life propuestos por Bays, desde un punto de vista estadístico. Por otra parte se muestra la utilidad de usar los polinomios de Bernstein para calcular el polinomio del campo promedio, esto nos proporcionó información valiosa para poder diferenciar de manera más clara, cada una de las reglas de evolución en tres dimensiones que sean meritorias a ser llamadas Life en tres dimensiones. Se presenta el método con detalle y los resultados obtenidos así como las limitaciones de este tipo de estudio.

2 Preliminares

2.1 Autómatas celulares en dos y tres dimensiones

Los autómatas celulares están constituidos por un conjunto de estados K , una función de transición local φ , un número de vecinos \mathcal{V} y una configuración inicial c_0 . Sea \mathbb{Z} el conjunto de los enteros y \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los enteros positivos, entonces el espacio de evoluciones en dos dimensiones está definido por el producto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ formando una malla infinita. Cada uno de los elementos de la malla es una *célula* y estas células toman un elemento del conjunto de estados K , donde $K \subseteq \mathbb{Z}^+$.

$x_{i-1,j-1}$	$x_{i-1,j}$	$x_{i-1,j+1}$
$x_{i,j-1}$	$x_{i,j}$	$x_{i,j+1}$
$x_{i+1,j-1}$	$x_{i+1,j}$	$x_{i+1,j+1}$

Figura 1: Vecindad de Moore

La función de transición local φ está formada por una célula central y ocho células que se encuentran alrededor de ésta, es decir, sus *vecinos*. Los vecinos y la célula central forman una *vecindad*, la vecindad genera una transformación local que determina el valor de la célula central en la siguiente generación. La función de transición local utiliza la vecindad de Moore que se ilustra en la Figura 1, para evaluar cada una de las vecindades.

Una *configuración* es un asignamiento de estados del conjunto K a cada una de las células en el espacio de evoluciones.

Sea $K = \{0, 1\}$ el conjunto de estados, $\mathcal{V} = 8$ el número de vecinos en la vecindad y $\mathbf{x}_0 = x_{i,j}$ la célula central en estudio, las células $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\mathcal{V} = x_{i-1,j-1}, \dots, x_{i+1,j+1}$ son los vecinos, para toda $\mathbf{x}_i \in K$.

Una célula $x_{i,j}$ es conectada a una célula $\{(x_{i+k_1}, x_{j+k_2}) : \text{Max}\{|k_1|, |k_2|\} \leq 1\} \forall i, j, k \in \mathbb{Z}$, es decir, la vecindad de Moore [Dup85].

En la Ecuación 1 la función φ define la transformación local, las variables N_{min} y S_{min} indican el número mínimo de células ocupadas por el estado 1 en \mathcal{V} y las variables N_{max} y S_{max} el número máximo de células ocupadas por el estado 1 en \mathcal{V} . Si $\mathbf{x}_0 = 0$ en el tiempo t , entonces $\mathbf{x}_0 = 1$ en el tiempo $t + 1$ si se encuentra entre el intervalo de N_{min} y N_{max} . Si $\mathbf{x}_0 = 1$ en el tiempo t , entonces $\mathbf{x}_0 = 1$ en el tiempo $t + 1$ si se encuentra entre el intervalo de S_{min} y S_{max} , en cualquier otro caso $\mathbf{x}_0 = 0$. Finalmente una regla semitotalística en dos dimensiones se representa como $R(S_{min}, S_{max}, N_{min}, N_{max})^1$, donde N y S deben tomar valores entre 1 y 8.

$$\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\mathcal{V}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \begin{cases} \mathbf{x}_0 = 0 & \text{y} & N_{min} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{V}} \mathbf{x}_i \leq N_{max} \\ \mathbf{x}_0 = 1 & \text{y} & S_{min} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{V}} \mathbf{x}_i \leq S_{max} \end{cases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1)$$

Los autómatas celulares en tres dimensiones son más complicados para estudiarlos, porque el número de células que existen en la vecindad de Moore en el espacio tridimensional es de 27 células como se ilustra en la Figura 2, por lo tanto el número de vecindades en la regla de evolución es de 2^{27} .

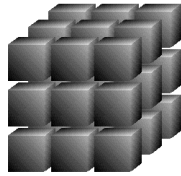


Figura 2: Vecindad de Moore en tres dimensiones

¹ N significa nacimiento y S sobrevivencia de una célula.

En la literatura de los autómatas celulares en tres dimensiones se tienen análisis de tipo estadístico y probabilístico, algunos trabajos importantes en este tipo de análisis se pueden ver en [Bays88a], [Ger90] y [Hem85].

Para representar los autómatas celulares en tres dimensiones se utiliza la misma notación que se empleó para describir los autómatas en dos dimensiones, únicamente se agrega el eje z . La Ecuación 1 también puede representar las reglas de evolución semitotalísticas en tres dimensiones, tomando en cuenta que N y S deben tomar valores entre 1 y 26.

2.2 Polinomios de Bernstein

McIntosh hace notar la utilidad de los polinomios de Bernstein para calcular los polinomios de la teoría del campo promedio en [McI90].

Sea una función $f(x)$ definida en el intervalo cerrado $[0, 1]$, entonces la expresión:

$$B_n(x) = B_n^f(x) = \sum_{v=0}^n f\left(\frac{v}{n}\right) \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \quad (2)$$

es llamado el *Polinomio de Bernstein* de orden n de la función $f(x)$. $B_n(x)$ es un polinomio en x de grado $\leq n$. El polinomio $B_n(x)$ sería introducido por S. Bernstein para dar una demostración de la aproximación del teorema de Weierstrass [Lor53].

Los polinomios de Bernstein están conectados con la teoría de la probabilidad, con problemas de momentos y con la teoría de sumas en series divergentes. Un problema complejo e interesante que no ha sido completamente resuelto, concierne a los polinomios de Bernstein en funciones analíticas.

La expresión:

$$p_v = p_{n,v}(x) = \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \quad (3)$$

contenida en la Ecuación 2, es la binomial o las probabilidades de Newton conocidas en la teoría de la probabilidad. Si $0 \leq x \leq 1$ es la probabilidad de un evento E , entonces $p_{n,v}(x)$ es la probabilidad de que E debe ocurrir exactamente v veces en n intentos independientes.

