



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco
Departamento de Computación

Un nuevo sistema inmune artificial para problemas
de optimización multi-objetivo

Tesis que presenta
Estefania Alejandra Aguilar Arroyo
para obtener el Grado de
Maestría en Ciencias
en Computación

Director de Tesis
Dr. Carlos Artemio Coello Coello

Ciudad de México

Octubre de 2023

Resumen

Los problemas de optimización que se componen de dos o más funciones objetivo (normalmente en conflicto entre sí) son denominados multiobjetivo (POM) y aparecen en distintas áreas de las ciencias e ingenierías, por lo que su solución tiene una gran relevancia para las aplicaciones del mundo real. Solucionar un POM consiste en encontrar un conjunto de soluciones que representen los mejores compromisos posibles entre sus funciones objetivo.

De entre las muchas técnicas disponibles para resolver POMs, una alternativa son los sistemas inmunes artificiales para optimización multi-objetivo (SIAMs). Este tipo de metaheurística emula procesos inmunes con recursos computacionales, con el objetivo de resolver POMs. Los SIAMs cuentan con mecanismos que los convierten en poderosas herramientas de búsqueda, tales como el principio de selección clonal, la selección positiva y la selección negativa.

El uso de los SIAMs puros (es decir, utilizando únicamente componentes inspirados en conceptos inmunes) e híbridos (es decir, que adoptan operadores y procesos de otro tipo de metaheurísticas como los algoritmos evolutivos) ha sido bastante limitado, particularmente para problemas con muchas (es decir, más de tres) funciones objetivo. Esto se debe a que un número importante de los SIAMs actuales tienen esquemas de selección basados en la optimalidad de Pareto. En años recientes se han propuesto SIAMs que adoptan esquemas de selección más adecuados para lidiar con muchas funciones objetivo, destacando el uso de descomposición.

En esta tesis se propone un nuevo SIAM denominado “Sistema Inmune Artificial Multi-objetivo basado en Descomposición” (SIAMD) y una variante del mismo que incorpora recombinación (SIAMDX). El desempeño de ambos algoritmos se compara con respecto al NSGA-II y MOEA/D, además de cuatro SIAMs propuestos recientemente.

Los resultados obtenidos de este estudio comparativo muestran que SIAMDX supera el desempeño del NSGA-II y obtiene resultados similares a los de MOEA/D en la mayoría de las instancias utilizadas. Así mismo, SIAMDX obtiene un desempeño superior al de los otros SIAMs adoptados, sobre todo al aumentar el número de funciones objetivo, lo que lo hace apto para resolver problemas de optimización multiobjetivo con muchos objetivos.

Abstract

Optimization problems that consist of two or more (often conflicting) objective functions are called multiobjective optimization problems (MOPs) and they appear in different scientific and engineering areas. Therefore, their solution has a great relevance for real-world applications. Solving a MOP consists in finding a set of solutions that represent the best possible trade-offs among their objective functions.

From among the many techniques currently available to solve MOPs, an alternative is the use of multiobjective artificial immune systems (MOAISs). This sort of metaheuristic emulates immune processes with computational resources, with the aim of solving MOPs. MOAISs have mechanisms that make them powerful search tools, such as the clonal selection principle, positive selection and negative selection.

The use of pure (i.e., adopting only components inspired on immune concepts) and hybrid (i.e., adopting operators and processes from other types of metaheuristics such as evolutionary algorithms) MOAISs has been fairly limited, particularly when dealing with MOPs having many objectives (i.e., more than three). The reason for this is that an important number of MOAIs in current use have selection mechanisms based on Pareto optimality. In recent years, there have been proposals of MOAISs that adopt selection schemes that are more appropriate to deal with many-objective problems, from which decomposition has been a popular choice.

In this thesis, we propose a new MOAIs called “Multiobjective Artificial Immune System based on Decomposition” (MOAISD) as well as a variant of it that incorporates recombination (MOAISDX). The performance of both algorithms is compared with respect to that of NSGA-II and MOEA/D, as well as with respect to four MOAIs that were recently proposed.

The results obtained from this comparative study show that MOAISDX outperforms NSGA-II and obtains results similar to those of MOEA/D in most of the test instances adopted. Furthermore, MOAISDX has a better performance than that of the other MOAIS adopted, particularly as we increase the number of objectives, which indicates that it is a good choice for solving many-objective optimization problems.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, Antonia Arroyo y Andres Aguilar, que me apoyaron incondicionalmente a lo largo de este proceso. También, quiero agradecer a mis hermanos Monserat y Andrés, por brindarme compañía y escuchar todas mis inquietudes.

Quiero darle las gracias al Dr. Carlos Coello por otorgarme el beneficio de la duda y aceptar guiarme, compartiendo un poco de su valiosa experiencia conmigo. Este trabajo no sería posible sin su intervención y consejos.

Agradezco a mis revisores de tesis, Dr. Amilcar Meneses, Dr. Gerardo de la Fraga y Dr. Cuauhtémoc Mancillas por su tiempo y sus comentarios que ayudaron a completar este trabajo.

A mis amigas, Isabel, Melissa y Mariana, por apoyarme, escucharme y brindarme comfort en momentos complicados.

Agradezco al CINVESTAV y a CONAHCyT por el apoyo económico a lo largo de mis estudios de maestría. Este trabajo de tesis se derivó del proyecto CONACyT titulado “Esquemas de Selección Alternativos para Algoritmos Evolutivos Multi-Objetivo” (Ref. 1920), cuyo responsable es el Dr. Carlos A. Coello Coello.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Antecedentes y motivación para el proyecto | 1 |
| 1.1.1. Antecedentes | 4 |
| 1.2. Objetivos generales y específicos del proyecto | 4 |
| 1.3. Estructura de la tesis | 5 |
| 2. Conceptos preliminares | 7 |
| 2.1. Optimización multi-objetivo | 7 |
| 2.1.1. Problema de optimización multi-objetivo | 7 |
| 2.2. Optimalidad de Pareto y dominancia | 8 |
| 2.3. Técnicas para la solución de problemas de optimización multi-objetivo . . . | 10 |
| 2.4. Computación evolutiva | 17 |
| 2.4.1. Algoritmos evolutivos multi-objetivo | 17 |
| 3. Sistemas inmunes artificiales | 23 |
| 3.1. Sistema inmune biológico | 23 |
| 3.1.1. Fundamentos | 23 |
| 3.1.2. Principales dinámicas | 27 |
| 3.2. Sistemas inmunes artificiales para optimización multi-objetivo | 29 |
| 3.2.1. Sistemas inmunes artificiales | 30 |
| 3.2.2. Sistemas inmunes artificiales para optimización multiobjetivo | 33 |
| 3.2.3. Sistemas inmunes artificiales para problemas con muchos objetivos . | 39 |
| 4. Un nuevo sistema inmune artificial basado en descomposición para optimización multi-objetivo | 43 |
| 4.1. Modelo inmunológico | 43 |
| 4.2. Descomposición | 44 |
| 4.3. Operador de asignación de clones | 46 |
| 4.4. Selección positiva y negativa | 48 |
| 4.5. Algoritmo propuesto | 49 |

| | |
|--|------------|
| 5. Resultados experimentales | 53 |
| 5.1. Problemas de prueba | 53 |
| 5.2. Indicadores de desempeño | 54 |
| 5.3. Experimentos | 55 |
| 5.4. Comparación entre SIAM puro y SIAM con recombinación (SIAMDX) . . | 56 |
| 5.5. Comparación con otros SIAMs | 57 |
| 5.6. Comparación con AEMOs del estado del arte | 63 |
| 6. Conclusiones y trabajo futuro | 79 |
| Appendices | |
| A. Conjunto de problemas de prueba | 81 |
| A.1. Conjunto Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler (DTLZ) | 81 |
| A.1.1. DTLZ1 | 82 |
| A.1.2. DTLZ2 | 83 |
| A.1.3. DTLZ3 | 84 |
| A.1.4. DTLZ4 | 85 |
| A.1.5. DTLZ5 | 86 |
| A.1.6. DTLZ6 | 87 |
| A.1.7. DTLZ7 | 88 |
| A.2. Conjunto <i>Walking Fish Group</i> (WFG) | 89 |
| A.2.1. WFG1 | 93 |
| A.2.2. WFG2 | 94 |
| A.2.3. WFG3 | 95 |
| A.2.4. WFG4 | 96 |
| A.2.5. WFG5 | 96 |
| A.2.6. WFG6 | 97 |
| A.2.7. WFG7 | 97 |
| A.2.8. WFG8 | 100 |
| A.2.9. WFG9 | 100 |
| B. Resultados numéricos | 103 |
| B.1. Hipervolumen | 103 |
| B.2. IGD+ | 120 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Optimalidad de Pareto y optimalidad débil de Pareto | 10 |
| 2.2. Algoritmos de optimización y búsqueda global [1]. | 12 |
| 2.3. Método de la suma ponderada con un problema convexo (izquierda) y uno no convexo (derecha) con dos objetivos [2]. | 15 |
| 2.4. Diferentes elecciones del límite superior para el método de restricción ε [2]. | 16 |
| 2.5. Distintas métricas utilizadas en el método de métricas ponderadas. De derecha a izquierda: L_1 , L_2 , L_p o métrica de Tchebycheff. | 17 |
| 3.1. Etapas de un SIAM en el proceso de optimización | 36 |
| 4.1. Enfoque de la intersección de frontera basada en penalización PIB. | 47 |
| 5.1. Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. | 64 |
| 5.2. Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. | 65 |

-
- 5.3. Resultados de la comparación de los valores de IDG+ entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. 66
- 5.4. Resultados de la comparación de los valores de IGD+ entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. 67
- 5.5. Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. 68
- 5.6. Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. 69
- 5.7. Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. 72

| | | |
|-------|---|----|
| 5.8. | Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. | 73 |
| 5.9. | Resultados de la comparación de los valores de IGD+ entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. | 74 |
| 5.10. | Resultados de la comparación de los valores de IGD+ entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. | 75 |
| 5.11. | Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. | 76 |
| 5.12. | Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema. | 77 |
| A.1. | DTLZ1 | 82 |
| A.2. | DTLZ2 | 83 |
| A.3. | DTLZ3 | 84 |
| A.4. | DTLZ4 | 85 |
| A.5. | DTLZ5 | 86 |

| | |
|----------------------|-----|
| A.6. DTLZ6 | 87 |
| A.7. DTLZ7 | 88 |
| A.8. WFG1 | 94 |
| A.9. WFG2 | 95 |
| A.10.WFG3 | 96 |
| A.11.WFG4 | 97 |
| A.12.WFG5 | 98 |
| A.13.WFG6 | 98 |
| A.14.WFG7 | 99 |
| A.15.WFG8 | 100 |
| A.16.WFG9 | 101 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 3.1. Cuadro comparativo de algunos <i>SIAMs</i> para problemas de optimización multi-objetivo. | 41 |
| 3.2. Cuadro comparativo de algunos <i>SIAMs</i> para problemas de optimización multi-objetivo y de muchos objetivos (indicados estos últimos con el símbolo ‘*’) (Continuación). | 42 |
| 5.1. Parámetros. | 54 |
| 5.2. Puntos de referencia para el cálculo del hipervolumen. | 54 |
| 5.3. Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas DTLZ según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de hipervolumen se indica en negritas. | 57 |
| 5.4. Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas WFG según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de hipervolumen se indica en negritas. | 58 |
| 5.5. Resultados de la comparación de los valores de IGD+ de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas DTLZ según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de IDG+ se indica en negritas. | 58 |
| 5.6. Resultados de la comparación de los valores de IGD+ de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas WFG según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de IGD+ se indica en negritas. | 59 |
| 5.7. Resultados de la comparación de los valores de espaciado de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas DTLZ según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de espaciado se indica en negritas. | 59 |

| | |
|--|-----|
| 5.8. Resultados de la comparación de los valores de espaciado de SIAMD y SIAMD _X en el conjunto de problemas WFG según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de espaciado se indica en negritas. | 60 |
| A.1. Funciones de forma del conjunto de problemas WFG. | 90 |
| A.2. Funciones de transformación para el conjunto de problemas WFG. | 91 |
| A.3. Funciones de transformación para el conjunto de problemas WFG (continuación). | 92 |
| B.1. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ1. | 104 |
| B.2. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ2. | 105 |
| B.3. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ3. | 106 |
| B.4. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ4. | 107 |
| B.5. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ5. | 108 |
| B.6. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ6. | 109 |
| B.7. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ7. | 110 |
| B.8. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG1. | 111 |
| B.9. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG2. | 112 |
| B.10. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG3. | 113 |
| B.11. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG4. | 114 |
| B.12. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG5. | 115 |
| B.13. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG6. | 116 |
| B.14. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG7. | 117 |
| B.15. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG8. | 118 |
| B.16. Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG9. | 119 |

| | |
|--|-----|
| B.17.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ1. | 121 |
| B.18.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ2.. . . . | 122 |
| B.19.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ3. | 123 |
| B.20.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ4.. . . . | 124 |
| B.21.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ5. | 125 |
| B.22.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ6. | 126 |
| B.23.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ7. | 127 |
| B.24.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG1. | 128 |
| B.25.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG2. | 129 |
| B.26.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG3. | 130 |
| B.27.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG4. | 131 |
| B.28.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG5. | 132 |
| B.29.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG6. | 133 |
| B.30.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG7. | 134 |
| B.31.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG8. | 135 |
| B.32.Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG9. | 136 |

