

Introducción a la Optimización Evolutiva Multiobjetivo

Dr. Carlos A. Coello Coello
Departamento de Computación
CINVESTAV-IPN
Av. IPN No. 2508
Col. San Pedro Zacatenco
México, D.F. 07300
email: ccoello@cs.cinvestav.mx

Funciones sin Restricciones

- **MOP 1:** Primera función de Schaffer. Tiene gran importancia histórica por haber sido la primera reportada en la literatura de computación evolutiva. Su frente de Pareto puede obtenerse analíticamente. PF_{true} es convexo y sólo hay una variable de decisión.

$F = (f_1(x), f_2(x))$, donde

$$f_1(x) = x^2,$$

$$f_2(x) = (x - 2)^2$$

donde: $-10^5 \leq x \leq 10^5$

Funciones sin Restricciones

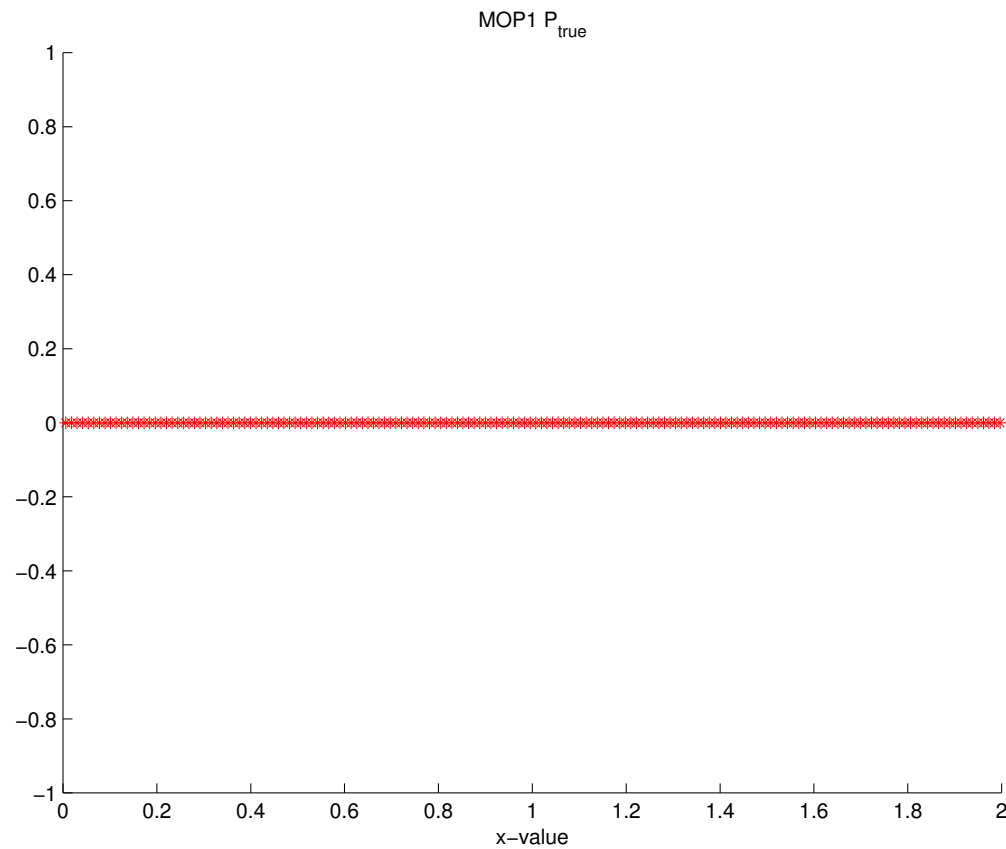


Figura 1: P_{true} de MOP 1

Funciones sin Restricciones

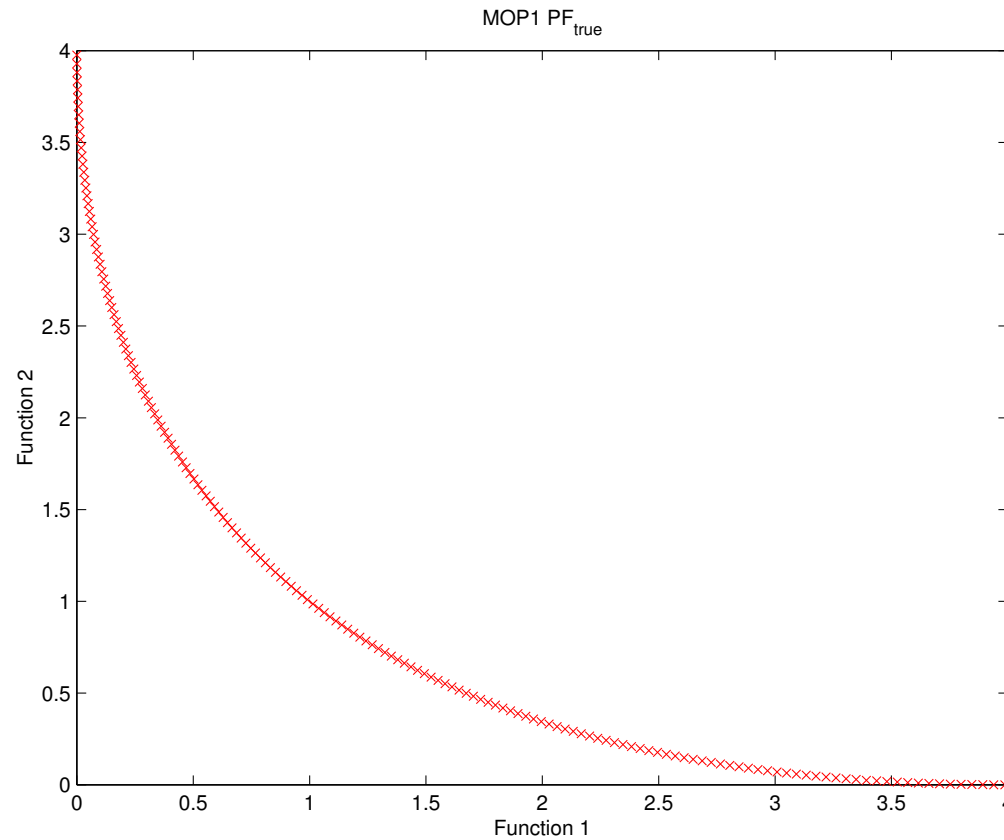


Figura 2: Pf_{true} de MOP 1

Funciones sin Restricciones

- **MOP 2:** Segunda función de prueba de Fonseca. Es escalable. Se le pueden agregar variables de decisión sin cambiar la forma de PF_{true} (el frente es cóncavo en este caso).

$F = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$, donde

$$f_1(\vec{x}) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right),$$

$$f_2(\vec{x}) = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^n \left(x_i + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$$

donde: $-4 \leq x_i \leq 4$; $i = 1, 2, 3$

Funciones sin Restricciones

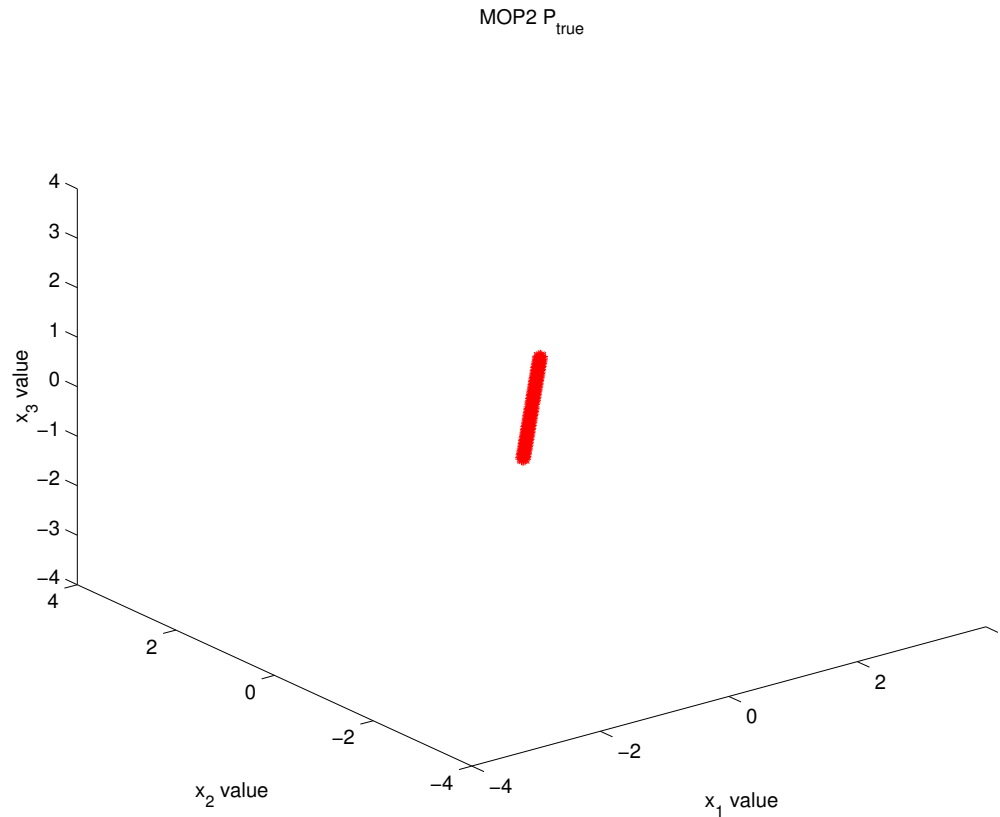


Figura 3: P_{true} de MOP 2

Funciones sin Restricciones

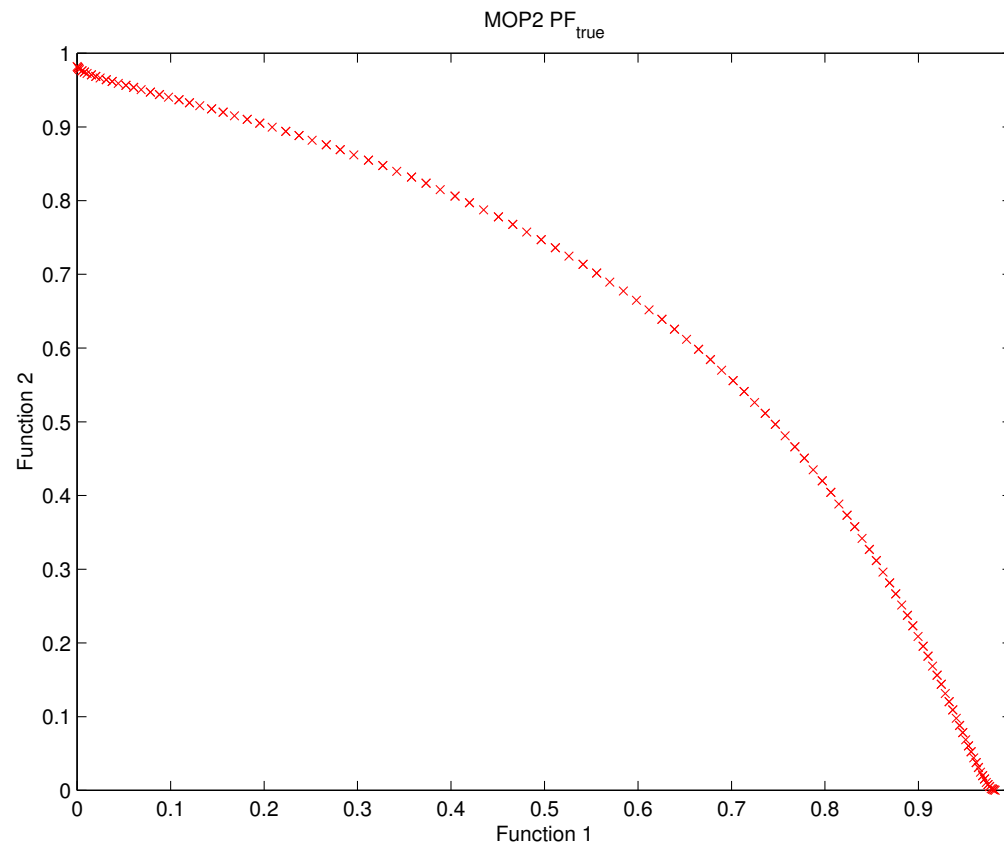


Figura 4: PF_{true} de MOP 2

Funciones sin Restricciones

- **MOP 3:** Problema propuesto por Poloni. P_{true} y PF_{true} están desconectados.

Maximize $F = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, donde

$$f_1(x, y) = -[1 + (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2],$$

$$f_2(x, y) = -[(x + 3)^2 + (y + 1)^2]$$

Funciones sin Restricciones

donde: $-3,1416 \leq x, y \leq 3,1416$,

$$A_1 = 0,5 \sin 1 - 2 \cos 1 + \sin 2 - 1,5 \cos 2,$$

$$A_2 = 1,5 \sin 1 - \cos 1 + 2 \sin 2 - 0,5 \cos 2,$$

$$B_1 = 0,5 \sin x - 2 \cos x + \sin y - 1,5 \cos y,$$

$$B_2 = 1,5 \sin x - \cos x + 2 \sin y - 0,5 \cos y$$

Funciones sin Restricciones

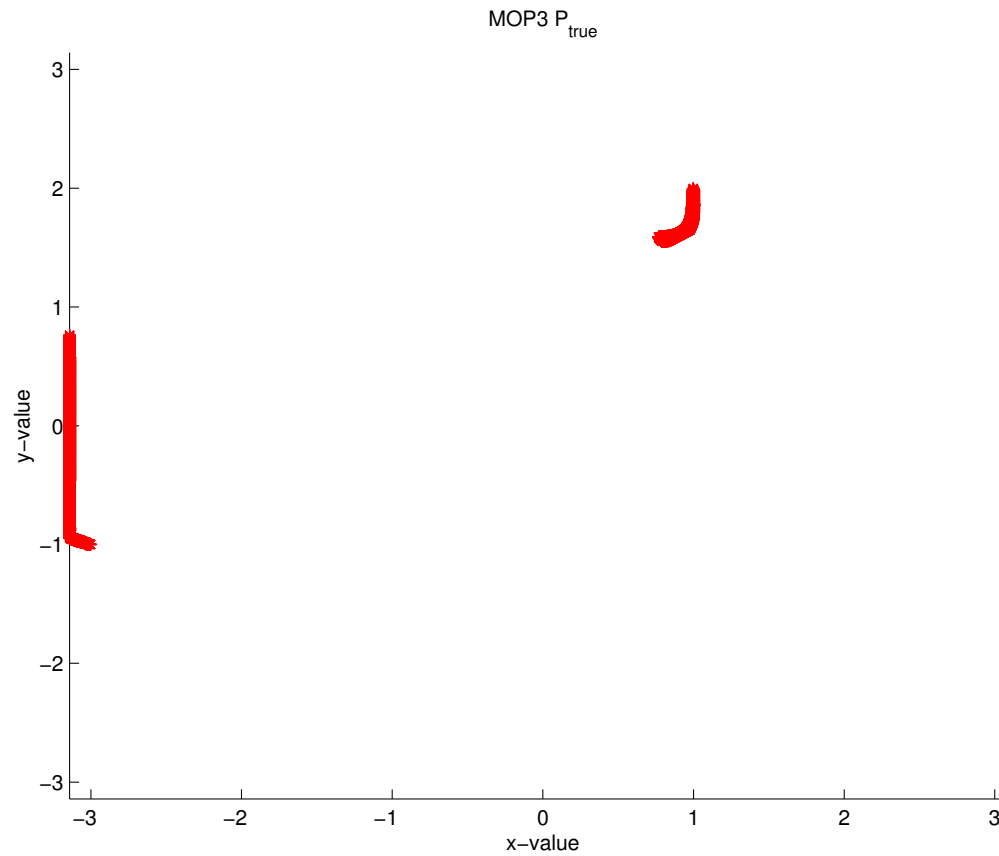


Figura 5: P_{true} de MOP 3

Funciones sin Restricciones

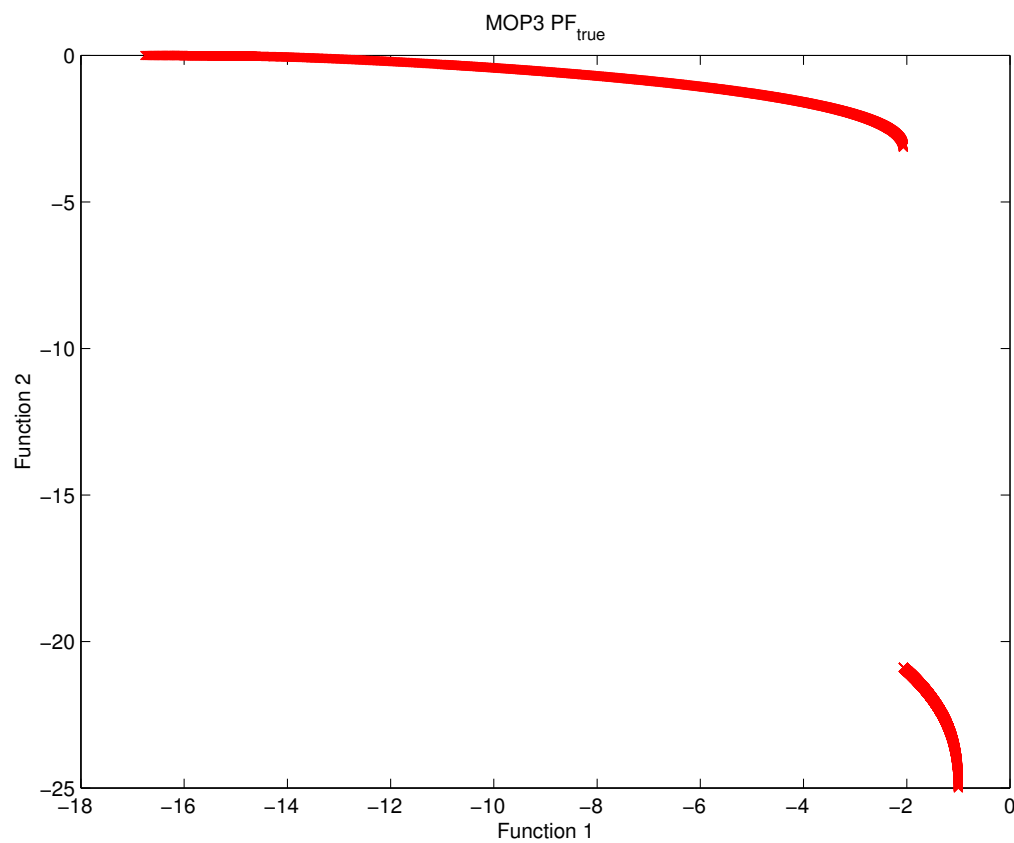


Figura 6: PF_{true} de MOP 3

Funciones sin Restricciones

- **MOP 4:** Propuesta por Kursawe. Hay áreas desconectadas y asimétricas en P_{true} . PF_{true} consiste de 3 curvas desconectadas. Permite el uso de un número arbitrario de variables, aunque escalar la función cambia la forma de PF_{true} .
 $F = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$, donde

$$f_1(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} (-10e^{(-0,2)*\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}}),$$
$$f_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (|x_i|^a + 5 \sin(x_i)^b)$$

