ANALISIS Y DISEÑO DE ALGORITMOS
Algunas funciones y sumatorias

Guillermo Morales-Luna

Sección de Computación

CINVESTAV-IPN

gmorales@cs.cinvestav.mx

México, D.F., a 22 de enero de 2001.

CONTENIDO

Algunas funciones

f es *monótona* si es *creciente* o *decreciente*.

Es creciente si: $\forall n_0, n_1 : \ (n_1 \leq n_2 \ \Rightarrow \ f(n_1) \leq f(n_2))$.

Es decreciente si: $\forall n_0, n_1 : \ (n_1 \leq n_2 \ \Rightarrow \ f(n_1) \geq f(n_2))$.

Pisos y techos

$$\forall x \in I\!\!R: \quad \begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= \text{el mayor entero que no supera a } x, \\ \lceil x \rceil &= \text{el menor entero que no está por debajo de } x, \end{aligned}$$

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ y $x \mapsto \lceil x \rceil$ son "*piso*" y "*techo*".

Polinomios

En una variable: $p(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i$.

m es el *grado* del polinomio, ∂p,

$a_0, \ldots, a_m$ son los *coeficientes* del polinomio.

a_m, es el coeficiente *principal*.

En varias variables: $p(\mathbf{n}) = \sum_{\mathrm{i}\in A}^{\mathrm{m}} a_{\mathrm{i}} \mathbf{n}^{\mathrm{i}}$, $A \subset I\!N^k$ conjunto finito

si $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ e $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$, entonces $\mathbf{n}^{\mathrm{i}} = \prod_{j=1}^{k} n_j^{i_j}$.

Consideraremos sólo polinomios de una variable.

Grado 1: *lineales.* Grado 2: *cuadráticos.* Grado 3 *cúbicos.*

Para cualesquiera dos p_1, p_1:
$$\begin{aligned} p_1(n) = O(p_2(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad \partial p_1 \leq \partial p_2, \\ p_1(n) = \Theta(p_2(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad \partial p_1 = \partial p_2, \\ p_1(n) = o(p_2(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad \partial p_1 < \partial p_2. \end{aligned}$$

$n^{O(1)} = \bigcup_{m\geq 0} O(n^m)$: clase de fun'es *acotadas polinomialmente.*

Potencias

$\forall a \neq 0$: $a^0 = 1$ y $\forall n \in I\!N : a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Si $n_1 = -n$ con $n \in I\!N$, $a^{n_1} = \frac{1}{a^n}$.

Si $a > 0$, $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $q > 0$, $a^{\frac{p}{q}} = x$

donde x es tal que $x^q = a^p$.

Por continuidad, queda definido a^z $\forall z \in I\!R$.

Reglas de las potencias:

$$a^n a^m = a^{n+m}\ ,\ (a^n)^m = a^{nm}\ ,\ \forall a>0, a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } a<1 \\ 1 & \text{si } a=1 \\ \infty & \text{si } a>1 \end{cases}$$

$\forall m,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^m}{a^n} = 0$ y $n^m = o(a^n)$.

Si $a>0$ y $f(n) = n^{O(1)}$, $f(n) = o(a^n)$: cualquier potencia "crece más rápido que una función acotada polinomialmente".

Base de los logaritmos naturales: $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

aprox. $e = 2.71828182845904523 54\ldots$

Para fines de cálculo

$$e^x = \sum_{m\geq 0}\frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \qquad (1)$$

Logaritmos Para $a>0$,

logaritmo en base a de $x>0$: $\log_a x = y \in I\!R$ con $a^y = x$.

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x^y) &= y\cdot\log_a x \\ \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b} \end{aligned} \qquad (2)$$

Logaritmo natural: $x \mapsto \ln x = \log_e x$. Para fines de cálculo

$$\ln(1+x) = \sum_{m\geq 1}(-1)^{1+m}\frac{x^m}{m} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\cdots \qquad (3)$$

Con $n_1 = \log_a n$: $\frac{(\log_a n)^m}{n} = \frac{(\log_a n)^m}{a^{\log_a n}} = \frac{n_1^m}{a^{n_1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, i.e. $(\log_a n)^m = o(n)$.

$(\log_a n)^{O(1)} = \bigcup_{m\geq 0} O((\log_a n)^m)$: *acotadas "polilogarítmicamente"*.

Factoriales

Recursivamente: $0! = 1$ y $\forall n \in I\!N : (n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ y $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n}}$.

$n! = o(n^n)$, $n! = \omega(2^n)$ y $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

Sucesión de Fibonacci

Recursivamente,

$$F_0 = 0 \quad , \quad F_1 = 1 \quad \text{y} \quad \forall n \in I\!N : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Razones doradas:

$$\begin{array}{rcccr} \phi & = & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & = & 1.6180339887498948482\ldots \\ \widehat{\phi} & = & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & = & -0.6180339887498948482\ldots \end{array}$$

$\forall n :\ F_n = \frac{\phi^n + \widehat{\phi}^n}{\sqrt{5}}$ y $F_n = \texttt{EnteroMásPróximo}\left(\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right)$.

La sucesión crece exponencialmente.

Funciones iteradas

Sea $f : I\!R^+ \to I\!R$ creciente, con $f(n) < n,\ \forall n$.