2.3 Teoría del campo promedio

La *teoría del campo promedio* se basa en que los elementos del conjunto de estados K son independientes entre sí, es decir, no hay correlación en cada uno de los elementos que se encuentran en el espacio de evoluciones, bajo esta condición es fácil estimar la probabilidad de los estados en una vecindad en términos de la probabilidad de un solo estado (el estado al que evoluciona la vecindad). La probabilidad de la vecindad es el producto de las probabilidades de los estados que forman la vecindad.

La probabilidad de que una célula tenga un estado en particular en el tiempo $t + 1$, es la suma de las probabilidades de las vecindades que se transforman a este estado en el tiempo t .

La vecindad está formada por $\mathcal{V} + 1$ células, tomando la cardinalidad del conjunto de estados $|K| = k$, entonces la regla de evolución tiene $k^{\mathcal{V}+1}$ vecindades. La función de transición $\varphi(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{\mathcal{V}})$ se transformará en 0 ó 1 dependiendo de la suma de sus vecinos, cada una de las vecindades que existen en una regla de evolución se representarán como X_j , donde j tomará valores de $0, \dots, k^{\mathcal{V}+1} - 1$.

Sea p la probabilidad de tener el estado 1 en el tiempo t , su complemento o coprobabilidad $q = 1 - p$ es la probabilidad de tener el estado 0 en el tiempo t , v es el número de veces que aparece el estado 1 en la vecindad, $n - v$ es el número de veces que aparece el estado 0 en la vecindad, la suma tomará cada una de las vecindades definidas por el conjunto $k^{\mathcal{V}+1}$, entonces la teoría del campo promedio calcula la densidad en el tiempo $t + 1$ con el siguiente polinomio:

$$p_{t+1} = \sum_{j=0}^{k^{\mathcal{V}+1}-1} \varphi(X_j) p_t^v q_t^{n-v}. \quad (4)$$

Nótese que $k^{\mathcal{V}+1}$ es el número de vecindades y $K^{\mathcal{V}+1}$ es el conjunto que define cada una de las vecindades, además la teoría del campo promedio puede ser empleada en autómatas celulares de diferentes dimensiones. Los puntos fijos que calcula la teoría del campo promedio son una estimación de la densidad de los estados en un largo tiempo, además esta densidad es independiente de la densidad inicial.

La relación que existe entre la teoría del campo promedio y los polinomios de Bernstein se establece entre los polinomios de las Ecuaciones 3 y 4. La Ecuación 4 calcula todos los términos del polinomio, es decir, analiza todos los términos que genera la regla de evolución. Por otra parte el polinomio de Bernstein de la Ecuación 3 calcula todas las combinaciones que se pueden generar de un estado en una vecindad, esto produce un término del polinomio de la Ecuación 4 en específico para un n y v dado, donde n tomará el valor $\mathcal{V} + 1$ y v el número de veces que un estado puede estar en la vecindad, es decir, v tomará valores entre $0 \leq v \leq \mathcal{V} + 1$.

Finalmente los polinomios de Bernstein ayudan a no calcular todos los términos posibles del polinomio del campo promedio. Simplemente calcula las combinaciones para un número de veces que estará un estado en la vecindad, excluyendo todos aquellos términos que no forman parte del polinomio.

Utilizando el polinomio del campo promedio y los polinomios de Bernstein, derivamos el polinomio del campo promedio que calcule la probabilidad de p_{t+1} en reglas de evolución semitotalísticas de la siguiente manera:

$$p_{t+1} = \sum_{v=S_{min}}^{S_{max}} \binom{n-1}{v} p_t^{v+1} q_t^{n-v-1} + \sum_{v=N_{min}}^{N_{max}} \binom{n-1}{v} p_t^v q_t^{n-v} \quad (5)$$

donde n representa el número de células que forman una vecindad, $n - 1$ indica el número de vecinos en la vecindad, v es el número de veces que aparece el

estado 1 en la vecindad, $n - v$ es el número de veces que aparece el estado 0 en la vecindad, p_t es la probabilidad de tener el estado 1, q_t es la probabilidad de tener el estado 0, la combinatoria $\binom{n-1}{v}$ calcula las constantes para cada uno de los términos del polinomio.

La primera suma de la Ecuación 5 calcula todas las combinaciones que se derivan del intervalo que definen S_{min} y S_{max} en el caso de la sobrevivencia, la segunda suma calcula todas las combinaciones que se derivan del intervalo que definen N_{min} y N_{max} en el caso de los nacimientos. En el caso de la sobrevivencia al exponente v se le suma un elemento porque la célula central está viva, en el caso de los nacimientos no se le suma ningún elemento porque la célula central está muerta. El exponente v para la variable p_t se calcula sumando el número de células ocupadas por el estado 1 en la vecindad, el exponente $n - v$ para la variable q se calcula sumando el número de células ocupadas por el estado 0 en la vecindad.

El polinomio de la Ecuación 5 no puede ser aplicado a reglas de evolución que no sean semitotalísticas o totalísticas, en ese caso se tiene que aplicar la Ecuación 4.

La teoría del campo promedio ha sido empleada en [SS78], [Hem85], [GVK87], [GV87], [Gut89], [McI90], [CM92] y [Jua00], para tratar de explicar el comportamiento de los estados en el espacio de evoluciones, la mayoría de estos estudios describen el comportamiento de las células a través de su densidad a través del tiempo. Este análisis propone un enfoque sencillo y práctico de como obtener dichas densidades e interpretar fácilmente los resultados, tal como lo plantean McIntosh en [McI90] y Chaté-Manneville en [CM92], graficando su curva de probabilidad en el tiempo inicial y calculando sus curvas de probabilidad a través del tiempo, sustituyendo el polinomio de la Ecuación 5 de manera iterativa. La teoría del campo promedio es un modelo simple que proporciona propiedades estadísticas de los autómatas celulares.

3 The Game of Life

3.1 Modelo original The Game of Life

El autómata celular The Game of Life propuesto por Conway, es llamado así por su relación con la modelación de sistemas biológicos, tal como ecosistemas, incendios forestales, reacciones químicas, comportamientos colectivos de seres vivos, entre otros.