Capítulo 1

Introducción

Los problemas de optimización que se componen de más de dos o más funciones objetivo (posiblemente en conflicto entre sí) que deseamos optimizar simultáneamente (denominadas multi-objetivo) surgen en distintas áreas de las ciencias e ingeniería y su solución (minimización o maximización) tiene una gran relevancia en la vida real. Un problema de este tipo se puede solucionar utilizando una amplia variedad de técnicas, entre las que se encuentran los sistemas inmunes artificiales multi-objetivo cuyas características inherentes los hacen una excelente opción. En este trabajo se desarrolla un sistema inmune artificial multi-objetivo haciendo uso del paradigma de descomposición.

1.1. Antecedentes y motivación para el proyecto

Los problemas de optimización con muchos objetivos aparecen de forma recurrente en el mundo real. Estos problemas no cuentan con una solución única, sino que cuentan con un conjunto de ellas que representan los mejores compromisos posibles entre los objetivos. Proporcionar estas soluciones (las cuales conforman el llamado conjunto de óptimos de Pareto) al usuario es de suma importancia para que éste pueda tomar la decisión que más le resulte conveniente. Estas soluciones, en el espacio de las funciones objetivo, se denominan frente de Pareto. Como parte del proceso de optimización se busca que las soluciones generadas proporcionen una buena aproximación del frente de Pareto real, y que además cuenten con una buena distribución (p.ej., uniforme) en el espacio de las funciones objetivo.

Los problemas de optimización multi-objetivo están compuestos de diversos objetivos que suelen estar en conflicto entre sí. Un enfoque común para lidiar con estos problemas ha sido sumar los valores de los objetivos, a fin de transformar un problema vectorial en uno escalar [2], al cual se le puede aplicar una técnica de optimización mono-objetivo. Uno de los inconvenientes con este tipo de enfoque es que se obtiene sólo una solución por ejecución, lo que da pie a la necesidad de realizar diversas ejecuciones (usando pesos para ponderar la importancia de los objetivos) a fin de obtener una aproximación representativa

del frente de Pareto verdadero. Adicionalmente, las funciones agregativas lineales, que es el nombre que reciben estos métodos que combinan los valores de los objetivos en un solo valor escalar, no pueden generar porciones no convexas del frente de Pareto, sin importar qué pesos se utilicen. Aunque existen técnicas de programación matemática más sofisticadas, en general, este tipo de algoritmos requieren de información específica del problema (p.ej., muchas requieren que las funciones objetivo y/o las restricciones sean diferenciables). Adicionalmente, estos algoritmos suelen realizar movimientos muy locales (es decir, cercanos a la solución inicial) y suelen ser muy susceptibles a la forma y continuidad del frente de Pareto.

Las técnicas de computación evolutiva en particular y las metaheurísticas bio-inspiradas en general, han ganado popularidad en la resolución de problemas multi-objetivo, en años recientes, particularmente cuando debemos lidiar con problemas de alta complejidad [3, 4]. Los algoritmos evolutivos multi-objetivo utilizan un conjunto de soluciones (llamado población) las cuales son sometidas a una serie de operadores especializados (p.ej., cruza y mutación), buscando mejorarlas en cada iteración (es decir, se busca converger al conjunto de óptimos de Pareto). La naturaleza poblacional de los algoritmos evolutivos multi-objetivo permite que, con una manipulación adecuada, puedan generar varios elementos diferentes del conjunto de óptimos de Pareto en una sola ejecución, en contraste con las técnicas de programación matemática que suelen generar una solución a la vez. Adicionalmente, los algoritmos evolutivos multi-objetivo son menos susceptibles a la forma geométrica y a la continuidad del frente de Pareto.

Actualmente, se consideran tres paradigmas principales dentro de los algoritmos evolutivos multi-objetivo:

1. **Métodos con base en optimalidad de Pareto:** En este paradigma, se seleccionan soluciones de acuerdo a la optimalidad de Pareto, buscando que todos los óptimos de Pareto disponibles en la población tengan la misma probabilidad de selección [4]. Estos algoritmos suelen adoptar un mecanismo secundario (conocido como *estimador de densidad*) que permita mantener la diversidad de soluciones en la población. Aunque este paradigma fue muy popular durante la década de 1990, no resulta adecuado para problemas con muchas funciones objetivo, pues en ese caso, la optimalidad de Pareto pierde su efectivamente muy rápidamente. La razón es que, conforme aumenta el número de objetivos, todas las soluciones en la población se vuelven rápidamente no dominadas, lo que diluye la presión de selección [5]. Además, conforme aumenta el número de objetivos, la cantidad de soluciones que se requieren para aproximar el frente de Pareto verdadero, aumenta drásticamente [6].
2. **Métodos con base en descomposición:** En este caso, la idea es transformar un problema multi-objetivo en varios problemas mono-objetivo que se resuelven de manera simultánea usando búsqueda de vecindarios [3]. Para definir direcciones de búsqueda se usa una función de escalarización asociada a un vector ponderado [2].

En un algoritmo que utiliza descomposición, se produce una familia de funciones asociadas, cada una, a un vector ponderado distinto y se evoluciona la población para encontrar la solución a cada uno de estos subproblemas de manera simultánea [3]. La descomposición ha demostrado ser un enfoque competitivo en la resolución de problemas con muchos objetivos [7]. Sin embargo, el desempeño de los algoritmos que incorporan descomposición depende de la elección de la función de escalarización.

3. **Métodos con base en indicadores:** Un indicador de desempeño hace referencia a una función que mapea un conjunto de aproximación a un número real. Este valor permite comparar la calidad de dos o más aproximaciones de un conjunto de Pareto [8]. La idea detrás de la selección basada en indicadores es reemplazar el problema original por la optimización de la expresión proporcionada por un indicador. El desempeño de las técnicas que utilizan este enfoque depende del indicador que se incorpore en el algoritmo. Distintos indicadores tienden a desempeñarse mejor con frentes de Pareto de ciertas formas geométricas, o tienden a favorecer aproximaciones con mayor convergencia que diversidad y viceversa. También es importante mencionar que a pesar de que existen diversos indicadores de desempeño, solo se conoce uno que es estrictamente monotónico con respecto a la optimalidad de Pareto (a esta propiedad se le conoce como compatibilidad de Pareto): el hipervolumen. Se ha podido demostrar que maximizar el hipervolumen de un conjunto de soluciones garantiza convergencia al conjunto de óptimos de Pareto. Sin embargo, lamentablemente, el hipervolumen tiene un costo computacional muy elevado, pues éste aumenta polinomialmente con el número de soluciones y exponencialmente con el número de objetivos. No obstante, este tipo de algoritmos pueden resolver problemas con muchas funciones objetivo, aunque pueden resultar muy costosos (computacionalmente hablando).

A lo largo de los años, se han utilizado diversos motores de búsqueda para los algoritmos evolutivos multi-objetivo, incluyendo los algoritmos genéticos, los cúmulos de partículas y la evolución diferencial, entre muchos otros. Sin embargo, los algoritmos genéticos siguen siendo uno de los motores de búsqueda más populares, debido a su efectividad y facilidad de uso.

Dentro de las muchas otras metaheurísticas bio-inspiradas que existen, se encuentran los sistemas inmunes artificiales (SIAs), que poseen características que los convierten en poderosas herramientas de búsqueda [9]. La investigación alrededor de los SIAs aplicada a problemas de optimización multi-objetivo ha sido relativamente limitada, en especial si se les compara con otras técnicas como los algoritmos genéticos. Si además, nos enfocamos en problemas con muchas funciones objetivo, existen aún menos estudios al respecto, pues la mayoría de los SIAs multi-objetivo existentes se basan en optimalidad de Pareto. Es por eso que la mayor parte de los SIAs multi-objetivo existentes sufren de una grave pérdida de diversidad conforme se aumenta el número de objetivos [10]. Debido a esto, ha sido

más común desarrollar híbridos de los SIAs con otras metaheurísticas para poder resolver problemas multi-objetivo de alta complejidad y con muchas funciones objetivo.

1.1.1. Antecedentes

La primera versión multi-objetivo de un SIA basada en optimalidad de Pareto es el denominado *Multi-Objective Immune System Algorithm* (MISA), propuesto por Coello Coello y Cruz Cortés para problemas con o sin restricciones [11]. MISA se basa en el uso de un sistema inmune artificial con base en el principio de selección clonal, el cual utiliza como criterio de selección para asignar clones a la dominancia de Pareto y la factibilidad de las soluciones producidas (cuando el problema tiene restricciones). Además, utiliza un archivo externo como su mecanismo elitista, el cual permite almacenar las soluciones no dominadas producidas a lo largo del proceso de búsqueda. La cantidad de clones es la misma para cada solución seleccionada y varía dependiendo del estado del archivo externo. Esto busca asignar más recursos a áreas con pocos individuos a fin de producir una mejor distribución de soluciones a lo largo del frente de Pareto. Al final de una ejecución de MISA, el archivo externo contiene la aproximación del frente de Pareto generada por el algoritmo.

Pierrard y Coello Coello [12] propusieron un SIA que incorpora un indicador de desempeño (el hipervolumen) para clasificar las soluciones de la población. Este algoritmo, llamado *A Multi-Objective Artificial Immune System Based on Hypervolume* (MOAIS-HV) fue diseñado específicamente para problemas bi-objetivo y utiliza la contribución del hipervolumen para efectuar la selección de los individuos dentro de la población. El hipervolumen se usa en este caso para determinar qué individuos son sometidos a clonación dependiendo de su contribución a la maximización del mismo. Una vez que se cuenta con la subpoblación de clones, ésta se une a la población principal y las soluciones se ordenan de acuerdo a su estado: dominado y no-dominado. Se cuenta, además, con un archivo externo donde se almacenan las soluciones no dominadas obtenidas hasta el momento. Este archivo, una vez lleno, se actualiza con el propósito de maximizar el valor del hipervolumen del conjunto.

1.2. Objetivos generales y específicos del proyecto

General

Desarrollar un nuevo sistema inmune artificial para resolver problemas de optimización con pocas y muchas funciones objetivo.

Particulares

1. Identificar los sistemas inmunes existentes para problemas de optimización con muchos objetivos.

2. Identificar los principales enfoques adoptados en los SIAs para optimización multi-objetivo con pocos y muchos objetivos.
3. Determinar el diseño algorítmico a desarrollarse usando el paradigma de descomposición, a fin de producir un algoritmo multi-objetivo competitivo con algoritmos multi-objetivo del estado del arte.
4. Analizar los principales funciones de escalarización utilizadas en descomposición, a fin de determinar la que resulte más adecuada.
5. Proponer un operador de clonación para determinar la cantidad de clones que se asigna a cada individuo en la población.

1.3. Estructura de la tesis

Incluyendo el capítulo de introducción, el presente trabajo se compone de seis capítulos y dos apéndices.