donde: $-5 \leq x_i \leq 5$; $i = 1, 2, 3$; $a = 0,8$, $b = 3$

Funciones sin Restricciones

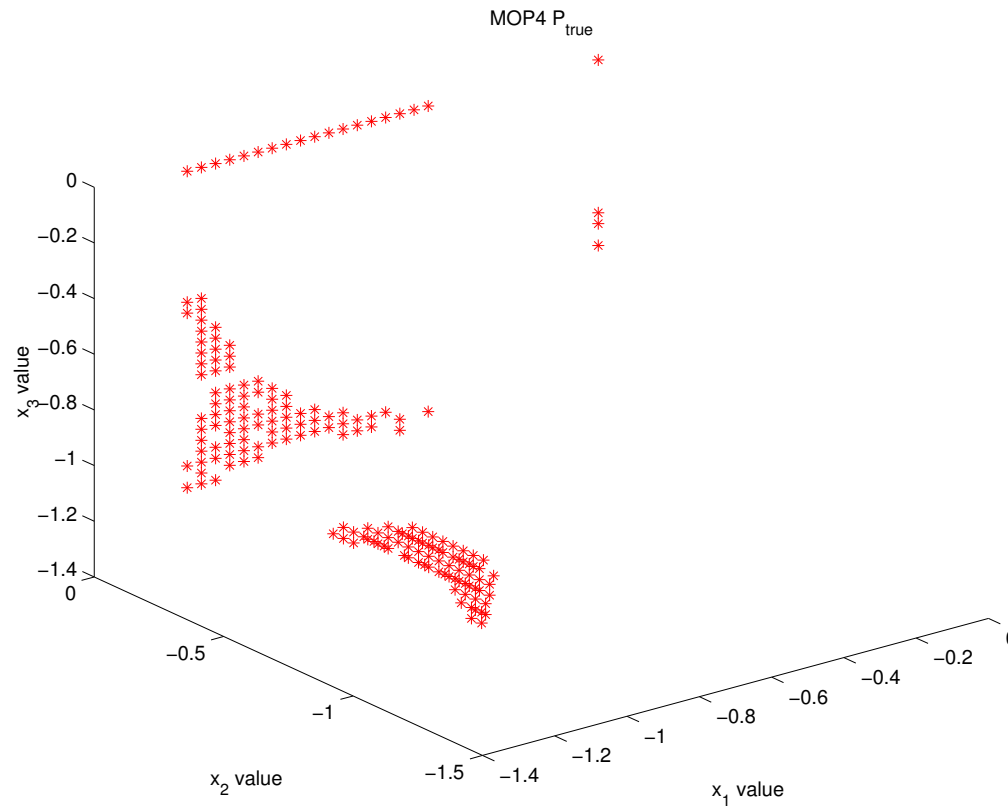


Figura 7: P_{true} de MOP 4

Funciones sin Restricciones

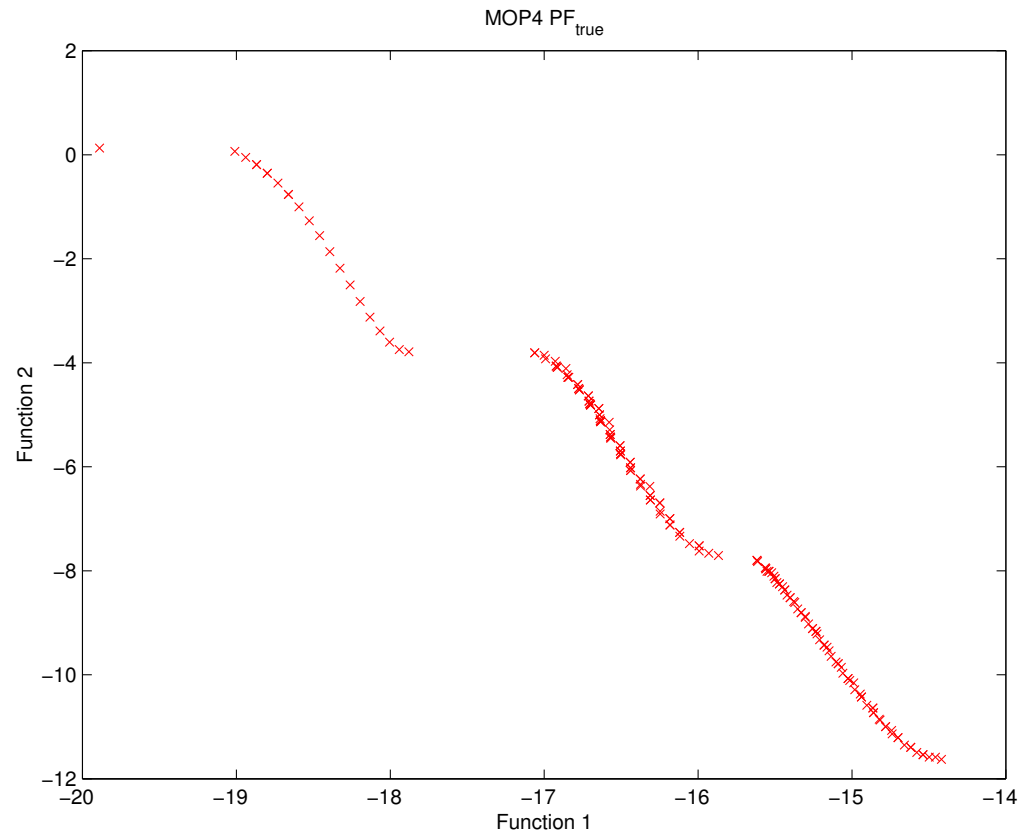


Figura 8: PF_{true} de MOP 4

Funciones sin Restricciones

- **MOP 5:** Propuesta por Viennet. Tiene áreas desconectadas en P_{true} . PF_{true} es una curva en tres dimensiones.

$F = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$, donde

$$f_1(x, y) = 0,5 * (x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2),$$

$$f_2(x, y) = \frac{(3x - 2y + 4)^2}{8} + \frac{(x - y + 1)^2}{27} + 15,$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)} - 1,1e^{(-x^2 - y^2)}$$

donde: $-30 \leq x, y \leq 30$

Funciones sin Restricciones

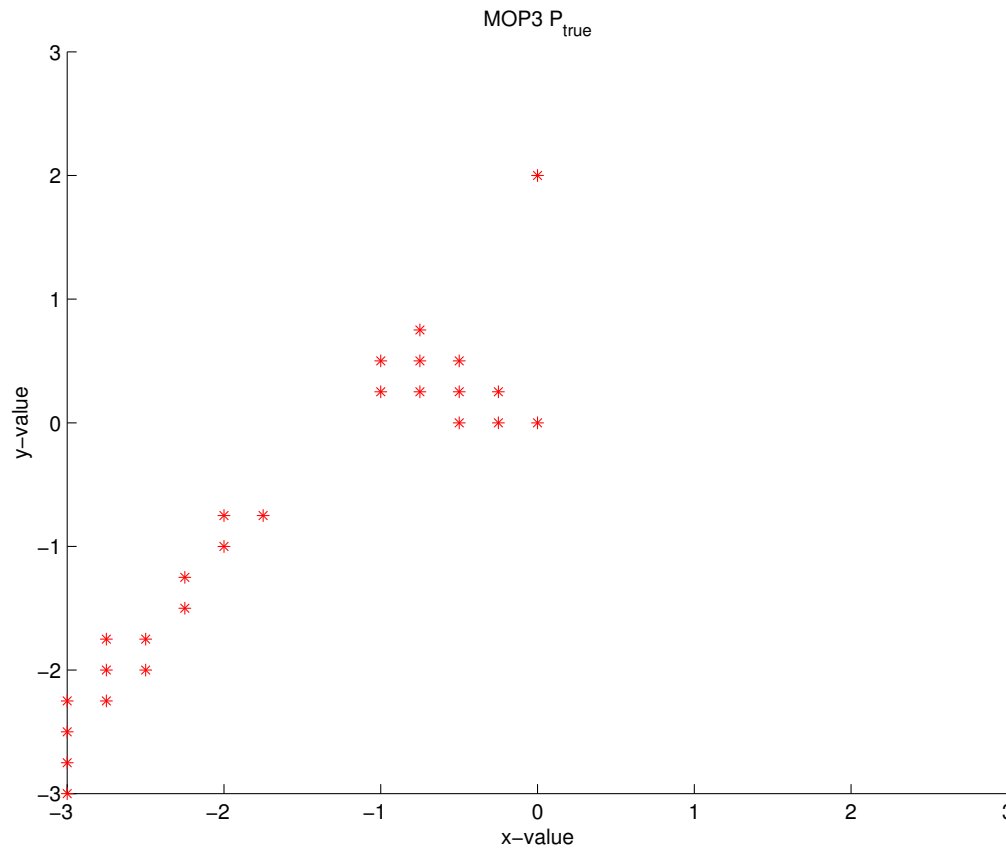


Figura 9: P_{true} de MOP 5

Funciones sin Restricciones

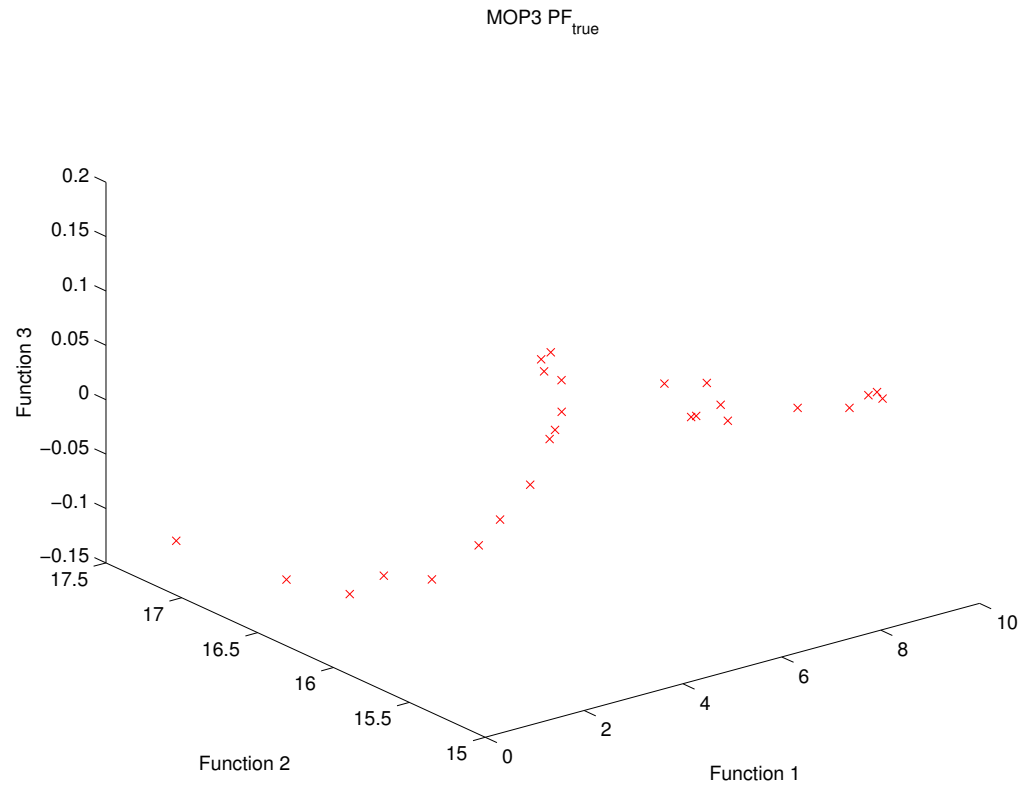


Figura 10: PF_{true} de MOP 5

Funciones sin Restricciones

- **MOP 6:** Propuesta por Deb. Tanto P_{true} como PF_{true} están desconectados.

$F = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, donde

$$f_1(x, y) = x,$$

$$f_2(x, y) = (1 + 10y) * \left[1 - \left(\frac{x}{1 + 10y} \right)^\alpha - \frac{x}{1 + 10y} \sin(2\pi qx) \right]$$

donde: $0 \leq x, y \leq 1$,

$$q = 4,$$

$$\alpha = 2$$

Funciones sin Restricciones

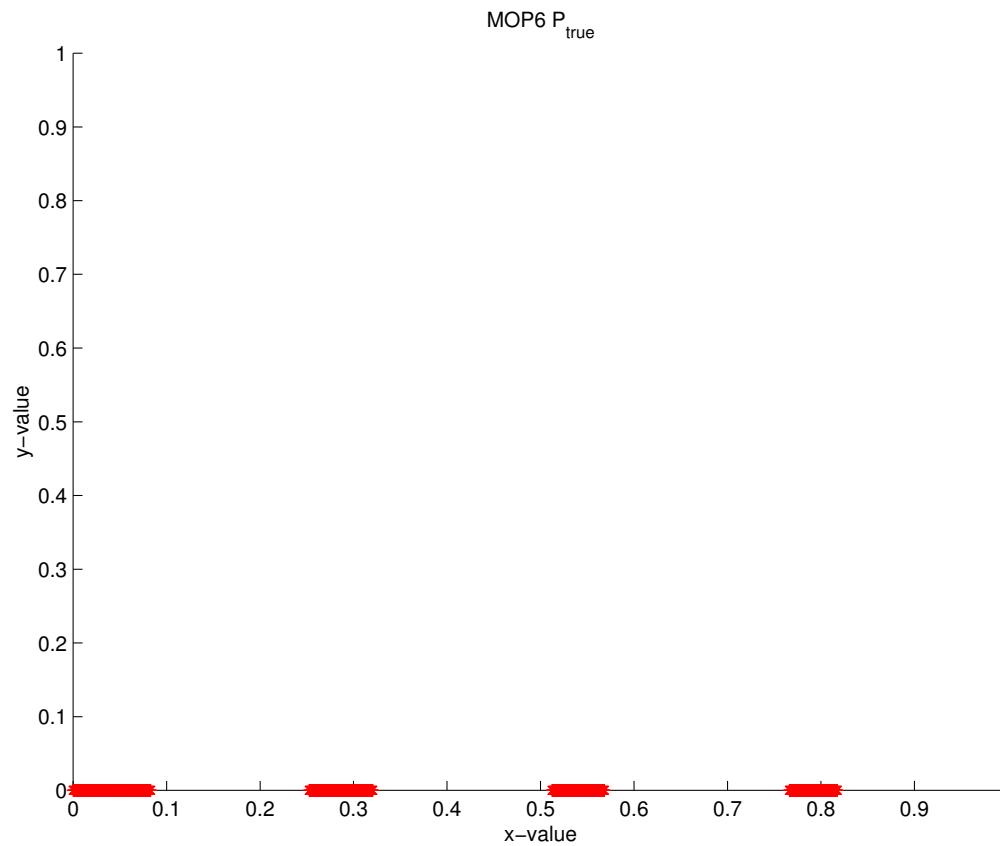


Figura 11: P_{true} de MOP 6

Funciones sin Restricciones

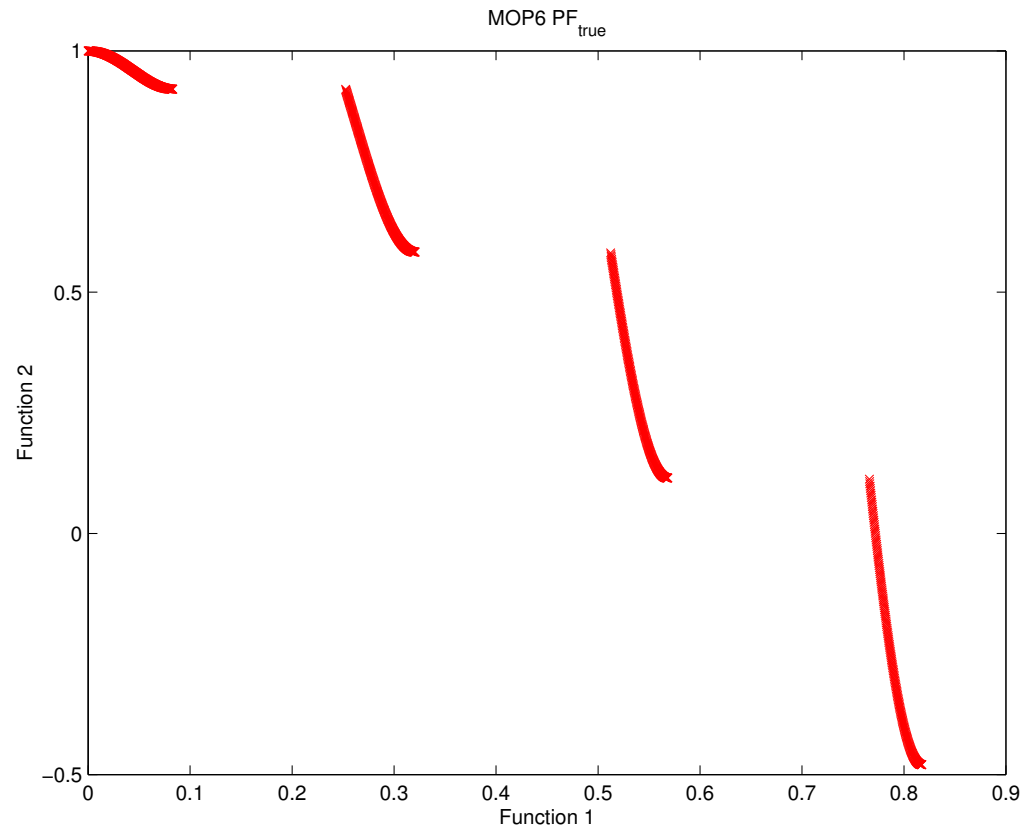


Figura 12: PF_{true} de MOP 6

Funciones sin Restricciones

- **MOP 7:** Propuesta por Viennet. P_{true} está conectado y PF_{true} es una superficie. Es un problema relativamente fácil de resolver.