Este modelo evoluciona en dos dimensiones con la vecindad de Moore, la regla de evolución es semitotalística y es representada como $R(2, 3, 3, 3)$, recordemos que cuando una célula está viva se representa con el estado 1, si está muerta se representa con el estado 0. Las variables de la Ecuación 1 toman los valores de $S_{min} = 2$, $S_{max} = 3$, $N_{min} = 3$ y $N_{max} = 3$.

Conway hace un amplio análisis para poder determinar una regla de evolución que tuviera dos características fundamentales:

1. Una configuración c_i no debe desaparecer rápidamente.
2. Una configuración c_i debe crecer ilimitadamente.

además se deben de definir tres condiciones, cuándo una célula debe de *nacer*, *sobrevivir* o *morir*. Estas condiciones son muy importantes para obtener las características mencionadas.

Por lo tanto la Equación 1 para la regla $R(2, 3, 3, 3)$ en particular queda como:

$$\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_8) = \begin{cases} 1 & \text{si} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} \mathbf{x}_0 = 0 & \text{y} & 3 \leq \sum_{i=1}^8 \mathbf{x}_i \leq 3 \\ \mathbf{x}_0 = 1 & \text{y} & 2 \leq \sum_{i=1}^8 \mathbf{x}_i \leq 3 \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

tenemos que $3 \leq \sum_{i=1}^8 \mathbf{x}_i \leq 3$ es el intervalo de células vivas que originan un nacimiento de una célula que se encuentra muerta y $2 \leq \sum_{i=1}^8 \mathbf{x}_i \leq 3$ es el intervalo de células vivas que determinan la sobrevivencia de una célula que está viva. Las transformaciones para cada una de las células se efectúan de manera simultánea en el espacio de evoluciones.

El interés que se originó en Life se debe principalmente a los comportamientos complejos que la regla de evolución puede producir, llegando a resultados muy importantes como fue el hecho de demostrar que Life puede realizar computación universal [BCG82].

En el espacio de evoluciones existen cuatro tipos de comportamientos característicos que se pueden obtener desde cualquier configuración aleatoria:

1. Configuraciones que desaparecen.
2. Configuraciones estáticas.
3. Configuraciones periódicas.
4. Configuraciones periódicas con desplazamientos.

Las estructuras periódicas con desplazamientos conocidas como *gliders* son muy interesantes e importantes en Life. Muchos de los descubrimientos más relevantes están relacionados con este tipo de estructuras, determinando las trayectorias que pueden tener a través del espacio de evoluciones y que comportamientos o estructuras tan complejas se pueden llegar a producir cuando estos gliders colisionan entre sí o con otras estructuras.

El glider más relevante en la literatura de Life es el glider de cinco células ilustrado en la Figura 3, su período de desplazamiento es de dos células en cuatro generaciones.

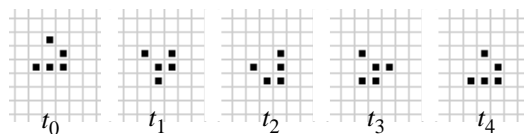


Figura 3: Configuración periódica con desplazamiento llamada glider

El glider de la Figura 3 tiene una población total de cinco células y esta población se conserva en cada generación. Existen otros tipos de gliders que varían de forma, tamaño, periodo y dirección en el espacio de evoluciones, por lo tanto comportamientos de este tipo fueron los que originaron un interés más a fondo para poder explicar el origen y las construcciones de estas estructuras.

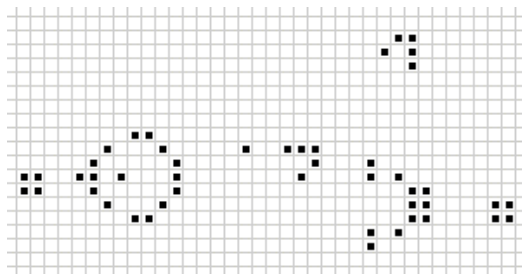


Figura 4: Glider gun

El *glider gun* ilustrado en la Figura 4 es una estructura que produce gliders como el de la Figura 3, de manera continua cada treinta generaciones. Un descubrimiento muy importante y verdaderamente sorprendente realizado por Gosper, es que treinta gliders como el de la Figura 3 pueden construir su propio glider gun [BCG82], con este resultado se demostró que Life puede crecer ilimitadamente y puede reproducirse a sí mismo.

A continuación construimos el polinomio de la teoría del campo promedio paso a paso para ver con claridad la relación que existe entre las Ecuaciones 3 y 4. El número de combinaciones que se pueden generar en la vecindad de Moore cuando $S_{min} = 2$ es igual a 28.

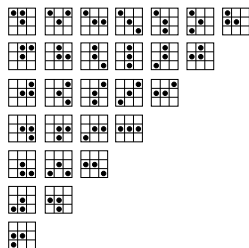


Figura 5: Vecindades que determinan la sobrevivencia cuando $S_{min} = 2$

La Figura 5 ilustra las 28 combinaciones que se pueden generar en 8 células cuando $S_{min} = 2$, es decir, el número de vecindades cuando la célula central está viva y sus vecinos suman dos células vivas, para que en la siguiente generación la célula central permanezca viva.

Tenemos que $v = 3$ y $n - v = 9 - 3 = 6$ cuando $S_{min} = 2$, notemos que las combinaciones se realizan sobre los vecinos \mathcal{V} , donde la célula central \mathbf{x}_0 es ocupada por el estado 1. En realidad al momento de calcular las combinaciones no importa si \mathbf{x}_0 es ocupada por el estado 1 o el estado 0, sin embargo \mathbf{x}_0 es importante al momento de definir los exponentes del polinomio.

Ahora se realiza el cálculo cuando $S_{max} = 3$.