En el capítulo 2 introducimos conceptos básicos en relación a la optimización multi-objetivo y la clasificación de las técnicas para solucionar un problema de optimización multi-objetivo, mencionando de manera breve en que consisten algunas de ellas. También hacemos un repaso sucinto del panorama de la computación evolutiva con respecto a la optimización multi-objetivo abarcando tres paradigmas en los que se clasifican sus técnicas.

En el capítulo 3 abordamos los sistemas inmunes artificiales. En este capítulo describimos conceptos y principios biológicos sobre los que se modelan algunos sistemas inmunes artificiales, así como los modelos existentes para optimización mono-objetivo. Por último, presentamos los componentes fundamentales de los sistemas inmunes artificiales para optimización multi-objetivo, así como los algoritmos más representativos del área.

En el capítulo 4 describimos el sistema inmune artificial multi-objetivo propuesto en este trabajo. A lo largo de este capítulo, discutimos factores importantes en el proceso de su modelado, y proporcionaremos como descripciones detalladas de los operadores que se ven involucrados en el proceso de optimización.

En el capítulo 5 presentamos la metodología bajo la cual realizamos las pruebas para la validación del algoritmo propuesto, así como un análisis de los resultados experimentales derivados de las comparaciones del algoritmo con otros similares mencionados en el capítulo.

En el capítulo 6 presentamos las conclusiones que obtuvimos y delinearemos algunos posibles temas para realizar trabajo futuro.

En el anexo A proporcionamos descripciones de los conjuntos de problemas seleccionados para la validación, incluyendo expresiones matemáticas y visualizaciones en tres dimensiones. Finalmente, en el anexo B incluimos las tablas con los resultados numéricos obtenidos de nuestros experimentos usando indicadores de desempeño.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

2.1. Optimización multi-objetivo

La optimización multi-objetivo implica la búsqueda de soluciones a problemas matemáticos de optimización compuestos de dos o más funciones objetivo. Cada solución representa un *vector decisión* cuyas componentes son los valores de las *variables de decisión* relativas al problema. Cada vector decisión está asociado a un *vector objetivo*, que contiene los valores de la evaluación de las funciones objetivo. Estas funciones suelen encontrarse en conflicto entre sí, por lo que en lugar de hallar una única solución, el proceso de optimización pretende encontrar un conjunto cuyos elementos representan los mejores compromisos entre los objetivos.

2.1.1. Problema de optimización multi-objetivo

En esta tesis, se busca resolver problemas de optimización multi-objetivo (*POM*) del tipo siguiente¹:

$$\text{minimizar } \vec{f}(\vec{x}) := [f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})], \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$g_i(\vec{x}) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$h_i(\vec{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.3)$$

donde $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el vector de variables de decisión, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ son las funciones objetivo y $g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$ son las restricciones del problema.

¹Sin pérdida de generalidad, supondremos solo problemas de minimización.

2.2. Optimalidad de Pareto y dominancia

Los vectores que forman parte del conjunto que *optimiza* el problema multi-objetivo tienen una serie de características en común. La principal de ellas es que no se puede mejorar el valor en un objetivo sin empeorar el valor de otro. La noción de *optimalidad* se vuelve necesaria para identificar de manera formal qué soluciones forman parte del conjunto final, es decir, qué soluciones son *mejores* que otras.

Se requieren algunas definiciones adicionales para introducir la noción de optimalidad utilizada en optimización multi-objetivo:

Definición 2.2.1. Dados dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, decimos que $\vec{x} \leq \vec{y}$ if $x_i \leq y_i$ para $i = 1, \dots, n$, y que \vec{x} **domina a** \vec{y} (denotado por $\vec{x} \prec \vec{y}$) si $\vec{x} \leq \vec{y}$ & $\vec{x} \neq \vec{y}$.

Definición 2.2.2. Decimos que un vector de variables de decisión $\vec{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ es **no dominado** con respecto a \mathcal{X} , si no existe otro vector $\vec{x}' \in \mathcal{X}$ tal que $\vec{f}(\vec{x}') \prec \vec{f}(\vec{x})$.

Definición 2.2.3. Decimos que un vector de variables de decisión $\vec{x}^* \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ (\mathcal{F} es la región factible) es un **óptimo de Pareto** si es no dominado con respecto a \mathcal{F} .

Definición 2.2.4. El **conjunto de óptimos de Pareto** \mathcal{P}^* se define de la forma siguiente:

$$\mathcal{P}^* = \{\vec{x} \in \mathcal{F} | \vec{x} \text{ es un óptimo de Pareto}\}.$$

Definición 2.2.5. El **frente de Pareto** \mathcal{PF}^* se define de la forma siguiente:

$$\mathcal{PF}^* = \{\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^k | \vec{x} \in \mathcal{P}^*\}.$$

Por tanto, en optimización multi-objetivo, lo que se busca es obtener el conjunto de óptimos de Pareto a partir del conjunto \mathcal{F} de todas las variables de decisión que satisfagan (2.2) y (2.3). Debe hacerse notar, sin embargo, que en la práctica, no todos los óptimos de Pareto son deseables y/o posibles de generar. Normalmente, solucionar problemas de este tipo requiere de la participación de un(a) *tomador(a) de decisiones* humano/a; el/la tomador(a) de decisiones tenderá a expresar preferencias por ciertos tipos de soluciones o regiones del frente de Pareto [13]. El resultado de un *optimizador* será el conjunto de los óptimos de Pareto encontrados a lo largo del proceso de búsqueda; este conjunto también se denomina *conjunto de aproximación*.

Existen ciertos vectores objetivos importantes que ayudan a limitar el área factible y cobran importancia en algunas técnicas de solución a POMs:

Definición 2.2.6. Los componentes z_i^* del **vector objetivo ideal** $z^* \in \mathbb{R}^k$ se obtienen de minimizar cada función objetivo de manera individual sujeto a las restricciones originales del problema, esto es:

$$\text{minimizar } f_i(x).$$

sujeto a

$$x \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$$

para $i = 1, \dots, k$

Este punto se conforma de los valores mínimos para cada valor objetivo independiente. Esta no es una solución factible pues las funciones que conforman un problema frecuentemente se encuentran en conflicto entre sí por lo que esta solución es inalcanzable. Aunque el vector ideal no se puede conseguir con ninguna técnica de optimización, resulta muy útil como una meta a alcanzar y para obtener los límites inferiores del conjunto de óptimos de Pareto.

Definición 2.2.7. Un **vector objetivo utópico** $z_i^{**} \in \mathbb{R}^k$ es un vector objetivo no factible cuyos componentes están conformados por:

$$z_i^{**} = z_i^* - \epsilon_i$$

para toda $j = 1, \dots, k$ donde z_i^* es una componente del vector ideal y $\epsilon_i > 0$ es un escalar pequeño pero computacionalmente relevante.

Definición 2.2.8. El **vector objetivo de Nadir** z^{nad} está conformado por:

$$\text{maximizar } f_i(x)$$

sujeto a

$$x \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$$

para $i = 1, \dots, k$

El vector objetivo de Nadir representa los límites superiores del conjunto de óptimos de Pareto. Estas componentes son aún más difíciles de obtener que el vector ideal.

Además de la optimalidad de Pareto previamente discutida, existen otras definiciones de optimalidad que pueden resultar útiles en optimización multi-objetivo. A continuación proporcionamos tales definiciones.

Definición 2.2.9. Decimos que un vector de variables de decisión $\bar{x}^* \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ es un **óptimo débil de Pareto** si no existe otro vector de variables de decisión $\bar{x} \in \mathcal{F}$ de manera que $f_i(x) < f_i(x^*)$ para toda $i = 1, \dots, n$.

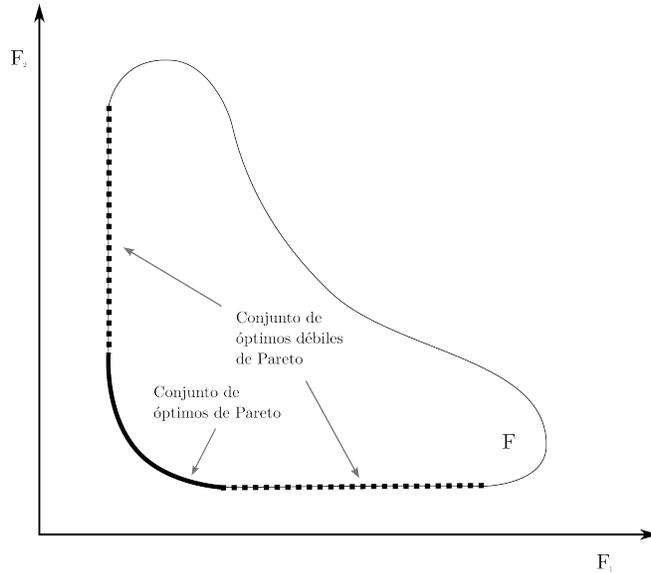


Figura 2.1: Optimalidad de Pareto y optimalidad débil de Pareto

Definición 2.2.10. El conjunto de óptimos débiles de Pareto \mathcal{WP}^* se define como:

$$\mathcal{WP}^* = \{\vec{x} \in \mathcal{F} \mid \vec{x} \text{ es un óptimo débil de Pareto}\}$$

Definición 2.2.11. El frente de Pareto débil \mathcal{WFP}^* se define de la forma siguiente:

$$\{\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^k \mid \vec{x} \in \mathcal{WP}^*\}$$

Se puede observar en la figura 2.1 la diferencia entre los óptimos de Pareto y los óptimos de Pareto débiles. Estos últimos pueden ser relevantes desde un punto de vista técnico, pues algunas veces su cálculo resulta más sencillo.

2.3. Técnicas para la solución de problemas de optimización multi-objetivo

Solucionar un POM implica encontrar un conjunto de aproximación consistente con el problema correspondiente. Sin embargo, prevalece la necesidad de definir criterios auxiliares para determinar que se trata de un *buen* conjunto de aproximación, debido a que el requerimiento de optimalidad de Pareto, si bien es indispensable, en algunos casos no es suficiente para la discriminación entre conjuntos de soluciones.

De acuerdo a Zitzler *et. al.* [8], la meta de un optimizador multi-objetivo es producir un conjunto de aproximación que satisfaga los siguientes aspectos:

- **Convergencia:** La distancia entre el conjunto de aproximación producido y el frente de Pareto verdadero debe minimizarse.
- **Distribución:** Es deseable una buena distribución de las soluciones que conforman dicho conjunto, y para la mayoría de los casos esto implica que dicha distribución sea uniforme. La evaluación de este criterio puede estar basada en una métrica de distancia en particular.
- **Cobertura:** La extensión del conjunto no dominado obtenido debe ser maximizada; es decir, por cada objetivo un amplio rango de valores debe ser cubierto por soluciones no dominadas.

Las técnicas de optimización y búsqueda se pueden dividir en tres categorías principales con base en la naturaleza de su proceso de búsqueda [1]: enumerativas, deterministas y estocásticas.

Los enfoques enumerativos consisten en la evaluación de toda solución posible dentro de un espacio de búsqueda factible y definido hasta identificar las óptimas. El tipo de problemas que se puede solucionar con este tipo de algoritmos es limitado, debido a las restricciones con respecto al tamaño y tipo del espacio de búsqueda.

Los enfoques deterministas incorporan en la búsqueda información específica relativa al dominio del problema. Muchos de estos algoritmos se basan en el uso de árboles/gráficas de búsqueda. Algunos ejemplos de algoritmos deterministas son los siguientes:

- *Algoritmos glotonos:* comienzan con decisiones óptimas locales, asumiendo que las sub-soluciones óptimas siempre son parte de la solución óptima global.
- *Algoritmos de escalada simple:* se mueven hacia la dirección más prometedora utilizando la solución actual como punto de partida. Cuando no hay mejora entre la solución actual y la anterior, el proceso se detiene.
- *Algoritmos de ramificación y poda:* es necesaria una heurística específica para limitar el espacio de búsqueda. Calculan un límite en un nodo dado que determina si éste es prometedor; distintos límites de nodos son comparados y el algoritmo se ramifica hacia el más prometedor.
- *Algoritmos de búsqueda en profundidad:* la búsqueda es independiente de la ubicación de la solución, a excepción del fin de la misma. Expande un nodo, genera sus sucesores, expande sus sucesores y así sucesivamente. Si la búsqueda se *bloquea*, se continúa desde el nodo anterior más profundo.
- *Algoritmos de búsqueda en anchura:* a diferencia de la búsqueda en profundidad, en este caso, después de la expansión de los nodos, se explora progresivamente la gráfica una capa a la vez.

