

Análisis y Complejidad de Algoritmos

Arboles Binarios

Arturo Díaz Pérez

- ★ Arboles
- ✱ Definiciones
- ✱ Recorridos
- ✱ Arboles Binarios
- ⊞ Profundidad y Número de Nodos

Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-1

Arbol

- ☞ Un árbol es una colección de elementos, llamados nodos, uno de los cuales se distingue con el nombre de raíz, los cuales mantienen una relación (parentesco) que define una estructura jerárquica entre ellos.
- ☞ De manera formal, un árbol se puede definir en forma recursiva mediante las reglas siguientes:
 - ← El conjunto vacío de nodos es un árbol, llamado nulo o vacío.
 - ← Un nodo es un árbol, el cual es, asimismo, la raíz del árbol.
 - ← Si n_i es un nodo y T_1, T_2, \dots, T_k son árboles con raíces n_1, n_2, \dots, n_k , respectivamente, se puede construir un nuevo árbol haciendo n el padre de los nodos n_1, n_2, \dots, n_k .
 - ☞ En este árbol n es la raíz y T_1, T_2, \dots, T_k son los subárboles de la raíz. Los nodos n_1, n_2, \dots, n_k se conocen como los hijos del nodo n .

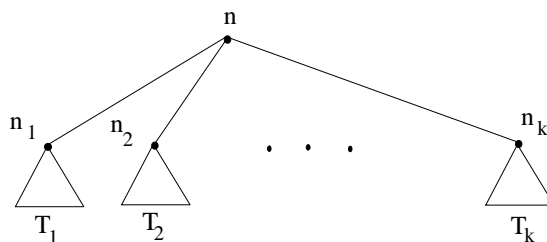
Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-2

Ejemplo

← Si n , es un nodo y T_1, T_2, \dots, T_k son árboles con raíces n_1, n_2, \dots, n_k , respectivamente, se puede construir un nuevo árbol haciendo n el padre de los nodos n_1, n_2, \dots, n_k .

☞ En este árbol n es la raíz y T_1, T_2, \dots, T_k son los subárboles de la raíz. Los nodos n_1, n_2, \dots, n_k se conocen como los hijos del nodo n .



Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-3

Algunas Definiciones

- ☞ Un **camino** de un nodo n_1 a un nodo n_k es una secuencia de nodos n_1, n_2, \dots, n_k de tal manera que n_i es padre de n_{i+1} para $i = 1, 2, \dots, k-1$.
- ☞ La **longitud de un camino** es uno menos que el número de nodos en el camino.
 - ← Existe un camino de longitud 0 de un nodo a sí mismo.
- ☞ Si existe un camino de un nodo a a un nodo b , entonces se dice que a es un **ancestro** de b y que b es un **descendiente** de a .
- ☞ Un ancestro o descendiente de un nodo diferente de sí mismo se dice que es un **ancestro** o **descendiente propio**, respectivamente.

Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-4

Algunas Definiciones

- ☞ En un árbol la raíz es el único nodo que no tiene ancestros propios.
- ☞ Un nodo sin descendientes propios se conoce como una **hoja**.
- ☞ Un **subárbol** de un árbol es un nodo junto con todos sus descendientes.
- ☞ El **peso** de un nodo en un árbol es la longitud del camino más largo del nodo a una hoja.
- ☞ El **peso de un árbol** es el peso de la raíz.
- ☞ La **profundidad** de un nodo es la longitud del camino único de la raíz al nodo.
- ☞ La **profundidad** de un árbol es la profundidad de la hoja más profunda.

Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-5

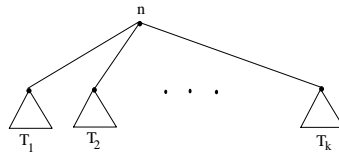
Recorridos

- ☞ Al visitar los nodos de un árbol existen algunas maneras útiles en las que se pueden ordenar sistemáticamente los nodos de un árbol.
- ☞ Los ordenamientos más importantes son llamados: pre-orden, post-orden y en-orden y se definen recursivamente como sigue:
 - ← Si un árbol T es nulo, entonces, la lista vacía es el listado pre-orden, post-orden y en-orden del árbol T .
 - ← Si T consiste de un sólo nodo n , entonces, n es el listado pre-orden, post-orden y en-orden del árbol T .

Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-6

Recorridos



☞ Si T es un árbol con raíz n y subárboles T_1, T_2, \dots, T_k , entonces,

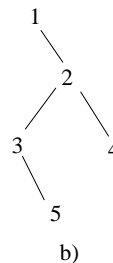
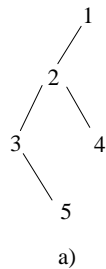
- ← El listado pre-orden de los nodos de T es la raíz n , seguida por los nodos de T_1 en pre-orden, después los nodos de T_2 en pre-orden, y así, hasta los nodos de T_k en pre-orden.
- ← El listado post-orden de los nodos de T es los nodos de T_1 en post-orden, seguidos de los nodos de T_2 en post-orden, y así hasta los nodos de T_k en post-orden, todos ellos seguidos de n .
- ← El listado en-orden de los nodos de T es los nodos de T_1 en-orden, seguidos por n , seguidos por los nodos de T_2, \dots, T_k , cada grupo de nodos en-orden.

Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-7

Arboles Binarios

- ☞ Un **árbol binario** es un árbol nulo o un árbol cuyos nodos tienen a lo sumo dos hijos.
- ← Los hijos de un árbol binario se pueden denotar como **hijo izquierdo** e **hijo derecho**.



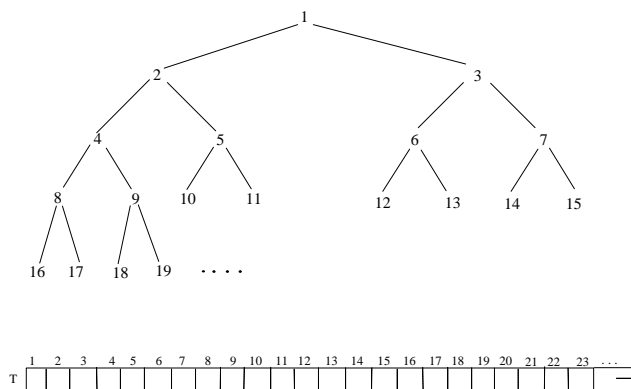
Análisis y Diseño de Algoritmos

Arboles-8

Arboles Binarios

- ☞ Un árbol binario se dice que es **completo** si cada nodo ó es una hoja o tiene dos hijos.
- ☞ Un árbol binario completo se dice que está **balanceado** si al numerar sus nodos por profundidad desde la raíz hasta las hojas, de izquierda a derecha, al encontrar la primera hoja todos los nodos numerados siguientes son hojas.

Representación de Arboles Binarios



Profundidad y Número de Nodos

← Si n es el número de nodos en un árbol binario y d es la profundidad, entonces, $\lfloor \log_2 n \rfloor \leq d$

☞ Ya que cada nodo tiene a lo más 2 nodos internos, entonces, en cada profundidad i existen 2^i nodos. Así que el número total de nodos está acotado por

- ▣ $n \leq 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^d$

- ▣ Dado que

$$\sum_{i=0}^d 2^i = \frac{2^{d+1} - 1}{2 - 1} = 2^{d+1} - 1$$

☞ Así se obtiene que

- ▣ $n < 2^{d+1}$

- ▣ $\log_2 n < d + 1$

- ▣ $\lfloor \log_2 n \rfloor \leq d$