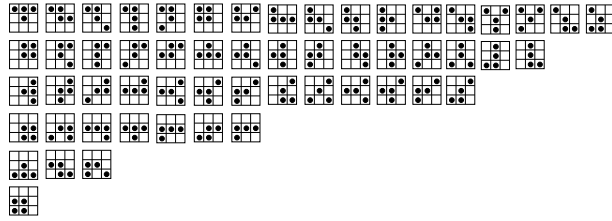


Figura 6: Vecindades que determinan la sobrevivencia cuando $S_{max} = 3$

En la Figura 6 se ilustran las 56 vecindades que se transforman al estado 1 en la siguiente generación cuando $S_{max} = 3$. De esta manera se calcula el número de combinaciones empleando el coeficiente binomial:

$$\binom{n-1}{v} = \frac{(n-1)!}{v!((n-1)-v)!} \quad (7)$$

donde $n = \mathcal{V} + 1$ y $v = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Por ejemplo para el caso de la Figura 5 se tiene que $v = 2$ y $n = 9$ entonces:

$$\binom{9-1}{2} = \frac{(9-1)!}{2!((9-1)-2)!} = 28$$

este número representa las combinaciones sin repetición que se generan cuando $S_{min} = 2$. En el caso de la Figura 6 cuando $S_{max} = 3$ tenemos que:

$$\binom{9-1}{3} = \frac{(9-1)!}{3!((9-1)-3)!} = 56.$$

En el caso cuando $N_{min} = 3$ y $N_{max} = 3$ se tienen 56 combinaciones igual que cuando $S_{max} = 3$ y esto se debe porque las combinaciones se realizan en los vecinos \mathcal{V} , es decir, las células de la vecindad sin tomar en cuenta la célula central \mathbf{x}_0 . Por lo tanto las combinaciones de $S_{max} = 3$ son iguales a las combinaciones de $N_{min} = 3$ y $N_{max} = 3$.

El grado del polinomio se determina por el número de células vivas v y por el número de células muertas $n - v$, que existen en los vecinos \mathcal{V} . En el caso cuando $S_{min} = 2$ el exponente $v = 3$ y $n - v = 6$, cuando $S_{max} = 3$ el exponente

$v = 4$ y $n - v = 5$, cuando $N_{min} = 3$ el exponente $v = 3$ y $n - v = 6$ y cuando $N_{max} = 3$ el exponente $v = 4$ y $n - v = 5$.

Finalmente el polinomio para la regla de evolución Life queda como:

$$p_{t+1} = 28p_t^3q_t^6 + 56p_t^4q_t^5 + 56p_t^3q_t^6 \quad (8)$$

simplificando:

$$p_{t+1} = 84p_t^3q_t^6 + 56p_t^4q_t^5 \quad (9)$$

la probabilidad que genera cuando $S_{max} = 3$ es la misma probabilidad cuando $N_{min} = 3$, porque el número de 1's en la vecindad es igual en ambos casos, por esa razón se tienen tres términos en el polinomio de la Ecuación 8 en lugar de cuatro como pudiera pensarse.

La curva de probabilidad se obtiene poniendo el polinomio de la Ecuación 9 en términos de p :

$$p_{t+1} = 84p_t^3(1 - p_t)^6 + 56p_t^4(1 - p_t)^5 \quad (10)$$

donde p toma valores de 0 a 1. La curva de probabilidad del campo promedio muestra como se comporta la densidad de los estados en el espacio de evoluciones. La densidad es interpretada a través de la existencia de los puntos fijos en la curva de probabilidad que calcula el polinomio.

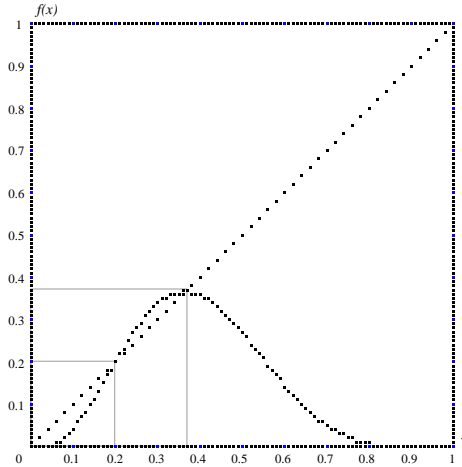


Figura 7: Curva de probabilidad de la regla de evolución Life

La gráfica de la Figura 7 muestra la curva de probabilidad que calcula el polinomio de la regla de evolución Life, el eje horizontal x indica el valor al que será evaluado el polinomio, el eje vertical $f(x)$ indica el valor calculado, la función $f(x)$ representa a p , es decir, la probabilidad de obtener el estado 1 y es evaluado en el intervalo cerrado $[0, 1]$. La diagonal muestra los punto fijos al

momento de intersectar algún punto de la curva con la diagonal, eso significa que $f(x) = x$ en ese punto.

El punto fijo estable que se encuentra en el origen de la gráfica indica que la probabilidad de tener 1's en la siguiente generación es cero, porque las vecindades a calcular tienen muy pocas células vivas. Además en el otro extremo del eje q si el espacio de evoluciones tiene muchas células vivas, la probabilidad de tener 1's en la siguiente generación también es cero porque hay sobrepoblación.

Existen dos puntos fijos más, un punto fijo inestable aproximadamente en 0.2 que indica la existencia de comportamientos impredecibles en el espacio de evoluciones, es decir, la densidad que existe en ese momento puede mantenerse igual, crecer o desaparecer por completo en pocas generaciones. El otro punto fijo es un punto crítico y se encuentra aproximadamente en 0.37 que indica la densidad promedio de células vivas que se mantienen vivas en el espacio de evoluciones a través del tiempo.

El análisis consiste en iterar el polinomio del campo promedio para ver como se comporta la curva de probabilidad en cada generación y de esta manera identificar el comportamiento de los estados a través del tiempo. Para obtener el comportamiento en la siguiente generación se sustituye el polinomio p_t de la Ecuación 10, en él mismo para obtener la curva de probabilidad en p_{t+2} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
p_{t+2} = & 84(84p_{t+1}^3(1-p_{t+1})^6 \\
& + 56p_{t+1}^4(1-p_{t+1})^5)^3(1 - (84p_{t+1}^3(1-p_{t+1})^6 \\
& + 56p_{t+1}^4(1-p_{t+1})^5))^6 + 56(84p_{t+1}^3(1-p_{t+1})^6 \\
& + 56p_{t+1}^4(1-p_{t+1})^5)^4(1 - (84p_{t+1}^3(1-p_{t+1})^6 \\
& + 56p_{t+1}^4(1-p_{t+1})^5))^5
\end{aligned}$$

este polinomio calculara el comportamiento de la curva en la siguiente generación. Un problema es cuando se desean calcular más generaciones con los polinomios porque crecen exponencialmente, los polinomios para la tercera y cuarta generación ocuparían tres páginas completas.