$F = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$, where

$$f_1(x, y) = \frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(y + 1)^2}{13} + 3,$$

$$f_2(x, y) = \frac{(x + y - 3)^2}{36} + \frac{(-x + y + 2)^2}{8} - 17,$$

$$f_3(x, y) = \frac{(x + 2y - 1)^2}{175} + \frac{(2y - x)^2}{17} - 13$$

donde: $-400 \leq x, y \leq 400$

Funciones sin Restricciones

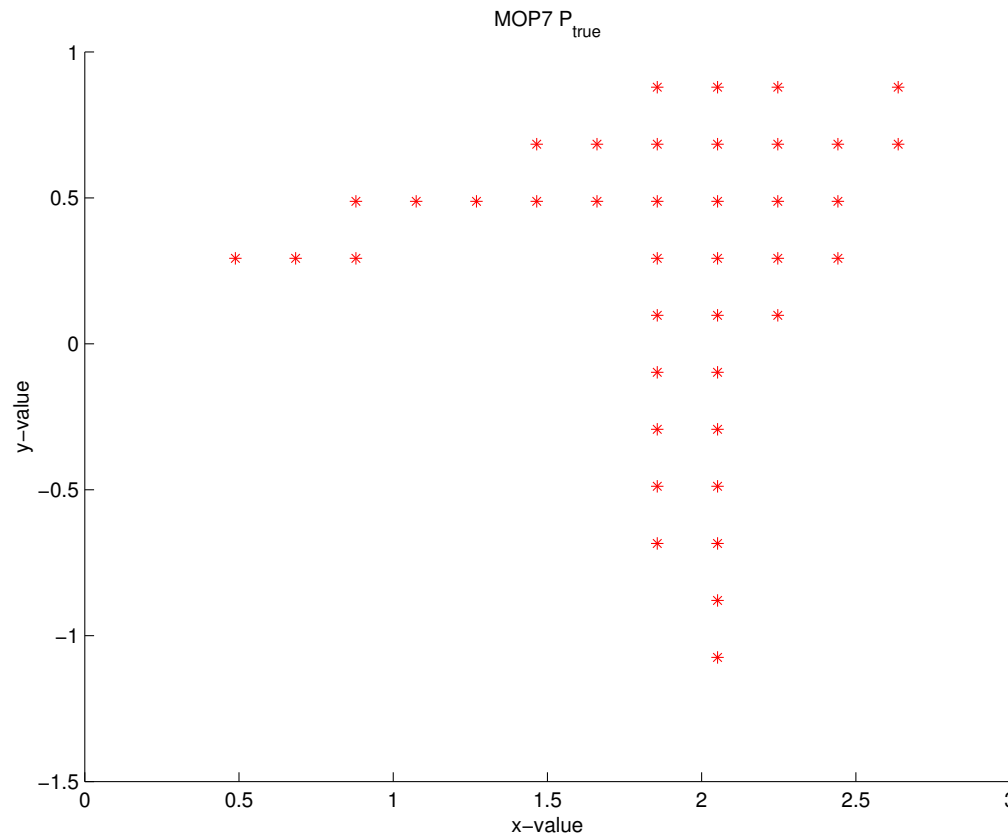


Figura 13: P_{true} de MOP 7

Funciones sin Restricciones

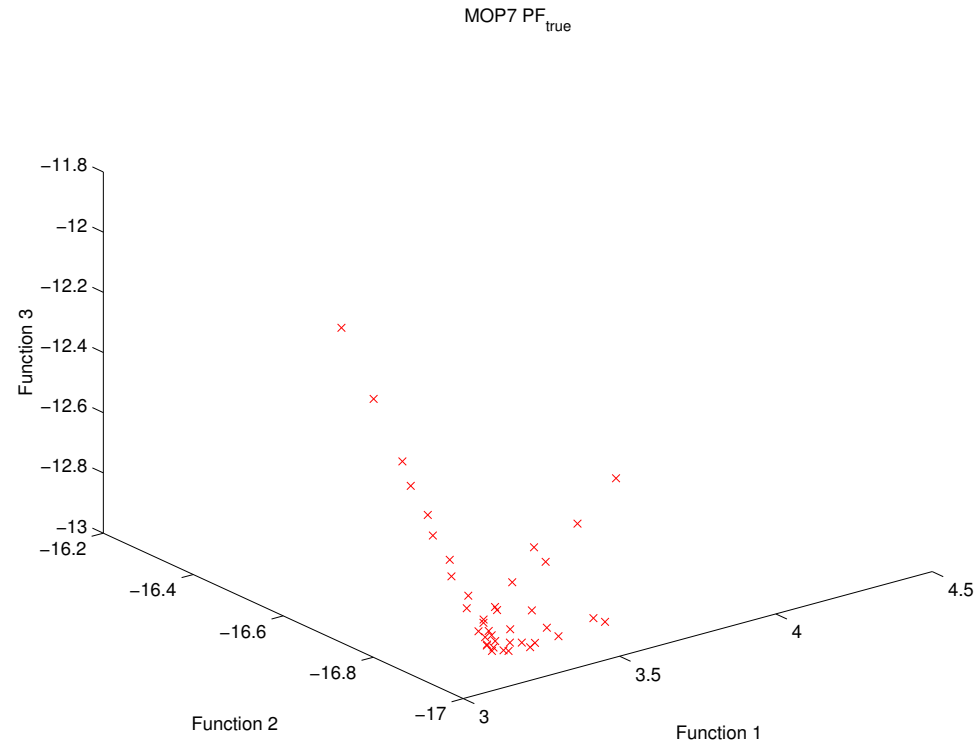


Figura 14: PF_{true} de MOP 7

Funciones con Restricciones

Históricamente, las restricciones de las funciones objetivo se han incorporado utilizando funciones de penalización [Richardson et al., 1989]. Sin embargo existen muchos otros métodos para incorporar restricciones, si bien muy pocos de ellos se han diseñado específicamente para algoritmos evolutivos multiobjetivo.

Funciones con Restricciones

- **MOP-C1:** Propuesto por Binh. En este caso P_{true} es un área y su PF_{true} es una sola curva convexa.

$F = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, donde

$$f_1(x, y) = 4x^2 + 4y^2,$$

$$f_2(x, y) = (x - 5)^2 + (y - 5)^2$$

donde:

$$0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3$$

$$0 \geq (x - 5)^2 + y^2 - 25,$$

$$0 \geq -(x - 8)^2 - (y + 3)^2 + 7,7$$

Funciones con Restricciones

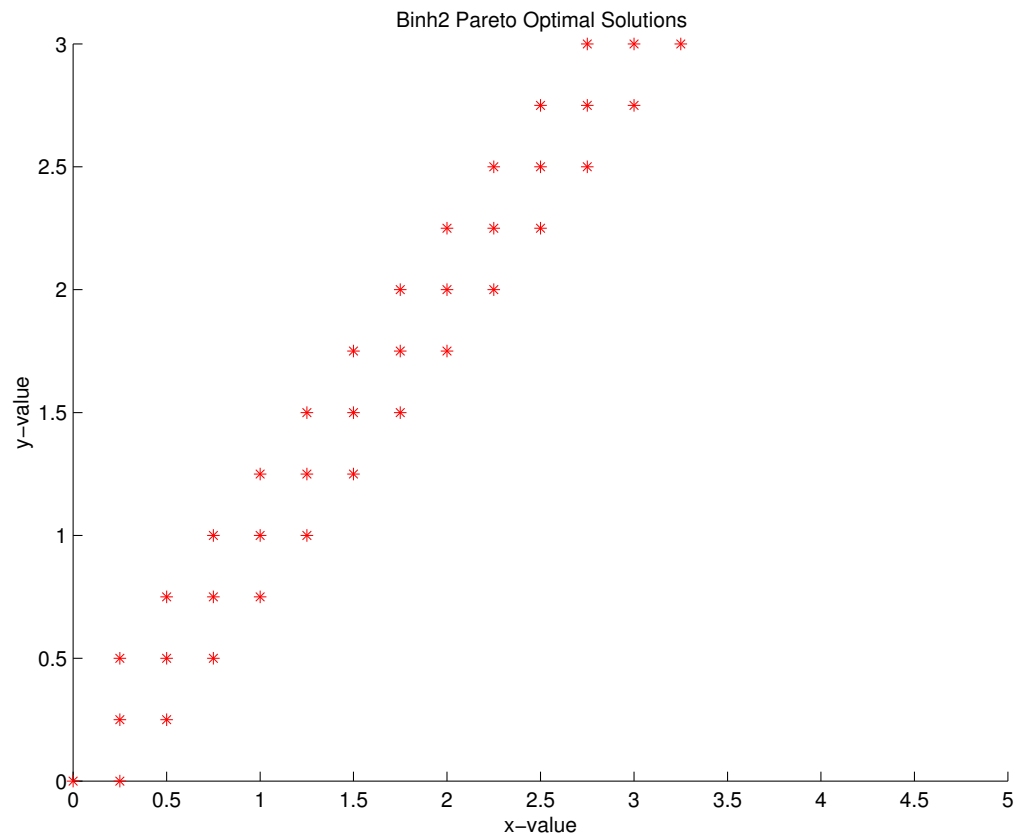


Figura 15: P_{true} de MOP-C1

Funciones con Restricciones

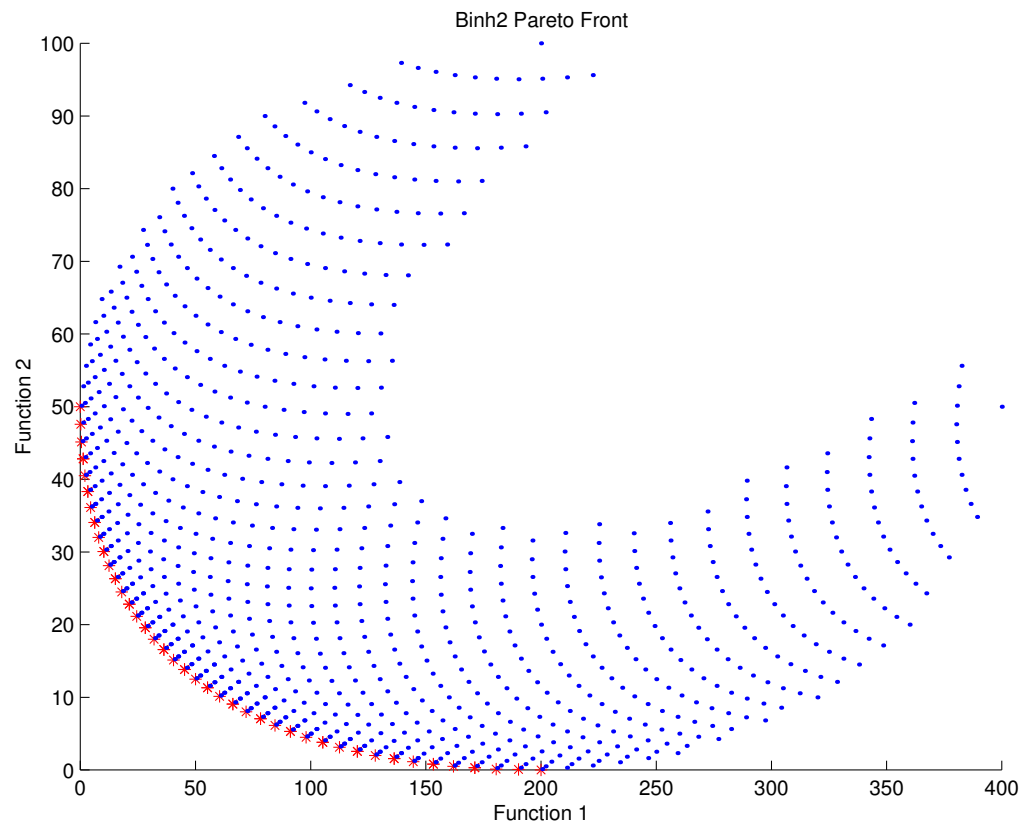


Figura 16: PF_{true} de MOP-C1

Funciones con Restricciones

- **MOP-C2:** Propuesto por Osyczka. Tanto P_{true} como PF_{true} están desconectados.

$$f_1(\vec{x}) = -(25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 4)^2 + (x_5 - 1)^2),$$

$$f_2(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_6 \leq 10, 1 \leq x_3, x_5 \leq 5, 0 \leq x_4 \leq 6,$$

$$0 \leq x_1 + x_2 - 2,$$

$$0 \leq 6 - x_1 - x_2,$$

$$0 \leq 2 - x_2 + x_1,$$

$$0 \leq 2 - x_1 + 3x_2,$$

$$0 \leq 4 - (x_3 - 3)^2 - x_4$$

$$0 \leq (x_5 - 3)^2 + x_6 - 4$$

Funciones con Restricciones

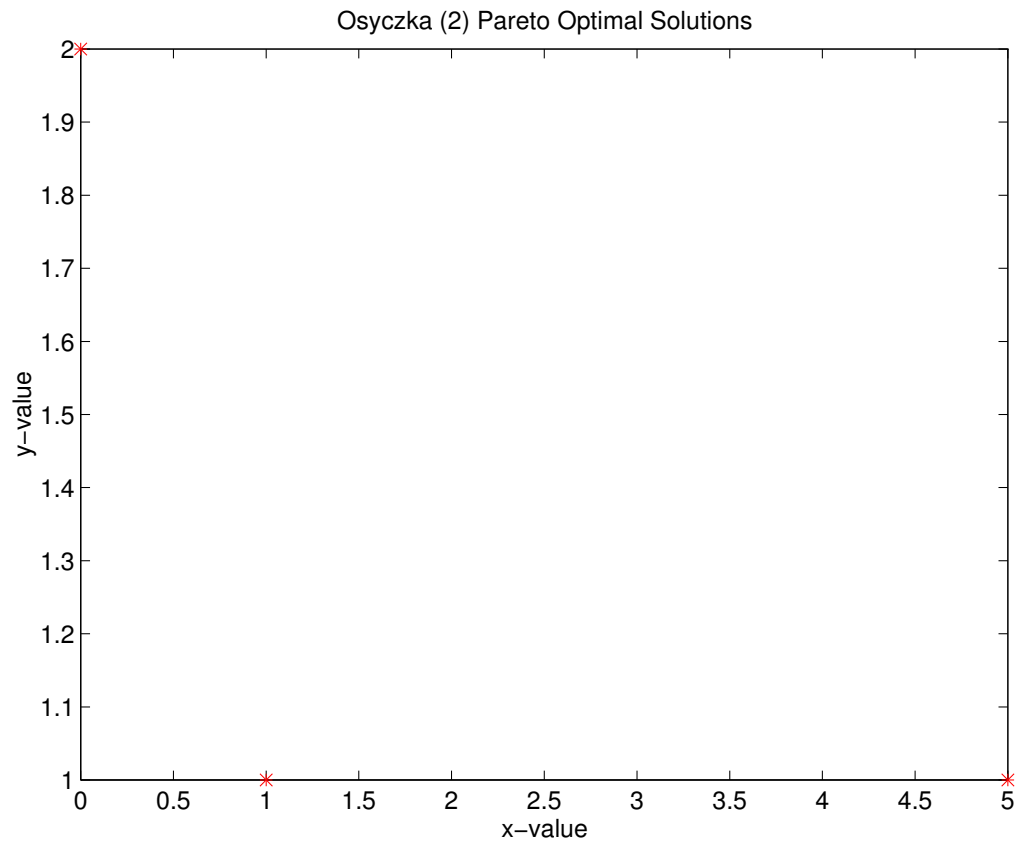


Figura 17: P_{true} de MOP-C2

Funciones con Restricciones

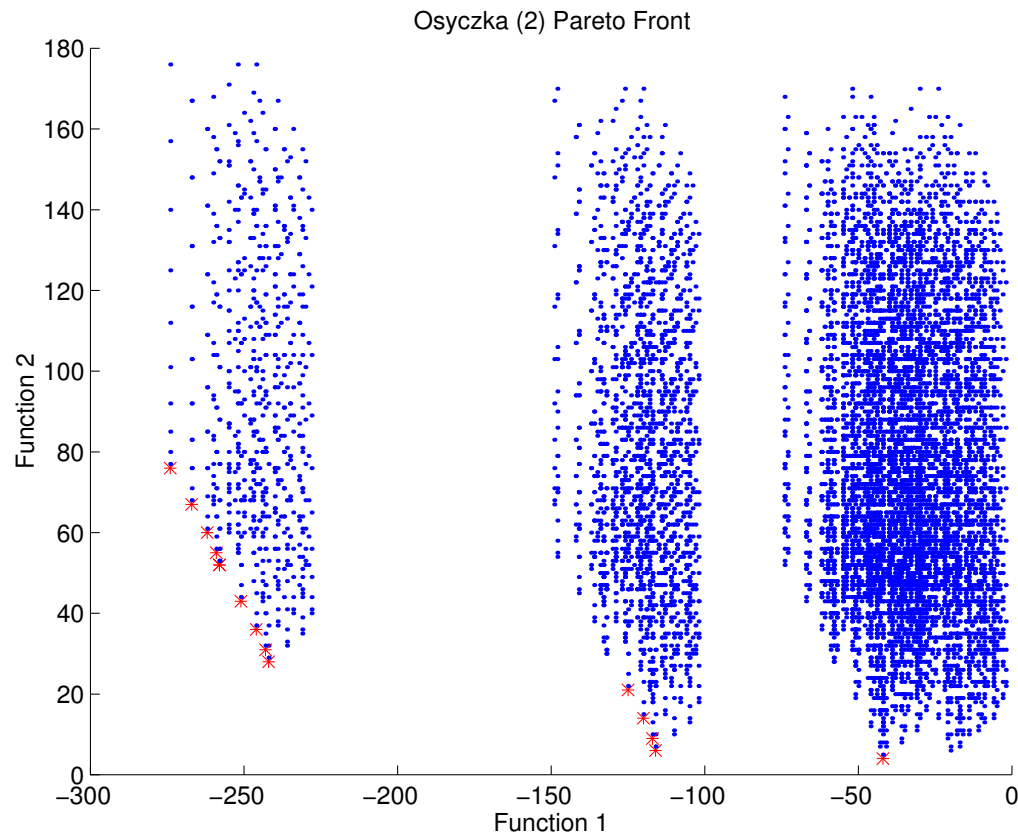


Figura 18: PF_{true} de MOP-C2

Funciones con Restricciones

- **MOP-C3:** Propuesta por Viennet. P_{true} está conectado pero es asimétrico. PF_{true} es una superficie curva.

$$f_1(x, y) = \frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(y + 1)^2}{13} + 3,$$

$$f_2(x, y) = \frac{(x + y - 3)^2}{175} + \frac{(2y - x)^2}{17} - 13,$$

$$f_3(x, y) = \frac{(3x - 2y + 4)^2}{8} + \frac{(x - y + 1)^2}{27} + 15$$

$$-4 \leq x, y \leq 4,$$

$$y < -4x + 4,$$

$$x > -1,$$

$$y > x - 2$$

Funciones con Restricciones

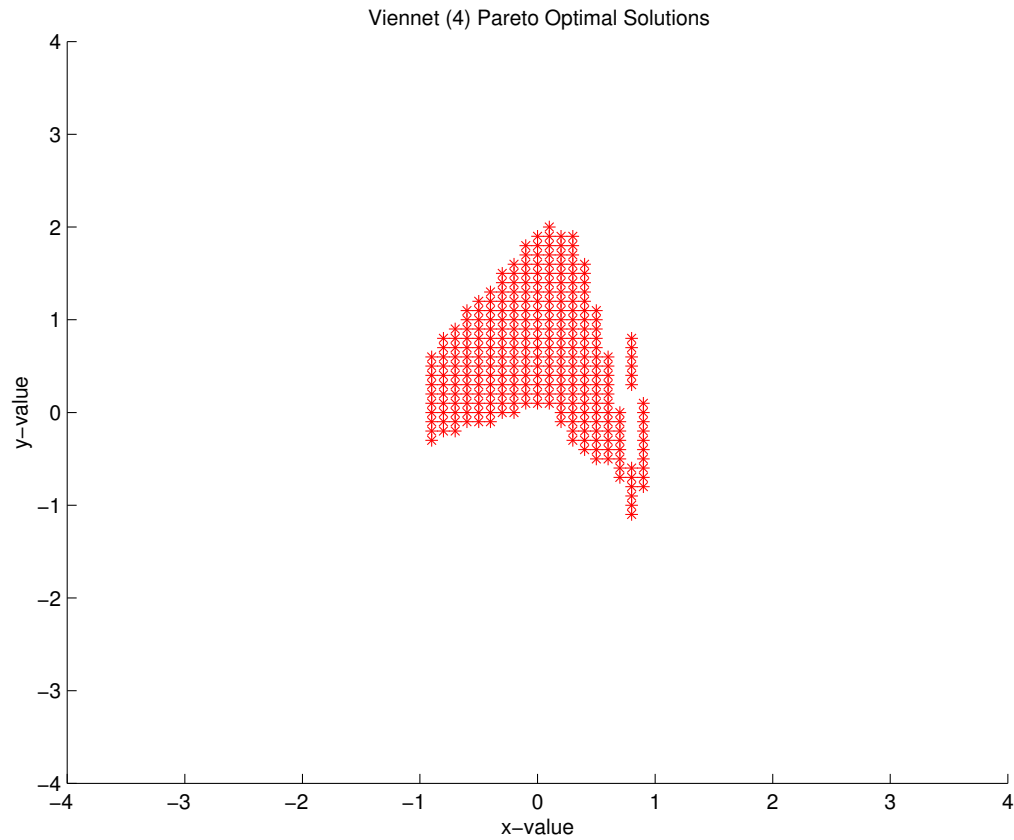


Figura 19: P_{true} de MOP-C3

Funciones con Restricciones

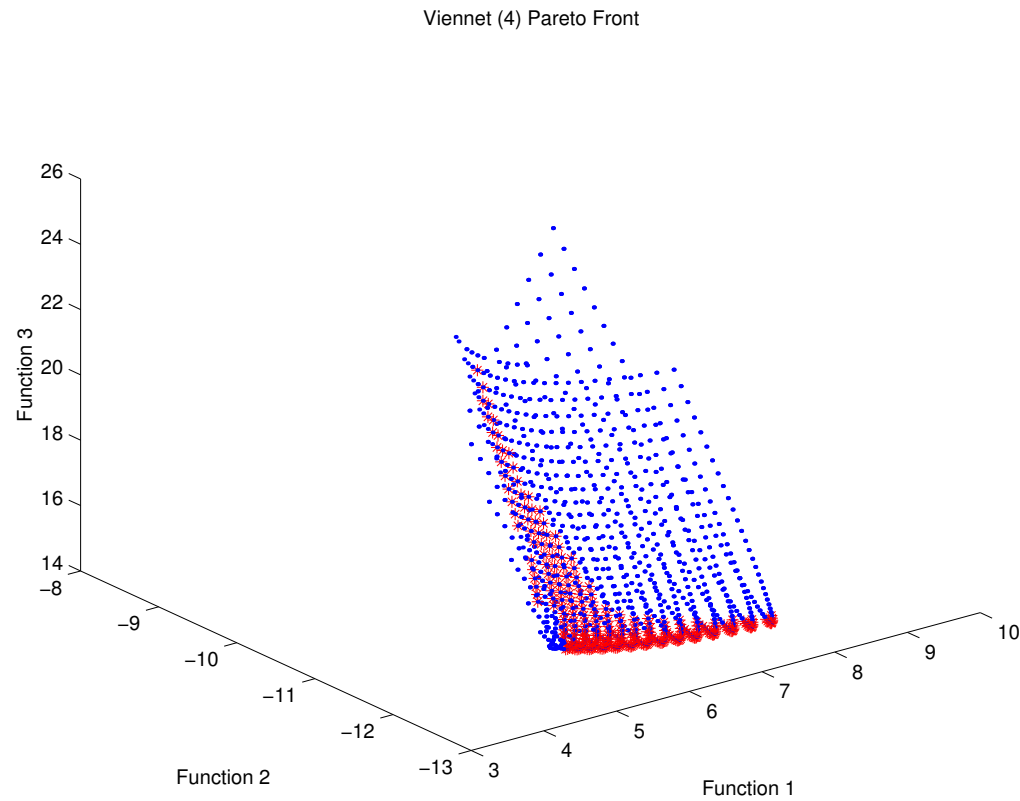


Figura 20: PF_{true} de MOP-C3

Funciones con Restricciones

- **MOP-C4:** Propuesta por Tanaka. P_{true} está conectado, pero PF_{true} está desconectado.