Composición de f: $f^{(m)} : n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } m = 0, \\ f(f^{(m-1)}(n)) & \text{si } m > 0. \end{cases}$

Para $c \in I\!R$,

$$f_c^* : n \mapsto \begin{cases} \mathrm{Min}\{m \geq 0 | f^{(m)}(n) \leq c\} & \text{si existe tal mínimo,} \\ \perp & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplos

1. *Logaritmo iterado*: $\log^* = \log^*_1$.

n	$\log^*$	n	$\log^*$	n	$\log^*$
2	1	$2^{2^2} = 16$	3	$2^{2^{2^{2^2}}} = 2^{65536}$	5
$2^2 = 4$	2	$2^{2^{2^2}} = 65536$	4	$2^{2^{2^{2^{2^2}}}} = 2^{2^{65536}}$	6

Ilustración del lento crecimiento de $\log^*$.

2. Sea $a > 1$ y $f : n \mapsto \sqrt[a]{n} = n^{\frac{1}{a}}$. $\forall m \geq 0,\ f^{(m)} : n \mapsto n^{\frac{1}{a^m}}$.
Luego, $\left(\forall n > 0,\ f^{(m)}(n) \leq 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{\log_2 \log_2 n}{\log_2 a} \leq m\right)$. Y,
$f_2^*(n) = \Theta(\log\log n)$.
Ya que $\forall m, n > 1 :\ f^{(m)}(n) > 1$, $\forall n > 1 :\ f_1^*(n) = \perp$.

3. Sea $f : n \mapsto \frac{n}{\log n}$. $\forall n > 1,\ f^{(m)}(n) \underset{n \to +\infty}{\searrow} e$. Y,
$\forall n > 1 :\ f_2^*(n) = \perp$.

Sumatorias

Sumas finitas $A = (a_1, \ldots, a_n) :\ \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \cdots + a_n$.

Series $A = (a_n)_{n \geq 0}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n \geq 0} a_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^n a_i$.

Sumas telescópicas

Para $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$,
$\displaystyle\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Sumas de mismas potencias de los primeros enteros positivos

$s_{mn} = \sum_{i=1}^{n} i^m.$

Por el binomio de Newton, $(i+1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} i^k$,

$$(i+1)^m - i^m = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} i^k \tag{4}$$

Al hacer la suma telescópica,

$$(n+1)^m - 1^m = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} s_{kn} \tag{5}$$

$$\begin{array}{lcl}
(n+1) - 1 & = & s_{0n} \\
(n+1)^2 - 1 & = & s_{0n} + 2s_{1n} \\
(n+1)^3 - 1 & = & s_{0n} + 3s_{1n} + 3s_{2n} \\
(n+1)^4 - 1 & = & s_{0n} + 4s_{1n} + 6s_{2n} + 4s_{3n} \\
(n+1)^5 - 1 & = & s_{0n} + 5s_{1n} + 10s_{2n} + 10s_{3n} + 5s_{4n} \\
(n+1)^6 - 1 & = & s_{0n} + 6s_{1n} + 15s_{2n} + 20s_{3n} + 15s_{4n} + 6s_{5n} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
s_{0n} & = & n \\
s_{1n} & = & \frac{1}{2}n(1+n) = \frac{1}{2}s_{0n}(1+n) \\
s_{2n} & = & \frac{1}{6}n(1+n)(1+2n) = \frac{1}{3}s_{1n}(1+2n) \\
s_{3n} & = & \frac{1}{4}n^2(1+n)^2 = s_{1n}^2 \\
s_{4n} & = & \frac{1}{30}n(1+n)(1+2n)(-1+3n+3n^2) = \frac{1}{5}s_{2n}(-1+3n+3n^2) \\
s_{5n} & = & \frac{1}{12}n^2(1+n)^2(-1+2n+2n^2) = \frac{1}{3}s_{3n}(-1+2n+2n^2) \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Y $\sum_{i=1}^{n} i^m = O\left(n^{m+1}\right)$.

Sumas de potencias

$\forall x \neq 0, n \geq 0$, $x^{n+1} - 1 = \sum_{i=0}^{n}(x^{i+1} - x^i) = \sum_{i=0}^{n} x^i(x-1)$, y

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Si $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$. Al derivar cada miembro y multiplicar por x,

$$\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \text{ si } |x| < 1.$$

Serie armónica

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k} \leq 1 + \int_1^n x^{-k} dx \quad (k = 1)\text{: } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log(n) + O(1).$$

Para $k > 1$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k} = k + (1-k)\frac{1}{n^{k-1}} + O(1)$.

Productos $\log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \log(a_i)$.

Acotamiento de sumas

Acotamiento término a término

$A = (a_1, \ldots, a_n) \in (I\!R^+)^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n)$, $\forall i \leq n: \ a_i \leq b_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

$A = (a_i)_{i\geq 1}$, $B = (b_i)_{i\geq 1}$, $\sum_{i\geq 1} b_i < +\infty$ y $\forall i: \ a_i \leq b_i$:

$$\sum_{i\geq 1} a_i \leq \sum_{i\geq 1} b_i.$$

Si $B = (b_i)_{i\geq 1}$ *domina a la larga a* A, $\exists i_0 \forall i \geq 0: \ a_i \leq b_i$, entonces

$$\sum_{i\geq 1} a_i \leq \sum_{i=1}^{i_0} a_i + \sum_{i\geq i_0+1} b_i.$$

Acotamiento por razones menores que 1 Sea $A = (a_i)_{i\geq 1}$ t.q. $\exists r \in]0,1[\forall i: \ \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq r$, entonces

$\forall i: \ a_i \leq a_0 r^i$ y $\sum_{i\geq 1} a_i \leq a_0 \frac{1}{1-r}$.

Aproximación por integrales Sea $A = (a_i)_{i\geq 1}$, con $a_i = f(i)$, f integrable. Entonces,

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=m-1}^{n} \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$

.