En la Figura 8 se grafican las curvas de probabilidad para la segunda, tercera, cuarta y quinta generación de la regla de evolución Life. El comportamiento de las células en cada generación limita cada vez más su densidad en el espacio de evoluciones sobre el eje q , en general éste es el comportamiento que debe seguir cualquier configuración inicial aleatoria en un largo tiempo.

En la Figura 8 el intervalo de la curva sobre el eje q se hace cada vez más estrecho, esto indica que la población de células vivas es cada vez menor y en efecto a sí ocurre en Life. La densidad promedio de 0.37 calculada para la regla de evolución Life, coincide con otros resultados obtenidos en [SS78] y [GV87]. Los demás casos de estudio analizados en este artículo se estudian de la misma manera, para posteriormente establecer una caracterización a través de sus curvas de probabilidad.

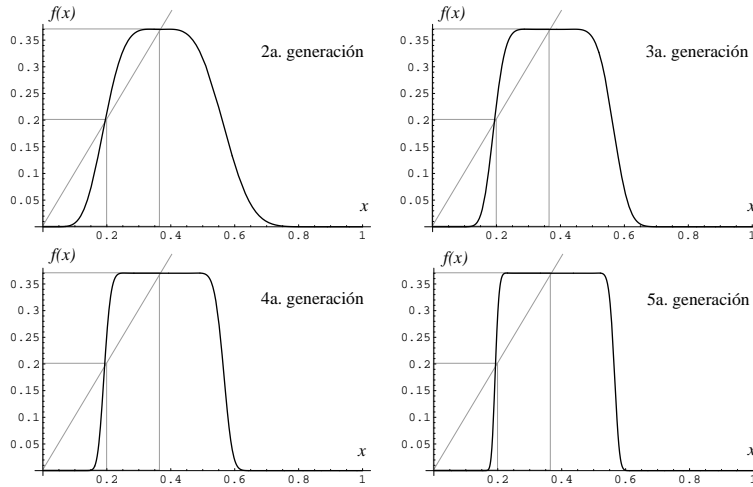


Figura 8: Curvas de probabilidad para la 2a, 3a, 4a y 5a generación

3.2 Modelos similares a “The Game of Life” en tres dimensiones

Los autómatas celulares en tres dimensiones han sido ampliamente analizados por Bays en [Bays87], [Bays88a], [Bays88b], [Bays90], [Bays91], [Bays92] y [Bays94]. Su estudio se enfoca en encontrar reglas de evolución en tres dimensiones que tengan comportamientos similares a Life en el espacio tridimensional. Varios de sus resultados son de tipo cuantitativo, basados en la simulación de varias reglas de evolución en pequeños espacios tridimensionales para buscar estructuras que sean similares a Life.

De esta manera ha logrado encontrar varias reglas de evolución que presentan características similares a Life en autómatas celulares de tres dimensiones entre otros resultados importantes.

Bays presenta varias reglas de evolución en tres dimensiones que cumplen algunas condiciones necesarias con comportamientos similares a Life, como las reglas de evolución $R(5767)$, $R(5777)$, $R(5566)$, $R(5755)$, $R(4656)$, $R(4655)$, $R(6767)$, $R(4567)$, $R(6766)$, $R(5655)$, $R(5877)$, $R(4666)$, $R(4566)$, $R(3455)$, $R(3566)$, entre otras.

Analizando el comportamiento de cada una de estas reglas en tres dimensiones hemos considerado presentar la regla $R(5, 7, 6, 6)$, porque esta regla de evolución presenta muchas estructuras análogas a Life en el espacio tridimensional y la regla de evolución $R(4, 5, 5, 5)$ porque muestra comportamientos muy interesantes pero que no son análogos a Life.

La regla de evolución $R(5, 7, 6, 6)$ puede reproducir algunos objetos de Life en el espacio tridimensional, conservando su simetría a través del tiempo; Bays reportó esta regla en [Bays87] mostrando algunas de las estructuras análogas de dos dimensiones a tres dimensiones, entre ellas el glider de cinco células como

se ilustra en la Figura 9. En la actualidad no se ha reportado el descubrimiento de un glider gun en tres dimensiones.

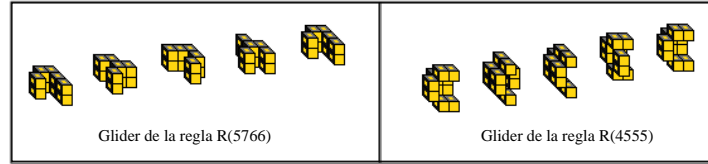


Figura 9: Gliders en tres dimensiones

El polinomio del campo promedio para la regla de evolución $R(5, 7, 6, 6)$ se representa como:

$$p_{t+1} = 65780p_t^6q_t^{21} + 657800p_t^8q_t^{19} + 230230p_t^6q_t^{21} \quad (11)$$

simplificando:

$$p_{t+1} = 296010p_t^6q_t^{21} + 657800p_t^8q_t^{19}. \quad (12)$$

En la Figura 10 se gráfica el polinomio de la Ecuación 12.

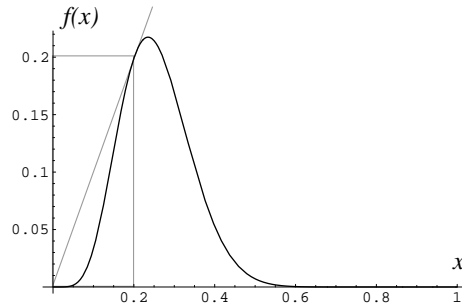


Figura 10: Curva de probabilidad de la regla $R(5, 7, 6, 6)$

La curva de probabilidad muestra un rango de células vivas más estrecho que el de Life en el eje q , esto es porque el número de células vivas es menor al número de células muertas en una vecindad de Moore, además la curva es tangencial a la diagonal. McIntosh en [McI90] menciona los diferentes tipos de comportamientos que pueden tener las curvas de probabilidad, identificando que las reglas con comportamientos complejos podrían ser aquellas reglas de evolución que tengan curvas de probabilidad tangenciales a la diagonal.