$$f_1(x, y) = x,$$

$$f_2(x, y) = y$$

$$0 < x, y \leq \pi,$$

$$0 \geq -(x^2) - (y^2)$$

$$+1 +$$

$$(a \cos$$

$$(b \arctan(x/y)))$$

$$a = 0,1$$

$$b = 16$$

Funciones con Restricciones

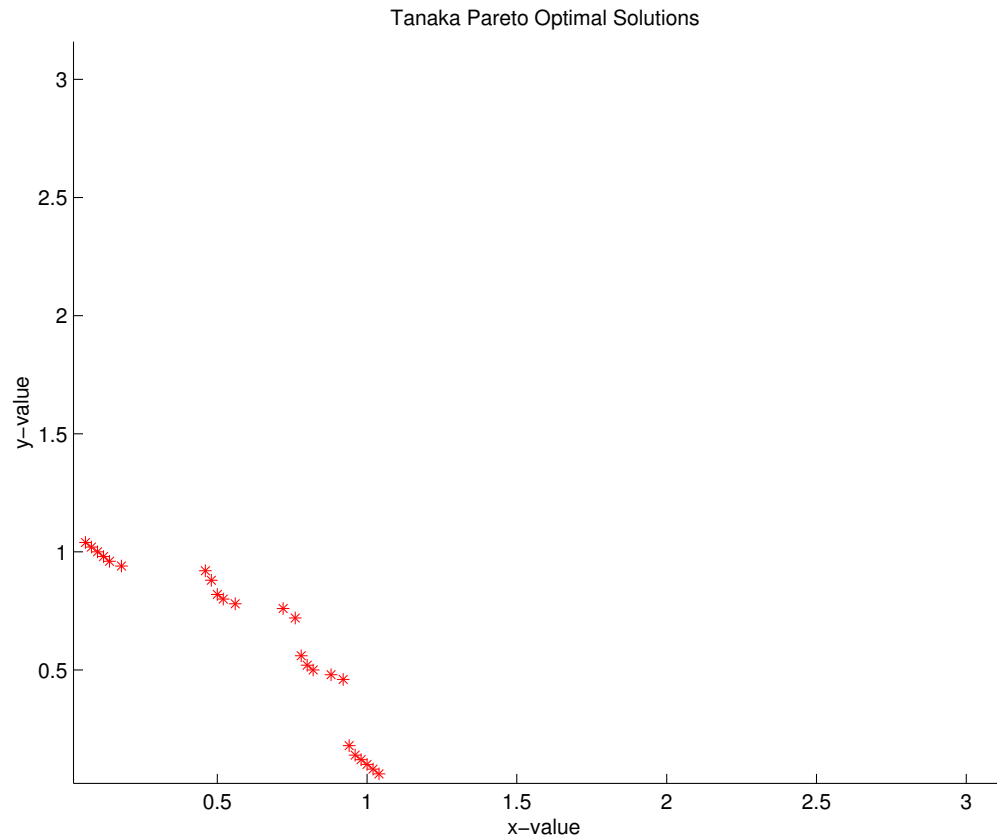


Figura 21: P_{true} de MOP-C4

Funciones con Restricciones

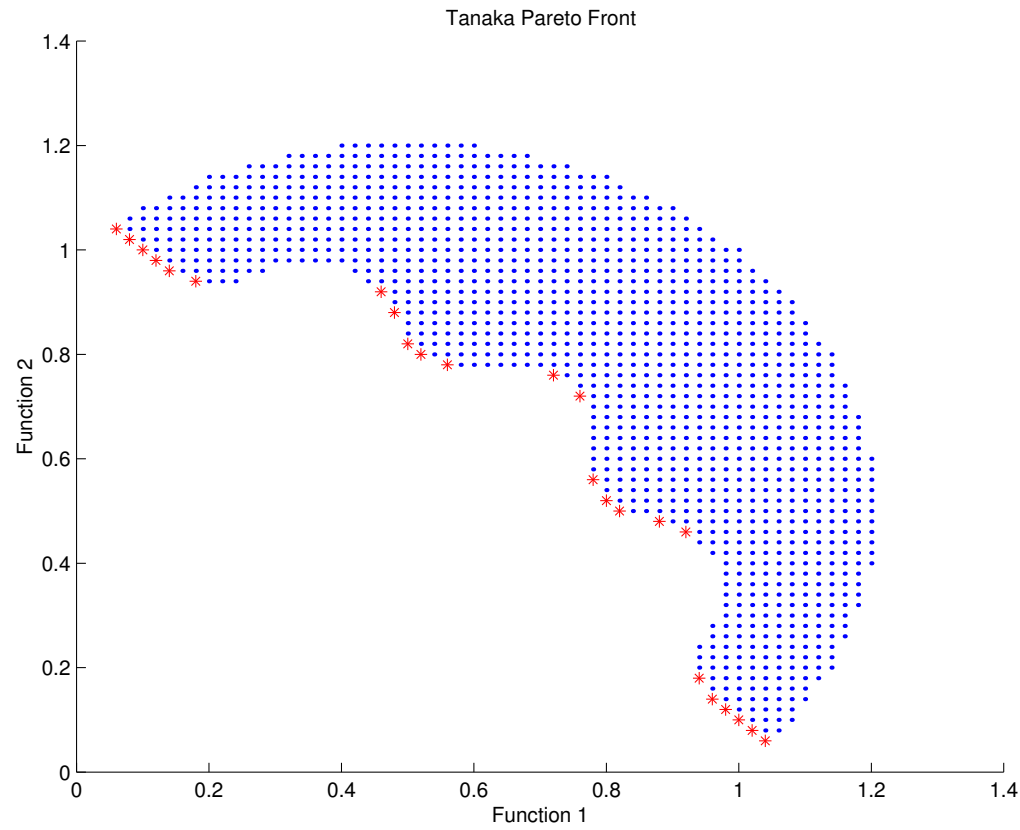


Figura 22: PF_{true} de MOP-C4

Funciones con Restricciones

Los parámetros a, b de MOP-C4 (Tanaka) pueden variarse dentro de ciertos rangos a fin de producir versiones de PF_{true} de diferentes grados de dificultad.

Considerando variaciones específicas de estos dos parámetros de MOP-C4 junto con un operador *absoluto* en el último término de la restricción, pueden producirse los siguientes paisajes de aptitud:

Funciones con Restricciones

- Función estándar usando $a = ,1$ y $b = 16$
- Regiones continuas más pequeñas con: $a = ,1, b = 32$
- Mayor distancia entre regiones usando $a = ,1, b = 16$
- Mayor distancia entre regiones usando $a = ,1, b = 32$
- Regiones periódicas más profundas usando
 $a = ,1(x^2 + y^2 + 5xy), b = 32$
- Regiones no periódicas sobre el frente usando
 $a = ,1(x^2 + y^2 + 5xy), b = 8(x^2 + y^2)$

Funciones con Restricciones

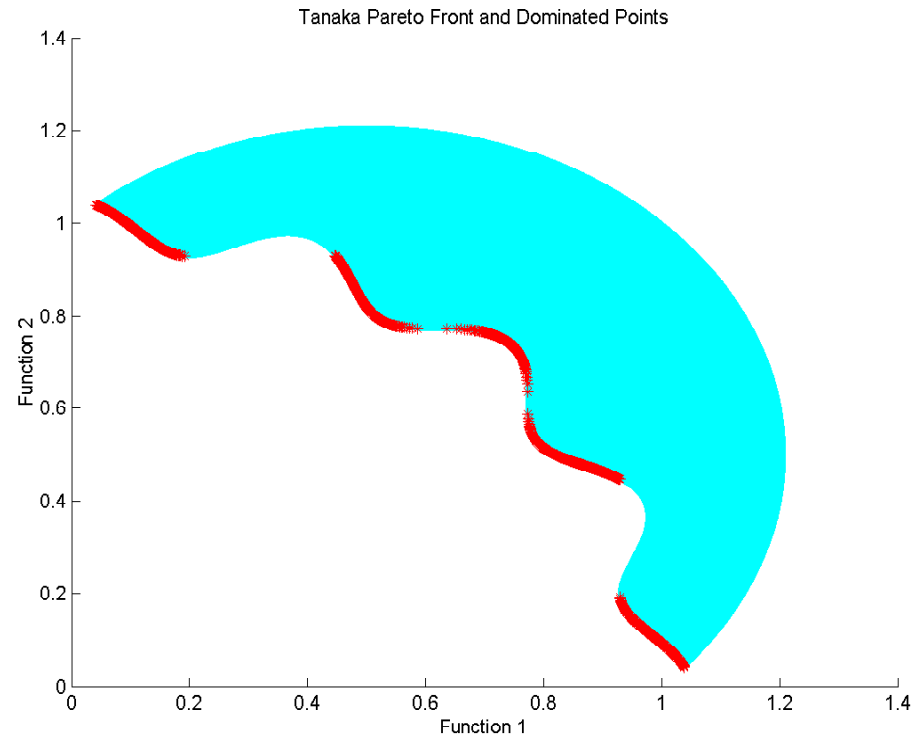


Figura 23: MOP-C4 (Tanaka). Con $a = ,1, b = 16$ se tiene la forma de PF_{true} original.

Funciones con Restricciones

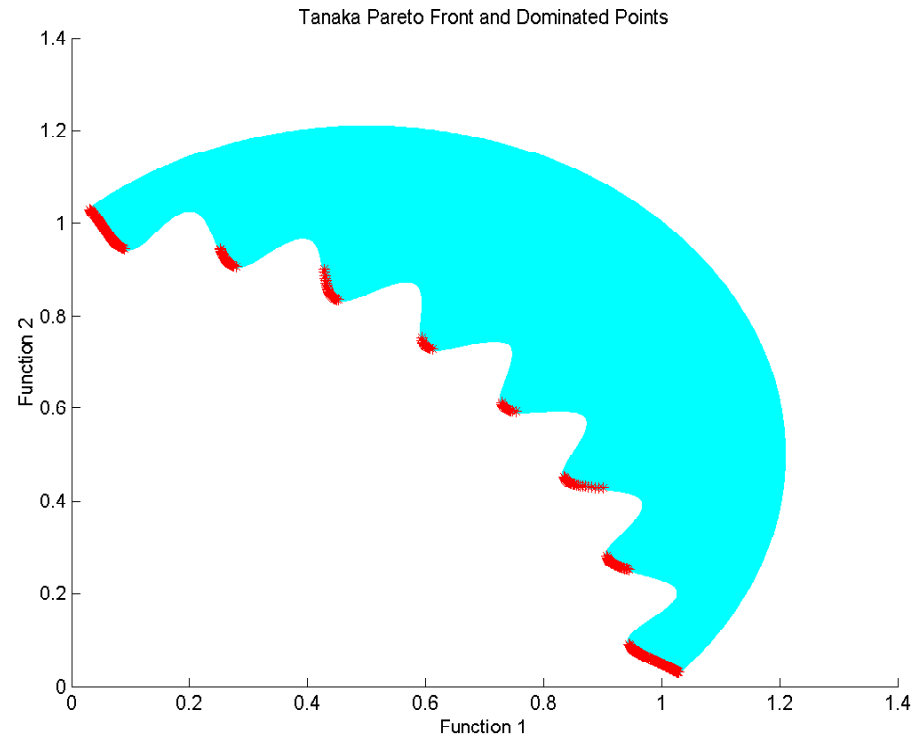


Figura 24: MOP-C4 (Tanaka). Con $a = ,1, b = 32$ se tienen regiones continuas de PF_{true} más pequeñas.

Funciones con Restricciones

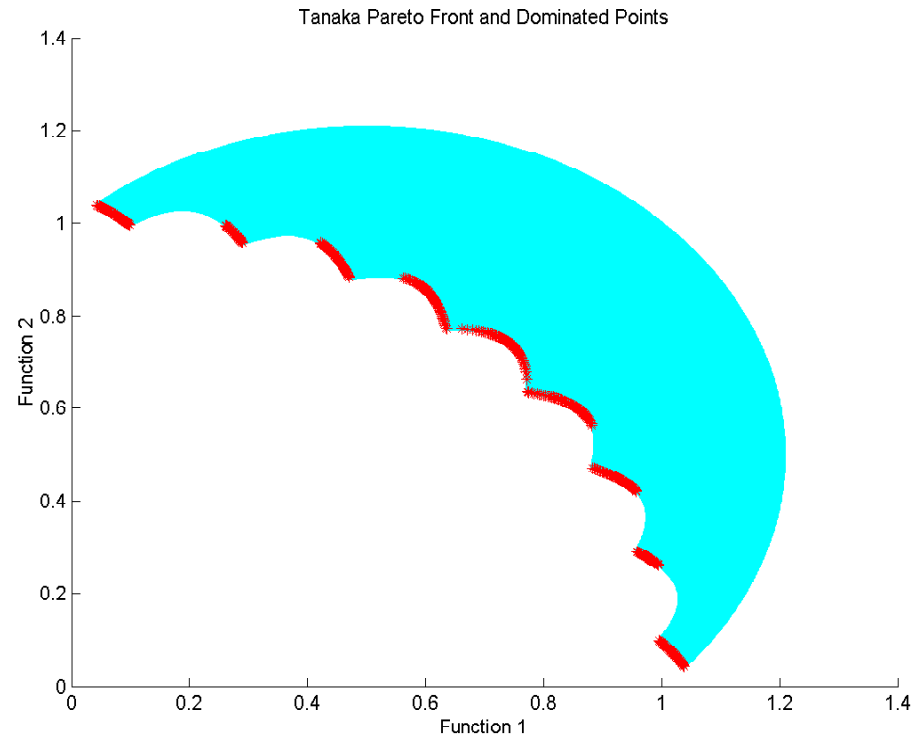


Figura 25: MOP-C4 (Tanaka). Con $a = ,1, b = 16$ se incrementa la distancia entre las regiones de PF_{true}

Funciones con Restricciones

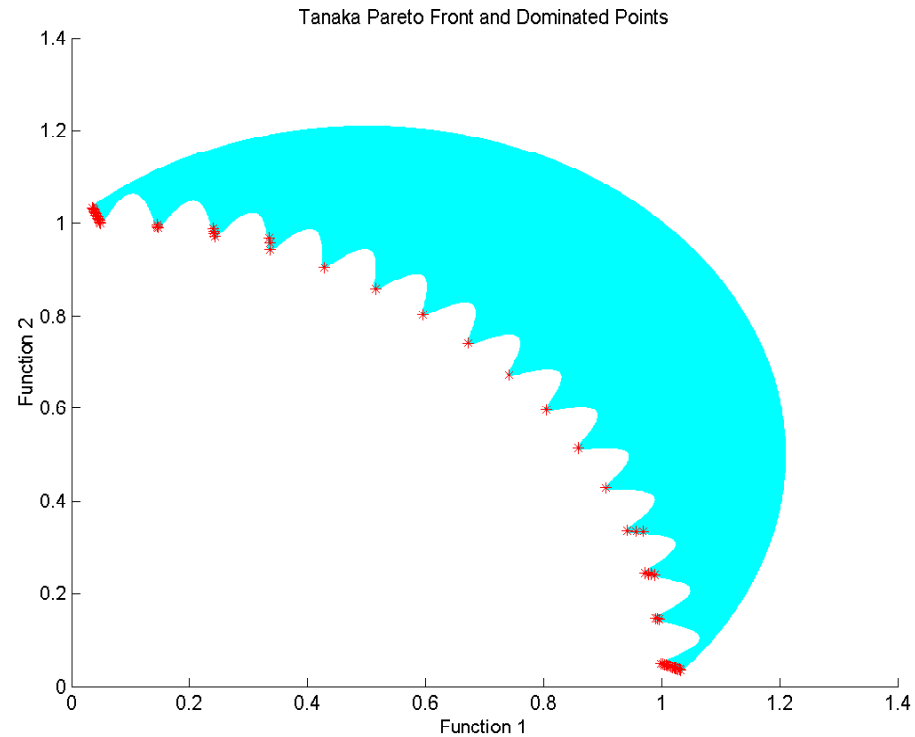


Figura 26: MOP-C4 (Tanaka). Con $a = ,1, b = 32$ se incrementa la distancia entre las regiones de PF_{true} .