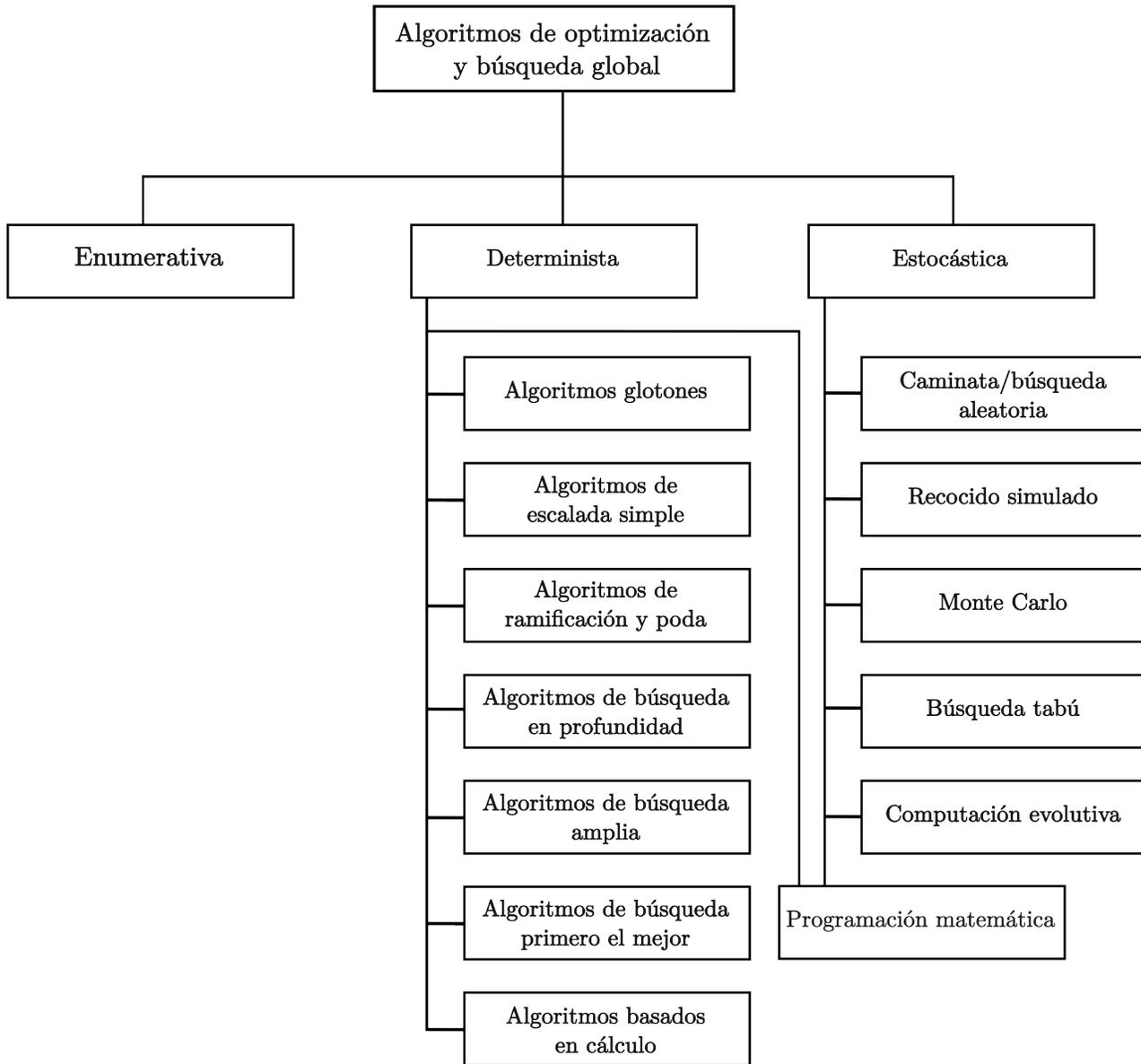


Figura 2.2: Algoritmos de optimización y búsqueda global [1].

- *Algoritmos de búsqueda primero el mejor:* utilizan información heurística para asignar valores numéricos en un nodo; el nodo más prometedor se examina primero.
- *Algoritmos con base en cálculo:* requieren, como mínimo, continuidad en algún dominio de las variables para poder encontrar el óptimo.

Algunos problemas presentan características que se antepone a los requisitos de las técnicas deterministas. Para lidiar con ellos, se desarrollaron las técnicas estocásticas como alternativa. Los métodos estocásticos requieren de valores asignados a posibles soluciones por una función de asignación de aptitud y un mecanismo para codificar/decodificar entre los dominios del problema y del algoritmo. Aunque algunos algoritmos han demostrado *eventualmente* encontrar un óptimo, la mayoría no puede garantizar la obtención de una solución óptima.

- *Búsqueda aleatoria:* es la estrategia estocástica más sencilla, pues evalúa un número de soluciones generadas aleatoriamente. Una caminata aleatoria es similar, con la diferencia de que la próxima solución a evaluar se genera de manera aleatoria con la solución actual como punto de partida.
- *Recocido simulado:* es un algoritmo modelado como una analogía del recocido, proceso mediante el cual un líquido es calentado y gradualmente se enfría hasta que se congela. Mientras que un algoritmo de escalada simple elige el mejor movimiento, el recocido simulado escoge uno de manera aleatoria. Si el movimiento mejora el óptimo actual siempre se lleva a cabo; de lo contrario se realiza con una probabilidad de $p < 1$. Esta probabilidad es reducida exponencialmente respecto al tiempo o respecto a la cantidad en la que empeoró el óptimo actual.
- *Monte Carlo:* los métodos de Monte Carlo involucran simulaciones de eventos estocásticos; utilizan una búsqueda aleatoria donde cualquier solución de prueba seleccionada es totalmente independiente de decisiones previas y de sus resultados.
- *Búsqueda tabú:* es una meta-estrategia desarrollada para evitar el estancamiento en óptimos locales. Guarda registro de las soluciones previamente exploradas y las rutas que llevaron a ellas. Esta información restringe la elección de soluciones que se evaluarán después. Usualmente se integra con otros métodos de optimización.
- *Computación evolutiva:* es el término genérico para una variedad de métodos estocásticos que simulan procesos evolutivos naturales con recursos computacionales. Dentro de esta categoría se encuentran los algoritmos genéticos, las estrategias evolutivas, la programación evolutiva, y la programación genética, que son conocidos colectivamente como algoritmos evolutivos. Los elementos comunes entre estas técnicas son la variación aleatoria, la competencia, y la selección de individuos con base en su aptitud dentro de un conjunto (llamado población).

Otro enfoque para resolver POMs se da a través de la *programación matemática multi-objetivo*. La programación matemática ofrece poderosas técnicas de solución para problemas de optimización. Estos métodos tratan a las restricciones como el aspecto principal del problema. La *programación lineal* está diseñada para resolver problemas donde la función objetivo y todas las restricciones son lineales. La programación no-lineal resuelve *algunos* problemas que no cumplen con estos requisitos, pero requieren restricciones convexas. Un caso particular de los problemas en los que se puede utilizar la programación matemática es el de los POMs.

Las técnicas de programación matemática para optimización multi-objetivo se pueden clasificar de maneras distintas, tomando en cuenta las características propias de cada método. Una manera de clasificarles es de acuerdo al momento en que interviene el/la tomador(a) de decisiones [2]:

- Métodos sin preferencia: métodos donde no es utilizada ninguna articulación de información de las preferencias del usuario.
- Métodos *a posteriori*: métodos donde la información de las preferencias se utiliza después del proceso de optimización.
- Métodos *a priori*: métodos donde las preferencias se proporcionan antes del proceso de optimización.
- Métodos *interactivos*: métodos donde las preferencias son usadas de manera progresiva, durante el proceso de optimización.

De manera general, los métodos de programación matemática resuelven un POM utilizando *escalarización* (a excepción de los POMs lineales). Escalarización significa convertir el problema original en un problema o familia de problemas con una sola función objetivo, llamada *función de escalarización*, que puede depender de parámetros adicionales a la agregación de los valores objetivo del problema original. Debido a estos parámetros adicionales, pueden surgir algunas dificultades numéricas si el problema mono-objetivo solo tiene soluciones factibles con un número limitado de parámetros o si ningún parámetro lleva a una solución óptima [2]. Existen tres requerimientos para una función de escalarización:

- Debe poder cubrir cualquier solución óptima de Pareto,
- Cada solución producida por la función es un óptimo de Pareto y
- Si la función de escalarización involucra niveles de aspiración, la solución es satisfactoria si los niveles de aspiración usados son factibles.

Desafortunadamente, ninguna función de escalarización puede satisfacer todos los requerimientos por lo que su elección impacta de manera importante la calidad de la solución que se obtiene. Dentro de los enfoques más básicos se encuentran:

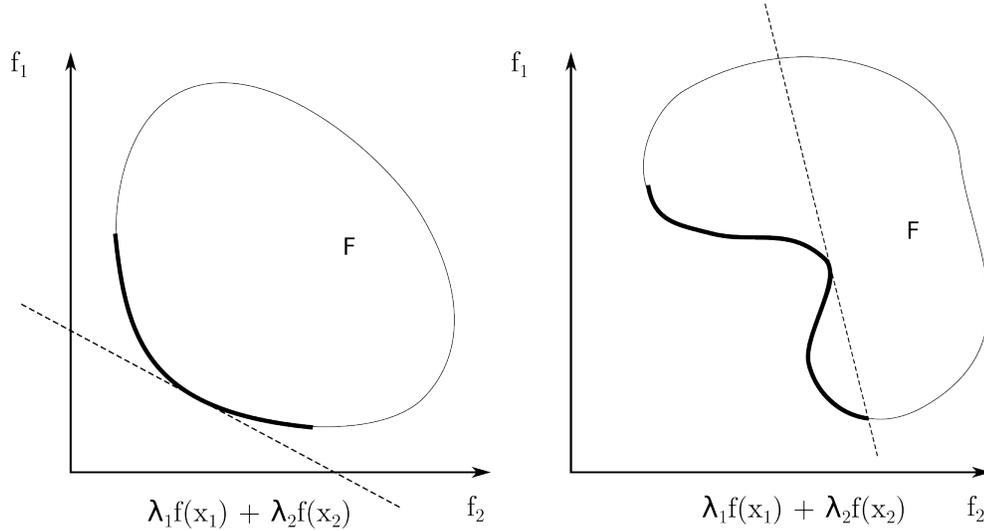


Figura 2.3: Método de la suma ponderada con un problema convexo (izquierda) y uno no convexo (derecha) con dos objetivos [2].

- *Método de la suma ponderada*: consiste en asociar cada función objetivo con un coeficiente de ponderación y minimizar la suma ponderada de los objetivos. De esta forma, el problema original es transformado en un problema mono-objetivo. Suponemos que las componentes del vector ponderado son positivas, $w_i \geq 0$ para toda $i = 1, \dots, k$, y que el vector está normalizado $\sum_{i=1}^k w_i = 1$. El problema de optimización es modificado a:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^k f_i(x)w_i$$

sujeto a

$$x \in \mathcal{F}$$

donde $w_i \geq 0$ para toda $i = 1, \dots, k$ y $\sum_{i=1}^k w_i = 1$

La debilidad principal de este enfoque es que no se pueden generar algunas soluciones si el problema es no-convexo como se puede ver en la figura 2.3.