La Figura 11 muestra el comportamiento de los estados en la segunda, tercera, cuarta y quinta generación respectivamente. Al igual que Life las curvas de probabilidad se van acotando sobre el eje q rápidamente en cada generación, esto es fácil de comprobar, si tomamos una configuración aleatoria al evolucionar el autómata la cantidad de 1's decrece muy rápido. Una característica

importante es la existencia de un punto fijo inestable aproximadamente en 0.2 que garantiza un comportamiento de densidades no predecibles en el espacio de evoluciones, donde la densidad puede seguir igual, crecer o disminuir rápidamente en pocas generaciones.

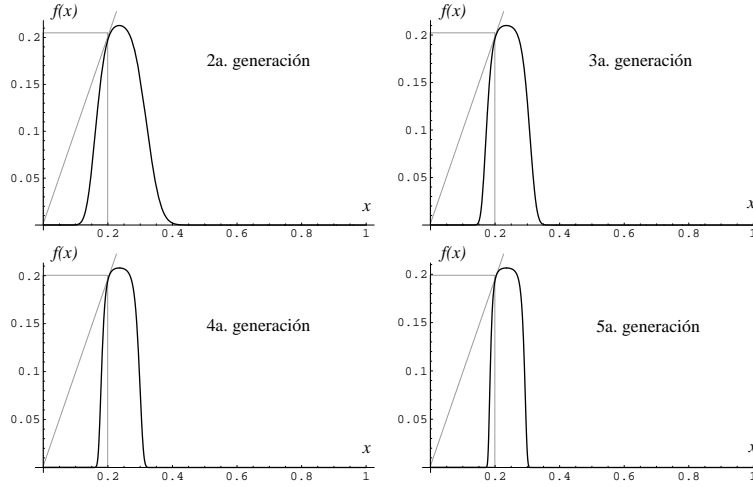


Figura 11: Curvas de probabilidad de la regla $R(5, 7, 6, 6)$

La regla de evolución $R(4, 5, 5, 5)$ estudiada por Bays en [Bays87], muestra estructuras muy interesantes que son independientes de las que produce la regla $R(5, 6, 7, 7)$, sus gliders y configuraciones periódicas fijas son de construcción diferente y se producen de manera natural, además algunas de ellas no son análogas en dos dimensiones.

Experimentando con diferentes configuraciones aleatorias el comportamiento de las células es similar al de la regla de evolución $R(5, 6, 7, 7)$, se estaciona rápidamente pero no desaparece por completo porque produce muchas estructuras periódicas fijas.

La regla de evolución $R(4, 5, 5, 5)$ puede ser vista como la sucesora directa de Life, si se suma la ordenada z a la regla de evolución $R(2+2, 3+2, 3+2, 3+2)$, lo que produce la regla de evolución en tres dimensiones $R(4, 5, 5, 5)$. El polinomio del campo promedio queda como:

$$p_{t+1} = 14950p_t^5q_t^{22} + 65780p_t^6q_t^{21} + 65780p_t^5q_t^{22} \quad (13)$$

simplicando:

$$p_{t+1} = 80730p_t^5q_t^{22} + 65780p_t^6q_t^{21}. \quad (14)$$

Los términos del polinomio de la Ecuación 14 son análogos a los de la Ecuación 9 que representa a Life.

La gráfica de la Figura 12 muestra un acotamiento de la curva de probabilidad en el eje q , existe un punto fijo inestable aproximadamente en 0.1 y un

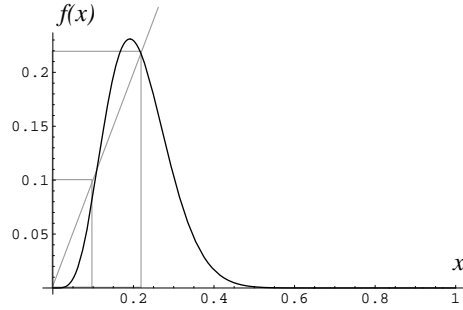


Figura 12: Curva de probabilidad de la regla $R(4, 5, 5, 5)$

punto fijo estable en aproximadamente 0.22, la primera diferencia con respecto a Life es la existencia de un punto fijo estable aproximadamente en 0.23 que no existe en Life.

La curva muestra que la probabilidad de tener 1's en el espacio de evoluciones en la siguiente generación no es tan alto como la que representa Life, esto se debe porque la ordenada z en el espacio tridimensional implica más vecinos en la vecindad y menos células vivas, consecuentemente la densidad de 1's es más baja que la de Life, tal como se mostró para la regla $R(5, 7, 6, 6)$. Se puede notar que la esta densidad promedio en tres dimensiones es menor que la que existe en dos dimensiones.

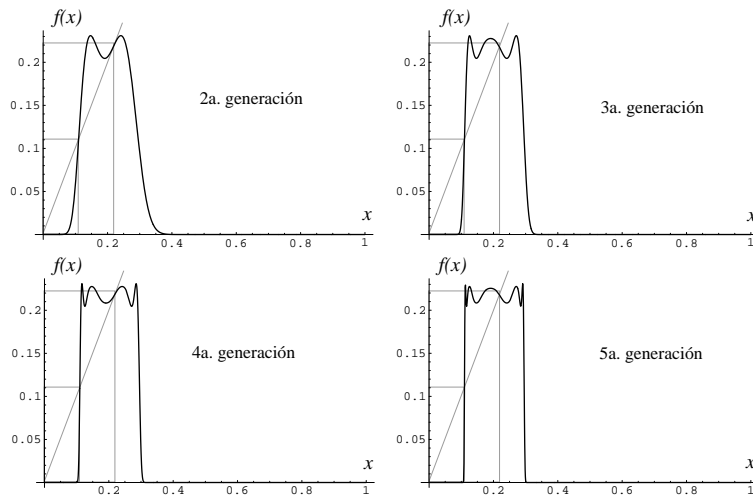


Figura 13: Curvas de probabilidad de la regla $R(4, 5, 5, 5)$

La Figura 13 muestra las curvas de probabilidad de los polinomios del campo promedio para la segunda, tercera, cuarta y quinta generación respectivamente. Existen puntos fijos estables tangenciales a la diagonal y puntos fijos inestables

alternándose de generación en generación, pares e impares a partir de la segunda generación. Por otra parte varios puntos máximos y mínimos por generación, lo que implica inestabilidad en la densidad promedio de células vivas que se encuentran en el espacio de evoluciones, también la cantidad de estos puntos máximos y mínimos van aumentando conforme se calculan más generaciones.