Funciones con Restricciones

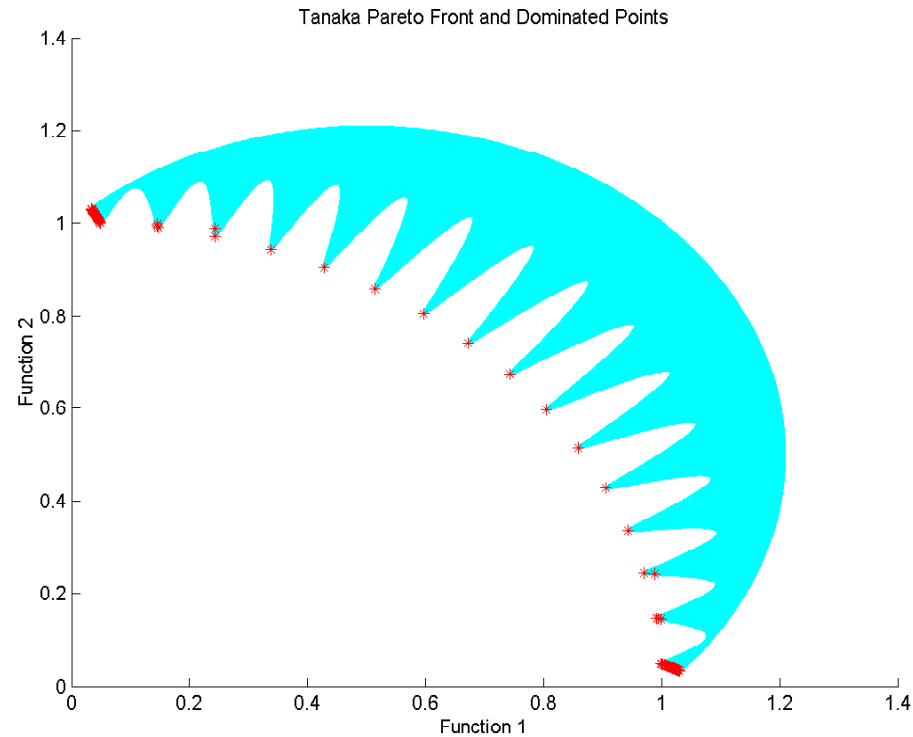


Figura 27: MOP-C4 (Tanaka). Con $a = ,1(x^2 + y^2 + 5xy)$, $b = 32$, se tienen regiones periódicas más profundas de PF_{true} .

Funciones con Restricciones

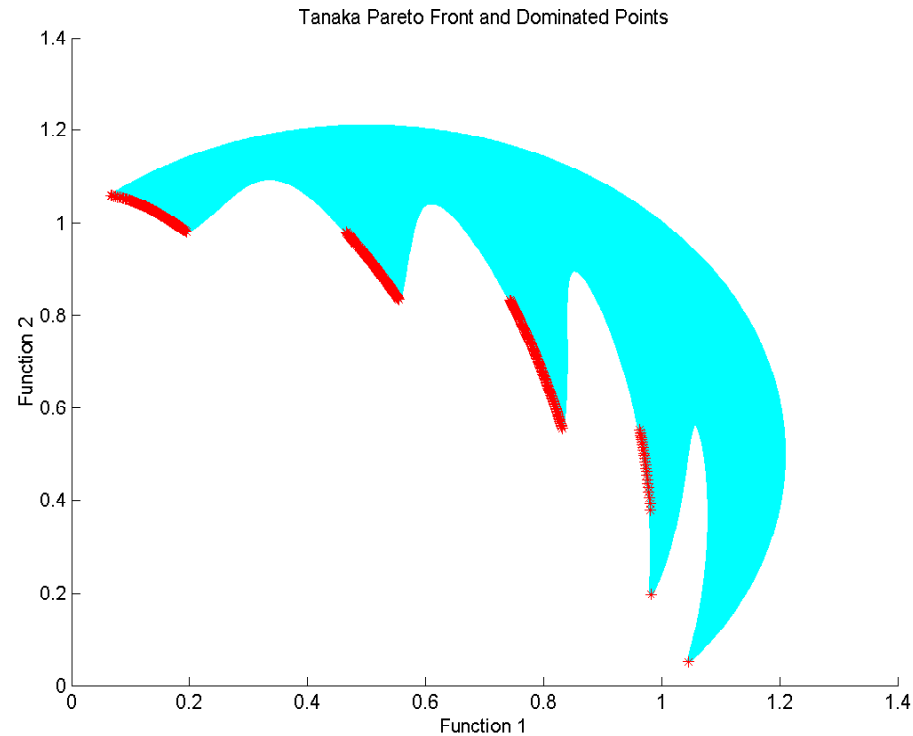


Figura 28: MOP-C4 (Tanaka). Con $a = ,1(x^2 + y^2 + 5xy)$, $b = 8(x^2 + y^2)$, se tienen regiones no periódicas de PF_{true}

Funciones con Restricciones

Seleccionando diferentes valores para los parámetros (a, b) es posible generar distintos paisajes de aptitud. Nótese también que aunque la curva central de Pareto de esta función parece no ser continua, las dos secciones internas de la curva son muy difíciles de hallar numéricamente debido a las fuertes pendientes que se encuentran en esta porción de la curva.

Funciones con Restricciones

En general, (a, b) controlan la longitud de la región continua del frente de Pareto. Conforme se decrementa esta región, un algoritmo evolutivo multiobjetivo tenderá a hallar menos puntos de PF_{true} debido a la discretización de \vec{x} . Conforme se incrementa a , la longitud de los “cortes” se hacen más profundas, lo que hace necesario que la búsqueda proceda a lo largo de un corredor más angosto. También es posible alejarse de la naturaleza periódica de las regiones desconectadas de PF_{true} cambiando b de su valor inicial de 16. De esta manera será también más difícil encontrar todas las regiones que conforman PF_{true} .

Generadores de Funciones de Prueba

Es posible generar funciones de prueba multiobjetivo a partir de funciones mono-objetivo. Deb [1999] propuso una metodología de este tipo. Su propuesta consiste en definir varios problemas de optimización bi-objetivo con el formato siguiente:

Minimize $F = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$, where

$$f_1(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_m),$$

$$f_2(\vec{x}) = g(x_{m+1}, \dots, x_N) h(f(x_1, \dots, x_m), g(x_{m+1}, \dots, x_N))$$

Generadores de Funciones de Prueba

donde: f_1 es una función de $(m < N)$ variables de decisión que no se incluyen en la función f .

La función g tiene $(N - m)$ variables de decisión de f y g .

Las funciones f y g también se restringen a valores positivos en el espacio de búsqueda. Es decir, $f > 0$ y $g > 0$.

Generadores de Funciones de Prueba

Deb [1999] lista cinco funciones para cada posible instanciación de f y g , y 4 para h . Estas funciones pueden luego ser “mezcladas y empatadas” para crear problemas de optimización multiobjetivo con ciertas características deseadas.

Según Deb, estas funciones tienen el siguiente efecto general:

- f : Esta función controla la uniformidad de la representación a lo largo del frente de Pareto.

Generadores de Funciones de Prueba

- g : Esta función controla las características del problema multiobjetivo—ya sea que resulte multifrontal o que tenga un óptimo aislado.
- h : Esta función controla las características resultantes del frente de Pareto (convexo, desconectado, etc.).

Aunque la independencia de g y h restringe las características del dominio genotípico, sí permiten construir fácilmente funciones genotípicas con una amplia gama de características.

Generadores de Funciones de Prueba

- **MOP-G1:** Este es un ejemplo de las funciones generadas con la metodología de Deb. En este caso, PF_{true} es convexo.

$$f_1(x_1) = x_1,$$

$$f_2(\vec{x}) = g(1 - \sqrt{(f_1/g)})$$

$$g(\vec{x}) = 1 + 9 \sum_{i=2}^m x_i / (m - 1)$$

$$m = 30; 0 \leq x_i \leq 1$$

Generadores de Funciones de Prueba

La metodología de Deb es una importante contribución a la generación automática de funciones de prueba para problemas multiobjetivo. Sin embargo, debe hacerse notar que no está libre de problemas. Consideremos por ejemplo el siguiente problema:

Minimizar $F = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, where

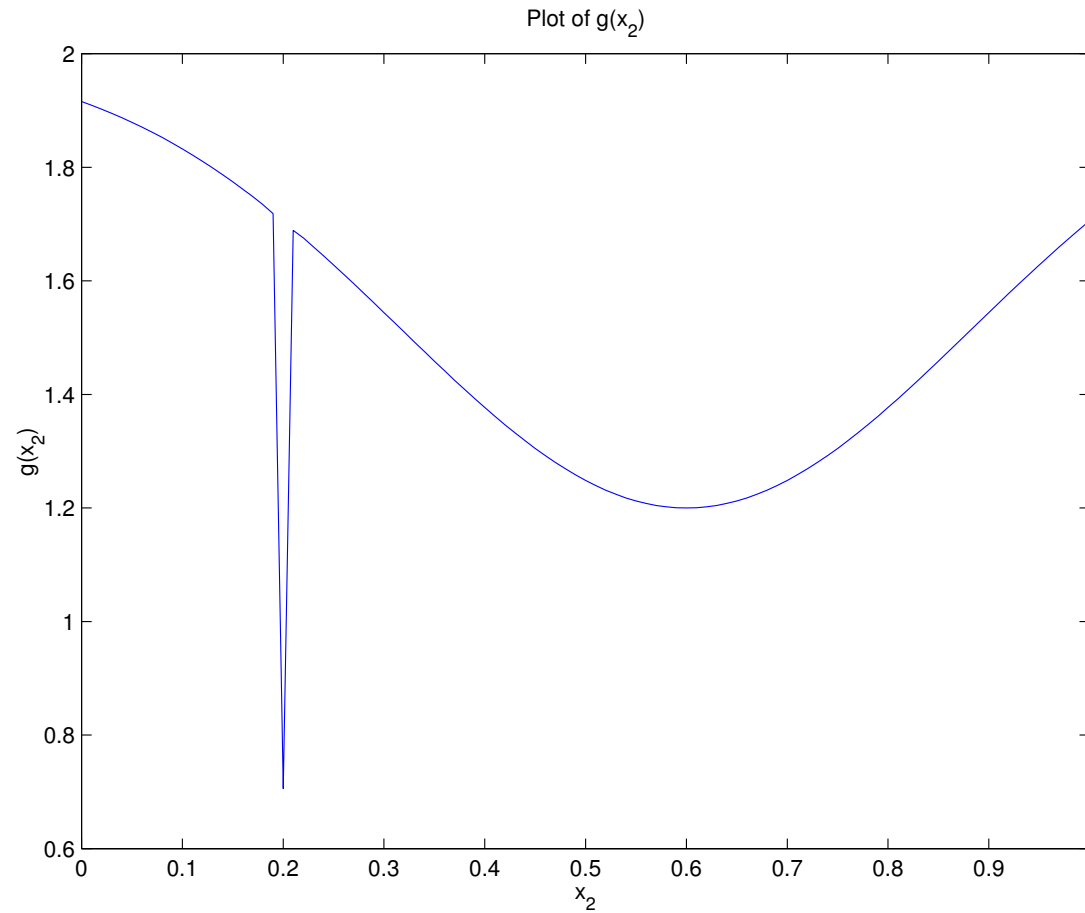
$$f_1(x_1, x_2) = x_1,$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{2,0 - \exp\left\{-\left(\frac{x_2-0,2}{0,004}\right)^2\right\} - 0,8 \exp\left\{-\left(\frac{x_2-0,6}{0,4}\right)^2\right\}}{x_1} \quad (1)$$

Generadores de Funciones de Prueba

En este caso, f_2 puede representarse también como $\frac{g(x_2)}{x_1}$. De tal forma, $g(x_2)$ es la función bimodal representada en la figura del siguiente acetato. Esta figura tiene como óptimos $g(0,6) \approx 1,2$ y $g(0,2) \approx 0,7057$.

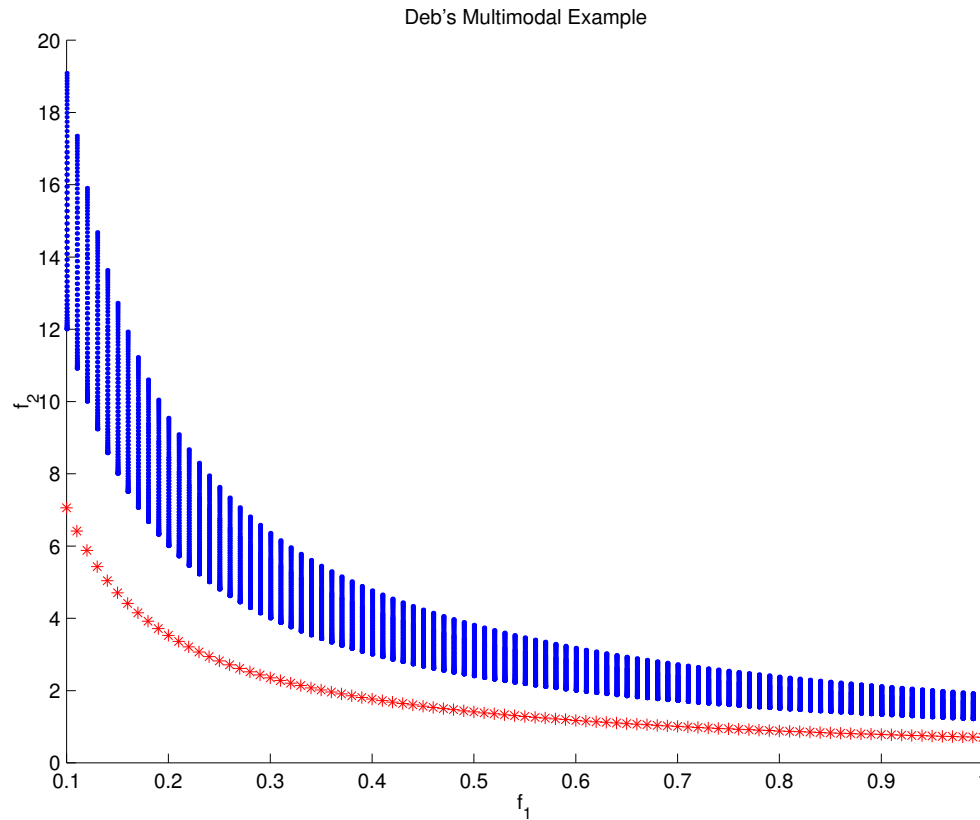
Generadores de Funciones de Prueba



Generadores de Funciones de Prueba

La figura del acetato siguiente muestra los frentes de Pareto (propuestos por Deb) correspondientes a este problema. La porción inferior de la banda vectorial superior es denominada por Deb PF_{local} y la banda inferior es PF_{true} . Las soluciones correspondientes a P_{local} son $\{(x_1, x_2) \mid x_2 \approx 0,6\}$ y las de P_{true} son $\{(x_1, x_2) \mid x_2 \approx 0,2\}$.

Generadores de Funciones de Prueba



Generadores de Funciones de Prueba

Deb indica que se tendrán dificultades para encontrar PF_{true} de este problema debido a que los algoritmos evolutivos multiobjetivo tenderán a quedar atrapados en PF_{local} . Sin embargo, este no es un efecto fenotípico, sino más bien un problema debido a la discretización del espacio de búsqueda en el espacio genotípico. En este problema la dificultad estriba no sólo en la existencia de PF_{local} , sino más bien en la cantidad de puntos discretos cercanos al óptimo global de $g(x_2)$. Este problema realmente muestra decepción más que multifrontalidad debido a que se discretizó uniformemente el espacio de búsqueda.

Generadores de Funciones de Prueba

Para el caso de funciones con restricciones, Deb [2000] sugiere extender su metodología de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}f_1(\vec{x}) &= x_1 \\f_2(\vec{x}) &= g(\vec{x}) \exp(-f_1(\vec{x})/g(\vec{x}))\end{aligned}$$

sujeta a:

$$c_j(x) = f_2(\vec{x}) - a_j \exp(-b_j f_1(\vec{x})) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2)$$

Existen J desigualdades cada una de las cuales tiene 2 parámetros (a_j, b_j) lo que hace parte de la zona factible del problema original (sin restricciones) ahora infactible.

Generadores de Funciones de Prueba

Un ejemplo es el siguiente:

Minimizar $F = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$, donde

$$f_1(\vec{x}) = x_1$$

$$f_2(\vec{x}) = (1 + x_2)/x_1$$

$$0,1 \leq x_1 \leq 1,0$$

$$0,0 \leq x_2 \leq 5,0$$

sujeta a:

$$c_1(\vec{x}) = x_2 + 9x_1 \geq 6$$

$$c_2(\vec{x}) = -x_2 + 9x_1 \geq 1 \quad (3)$$

Generadores de Funciones de Prueba

De hecho, se sugiere la siguiente forma genérica:

Minimizar $F = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$, donde

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= x_1 \\ f_2(\vec{x}) &= g(\vec{x})(1 - f_1(\vec{x})/g(\vec{x})) \end{aligned}$$

sujeta a:

$$\begin{aligned} c_j(\vec{x}) &= \cos(\theta)(f_2(\vec{x}) - e) - \sin(\theta)f_1(\vec{x}) \geq \\ &a|\sin(b\pi(\sin)\theta)(f_2(\vec{x}) - e) + \cos(\theta)f_1(\vec{x})|^c|^d, \\ j &= 1, 2, \dots, J \end{aligned} \tag{4}$$

Generadores de Funciones de Prueba

Con 6 parámetros (θ, a, a, c, d, e) , x_1 se restringe a $[0,1]$ y $g(\vec{x})$ determina los límites de las otras variables. Seleccionando valores para los 6 parámetros podemos generar diferentes paisajes de aptitud. Por ejemplo, si $(\theta = -0,2\pi, a = 0,2, b = 10, c = 1, d = 6, e = 1)$, se genera la forma de PF_{true} que se muestra en el acetato siguiente.

Generadores de Funciones de Prueba

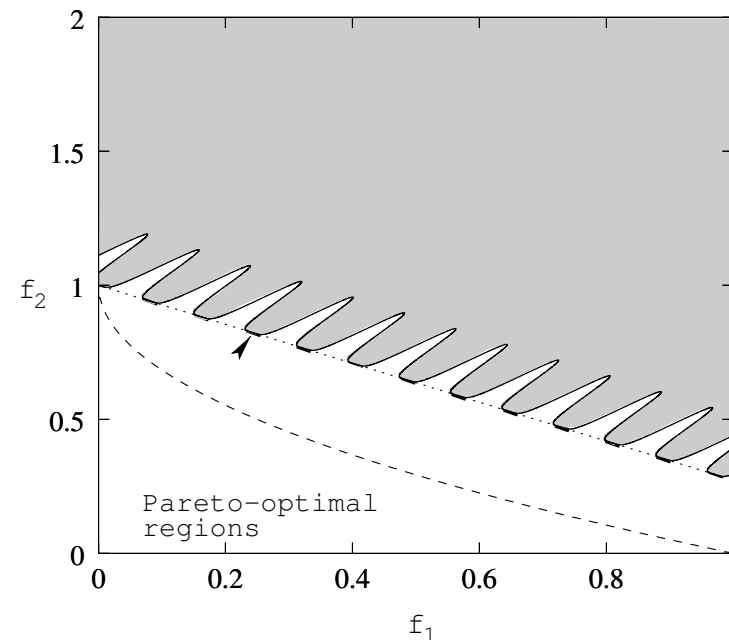


Figura 29: MOP-GX. Note las regiones desconectadas de PF_{true} .

Generadores de Funciones de Prueba

De manera análoga, pueden producirse una enorme gama de variaciones de parámetros, haciéndose notar que d controla la longitud de la región continua del frente de Pareto. Conforme se decrementa esta región, un algoritmo evolutivo multiobjetivo tenderá a encontrar menos puntos de PF_{true} debido a la discretización de \vec{x} . Si se incrementa el valor de a , la longitud de los “cortes” se vuelve más profunda, lo que requiere que la búsqueda proceda a lo largo de un corredor más angosto dificultando, en consecuencia, la búsqueda. También podemos alejarnos de la naturaleza periódica de las regiones desconectadas de PF_{true} cambiando c de su valor inicial de 1. θ y e controlan la pendiente y el cambio de dirección de PF_{true} , respectivamente.