- *Método de restricción ε* : uno de las funciones objetivo es seleccionada para optimizarse y las demás funciones se convierten en restricciones definiendo un límite superior para cada una de ellas. El problema adquiere la forma siguiente:

$$\text{mín} f_\ell$$

sujeto a

$$f_j(x) \leq \varepsilon_j \text{ para toda } j = 1, \dots, k, j \neq \ell$$

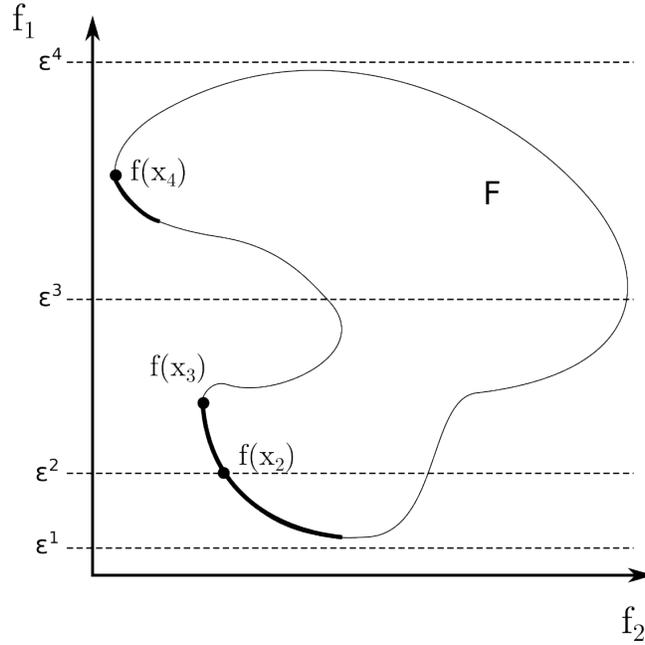


Figura 2.4: Diferentes elecciones del límite superior para el método de restricción ε [2].

$$x \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$$

donde $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Teóricamente, toda solución óptima de Pareto puede ser hallada modificando el límite superior y la función a ser minimizada. Sin embargo, las condiciones necesarias para aplicarle no son siempre prácticas computacionalmente. Además, puede ser difícil encontrar límites apropiados para las funciones objetivo. Ejemplos del comportamiento de este método con distintas elecciones del límite superior se pueden observar en la figura 2.4.

- *Métricas ponderadas:* en el método del criterio global, métricas como L_p y L_∞ son usadas para generar soluciones óptimas de Pareto (débiles). Estas métricas pueden ser modificadas, ponderándolas para producir distintas soluciones óptimas de Pareto (débiles). Suponiendo que $w_i \geq 0$ para toda $i = 1, \dots, k$ y $\sum_{i=1}^k w_i = 1$. Podemos obtener distintas soluciones modificando los coeficientes w_i en las métricas L_p y Tchebycheff. El problema de la métrica L_p ponderada tiene la siguiente forma:

$$\text{mín} \left(\sum_{i=1}^k w_i |f_i(x) - z_i^*| \right)^{1/p}$$

sujeto a

$$x \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$$

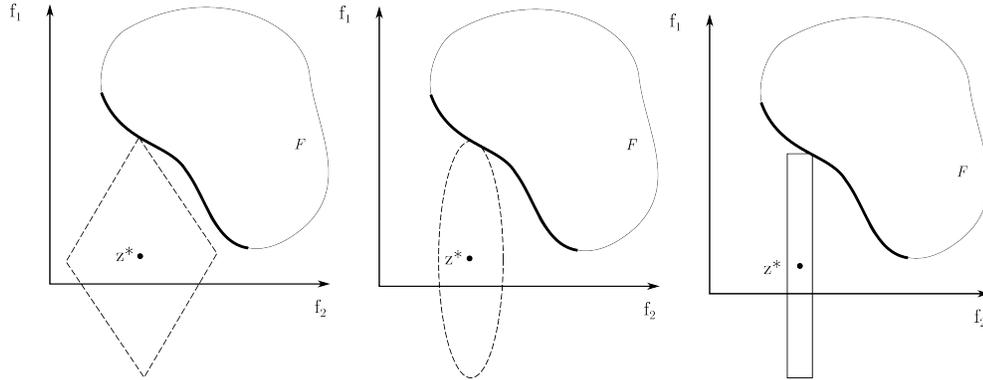


Figura 2.5: Distintas métricas utilizadas en el método de métricas ponderadas. De derecha a izquierda: L_1 , L_2 , L_p o métrica de Tchebycheff.

para $i \leq p < \infty$. El problema de Tchebycheff ponderado es de la forma:

$$\min \max_{i=1, \dots, k} [w_i |f_i(x) - z_i^*|]$$

sujeto a

$$x \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$$

El problema puede ser reformulado con distintas métricas a las presentadas previamente. Las características de las soluciones encontradas con las métricas ponderadas dependerán de la métrica seleccionada. En la figura 2.5 se puede observar el alcance de algunas métricas comúnmente utilizadas con este método.

2.4. Computación evolutiva

Las técnicas de computación evolutiva en particular y las metaheurísticas bio-inspiradas en general han demostrado ser de gran utilidad al optimizar problemas multi-objetivo particularmente complejos [3, 4, 14, 15, 8], principalmente porque mantienen un conjunto de soluciones candidatas a lo largo de la búsqueda. La naturaleza poblacional de estas técnicas permite que, con una manipulación adecuada, se puedan generar varios elementos diferentes del conjunto de óptimos de Pareto en una sola ejecución, en contraste con las técnicas de programación matemática que suelen generar una solución a la vez. Adicionalmente, estos algoritmos son menos susceptibles a la forma geométrica y a la continuidad del frente de Pareto.

2.4.1. Algoritmos evolutivos multi-objetivo

Un algoritmo evolutivo multi-objetivo (AEMO) está conformado de una *población* que contiene los óptimos de Pareto actuales con respecto al progreso generacional del algoritmo.

mo. Al inicio, la población es inicializada aleatoriamente. La población es sometida a una serie de operadores especializados que permiten explorar el espacio factible de búsqueda para encontrar soluciones no dominadas y, eventualmente, preservarlas. Para efectuar la selección, se utiliza un mecanismo que asigna valores de aptitud a cada elemento de la población de acuerdo a criterios específicos. Por último, el proceso de selección determina qué soluciones formarán parte de la población en la siguiente generación. Estas etapas se repiten hasta que se haya alcanzado un criterio de paro. Al final del proceso evolutivo se obtiene el conjunto de aproximación del conjunto de óptimos de Pareto verdadero relativo al problema en cuestión, que puede ser el contenido de la población principal o el contenido de una población secundaria o *archivo externo* que almacene las soluciones no dominadas que se encuentren a lo largo de las generaciones [1]. Esta última opción involucra la inclusión de un mecanismo adicional que permita identificar qué soluciones son *mejores* que otras dentro del archivo para mantener una cantidad fija de éstas.

Los AEMOs pueden clasificarse por el método que emplean para llevar a cabo la selección de las soluciones; éstos son: con base en optimalidad de Pareto, con base en indicadores y con base en descomposición.

2.4.1.1. Métodos con base en optimalidad de Pareto

Los algoritmos que se encuentran en esta categoría hacen uso de los conceptos de optimalidad de Pareto para filtrar las soluciones en la población. El trato a cada individuo y su posterior consideración para formar parte del conjunto final dependerá de su estado con respecto al resto de la población (es decir, si éste es no dominado) o de acuerdo a cuántos otros miembros del conjunto actual domina [16]. Este enfoque asegura que la aproximación final esté compuesta solo por soluciones no dominadas. Varios algoritmos con base en la optimalidad de Pareto incorporan un mecanismo adicional para auxiliar la selección en términos de diversidad, a través de un estimador de densidad. *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) [4] y *Strength Pareto Evolutionary Algorithm* (SPEA) [15] son ejemplos de algoritmos que se encuentran dentro de esta categoría.

El uso de este paradigma fue especialmente popular en la década de los noventa, y ha probado ser efectivo en problemas con frentes de Pareto convexos y no convexos, con dos o tres objetivos. Sin embargo, este enfoque presenta características que dificultan su buen desempeño en problemas donde, por ejemplo, el número de objetivos es elevado. En cuanto la dimensionalidad aumenta, también lo hace la cantidad de soluciones no dominadas presentes en la población, lo que ocasiona que la presión de selección se diluya conforme transcurren las generaciones. Esto se traduce en dificultades en alcanzar una aproximación cercana al conjunto de óptimos de Pareto verdadero al final del proceso evolutivo. La dimensionalidad alta de los problemas también implica una mayor cantidad de soluciones necesarias para aproximar el conjunto de óptimos de Pareto. Debido a que este conjunto es un hiperplano en el espacio objetivo, la cantidad de soluciones aumenta exponencialmente con el número de objetivos [5].

Para mitigar este comportamiento han surgido propuestas para auxiliar el paradigma subyacente a través de definiciones alternas de dominancia o incorporando mecanismos adicionales. Sato *et al.* [17] propusieron una modificación a la definición de dominancia, donde el área de dominancia de una solución se expande o contrae dependiendo de las características del problema y del estado de la población en la generación actual. Con esta definición alterna se produce una nueva clasificación de las soluciones distinta a la inducida por la definición clásica de optimalidad de Pareto. Utilizando esta definición se puede enfatizar la convergencia o la diversidad del conjunto de aproximación resultante, pero no ambas. Por ejemplo, si se prefiere la convergencia, el conjunto sufrirá de pérdida de diversidad como consecuencia. Otra alternativa es implementar métodos que clasifican las soluciones no dominadas para llevar a cabo la selección de forma efectiva en la búsqueda, aunque de la misma forma la diversidad del conjunto final se deteriora cuando la convergencia se antepone y la población convergerá a unas cuantas soluciones [18].

2.4.1.2. Métodos con base en indicadores

Las preferencias del usuario respecto a la meta de optimización están presentes en los distintos algoritmos multi-objetivo existentes, aunque éstas frecuentemente se encuentren implícitas. Una manera de incluirlas de forma intencional en la búsqueda es a través de un *indicador* de calidad. De manera general, un indicador de calidad (o simplemente indicador) es una función que mapea k conjuntos de aproximación con un número real. Este valor permite comparar la calidad de dos o más aproximaciones de un conjunto de óptimos de Pareto [8]. Los indicadores de calidad binarios son una extensión natural de la dominancia de Pareto, aunque los indicadores unarios ($k = 1$) son más comunes. Para preservar la relación de dominancia, los indicadores tienen que ser estrictamente monotónicos con respecto a la optimalidad de Pareto, propiedad conocida como compatibilidad de Pareto. Dado un problema de optimización multi-objetivo y un indicador, el problema de optimización se convierte en la minimización (o maximización) de la expresión proporcionada por el indicador seleccionado.

Cuando se utiliza un indicador en el proceso de selección, éste se usa para categorizar a las soluciones en la población de acuerdo a su utilidad en la optimización de dicho indicador. Es decir, se incorpora en la asignación de afinidad de los miembros de la población.

La elección del indicador repercute en la capacidad de búsqueda del algoritmo en cuestión y, subsecuentemente, de la aproximación resultante. Distintos indicadores enfatizan distintas cualidades en sus resultados: algunos se desempeñan mejor con ciertas formas del frente de Pareto, favorecen a formas geométricas específicas o la aproximación final que generan tiende a tener un sesgo por convergencia o diversidad, no ambas. El hipervolumen [19] es el único indicador conocido hasta el momento que presenta compatibilidad completa de Pareto, pues se ha podido demostrar que maximizar el valor de hipervolumen asociado a un conjunto de soluciones garantiza convergencia al conjunto de óptimos de Pareto. Sin embargo, el costo computacional que el cálculo del hipervolumen implica se

eleva polinomialmente respecto a la cantidad de soluciones presentes en un conjunto de aproximación y exponencialmente respecto a la cantidad de objetivos.

La aproximación del valor del hipervolumen es una manera para lidiar con su elevado costo computacional. No obstante, las propiedades del indicador se atenúan cuando los cálculos no son exactos. Existen algoritmos que utilizan indicadores que no tienen compatibilidad de Pareto pero no se oponen al orden que impone, como R2 [20] o IGD⁺. Estos han demostrado ser buenas alternativas, especialmente cuando la cantidad de objetivos de un problema es elevada. Sin embargo, dependiendo del indicador seleccionado, el proceso de búsqueda tenderá a favorecer conjuntos que coincidan con la preferencia establecida en el indicador.