Es interesante ver que esta regla de evolución aunque no tiene una densidad promedio en su curva de probabilidad y tiene puntos atractores y repulsores, presenta características muy similares a Life en el espacio de evoluciones. Bays reporta esta regla en [Bays87] ilustrando algunos gliders que ha descubierto y configuraciones muy interesantes que la regla de evolución produce en el espacio de evoluciones.

Las curvas de probabilidad de la Figura 13 al igual que la regla de evolución $R(5, 7, 6, 6)$ y la regla Life van acontando la densidad promedio en el eje q en cada generación, pero la diferencia principal que tiene con respecto a Life es la existencia de varios puntos máximos y mínimos, por otra parte la existencia de puntos fijos estables e inestables se alternan de generación en generación. Por lo tanto esta regla de evolución aunque puede soportar comportamientos complejos no muestra una densidad promedio para un largo tiempo como las reglas de evolución $R(5, 7, 6, 6)$ y Life.

Bays presenta otras reglas de evolución en [Bays88b], [Bays91] y [Bays92] que muestran algunos gliders y configuraciones fijas, además estas reglas de evolución no cubren todo el espacio de evoluciones, ni desaparecen rápidamente. Finalmente presentamos las gráficas de probabilidad de las reglas de evolución $R(5, 6, 5, 5)$, $R(4, 6, 3, 3)$ y $R(6, 8, 5, 5)$. Encontrando diferencias importantes en cada una de sus curvas de probabilidad.

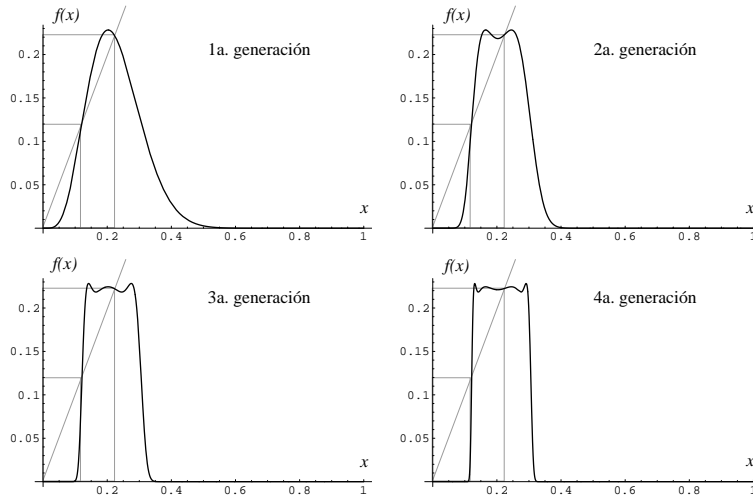


Figura 14: Curvas de probabilidad de la regla $R(5, 6, 5, 5)$ 1a, 2a, 3a y 4a generación

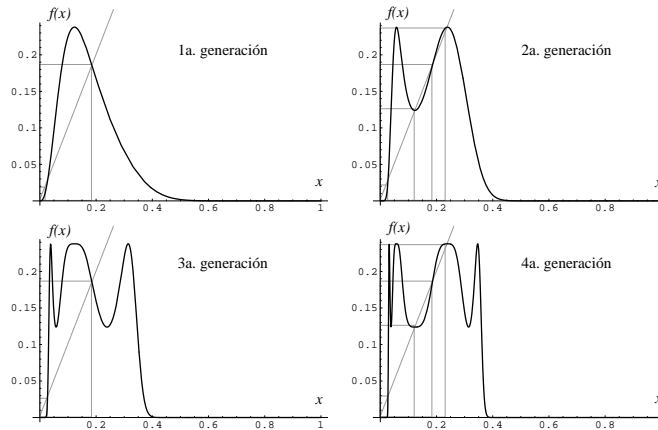


Figura 15: Curvas de probabilidad de la regla $R(4, 6, 3, 3)$ 1a, 2a, 3a y 4a generación

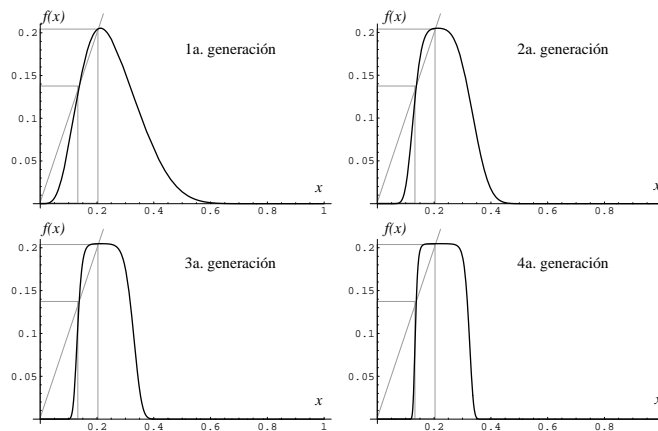


Figura 16: Curvas de probabilidad de la regla $R(6, 8, 5, 5)$ 1a, 2a, 3a y 4a generación

4 Conclusiones

El autómata celular “The game of Life” es un modelo que se caracteriza por su sencillez, sin embargo a pesar de ser un modelo muy simple ha demostrado tener una complejidad impresionante. La teoría del campo promedio permite establecer características probabilísticas de la regla de evolución a nivel global y es aquí donde se tiene la primera limitante importante de este estudio, porque no

describe el comportamiento a nivel local que es precisamente donde se encuentra toda la complejidad de la regla de evolución.

La teoría del campo promedio permite determinar como se comportarán los estados por medio de su densidad a través del tiempo, la densidad se muestra de manera global y general, es decir, se sabe que son condiciones necesarias pero no suficientes para poder obtener evoluciones del tipo de Life.