Funciones ZDT

Cada una de las funciones de prueba que se muestran a continuación está estructurada de la misma manera y consiste de 3 funciones f_1, g, h :

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } F(\vec{x}) &= (f_1, f_2), \\ \text{subjeta a : } f_2(\vec{x}) &= g(x_2, \dots, x_m)h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)), \\ \text{donde : } \vec{x} &= (x_1, \dots, x_M). \end{aligned} \quad (5)$$

Funciones ZDT

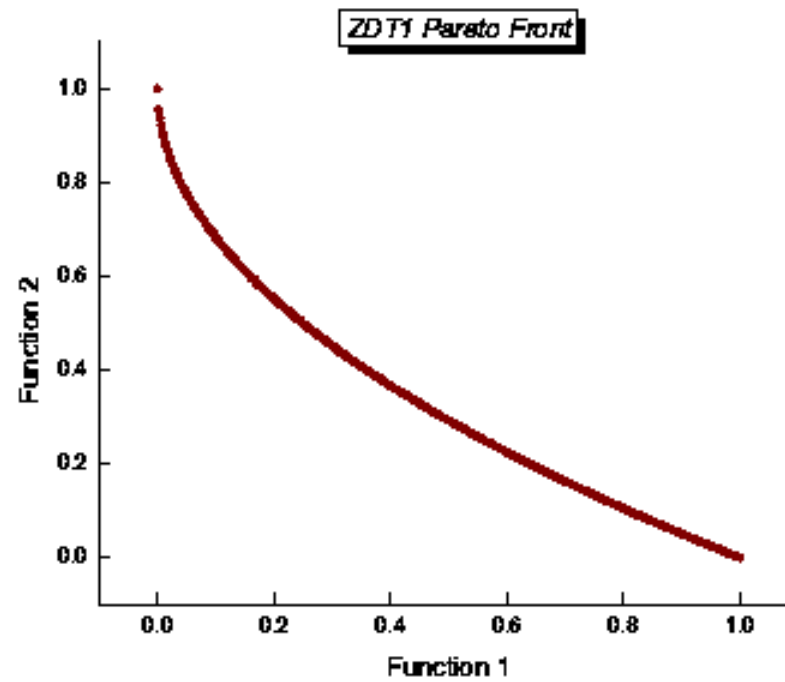
f_1 es función únicamente de la primera variable de decisión, g es función de las $m - 1$ variables restantes, y los parámetros de h son los valores de f_1 y g . Las funciones de prueba difieren en estas 3 funciones y en el número de variables m , así como en los valores que las variables pueden tomar.

Funciones ZDT

Las seis funciones de prueba que siguen este esquema se describen a continuación y se conocen como el conjunto **ZDT** (Zitzler-Deb-Thiele) [Zitzler et al., 2000]. Estas funciones han sido muy utilizadas para validar MOEAs en la literatura especializada.

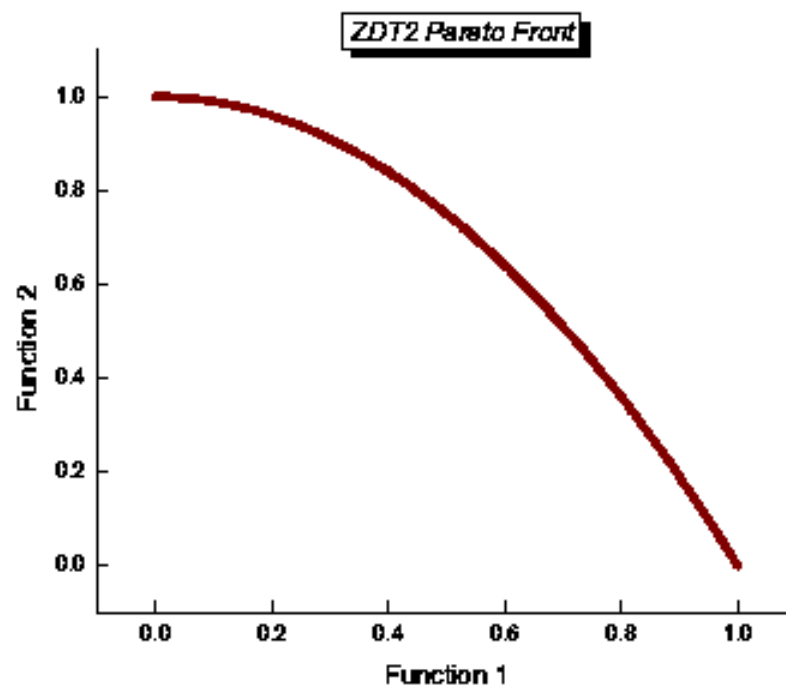
Funciones ZDT

ZDT1



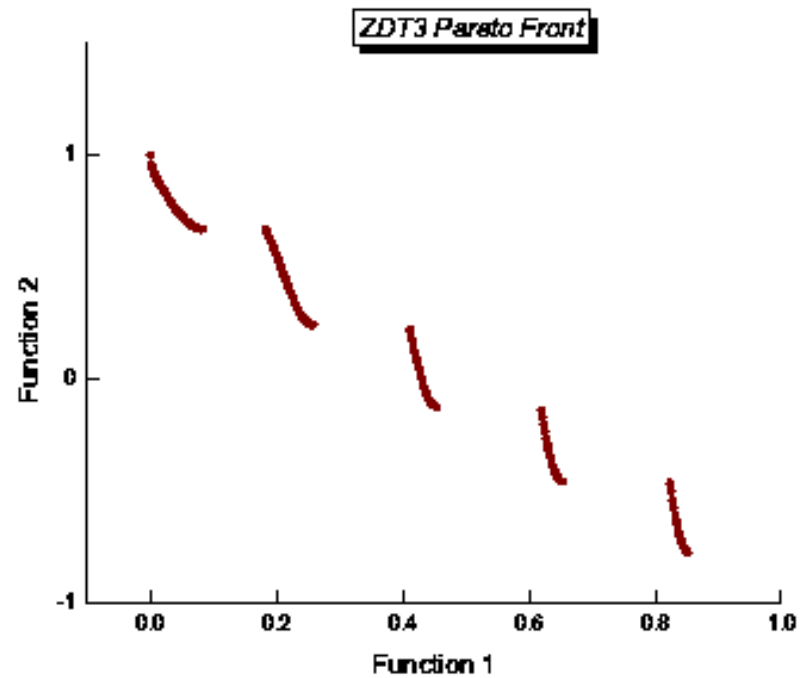
Funciones ZDT

ZDT2



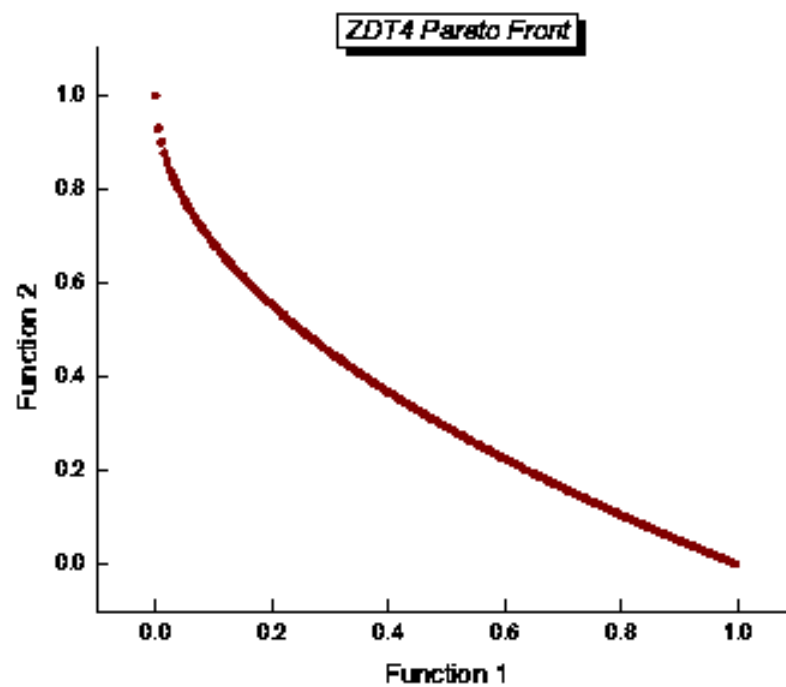
Funciones ZDT

ZDT3



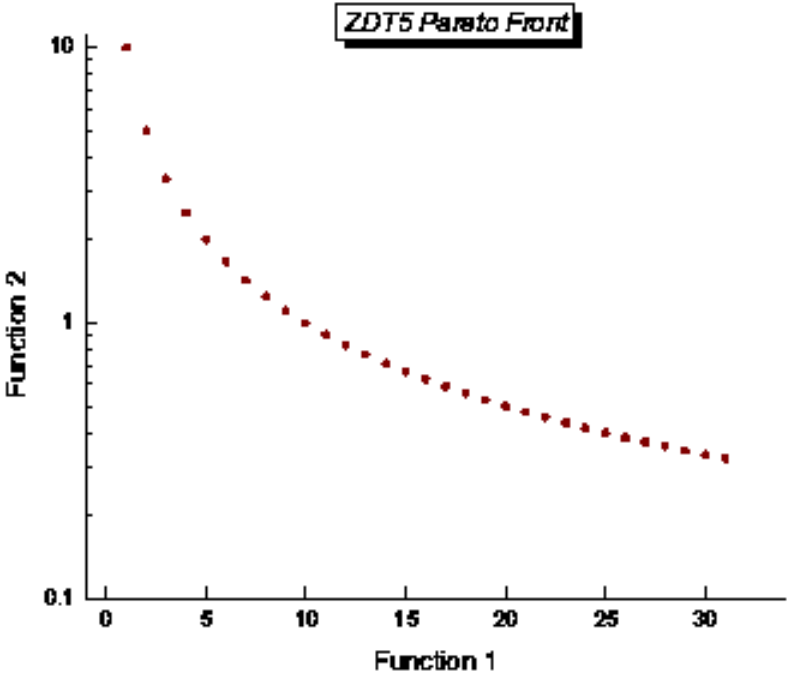
Funciones ZDT

ZDT4



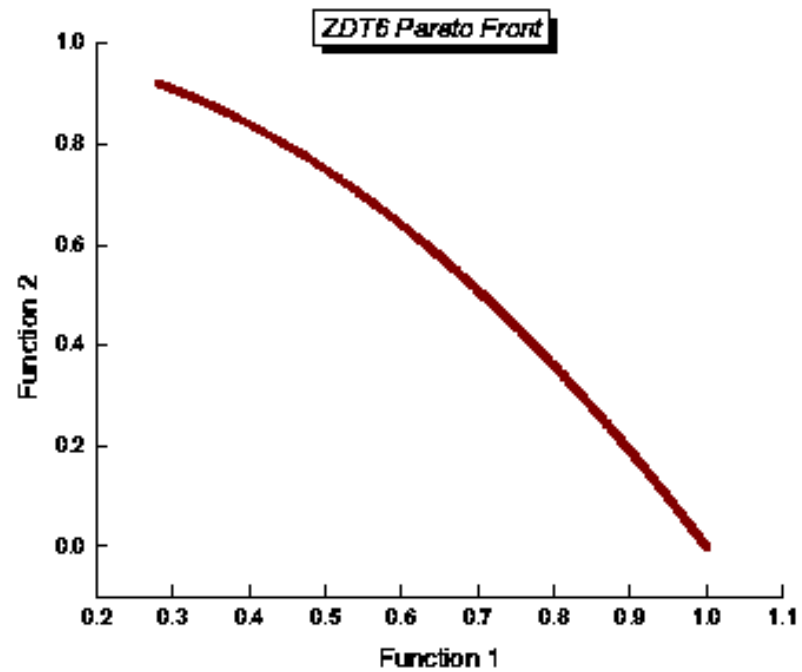
Funciones ZDT

ZDT5



Funciones ZDT

ZDT6



Funciones Escalables

Otra característica deseable de una función de prueba es que sea escalable a cualquier número de dimensiones. Debido a que el mapeo entre el espacio genotípico y el fenotípico puede ser considerablemente no lineal, podemos aprovechar esta propiedad para generar funciones de alto grado de dificultad.

Funciones Escalables

Deb et al. [2002] propusieron un conjunto de prueba conocido como **DTLZ** (Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler), en el cual los problemas son escalables a un número de objetivos definido por el usuario. Este conjunto de problemas ha sido también muy popular en la literatura especializado, usándose normalmente con 3 funciones objetivo.

Funciones Escalables

DTLZ1

Minimizar:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots x_{M-1}(1 + g(x_M)),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots (1 - x_{M-1})(1 + g(x_M)),$$

\vdots \vdots

$$f_{M-1}(x) = \frac{1}{2}x_1(1 - x_2)(1 + g(x_M)),$$

$$f_M(x) = \frac{1}{2}(1 - x_1)(1 + g(x_M)),$$

sujeto a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

donde:

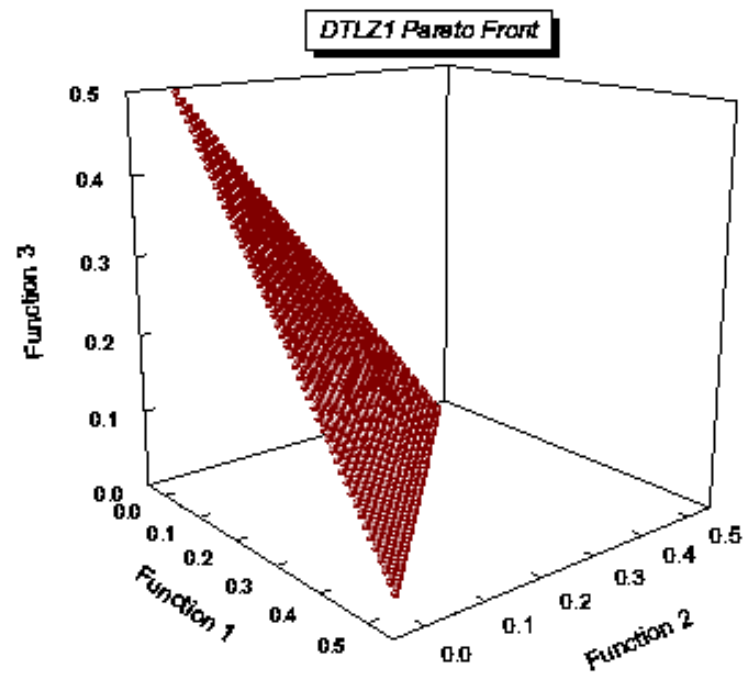
$$g(x_M) = 100 \left[|x_M| + \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0,5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0,5)) \right]$$

Funciones Escalables

Suele usarse $M = 3$. El conjunto de óptimos de Pareto se encuentra en $x_M^* = 0$ y los valores de las funciones objetivo en el hiperplano lineal $\sum_{m=1}^M = 0,5$. El espacio de búsqueda contiene $(11^k - 1)$ frentes de Pareto locales (k es un valor definido por el usuario, tal que el número de variables de decisión es: $n = M + k - 1$. Suele usarse $k = 5$).

Funciones Escalables

DTLZ1



Funciones Escalables

DTLZ2

Minimize:

$$f_1(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2) \cos(x_{M-1}\pi/2),$$

$$f_2(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2) \sin(x_{M-1}\pi/2),$$

$$f_3(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) \dots \sin(x_{M-2}\pi/2),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{M-1}(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \sin(x_2\pi/2),$$

$$f_M(x) = (1 + g(x_M)) \sin(x_1\pi/2).$$

sujeto a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

donde: $g(x_M) = \sum_{x_i \in X_M} (x_i - 0,5)^2$

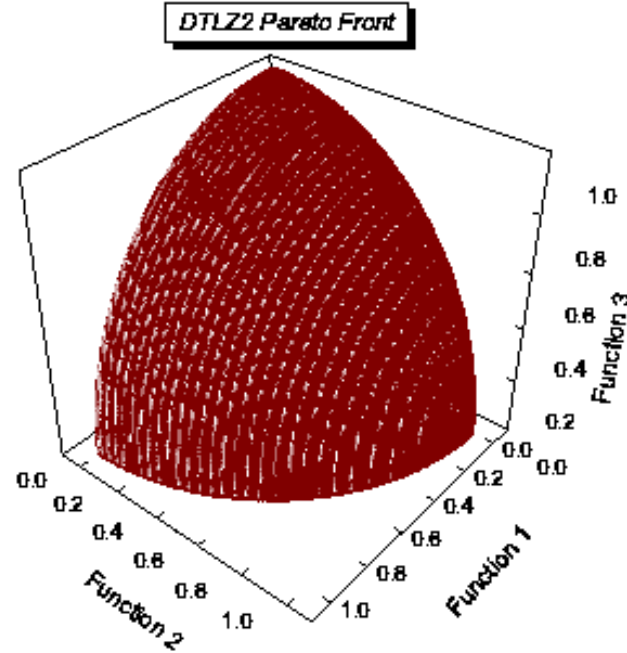
Funciones Escalables

El conjunto de óptimos de Pareto está en: $x_i = 0,5$ para toda $x_i \in x_M$ y todas las funciones objetivo deben satisfacer:

$\sum_{i=1}^M (f_i)^2 = 1$. Se recomienda usar $k = |x_M| = 10$. El número total de variables es: $n = M + k - 1$.

Funciones Escalables

DTLZ2



Funciones Escalables

DTLZ3

Minimizar:

$$f_1(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2) \cos(x_{M-1}\pi/2),$$

$$f_2(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2) \sin(x_{M-1}\pi/2),$$

$$f_3(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \cos(x_2\pi/2) \dots \sin(x_{M-2}\pi/2),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{M-1}(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \sin(x_2\pi/2),$$

$$f_M(x) = (1 + g(x_M)) \sin(x_1\pi/2).$$

sujeto a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

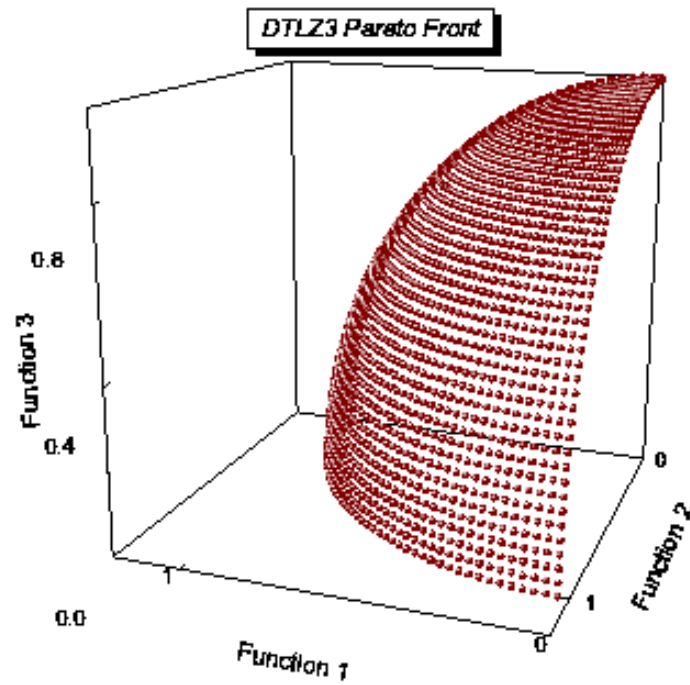
donde: $g(x_M) = 100[|x_M| + \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0,5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0,5))]$

Funciones Escalables

Se sugiere que $k = |x_M| = 10$. Hay un total de $n = M + k - 1$ variables de decisión. La función g antes descrita, introduce $(3k - 1)$ falsos frentes de Pareto. Todos estos falsos frentes son paralelos al frente global, por lo que un MOEA puede quedar fácilmente atrapado en alguno de ellos, antes de converger al óptimo que se encuentra en $g^* = 0$. El frente de Pareto verdadero corresponde a $x_M = (0,5, \dots, 0,5)^T$.