2.4.1.3. Métodos con base en descomposición

El concepto de *descomposición* se deriva de la optimización multi-objetivo clásica, donde se agregan los valores de las funciones objetivo que comprenden un POM con ayuda de una *función de escalarización*. Éste es un proceso iterativo, donde la solución se va optimizando hasta que se alcanza un óptimo de Pareto. Las técnicas de programación matemática para optimización multi-objetivo permiten obtener una sola solución por ejecución. Además, en algunas ocasiones requieren de conocimiento específico del POM y pueden ser susceptibles a la geometría del frente de Pareto.

De manera general, los algoritmos que hacen uso de este método, descomponen un POM en varios problemas mono-objetivo asociados cada uno a un vector de pesos convexo distinto. Estos problemas son optimizados de manera simultánea en una sola ejecución. La descomposición se lleva a cabo con ayuda de una función de escalarización que auxilia en la asignación del valor de aptitud de los miembros de la población. Comúnmente en este tipo de algoritmos, el valor de aptitud dependerá del valor agregado que proporcione la función de escalarización seleccionada.

El primer algoritmo que utilizó el paradigma de descomposición fue MOEA/D [3], que dio paso a uno de los entornos algorítmicos más populares para optimización multi-objetivo. Apegado a la idea de descomposición, MOEA/D genera una familia de problemas mono-objetivo a partir del problema original. Cada sub-problema está asociado a un miembro de la población que se optimiza a lo largo de las generaciones. Esto sucede aprovechando la información de las soluciones cercanas a un individuo específico (es decir, el vecindario); pues si dos vectores ponderados que se relacionan a un problema se encuentran lo suficientemente cerca, también deberían estarlo sus soluciones correspondientes. Así, la población se compone únicamente de las mejores soluciones encontradas hasta el momento para cada problema. El proceso básico de MOEA/D se puede observar en el algoritmo 4.

En cada ejecución, MOEA/D mantiene:

- Una población de N puntos $x^1, \dots, x^N \in \chi$, donde x^i es la solución actual al sub-problema i .

- FV^1, \dots, FV^N donde FV^i es el valor objetivo de x^i .
- $z^* = (z_1, \dots, z_k)$, donde z_i es el mejor valor encontrado hasta el momento para el objetivo f_i .
- una población externa, que es utilizada para almacenar soluciones no dominadas encontradas durante la búsqueda (opcional).

El desempeño de un algoritmo que utiliza descomposición como esquema de selección dependerá en gran medida de dos factores: del conjunto de vectores ponderados y de la función de escalarización seleccionada. Al comienzo del proceso evolutivo, se requiere un conjunto de direcciones uniformemente distribuidas, esto con el objetivo de cubrir la mayor parte del frente de Pareto y procurar una buena distribución de las soluciones. La zona del frente de Pareto a la que un sub-problema convergerá está estrechamente relacionado con el vector de pesos que tiene asociado. El método simplex-Lattice es el empleado originalmente en el entorno algorítmico de trabajo de MOEA/D para generar el conjunto de pesos. La cantidad de pesos generados es igual al tamaño de la población. Cuando se utiliza el método simplex, el tamaño de la población no puede ser decidido de manera arbitraria, sino que esta cantidad aumenta de forma no lineal de acuerdo a la cantidad de objetivos de un problema. Por lo tanto, generar vectores ponderados de esta manera para problemas con más de cinco objetivos se complica [7]. Además, en cierto casos los vectores ponderados generados uniformemente son incapaces de mapear al problema con una solución en el frente de Pareto [21].

Existen distintas funciones de escalarización en la literatura especializada. Dentro de las más populares se encuentran la suma ponderada y la función ponderada de Tchebycheff. Cada función de escalarización posee características distintas que hacen su uso más adecuado para cierta clase de problemas. Las funciones agregativas no lineales, por ejemplo, son convenientes para problemas convexos. Sin embargo, su capacidad de converger a ciertas áreas del frente de Pareto se deteriora considerablemente cuando los problemas no son convexos. En la versión original de MOEA/D se explora la función de Tchebycheff y el enfoque de intersección de frontera basada en penalización (PBI, por sus siglas en inglés). Ambas funciones son capaces de lidiar con problemas no convexos.

Actualmente, los algoritmos que utilizan estrategias con base en descomposición tienen gran aceptación debido a su bajo costo computacional y su enorme potencial para la resolución de problemas de optimización multi-objetivo con más de tres objetivos [22].

Algoritmo 1: Algoritmo MOEA/D

Entrada:

- POM: problema de optimización multi-objetivo,
- un criterio de paro,
- N : el número de subproblemas considerados en MOEA/D,
- un conjunto de vectores de pesos uniformemente distribuidos $\lambda^1, \dots, \lambda^N$,
- T : un número de vectores de pesos en el vecindario de cada vector de peso

inicio**Inicialización;** $EP = \emptyset$;

Calcular las distancias euclidianas entre dos vectores de pesos cualquiera y determinar los T vectores más cercanos para cada vector. Por cada $i = 1, \dots, N$, encontrar $B(i) = \{i_1, \dots, i_N\}$, donde $\lambda^{i_1}, \dots, \lambda^{i_T}$ son los T vectores de pesos más cercanos a λ^i ;

Generar aleatoriamente una población inicial x^1, \dots, x^N o por un método específico al problema. Asignar $FV^i = F(x^i)$;

Actualización;**mientras** *no se alcance el criterio de paro* **hacer** **para** $i = 0$ **a** N **hacer** **Reproducción:** Seleccionar aleatoriamente dos índices k, l de $B(i)$, y generar una nueva solución y de x^k y x^l usando operadores genéticos; **Actualización** del punto de referencia z^* : Para cada $j = 1, \dots, k$ si $z_j < f_j(y)$, entonces $z_j = f_j(y)$; **Actualización de las soluciones vecinas:** Por cada índice $j \in B(i)$, si $g^{te}(y|\lambda, z) \leq g^{te}(x^j|\lambda, z)$ entonces $x^j = y$ y $FV^j = F(y)$; **Actualización de** EP ; **fin****fin****fin**

Capítulo 3

Sistemas inmunes artificiales

El área de sistemas inmunes artificiales (SIAs) también conocida como computación inmunológica o sistemas inmuno-inspirados, comprende a aquellas metaheurísticas inspiradas por el sistema inmune biológico donde se abstraen procesos que forman parte de la respuesta inmune para su posterior explotación en la resolución de tareas computacionales. El sistema inmune biológico es un sistema adaptativo complejo que utiliza varios mecanismos adaptativos basados en selección para defenderse en contra de patógenos externos.

Una de las principales tareas del sistema inmune biológico es lograr la distinción entre el tejido propio y el extraño. Esto se logra a través de procesos específicos a los que son sometidas las células inmunes con el propósito de reconocer y reaccionar en cuanto son presentadas a agentes extraños. El sistema inmune biológico cuenta con una serie de características que hacen que su uso sea deseable como metáfora biológica para el desarrollo de sistemas, por ejemplo su capacidad de aprendizaje y memoria inmunológica.

Los SIA han sido un área de estudio con relativa poca popularidad en comparación con otras técnicas bio-inspiradas, como lo son los algoritmos evolutivos o las redes artificiales neuronales. Sin embargo, los SIA han demostrado ser un campo prometedor con diversas aplicaciones que aprovechan las características propias de este tipo de modelos.

3.1. Sistema inmune biológico

3.1.1. Fundamentos

El sistema inmune biológico [9] es un mecanismo de defensa rápido y efectivo para combatir infecciones en el anfitrión, compuesto de células, órganos y tejidos especializados. El sistema inmune natural consta de dos sub-mecanismos conocidos como el sistema inmune innato y el sistema inmune adaptativo. Ambos componentes forman parte importante de la respuesta inmune global. Los glóbulos blancos o *linfocitos* son células cuyo comportamiento regula a ambos sistemas. El sistema inmune nato es mediado por los *granulocitos*

y los *macrófagos*, mientras que el sistema adaptativo es regulado por los linfocitos.

El sistema inmune está siendo atacado constantemente por *antígenos* que lo estimulan a reaccionar. Los antígenos pueden ser externos o propios. El sistema inmune hace uso de las células que le componen y cada una desempeña un trabajo distinto; el comportamiento conjunto de éstas logra neutralizar la amenaza en la mayoría de los casos.

Algunas células inmunes son denominadas *fagocitos*, como los macrófagos y los *neutrófilos*, y se encargan de ingerir y digerir partículas antigénicas. Los macrófagos, en particular, son capaces de presentar antígenos a otras células y se conocen como *células presentadoras de antígeno* (CPAs). Los neutrófilos son las células más abundantes y las mediadoras más importantes en la respuesta innata.

Cuando el sistema inmune es sometido a ciertos estímulos externos, se desencadena una reacción específica para defender al organismo. La reacción es dirigida con el propósito de combatir esta amenaza en particular y se conoce como respuesta inmune adaptativa. Las células que se ven involucradas en este proceso son capaces de desarrollar *memoria inmune*, es decir, desarrollan la capacidad de reconocer el mismo estímulo cuando se presenta nuevamente en el organismo.

Los linfocitos regulan la respuesta inmune y reconocen y eliminan a los patógenos. Cuando hay algún tipo de exposición a agentes externos, los linfocitos reaccionan activándose y proliferándose. Existen dos clases principales de linfocitos: las *células B* y las *células T*. Ambas tienen receptores antigénicos altamente específicos en sus superficies que únicamente son compatibles con una cantidad reducida de antígenos.

3.1.1.1. Órganos del sistema inmune

Los órganos que forman parte del sistema inmune se dividen en dos categorías [9]: los órganos linfáticos centrales y los periféricos. Los órganos linfáticos centrales producen y ayudan a madurar a las células inmunes. Estos órganos comprenden la médula ósea y el timo. Los órganos linfáticos periféricos ofrecen un lugar para que las interacciones entre los linfocitos y antígenos se lleven a cabo. Entre estos órganos se encuentran los nodos linfáticos, el baso, el tejido mucoso y submucoso en el tracto respiratorio y digestivo.

- **Médula ósea:** Este órgano se encarga de generar células inmunes mediante un proceso conocido como *hematopoesis*. Durante éste, células madre derivadas de la médula ósea se diferencian en células inmunes ingenuas, algunas de las cuales terminan su proceso de maduración en la misma médula ósea (células B) y otras migran al timo. Además de la producción de células inmunes, la médula ósea genera también glóbulos rojos y plaquetas.
- **Timo:** Se encuentra detrás del esternón y se encarga de producir células inmune maduras, conocidas como células T. En el proceso de maduración, las células T que se conservan son aquellas que resultan beneficiosas para el sistema inmune; aquellas que pueden causar una respuesta auto-inmune son suprimidas.

- **Baso:** Se encuentra debajo del diafragma. Captura patógenos que se encuentran en la sangre y también recibe aquellos capturados por macrófagos y células dendríticas en el torrente sanguíneo. En el baso, los patógenos que han sido capturados por células como los macrófagos son presentados a células T y células B apropiadas para generar una respuesta inmune.
- **Nodos linfáticos:** Se encuentran en varios puntos a lo largo del sistema linfático y actúan como un filtro del fluido conocido como *linfa*. Estos nodos drenan el fluido de la mayor parte del tejido del cuerpo. Los antígenos son filtrados de la linfa en los nodos linfáticos antes de regresarla a circulación. En los nodos linfáticos, similar al baso, las células T y B interactúan con los patógenos para desencadenar la respuesta inmune.
- **Anginas y adenoides:** Las anginas se encuentran en las paredes laterales entre la boca y la faringe, los adenoides se encuentran en el fondo de la nariz, en la parte superior de la garganta. Se asocian con la protección del sistema respiratorio.
- **Vasos linfáticos:** Es una red de canales que se distribuyen a lo largo del cuerpo. Transportan la linfa a la sangre y a los órganos linfáticos. La linfa es transportada de los tejidos a los nodos linfáticos a través de los vasos linfáticos aferentes. Entra a los nodos a través de una serie de cavidades, es percolada en el tejido del nodo linfático y sale mediante los vasos linfáticos eferentes.