Es claro que el entendimiento de Life no es sencillo y el estudio en tres dimensiones implica crecer el problema de manera exponencial, sin embargo se aprovecha el trabajo realizado por Bays y aplicando la teoría del campo promedio se puede ver que las reglas de evolución tienen diferencias probabilísticas importantes que ayudan a identificar mejor cada regla de evolución y no solo confiar en los hechos fenotípicos.

En autómatas celulares de tres dimensiones existen más de una regla de evolución que tienen comportamientos similares a los de Life, por lo tanto en una y dos dimensiones también deben existir varias reglas de evolución que presentan comportamientos similares a los de Life, como en [Bell94] (HighLife) y [Heu96] (Life 1133) en dos dimensiones y en una dimensión [McI88a], [McI88b] (regla 22) y [Cook99] (regla 110). Esto implica que definir la regla de evolución que sea la sucesora de Life en tres dimensiones sigue siendo un problema abierto.

Finalmente se puede decir que el estudio de la teoría del campo promedio en autómatas celulares similares a Life, ha proporcionado resultados importantes en cuanto a características probabilísticas y además permite ver de manera clara parte de la complejidad de Life. La teoría del campo promedio es útil como una aproximación más directa en el cálculo de la densidad que siguen los estados del autómata celular al límite en el espacio de evoluciones de manera global, además otra utilidad importante es que puede ser aplicada en autómatas celulares que tengan más estados, más vecinos y en varias dimensiones.

Referencias

- [Bays87] Carter Bays, *Candidates for the Game of Life in Three Dimensions*, Complex Systems **1** (1987), 373–400.
- [Bays88a] Carter Bays, *Classification of Semitotalistic Cellular Automata in Three Dimension*, Complex Systems **2** (1988), 235–254.
- [Bays88b] Carter Bays, *A Note on the Discovery of a New Game of Three-Dimensional Life*, Complex Systems **2** (1988), 255–258.
- [Bays90] Carter Bays, *The Discovery of a New Glider for the Game of Three-Dimensional Life*, Complex Systems **4** (1990), 599–602.
- [Bays91] Carter Bays, *New Game of Three-Dimensional Life*, Complex Systems **5** (1991), 15–18.
- [Bays92] Carter Bays, *A New Candidate Rule for the Game of Three-Dimensional Life*, Complex Systems **6** (1992), 433–441.

- [Bays94] Carter Bays, *Further Notes on the Game of Three-Dimensional Life*, *Complex Systems* **8** (1994), 67–73.
- [Bell94] David I. Bell, *HighLife - An Interesting Variant of Life*, Article for review received by life@cs.arizona.edu (April 17, 1994).
- [BCG82] Elwyn Berlekamp, John Conway and Richard Gut, *The game of Life*, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, vol. 2, Academic Press, 1982, pp. 817–849.
- [Cook99] Matthew Cook, *Introduction to the activity of rule 110*, (copyright 1994-1998 Matthew Cook), <http://w3.datanet.hu/~cook/Workshop/CellAut/Elementary/Rule110/110pics.html> (January 1999).
- [CM92] Hugues Chaté and Paul Manneville, *Collective Behaviors in Spatially Extended Systems with Local Interactions and Synchronous Updating*, *Progress in Theoretical Physics* **87** (1992), 1–60.
- [GGJ93] J. B. C. Garcia, M. A. F. Gomes, T. I. Jyh, T. I. Ren and T. R. M. Sales, *Nonlinear dynamics of the cellular-automaton “game of Life”*, *Physical Review E* **48** (November 1993), 3345–3351.
- [Gard70] Martin Gardner, *Mathematical Games - The fantastic combinations of John H. Conway’s new solitaire game Life*, *Scientific American* **223** (1970), 120–123.
- [Ger90] R. W. Gerling, *Classification of three-dimensional cellular automata*, *Physica A* **162** (1990), 187–195.
- [GVK87] Howard A. Gutowitz, Jonathan D. Victor and Bruce W. Knight, *Local structure theory for cellular automata*, *Physica D* **28** (1987), 18–48.
- [GV87] Howard A. Gutowitz and Jonathan D. Victor, *Local structure theory in more than one dimension*, *Complex Systems* **1** (1987), 57–68.
- [Gut89] Howard A. Gutowitz, *Mean Field vs. Wolfram Classification of Cellular Automata*, <http://www.santafe.edu/~hag/mfw/mfw.html> (1989).
- [Dup85] J. Hardouin Duparc, *Generalization of “Life”*, *Dynamical Systems and Cellular Automata*, Academic Press, 1985.
- [Hem85] Jan Hemmingsson, *A totalistic three-dimensional cellular automaton with quasiperiodic behavior*, *Physica A* **183** (1985), 255–261.
- [Heu96] Jean-Claude Heudin, *A New Candidate Rule for the Game of Two-dimensional Life*, *Complex Systems* **10** (1996), 367–381.

- [Jua00] Genaro Juárez Martínez, *Teoría del campo promedio en autómatas celulares similares a “The Game of Life”*, Tesis de Maestría, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, 2000.
- [Lor53] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, University of Toronto Press, Toronto, 1953.
- [McI88a] Harold V. McIntosh, *Life’s Still Lives*, Universidad Autonoma de Puebla, Apartado Postal 461 (72000) Puebla, Puebla, Mexico, 1988, available too in <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>.
- [McI88b] Harold V. McIntosh, *A Zoo of Life Forms*, Universidad Autonoma de Puebla, Apartado Postal 461 (72000) Puebla, Puebla, Mexico, 1988, available too in <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>.
- [McI90] Harold V. McIntosh, *Wolfram’s Class IV and a Good Life*, Cellular Automata Experimental (Howard A. Gutowitz, ed.), Noth Holland, 1990, pp. 105–121.
- [PW85] Norman H. Packard and Stephen Wolfram, *Two-dimensional cellular automata*, Journal of Statistical Physics **38** (1985), 901–946.
- [SS78] L. S. Schulman and P. E. Seiden, *Statistical mechanics of a dynamical system based on Conway’s game of Life*, Journal of Statistical Physics **19** (1978), 293–314.
- [Neu66] John von Neumann, *Theory of Self-reproducing Automata*, University of Illinois Press, 1966, (edited and completed by A. W. Burks).
- [Wol83] Stephen Wolfram, *Statistical mechanics of cellular automata*, Reviews of Modern Physics **55** (1983), 601–644.