Funciones Escalables

DTLZ3



Funciones Escalables

DTLZ4

Minimizar:

$$f_1(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(x_1^\pi \pi/2) \cos(x_2^\pi \pi/2) \dots \cos(x_{M-2}^\pi \pi/2) \cos(x_{M-1}^\pi \pi/2),$$

$$f_2(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(x_1^\pi \pi/2) \cos(x_2^\pi \pi/2) \dots \cos(x_{M-2}^\pi \pi/2) \sin(x_{M-1}^\pi \pi/2),$$

$$f_3(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1^\pi \pi/2) \cos(x_2^\pi \pi/2) \dots \sin(x_{M-2}^\pi \pi/2),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{M-1}(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1^\pi \pi/2) \sin(x_2^\pi \pi/2),$$

$$f_M(x) = (1 + g(x_M)) \sin(x_1^\pi \pi/2).$$

sujeto a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

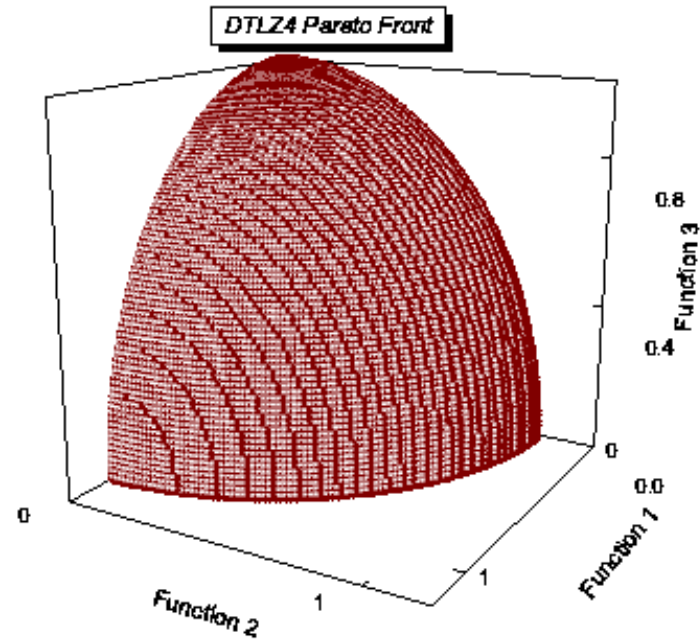
donde: $g(x_M) = \sum_{x_i \in X_M} (x_i - 0,5)^2$

Funciones Escalables

Se sugiere usar $\alpha = 100$ en este caso. Nuevamente, todas las variables x_1 a x_{M-1} se varían en el rango $(0 : 1)$. Se sugiere también usar $k = 10$. Hay $n = M + k - 1$ variables de decisión en este problema. En este caso, se tiene un conjunto denso de soluciones cerca del plano $f_M - f_1$.

Funciones Escalables

DTLZ4



Funciones Escalables

DTLZ5

Minimizar:

$$f_1(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \cos(\theta_2 \pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2} \pi/2) \cos(\theta_{M-1} \pi/2),$$

$$f_2(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \cos(\theta_2 \pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2} \pi/2) \sin(\theta_{M-1} \pi/2),$$

$$f_3(x) = (1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \cos(\theta_2 \pi/2) \dots \sin(\theta_{M-2} \pi/2),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{M-1}(x) = (1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \sin(\theta_2 \pi/2),$$

$$f_M(x) = (1 + g(x_M)) \sin(\theta_1 \pi/2).$$

$$\text{sujeto a: } 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{donde: } \theta_i = \frac{\pi}{4(1+g(x_M))} (1 + 2g(x_M)x_i), \text{ for } i = 2, 3, \dots, (M - 1)$$

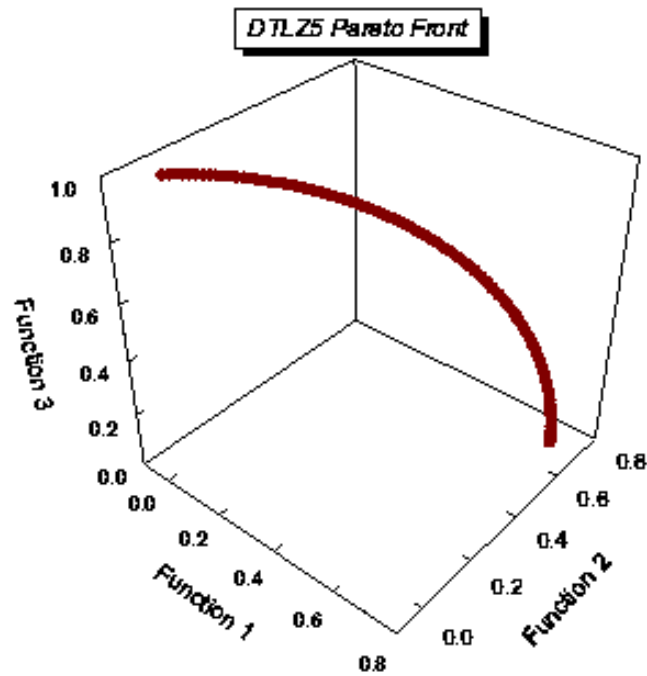
$$g(x_M) = \sum_{x_i \in X_M} (x_i - 0,5)^2$$

Funciones Escalables

Se sugiere la función g con $k = |x_M| = 10$. Asimismo, hay $n = M + k - 1$ variables de decisión y el conjunto de óptimos de Pareto corresponde a $x_i = 0,5$ para toda $x_i \in x_M$ y todas las funciones objetivo deben satisfacer: $\sum_{i=1}^M (f_i)^2 = 1$. Este problema evalúa la capacidad de un MOEA para converger a una curva. Se sugiere usar ($M \in [5, 10]$).

Funciones Escalables

DTLZ5



Funciones Escalables

DTLZ6

Minimizar:

$$f_1(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \cos(\theta_2 \pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2} \pi/2) \cos(\theta_{M-1} \pi/2),$$

$$f_2(x) =$$

$$(1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \cos(\theta_2 \pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2} \pi/2) \sin(\theta_{M-1} \pi/2),$$

$$f_3(x) = (1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \cos(\theta_2 \pi/2) \dots \sin(\theta_{M-2} \pi/2),$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{M-1}(x) = (1 + g(x_M)) \cos(\theta_1 \pi/2) \sin(\theta_2 \pi/2),$$

$$f_M(x) = (1 + g(x_M)) \sin(\theta_1 \pi/2).$$

sujeta a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

donde: $\theta_i = \frac{\pi}{4(1+g(x_M))} (1 + 2g(x_M)x_i), \forall i = 2, 3, \dots, (M - 1)$

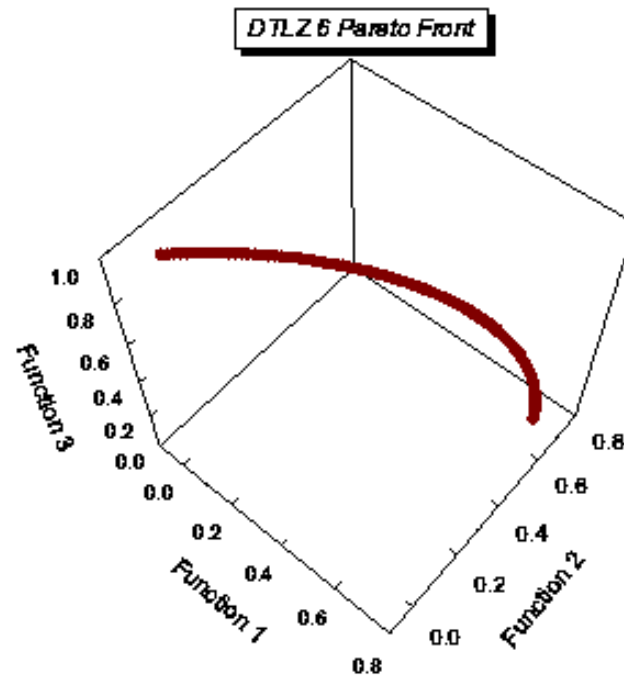
$$g(x_M) = \sum_{x_i \in X_M} (x_i)^{0,1}$$

Funciones Escalables

El conjunto de óptimos de Pareto está en $x_i = 0$ para toda $x_i \in x_M$. El tamaño del vector x_M se escoge como 10 y el número total de variables es idéntico al de DTLZ5.

Funciones Escalables

DTLZ6



Funciones Escalables

DTLZ7

Minimizar:

$$f_1(x) = x_1,$$

$$f_2(x) = x_2,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{M-1}(x) = x_{M-1}$$

$$f_M(x) = (1 + g(x_M)) \cdot h(f_1, f_2, \dots, f_{M-1}, g(x))$$

sujeto a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{donde: } g(x) = 1 + \frac{9}{|x_M|} \sum_{x_i \in x_M} x_i,$$

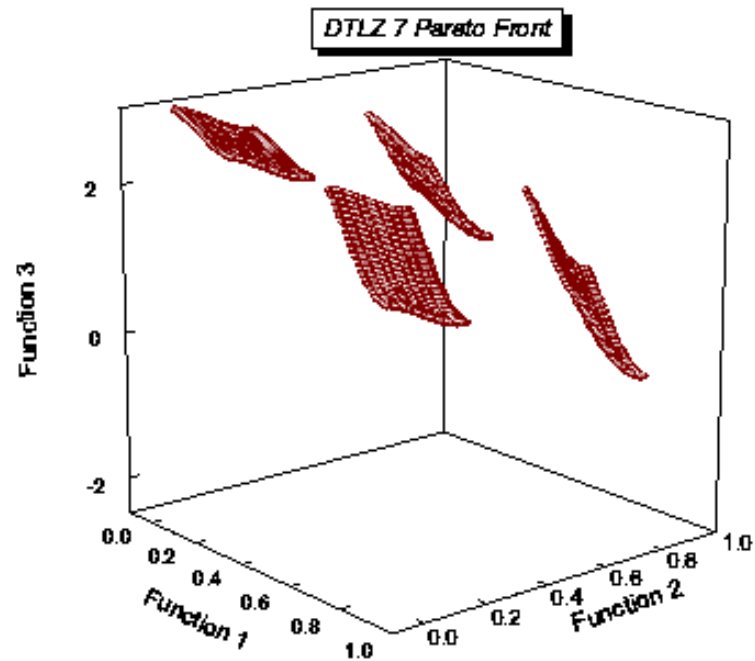
$$h(f_1, f_2, \dots, f_{M-1}, g) = M - \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{f_i}{1+g(x)} (1 + \sin(3\pi f_i)) \right)$$

Funciones Escalables

Este problema tiene $2M - 1$ regiones Pareto óptimas, desconectadas. g requiere $k = |x_M j|$ variables de decisión y el número total de variables es $n = M + k - 1$. Se sugiere usar: $k = 20$. El conjunto de óptimos de Pareto corresponde a; $x_M = 0$. Este problema pretende evaluar la capacidad de un MOEA para mantener simultáneamente, soluciones en diferentes regiones del espacio de búsqueda.

Funciones Escalables

DTLZ7



Funciones Escalables

DTLZ8

Minimizar:

$$f_j(x) = \frac{1}{\lfloor n/M \rfloor} \sum_{i=(j-1)\frac{n}{M}}^{\lfloor j\frac{n}{M} \rfloor} (x_i), \forall j = 1, 2, \dots, M,$$

sujeto a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

donde: $g_j(x) = f_M(x) + 4f_j(x) - 1 \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, (M - 1)$

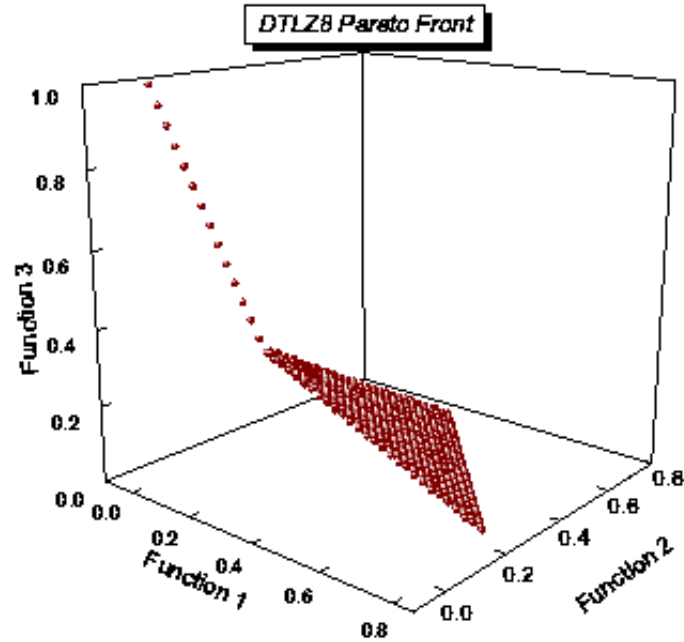
$g_M(x) = 2f_M(x) + \min_{i,j=1, i \neq j}^{M-1} [f_i(x) + f_j(x)] - 1 \geq 0,$

Funciones Escalables

El número de variables debe ser mayor que el de objetivos $n > M$. Se sugiere usar: $n = 10M$. Este problema tiene M restricciones. El frente de Pareto verdadero es una combinación de una línea recta y un hiperplano. La línea recta es la intersección de las primeras $(M - 1)$ restricciones (con $f_1 = f_2 = \dots = f_{M-1}$ y el hiperplano se representa mediante la restricción g_M).

Funciones Escalables

DTLZ8



Funciones Escalables

DTLZ9

Minimizar:

$$f_j(x) = \frac{1}{\lfloor n/M \rfloor} \sum_{i=(j-1)\frac{n}{M}}^{\lfloor j\frac{n}{M} \rfloor} (x_i^{0,1}), \forall j = 1, 2, \dots, M,$$

sujeto a: $0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

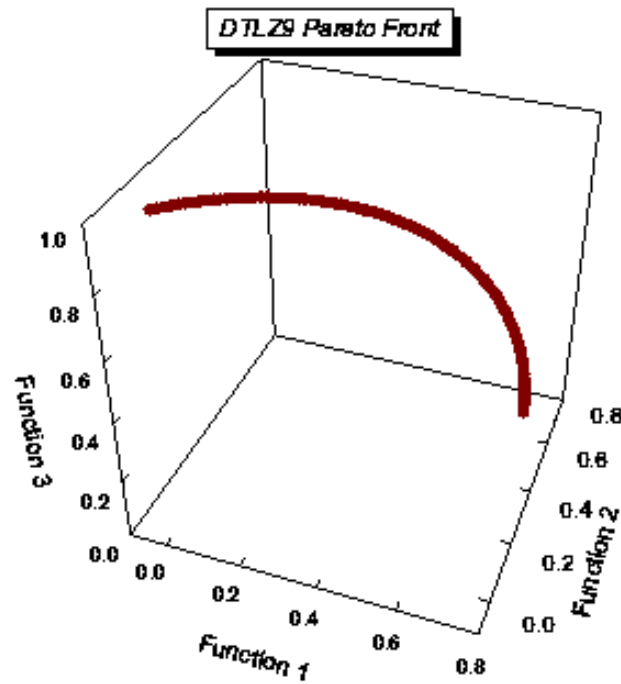
donde: $g_j(x) = f_M^2(x) + f_j^2(x) - 1 \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, (M - 1)$

Funciones Escalables

El número de variables debe ser mayor que el de objetivos. Se sugiere usar: $n = 10M$. El frente de Pareto verdadero es una curva con $f_1 = f_2 = \dots = f_M - 1$, similar al frente de DTLZ5. Sin embargo, en este caso, la densidad de soluciones se hace menor conforme nos acercamos a la región donde residen los óptimos de Pareto. El frente de Pareto se encuentra en la intersección de todas las $(M - 1)$ restricciones, lo cual puede causar dificultades a un MOEA.

Funciones Escalables

DTLZ9



Problemas de Okabe

Tatsuya Okabe et. al [2004] propusieron una metodología para generar funciones de prueba multiobjetivo con base en el mapeo de funciones de densidad de probabilidad del espacio de las variables de decisión al de las funciones objetivo y proporcionan dos ejemplos del procedimiento. La idea básica es partir de un espacio inicial (llamado S^2) entre el espacio de las variables y el de los objetivos y de ahí, construir ambos espacios aplicando funciones apropiadas a S^2 . Para ello, los autores proponen usar el inverso de la operación de generación (o sea, deformación, rotación y desplazamiento).

Problemas de Okabe

OKA1:

Minimizar:

$$f_1 = x'_1,$$

$$f_2 = \sqrt{2\pi} - \sqrt{|x'_1|} + 2|x'_2 - 3 \cos(x'_1) - 3|^{\frac{1}{2}},$$

donde:

$$x'_1 = \cos(\pi/12)x_1 - \sin(\pi/12)x_2,$$

$$x'_2 = \sin(\pi/12)x_1 + \cos(\pi/12)x_2,$$

sujeto a:

$$x_1 \in [6 \sin(\pi/12), 6 \sin(\pi/12) + 2\pi \cos(\pi/12)],$$

$$x_2 \in [-2\pi \sin(\pi/12), 6 \cos(\pi/12)],$$

Problemas de Okabe

El conjunto de óptimos de Pareto está en: $x'_2 = 3 \cos(x'_1 + 3)$ y $x'_1 \in [0, 2\pi]$. El frente de Pareto está en: $f_2 = \sqrt{(2\pi) - f_1}$ y $f_1 \in [-\pi, \pi]$. El indicador de Distribución es:

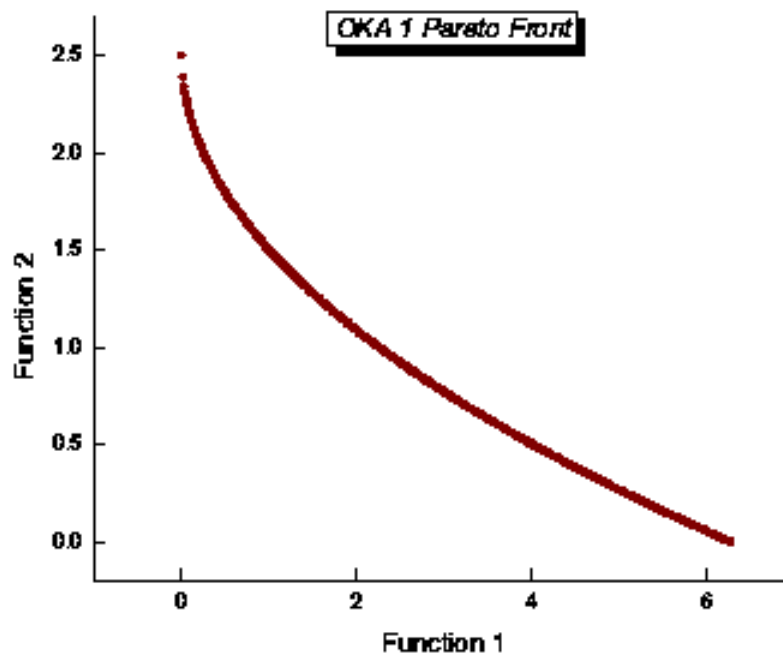
$$D_{x \rightarrow f} = \frac{3}{2} |x'_2 - 3 \cos(x'_1) - 3|^{\frac{2}{3}} \quad (6)$$

Problemas de Okabe

El indicador de Distribución ($D_{x \rightarrow f}$) mide la cantidad de distorsión que sufre la densidad de probabilidad en el espacio de las variables de decisión, bajo el mapeo del espacio de las variables al de los objetivos.