3.1.1.2. Sistema inmune innato

El sistema inmune innato es la parte del sistema inmune con la que el organismo nace. Cuando un patógeno ataca al organismo, la respuesta primaria está a cargo del sistema inmune innato, y continúa de esta manera por el periodo previo a la respuesta del sistema inmune adaptativo.

Células inmunes como los macrófagos y los neutrófilos ingieren bacterias con la intención de disolverlas y presentar fragmentos de los patógenos a otras células inmunes. Así, el sistema inmune innato puede hacer distinción entre componentes propios y extraños. Los macrófagos activados durante este proceso emiten *citocinas*, que son proteínas secretadas por células que afectan el comportamiento de otras células y activan una respuesta inflamatoria que permite el tránsito de células inmunes a los lugares donde hay infección [9].

3.1.1.3. Sistema inmune adaptativo

El sistema inmune adaptativo hace referencia a la parte del sistema inmune que es capaz de reconocer y eliminar patógenos específicos.

Los linfocitos son las células que se encargan de regular la respuesta inmune adaptativa. Los linfocitos que entran al flujo sanguíneo tienen receptores de antígenos de especificidad

única. Esta especificidad es producto de un proceso de recombinación genética durante el desarrollo del linfocito en la médula ósea y el timo. El rearrreglo puede generar millones de combinaciones y cada linfocito tiene una especificidad distinta [9].

Las células inmunes cuentan con una capa externa que contiene moléculas receptoras capaces de reconocer antígenos. La forma en la que los reconocen es distinta de acuerdo al tipo de célula. Las células B, por ejemplo, reconocen antígenos directamente en solución, mientras que las células T los reconocen cuando son procesados por y están unidos a moléculas conocidas como complejo mayor histocompatible (MHC, por sus siglas en inglés). Los receptores de las células B que se encuentran en la superficie serán secretados en forma de *anticuerpos* cuando la célula se active. Cada célula B es *mono-específica*, es decir, produce un único tipo de anticuerpo que se une o es compatible con un tipo particular de proteína. Cuando los anticuerpos se unen a antígenos, dan la señal a otras células de ingerir, procesar o eliminar la sustancia a la cual se unieron en primer lugar. El reconocimiento inmune sucede entre las regiones de unión de los anticuerpos y los antígenos (*epítomos*) dependiendo de su compatibilidad. Los anticuerpos sólo pueden reconocer a un tipo específico de antígeno. Sin embargo los antígenos pueden presentar una serie de epítomos diferentes, por lo que un mismo antígeno puede ser reconocido por varios anticuerpos. Dentro de las moléculas MHC se encuentran células presentadoras de antígenos que consumen y digieren antígenos dividiéndolos en *péptidos* que se unen a ellas para crear un complejo que viaja a la superficie de la célula donde puede interactuar con células T [9].

Los receptores o anticuerpos que se encuentran en la superficie de las células B se componen de cadenas polipeptídicas que, a la vez, están conformadas de segmentos de ADN. Los segmentos en las cadenas presentan un orden específico para cada anticuerpo. El orden de los segmentos determina la compatibilidad de un anticuerpo con un antígeno dado. En la formación de las células B, segmentos de ADN codifican a los receptores, combinándose para dar paso a moléculas completas de anticuerpos. Una vez formadas, algunos segmentos pueden ser sometidos a *mutación hiper-somática*. Juntos, la recombinación genética y la mutación hiper-somática proveen al repertorio de anticuerpos diversidad suficiente para combatir una gran cantidad de antígenos.

A diferencia de los receptores de las células B, que pueden ser liberados en solución, los receptores de las células T necesitan de la asistencia de otras moléculas para unirse con antígenos. Esto se debe a la estructura de los receptores, que al igual que los anticuerpos, están compuestos de cadenas polipeptídicas pero que sólo se encuentran fijas en la superficie de las células T. Para poder reconocer a un antígeno, además de su unión con el receptor, se requieren de señales que estimulan la reacción para determinar si la célula se activa o se induce tolerancia [9].

Una vez formadas, las células migran de la médula ósea o el timo hacia el bazo, nodos linfáticos y tejido linfático intestinal, pues en estos lugares las células pueden encontrar antígenos para desencadenar la respuesta inmune. Las linfocitos circulan continuamente a lo largo del sistema linfático, haciendo visitas continuas a los órganos linfáticos buscando

antígenos externos.

3.1.2. Principales dinámicas

El sistema inmune natural hace uso de una serie de mecanismo que permite la diferenciación y proliferación de los linfocitos para una respuesta inmune eficiente. Entre ellos se encuentra el principio de la selección clonal, la habilidad de distinguir entre tejido propio y extraño y la teoría de la red inmune. Mientras que los dos primeros son procesos a los que son sometidos los linfocitos (aunque de maneras distintas de acuerdo a su tipo), la teoría de la red inmune ofrece una perspectiva alterna respecto al funcionamiento de las dinámicas internas del sistema inmune, en especial, el comportamiento y las interacciones que se dan entre las células y tejidos que lo conforman.

3.1.2.1. Principio de selección clonal

La teoría de la selección clonal o expansión clonal [23] hace referencia al proceso al que son sometidas las células inmunes para ser activadas después de su concepción. Cuando el organismo se ve bajo ataque de patógenos, las linfocitos compatibles con los antígenos extraños tienen que proliferarse y diferenciarse para ser capaces de combatir la amenaza.

La expansión clonal comprende las acciones que suceden dentro del sistema inmune cuando éste es expuesto a un estímulo antigénico. Durante este proceso [9], las células inmunes que son capaces de reconocer antígenos se proliferan y diferencian en células efectoras. Los receptores de las células B se unen con un antígeno y, en conjunto con una señal secundaria, ocasiona que el antígeno la estimule. La estimulación provoca que las células B se dividan produciendo otras células idénticas (clones) y que eventualmente maduren en células que secretan anticuerpos conocidos como *células de plasma*. Algunas de las células B que se originan en la proliferación se convertirán en *células B de memoria* cuyo propósito principal es mantener un registro de los anticuerpos que se han generado como resultado de infecciones pasadas. Estas células son longevas y circulan por todo el cuerpo hasta encontrarse con el mismo estímulo que ocasionó su formación. En éste rápidamente se diferencian en células de plasma para comenzar a secretar anticuerpos compatibles. La respuesta a los mismos antígenos después de una primera infección es conocida como *secundaria*. En ella, además de haber identificado a los anticuerpos adecuados para combatirlos, éstos se vuelven cada vez más especializados reconociéndolos y suprimiéndolos, habilidad que adquieren a través de la *maduración de afinidad*.

Sin embargo, la expansión clonal por sí sola no es suficiente para generar una repuesta inmune continua que suprima en su totalidad un estímulo antigénico en distintas ocasiones. Se requiere que el sistema inmune cuente con los recursos necesarios a disposición para una defensa exitosa. El tamaño de la población de clones que se genera durante la diferenciación con relación a la población de antígenos es crucial para determinar el resultado de la respuesta. El aprendizaje en el sistema inmune se ve reflejado en la habilidad

de cambiar el tamaño de la cantidad de clones de una célula para un antígeno específico en la población total de linfocitos. La población total tiene un tamaño fijo por lo que, para manipular la cantidad clones de una célula dada, se tiene que disminuir la cantidad de células afines a otro tipo de antígenos. Usualmente, los linfocitos con prioridad son aquellos que reaccionan a un estímulo actual; el espacio necesario para acomodar el aumento de células con este tipo de especificidad se logra *olvidando* a cierta porción de linfocitos cuya compatibilidad es con antígenos no presentes en el momento.

La maduración de la respuesta inmune implica que los anticuerpos presentes en la respuesta secundaria son más afines que los presentes en la respuesta primaria. Es decir, sus receptores son distintos para hacerlos más compatibles con el antígeno dado. Estas modificaciones, que inducen diversidad en el repertorio inmune, se logran con la ayuda de dos mecanismos principales: la hiper-mutación somática y la *edición de receptores*. Por medio de mutaciones de un solo punto, se puede explorar un rango cercano de afinidad entre el anticuerpo y el antígeno con el objetivo de encontrar variaciones del anticuerpo con una afinidad mayor a la original. Sin embargo, debido a la naturaleza aleatoria de las mutaciones, el proceso puede resultar en anticuerpos con afinidades menores a la original o que son reactivos con tejido propio. Para evitar la propagación de anticuerpos con afinidades bajas, las células con este tipo de receptores deben ser eliminadas o mutadas adicionalmente con el objetivo de mejorar su afinidad.

Mientras que la hiper-mutación somática explora configuraciones cercanas a la del receptor original, la edición de receptores provee la habilidad de explorar configuraciones totalmente distintas. Cuando un célula es reactiva con tejido propio, como alternativa a su supresión, puede experimentar edición en sus receptores. Este proceso consiste en eliminar los receptores que son reactivos con tejido propio y generar nuevos, de manera similar a la forma en la que se originan los receptores en la concepción de las células inmunes.

3.1.2.2. Distinción de lo propio y lo extraño

Los anticuerpos cuentan con *idiotipos* inmunológicos, es decir, epitopos que pueden ser reconocidos por otros anticuerpos. Para que el sistema inmune funcione adecuadamente, tiene que ser capaz de distinguir el tejido o células propias de las extrañas. Esta distinción es importante porque así se evita que el sistema reaccione con estímulos propios, reacciones que pueden derivar en enfermedades auto-inmunes. Cuando el sistema inmune identifica de manera exitosa a las células propias, se dice que desarrolla *auto-tolerancia* o *tolerancia*, donde el sistema inmune convive con el tejido propio sin provocar alguna respuesta inmune como resultado [9].

A pesar de que todos los linfocitos se ven envueltos en el proceso de selección, sólo algunos llegan a proliferarse mientras que el resto experimentan muerte celular o inactivación (*anergia*). Esto puede interpretarse como *selección negativa* [9].

La *selección positiva* [9] se da de maneras distintas entre las células T y las células B, aunque en ambos casos el objetivo es liberarse de linfocitos sin receptores o con recep-

tores de afinidad baja. En las células T se busca identificar a aquellos linfocitos que son capaces de unirse con moléculas MHC. La selección ocurre entre células T inmaduras en el timo antes de completar el proceso de maduración que las convierte en células inmunocompetentes. Las células seleccionadas serán sometidas a expansión clonal. En las células B, el proceso es similar. La diferencia principal son los criterios con los que se realiza la selección. Las células B se unen con moléculas transductoras, que se encargarán de emitir señales que pueden prevenir muerte celular o estimular el proceso de maduración. Las células B con anticuerpos que son más compatibles con antígenos son seleccionadas para evitar muerte celular y se proliferan.

La selección negativa tiene como objetivo eliminar del repertorio a aquellos linfocitos que son reactivos con tejido propio. Las células T pueden identificar antígenos cuando éstos han sido digeridos por moléculas MHC y se unen con ellas. Las células T que reaccionan con antígenos propios como resultado de esta interacción se enfrentan a muerte celular o anergia. La selección negativa en las células B es similar, con la diferencia de que las células B puede unirse a través de sus receptores con antígenos.

3.1.2.3. Teoría de la red inmune

La teoría inmune [24] ofrece otra perspectiva para entender el proceso de maduración de la respuesta inmune a través de la interacción de sus componentes con antígenos extraños y entre sí. En esta teoría se postula que el sistema inmune es una red regulada de moléculas y células que se reconocen entre ellas, incluso en ausencia de antígenos. Cada elemento en la red puede reconocer y ser reconocido. Un anticuerpo que reconoce a otro puede emitir señales positivas o negativas; las señales positivas activan células y dan a pie a la proliferación, mientras que las señales negativas ocasionan supresión o tolerancia.