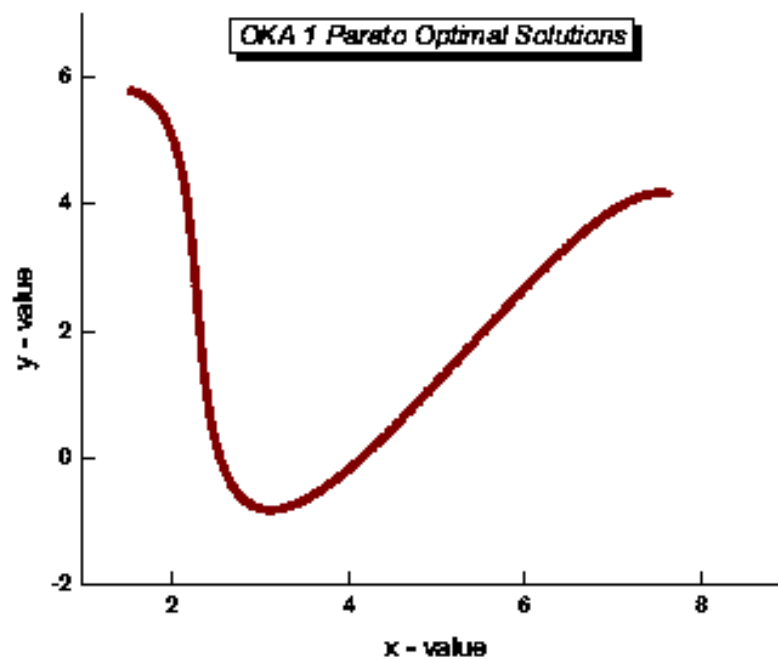
Problemas de Okabe

OKA1 (frente de Pareto)



Problemas de Okabe

OKA1 (espacio de las variables)



Problemas de Okabe

OKA2:

Minimizar:

$$f_1 = x_1,$$

$$f_2 = 1 - \frac{1}{4\pi^2}(x_1 + \pi)^2 + |x_2 - 5 \cos(x_1)|^{\frac{1}{3}} + |x_3 - 5 \sin(x_1)|^{\frac{1}{3}},$$

sujeto a:

$$x_1 \in [-\pi, \pi],$$

$$x_2, x_3 \in [-5, 5],$$

Problemas de Okabe

El conjunto de óptimos de Pareto está en:

$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 5 \cos(x_1), 5 \sin(x_1))$ y $x_1 \in [-\pi, \pi]$. El frente de

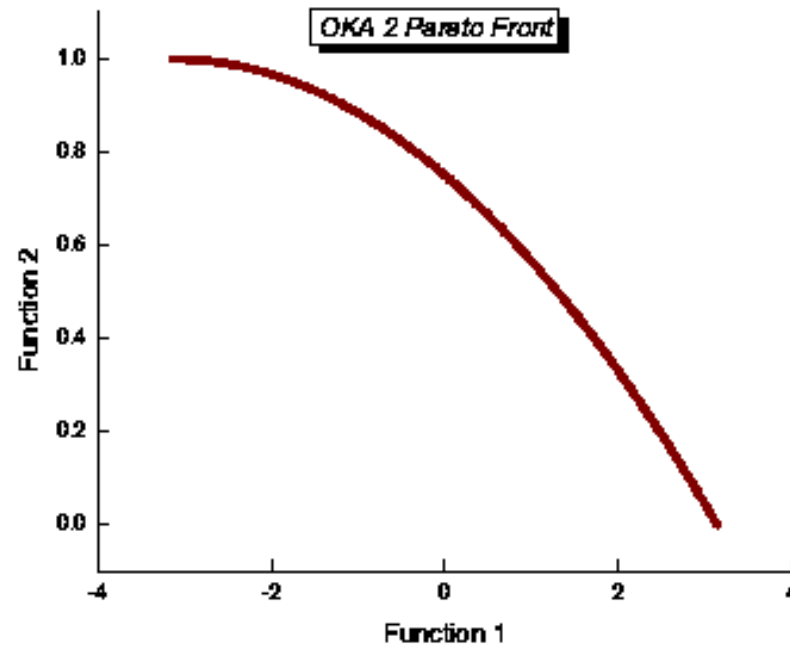
Pareto verdadero se localiza en: $f_2 = 1 - \frac{1}{4\pi^2}(f_1 + \pi)^2$ y

$f_1 \in [-\pi, \pi]$. El indicador de distribución es:

$$D_{x \rightarrow f} = 9|x_2 - 5 \cos(x_1)|^{\frac{2}{3}}|x_3 - 5 \sin(x_1)|^{\frac{2}{3}}.$$

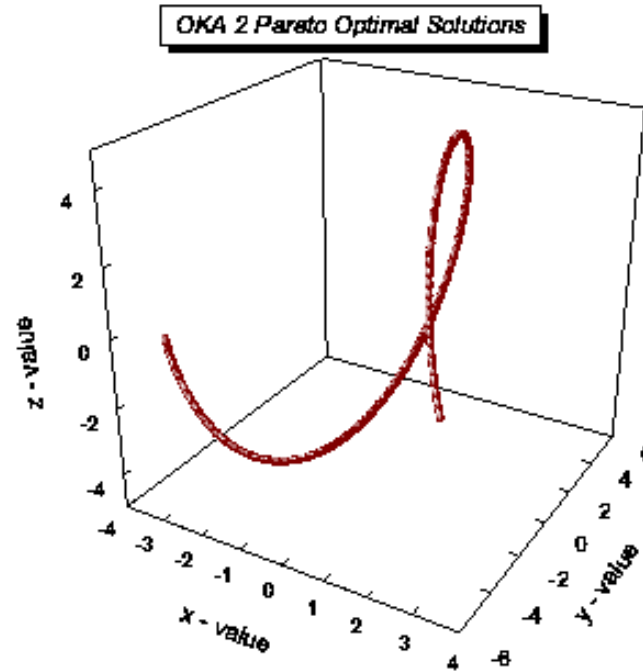
Problemas de Okabe

OKA2 (frente de Pareto)



Problemas de Okabe

OKA2 (espacio de las variables)



Problemas Combinatorios

Cuadro 1: Posibles Funciones Multiobjetivo *NP*-Completas

Problema <i>NP</i>-Completo	Ejemplo
Traveling Salesperson	Min energy, time, and/or distance; Max expansion
Coloring	Min number of colors, number of each color
Set/Vertex Covering	Min total cost, over-covering
Maximum Independent Set (Clique)	Max set size; Min geometry

Problemas Combinatorios

Cuadro 2: Posibles Funciones Multiobjetivo *NP*-Complejas

Problema <i>NP</i>-Completo	Ejemplo
Vehicle Routing	Min time, energy, and/or geometry
Scheduling	Min time, deadlines, wait time, resource use
Layout	Min space, overlap, costs
<i>NP</i> C-Problem Combinations	Vehicle scheduling and routing
0/1 Knapsacks - Bin Packing	Max profit; Min weight
Minimum Spanning Trees	tuple weighted edges; minimum weighting

Métricas

Tres suelen ser las cuestiones a tomar en consideración cuando se diseña una buena métrica para problemas multiobjetivo:

1. Minimizar la distancia del frente de Pareto producido por nuestro algoritmo con respecto al verdadero frente de Pareto (suponiendo que sabemos su ubicación).
2. Maximizar la distribución de las soluciones encontradas, de forma que podamos tener una distribución de soluciones no dominadas tan suave y uniforme como sea posible.
3. Maximizar la cantidad de elementos del conjunto de óptimos de Pareto encontrados.

Métricas

A continuación se revisarán las diversas propuestas de métricas existentes en la literatura. Como veremos, ninguna de ellas realmente captura en un solo valor numérico los 3 elementos discutidos en el acetato anterior. De hecho, intentar hacerlo puede ser infructuoso, ya que estos 3 elementos se refieren a aspectos de desempeño muy distintos.

Métricas

Por lo tanto, su fusión en un valor único puede dar pie a una métrica que no indique correctamente el desempeño de un algoritmo multiobjetivo. Es interesante hacer notar que el problema de las métricas es también multiobjetivo. Por ello, lo más recomendable es usar diferentes métricas para evaluar los distintos aspectos de desempeño de un algoritmo.

Métricas

La mayor parte de las métricas actuales presuponen que PF_{true} se conoce (o se puede determinar en un tiempo razonable usando un proceso enumerativo). Si ese es el caso, podemos probar el desempeño de un algoritmo evolutivo multiobjetivo comparando los frentes de Pareto producidos por nuestro algoritmo con respecto al frente verdadero y determinar a partir de eso ciertas medidas de error que indiquen la efectividad del algoritmo analizado. Esa es la premisa de las 2 métricas discutidas a continuación: la tasa de error y la distancia generacional.

Tasa de Error

Esta métrica fue propuesta por Van Veldhuizen [1999] para indicar el porcentaje de soluciones (de $PF_{current}$) que no son miembros de PF_{true} :

$$ER = \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n}, \quad (7)$$

donde n es el número de vectores en $PF_{current}$; $e_i = 0$ si el vector i es un miembro de PF_{true} , y $e_i = 1$ de lo contrario.

Tasa de Error

Debe resultar claro que un valor $ER = 0$ indica el comportamiento ideal del algoritmo, puesto que en este caso todos los vectores generados por el algoritmo pertenecerían a PF_{true} . Advierta, sin embargo, que esta métrica requiere conocer la cantidad de elementos del verdadero conjunto de óptimos de Pareto, lo cual puede resultar imposible en problemas del mundo real.

Distancia Generacional

El concepto de distancia generacional (GD) fue introducido por Van Veldhuizen & Lamont [1998] como una manera de estimar qué tan lejos están los elementos de $PF_{current}$ de PF_{true} y se define como:

$$GD = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}}{n} \quad (8)$$

donde n es el número de vectores no dominados en $PF_{current}$ y d_i es la distancia Euclideana (medida en el espacio de las funciones objetivo) entre cada una de éstas y el miembro más cercano de PF_{true} .

Distancia Generacional

Debiera resultar claro que un valor de $GD = 0$ indica que todos los elementos generados están en PF_{true} . Por lo tanto, cualquier otro valor indica que tan “lejos” estamos del verdadero frente de Pareto del problema.

Rudolph [1998], Schott [1995] y Zitzler et al. [2000] han propuesto métricas similares.

Dispersión

Las métricas de dispersión miden la distribución de los individuos en $PF_{current}$ sobre la región no dominada. Por ejemplo, Srinivas and Deb [1994] propusieron el uso de una distribución chi-cuadrada:

$$SP = \sqrt{\sum_{i=1}^{q+1} \left(\frac{n_i - \bar{n}_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (9)$$

donde: q es el número de puntos óptimos (de Pareto) deseados (se presupone que la subregión $(q + 1)$ -ésima es dominada por la q -ésima subregión), n_i es el número de individuos en el i -ésimo nicho (o subregión) de la región no dominada, \bar{n}_i es el número esperado de individuos presente en el i -ésimo nicho, y σ_i^2 es la varianza de los individuos presentes en la i -ésima subregión de la región no dominada.

Dispersión

Deb [1989] había usado teoría de la probabilidad anteriormente para estimar que:

$$\sigma_i^2 = \bar{n}_i \left(1 - \frac{\bar{n}_i}{P}\right), i = 1, 2, \dots, q, \quad (10)$$

donde P es el tamaño de la población. Puesto que la $(q + 1)$ -ésima subregión es una región dominada, entonces $\bar{n}_{q+1} = 0$ (es decir, no queremos tener individuos en esa región).

Dispersión

El estudio de Deb también mostró que:

$$\sigma_{q+1}^2 = \sum_{i=1}^q \sigma_i^2 \quad (11)$$

De tal forma, si $SP = 0$, significa que nuestro algoritmo ha encontrado la distribución ideal de puntos. Por lo tanto, valores bajos de SP implican una buena capacidad de dispersión para el algoritmo.

Dispersión

Para analizar la distribución usando esta métrica, la región no dominada se divide en un cierto número de subregiones de igual tamaño (este valor es dado por el usuario). Dado que se conoce el tamaño de población usado por el algoritmo, podemos determinar la cantidad de individuos que se espera se encuentren en cada subregión. Este valor es el que se utiliza para calcular la medida de desviación antes indicada.

Dispersión

Schott [1995] propuso una métrica similar llamada “efficient set spacing” (ESS):

$$ESS = \sqrt{\frac{1}{e-1} \sum_{i=1}^e (\bar{d} - d_i)^2} \quad (12)$$

donde:

$$d_i = \min_j \left\{ |f_1^i - f_1^j| + |f_2^i - f_2^j| \right\} \quad (13)$$

donde: $j = 1, \dots, e$, y \bar{d} se refieren a la media de todas las d_i y e es el número de elementos del conjunto de Pareto obtenidos hasta el momento. Si $ESS = 0$, significa que nuestro algoritmo ha encontrado la distribución ideal de vectores no dominados.

Dispersión

La métrica de Schott se basa en la métrica de Holder de grado uno discutida por Horn & Nafpliotis [1993]. Esta métrica mide la varianza de la distancia de cada miembro del conjunto de óptimos de Pareto (encontrados hasta el momento) con respecto a su vecino más cercano. Advierta, sin embargo, que, tal y como indica Van Veldhuizen [1999], esta métrica tiene que adaptarse a fin de considerar casos especiales (por ejemplo, frentes de Pareto disjuntos).

Dispersión

Así mismo, también puede dar valores erróneos a menos que se combine con otra métrica que indique el número de elementos del conjunto de Pareto obtenidos hasta el momento (por ejemplo, si producimos sólo dos soluciones, esta métrica nos dirá que su distribución es la ideal).

Dispersión

Aunque ninguna de estas métricas de dispersión realmente requiere que conozcamos PF_{true} , todas ellas parten de la premisa básica de que nuestro algoritmo evolutivo ha convergido a PF_{true} . De lo contrario, saber que nuestras soluciones están uniformemente distribuidas carecería de sentido, ya que no estaríamos en el verdadero frente de Pareto.

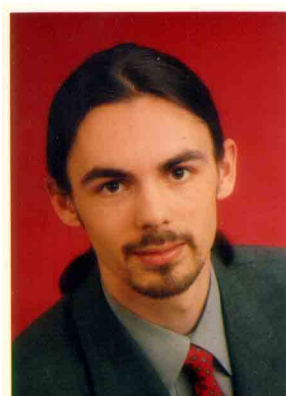
Espacio Cubierto

Zitzler & Thiele [1999] propusieron una métrica de dispersión llamada “Size of the Space Covered” (SSC). Esta métrica estima el tamaño del conjunto dominado global en el espacio de las funciones objetivo. La idea principal de esta métrica es calcular el área del espacio de las funciones objetivo cubierta por los vectores no dominados generados por nuestro algoritmo.

Espacio Cubierto

Para problemas con dos funciones objetivo, cada vector dominado representa un rectángulo definido por los puntos $(0,0)$ y $(f_1(x_i), f_2(x_i))$, donde $f_1(x_i)$ y $f_2(x_i)$ son soluciones no dominadas. Por lo tanto, SSC se calcula como la unión de las áreas de todos los rectángulos que corresponden a los vectores no dominados generados. Nótese, sin embargo, que esta métrica puede producir resultados erróneos cuando el frente de Pareto es no convexo.

Espacio Cubierto



Laumanns et al. [1999], usan el concepto de “espacio cubierto” para comparar problemas con más de dos funciones objetivo.

Espacio Cubierto

Para ello adoptan un cuboide m -dimensional como el conjunto de referencia a partir del cual nuestro algoritmo evolutivo debe cubrir lo máximo posible del espacio dominado.

Espacio Cubierto

Cada solución no dominada proporciona un cono de soluciones dominadas. La intersección de este cono con el cuboide de referencia (el cual es también un cuboide) se agrega al volumen dominado. Al calcular el volumen dominado, se evita contar múltiples veces las partes traslapadas de las diferentes soluciones disponibles.

Espacio Cubierto

Con este método, el cuboide de referencia se desarrolla usando las soluciones óptimas considerando cada objetivo por separado. Esto significa que dichas soluciones deben conocerse o deben ser relativamente fáciles de obtener. Nótese, sin embargo, que en problemas del mundo real, el costo asociado con generar los óptimos para cada función objetivo por separado puede ser prohibitivo.

Espacio Cubierto

El valor del espacio cubierto varía con el número de soluciones no dominadas y su distribución a lo largo del frente de Pareto.

Podemos ver entonces que esta métrica intenta combinar en un solo valor los 3 elementos previamente discutidos. Por lo tanto, esta métrica no resulta efectiva en aquellos casos en los que dos algoritmos difieran en más de uno de estos criterios antes mencionados (o sea, distancia, dispersión y número de elementos del conjunto de Pareto).

Cobertura



Zitzler & Thiele [1999] propusieron otra métrica en la que se comparan dos conjuntos de vectores no dominados calculando la fracción de cada uno que es “cubierta” (o dominada) por el otro.

Cobertura

Supongamos que tenemos dos algoritmos $A1$ y $A2$ para comparar sus desempeños respectivos. En este método, el conjunto de vectores no dominados resultante de una corrida del algoritmo $A1$ y de otra del algoritmo $A2$ se procesan de manera que se obtengan 2 números: el porcentaje de puntos del algoritmo $A1$ que son iguales a o dominados por los puntos de $A2$ y viceversa. Posteriormente pueden usarse pruebas estadísticas sobre los valores generados tras efectuar varias comparaciones por parejas.

Cobertura

Hagamos que $X', X'' \subseteq X$ sean dos conjuntos de variables de decisión. La función CM mapea el par ordenado (X', X'') al intervalo $[0,1]$:

$$CM(X', X'') = \frac{|\{a'' \in X''; a' \in X' : a' \succeq a''\}|}{|X''|}$$

Si $CM(X', X'') = 1$, entonces significa que todos los puntos en X'' son dominados por o son iguales a los puntos en X' . Si $CM(X', X'') = 0$, entonces significa que ninguno de los puntos en X'' están cubiertas por el conjunto X' .

Cobertura

Este método puede usarse para mostrar si el resultado de un algoritmo domina al resultado de otro sin indicar qué tan bueno es. Así mismo, adviertan que esta técnica de comparación no checa la uniformidad de las soluciones a lo largo del frente de Pareto.

Cobertura

Otro problema con esta técnica es que puede retornar un mejor valor para un algoritmo que produzca un solo vector no dominado, más cercano a PF_{true} que otro algoritmo que produzca varios vectores bien distribuidos, pero más alejado de PF_{true} .

Cobertura

Esta métrica fue diseñada para complementar la métrica de espacio cubierto previamente discutida.

En su disertación, Zitzler [1999] propuso otra métrica llamada “Coverage difference of two sets”, que resuelve algunos de los problemas de la métrica de cobertura.

Cuidado con las Métricas

Investigación reciente ha mostrado las limitantes de muchas de las métricas en uso actual [Zitzler et al., 2002; 2003]. La conclusión más asombrosa de este trabajo es que muchas de las métricas actuales no permiten derivar conclusiones contundentes sobre nuestros resultados (p.ej., “el algoritmo A es mejor que el algoritmo B”). Este estudio favorece también el uso de las métricas binarias sobre las unarias.