3.2. Sistemas inmunes artificiales para optimización multi-objetivo

Según De Castro [9], los sistemas inmunes artificiales (SIAs) son sistemas adaptativos inspirados por la inmunología teórica y funciones inmunológicas, principios y modelos observados, que son aplicados a la solución de problemas. Esta definición abarca un amplio espectro de modelos dentro de su alcance, como mecanismos de reconocimiento de patrones, algoritmos de discriminación entre lo propio y lo extraño y modelos de redes inmunológicas entre otros. A pesar de la cantidad de conceptos que la inmunología teórica ofrece, la mayor parte de los algoritmos inspirados en ella incluyen solo algunos de los mecanismos observados en el sistema inmune en niveles altos de abstracción.

3.2.1. Sistemas inmunes artificiales

Para que un sistema sea considerado un SIA tiene que expresar como mínimo un modelo de un componente inmune, su diseño debe incorporar ideas de la inmunología teórica o experimental y tiene que estar enfocado en la solución de problemas [9]. Por el comportamiento descrito en la sección anterior del sistema inmune natural, se puede pensar que los SIA se reducen a tareas de reconocimiento de patrones. No obstante, la abstracción de procesos como la expansión clonal o la selección positiva y negativa han dado pie al surgimiento de aplicaciones en detección de anomalías, análisis de datos, aprendizaje de máquina y optimización, entre otros. Las características del sistema inmune que cobran relevancia en un ámbito computacional son [25]:

- **Reconocimiento:** El sistema inmune es capaz de reconocer y clasificar patrones distintos y generar respuestas apropiadas a esta información.
- **Extracción de características:** Las células APC extraen la información de los antígenos para posteriormente presentarlas a los células T, una vez que esta información ha sido procesada.
- **Diversidad:** Para asegurar que la mayor cantidad de antígenos serán reconocidos, el sistema inmune hace uso de combinaciones para generar los receptores en las células inmunes.
- **Aprendizaje:** Mediante repetidas exposiciones al mismo patógeno, el sistema inmune aprende a generar anticuerpos con la configuración adecuada para unirse a ellos y regula la cantidad de éstos presentes en la respuesta inmune.
- **Memoria:** Una vez terminado el proceso de maduración de los linfocitos, algunos de ellos se diferencian en células de memoria.
- **Auto-regulación:** El sistema inmune es un sistema descentralizado y está compuesto de órganos, tejidos y células que son capaces de actuar sin una unidad central de acuerdo al estímulo que se reciba.

Para diseñar un algoritmo que sea clasificado como un SIA, se requieren los siguientes parámetros [9]:

1. Una representación para cada componente del sistema.
2. Un conjunto de mecanismos para evaluar las interacciones de los individuos con el ambiente y entre ellos; por ejemplo, una medida de afinidad.
3. Procesos de adaptación, es decir, cómo es que el comportamiento de los elementos varía en el tiempo.

El espacio de forma [26], (*shape-space*, en inglés) hace referencia al concepto que se usa para describir de manera cuantitativa las interacciones que se dan entre anticuerpos y antígenos. Se asume que cada molécula tiene una forma específica y para poder acoplarse con otra, la molécula adicional tiene que ser complementaria en su forma. Es decir, ambas moléculas tienen que expresar formas que sean *afines* entre sí. En un contexto computacional, si una molécula tiene una representación numérica vectorial, una manera de medir afinidad entre dos moléculas es utilizando una medida de distancia. El tipo de representación y el mecanismo para asignar afinidad dependerá del dominio del problema que se pretende solucionar.

3.2.1.1. Sistemas inmunes artificiales para optimización mono-objetivo

No existe un marco de trabajo universal para SIAs diseñados para optimización mono-objetivo. Sin embargo, existen dos algoritmos cuyos enfoques han cobrado popularidad por la manera en la que abstraen conceptos inmunológicos.

- **CLONALG** [27]

CLONALG es un SIA para optimización que retoma los conceptos de proliferación y diferenciación realizando modificaciones aleatorias en la estructura de los anticuerpos a través de hiper-mutación somática y estimación de linfocitos generados con receptores de baja afinidad. Este algoritmo tiene como modelo el principio de selección clonal. CLONALG refleja este principio en el proceso de búsqueda mediante cinco pasos esenciales. En primer lugar, se procura mantener un conjunto de memoria a lo largo del proceso de optimización conservando las mejores soluciones. Después, se incluyen los procesos de clonación y mutación aplicándolos sobre los anticuerpos (*Ab*) o soluciones seleccionadas. Posteriormente, aquellos anticuerpos con afinidades bajas se descartan de la búsqueda. La población de anticuerpos es entonces sometida a maduración de afinidad y por último, toda la población es re-seleccionada de acuerdo a su afinidad antigénica, y a la diversidad que aportan al repertorio de soluciones. Este algoritmo puede ser interpretado como un proceso evolutivo a pequeña escala, sin incluir la cruce de los individuos en la población.

- **Opt-aiNET** [28]

Opt-aiNet es un SIA que utiliza principios de la teoría de la red inmunológica. Se basa en una ai-Net [29], que es un SIA para reconocimiento de patrones donde se utiliza el concepto de afinidad para eliminar información redundante de la red. La evaluación de afinidad sucede entre pares de moléculas y si el valor de afinidad entre ambas supera un umbral de supresión dado, una de las dos se elimina de la red. En la versión para optimización, se asume que las células B forman un cluster alrededor de un óptimo local perteneciente a la función a optimizar. Las células B se codifican como vectores de números reales, y la función de aptitud corresponde con la función

Algoritmo 2: Algoritmo CLONALG

inicio**Inicialización;**

Crear una población aleatoria de anticuerpos P;

Presentación antigénica;**mientras** *no se alcance el criterio de paro* **hacer****para cada** *antígeno* **hacer****Evaluación de antígenos;**

Presentar el antígeno actual al anticuerpo actual;

para cada *anticuerpo* **hacer**

Calcular la afinidad del anticuerpo con el antígeno actual;

Selección y expansión clonal;

Seleccionar un subconjunto de los anticuerpos en P con las afinidades más altas;

Generar copias exactas (clones) de los anticuerpos con las afinidades más altas de acuerdo a su afinidad; entre más alta la afinidad, más alto el número de clones;

Maduración de afinidad;

Mutar todos los clones con una tasa inversamente proporcional a su afinidad con el antígeno actual;

Incorporar los anticuerpos generados a P y re-seleccionar los mejores individuos para mantenerlos como el conjunto de memoria para el antígeno actual;

Metadinámicas;

Reemplazar anticuerpos con las afinidades más bajas por anticuerpos nuevos generados aleatoriamente;

fin**fin****fin****fin**

de optimización. Las células son sometidas a evaluación de aptitud, expansión clonal, mutación, selección y evaluación de afinidad con otras células B en la población. El criterio de término del algoritmo depende del tamaño de la población de células en la red después del proceso de supresión. Si el número de elementos en la población no varía entre generación y generación, la red ha llegado a un estado de equilibrio y la búsqueda puede terminar.

3.2.2. Sistemas inmunes artificiales para optimización multiobjetivo

Los sistemas inmunes artificiales multi-objetivo (*SIAM*) son algoritmos modelados con base en procesos inmunes orientados a la resolución de problemas de optimización multi-objetivo. De manera análoga a un AEMO, un *SIAM* mantiene una población de soluciones potenciales durante la optimización que buscan simular la población de células involucradas durante la respuesta inmune. De acuerdo al algoritmo, se toma terminología inmune para referirse a los miembros que forman parte de la población siendo *anticuerpo* uno de los términos más populares para referirse a ellos. La población de anticuerpos es sometida a un proceso que puede entenderse como evolutivo, aunque con pequeñas diferencias respecto a los operadores utilizados durante la optimización del problema; el tipo de operadores dependerá del modelo que se seleccione para el diseño del algoritmo.

De manera general, un *SIAM* pasa por una serie de etapas comunes como parte del proceso de optimización [10]:

- Reconocimiento de antígenos: Se reconoce el problema multi-objetivo y, en caso de haberlas, las restricciones se modelan como antígenos.
- Generación de la población de anticuerpos: Se genera un conjunto de soluciones potenciales aleatoriamente como la población de anticuerpos en el espacio decisión.
- Cálculo de afinidad entre anticuerpos y antígenos: La afinidad entre un anticuerpo y un antígeno dado se calcula en cada generación.
- Selección clonal: Los anticuerpos más afines al problema son seleccionados del resto de la población con la intención de proliferarlos. Es decir, para acelerar la convergencia, más recursos son dedicados a áreas del espacio de búsqueda que son más promisorias.
- Clonación de anticuerpos: Los anticuerpos seleccionados en el paso anterior son sometidos a un proceso de clonación, donde se copian anticuerpos idénticos a los seleccionados.
- Actualización de la población de anticuerpos: Los padres en la población con la menor afinidad son reemplazados por anticuerpos más afines, y la población de anticuerpos resultante será utilizada como los padres para la siguiente generación.

Algoritmo 3: Algoritmo Opt-aiNet

inicio**Inicialización;**

Crear una población aleatoria de anticuerpos P;

Dinámicas de la red inmunológica;**mientras** *no se alcance el criterio de paro* **hacer****Calcular la aptitud de las células B para** *cada célula B* **hacer**

| Calcular la afinidad de la célula B actual;

fin**Expansión clonal;****para** *cada célula B* **hacer**| Generar N_C clones de la célula B actual;

| Agregar los clones a la población de células B;

fin**Mutación somática;****para** *cada célula B* **hacer**

| Mutar cada clon de manera proporcional a la aptitud de su célula B madre;

fin**Re-evaluación de aptitud;****para** *cada célula B* **hacer**

| Calcular la aptitud de la célula B actual;

fin**Selección clonal;**

Seleccionar a los clones más aptos y desechar a los que tengan las aptitudes más bajas;

Calcular la afinidad promedio;**Supresión de red;**Suprimir las células B cuyas afinidades se encuentren por debajo del umbral de supresión σ_S ;**Diferenciación de las células de memoria;**

Determinar las células de memoria después de la supresión.

Metadinámicas;

Introducir a la red un porcentaje de células B nuevas generadas aleatoriamente;

fin**fin**

- Población de anticuerpos resultante: La población final contiene soluciones óptimas de Pareto.

Un SIAM *puro* se basa en el uso exclusivo de principios derivados de la inmunología teórica. Es decir, para que un SIAM pueda ser categorizado como puro, es importante que sólo se consideren operadores y procesos inspirados en algún concepto inmunológico descartando así operadores tales como la recombinación. Los SIAM que incorporan elementos provenientes de algoritmos genéticos u otras meta-heurísticas son denominados *híbridos*. Estos últimos son más populares que los puros, pues el no utilizar recombinación impone ciertas limitantes respecto al desempeño del algoritmo en cuestión. El desempeño durante la búsqueda de un SIAM (puro o híbrido) depende de dos factores principalmente:

- del modelo utilizado como inspiración para el diseño del algoritmo y
- del paradigma de selección bajo el cual se diseñe.

Justo como la contraparte mono-objetivo, el diseño de un SIAM se puede clasificar por el principio inmune que se emula en el proceso de búsqueda. Existe un gran variedad de procesos inmunes de los que derivan distintos algoritmos. Sin embargo la mayor parte de los SIAM se concentran alrededor de dos principios fundamentales:

- principio de selección clonal
- teoría de la red inmunológica

Los algoritmos que se basan en el principio de selección clonal tienen como propósito identificar aquellos individuos en la población más aptos para así proliferarlos, es decir, someterlos a un proceso de clonación que puede ser proporcional (la cantidad de clones asignada a un anticuerpo depende de su afinidad) o total (todos los anticuerpos seleccionados para clonación reciben la misma cantidad de clones). Estos clones son mutados de manera inversamente proporcional a su valor de aptitud. El proceso de clonación se encarga de atestar la población con individuos idénticos altamente afines, lo que favorece la convergencia, aunque esto se hace a expensas de la diversidad. Para mitigar este efecto secundario, se incorporan medidas específicas como utilizar el valor de distancia de agrupamiento durante la asignación de clones, aunque esta estrategia ha demostrado ser poco efectiva [10]. Han surgido otras alternativas que permiten que las propiedades de un SIAM se amplifiquen incorporando medidas alternas como la *distancia vertical* [30] u optando por esquemas de selección que no dependan de la optimalidad de Pareto.

A continuación, describimos brevemente diversos SIAMs que han sido propuestos en la literatura especializada.

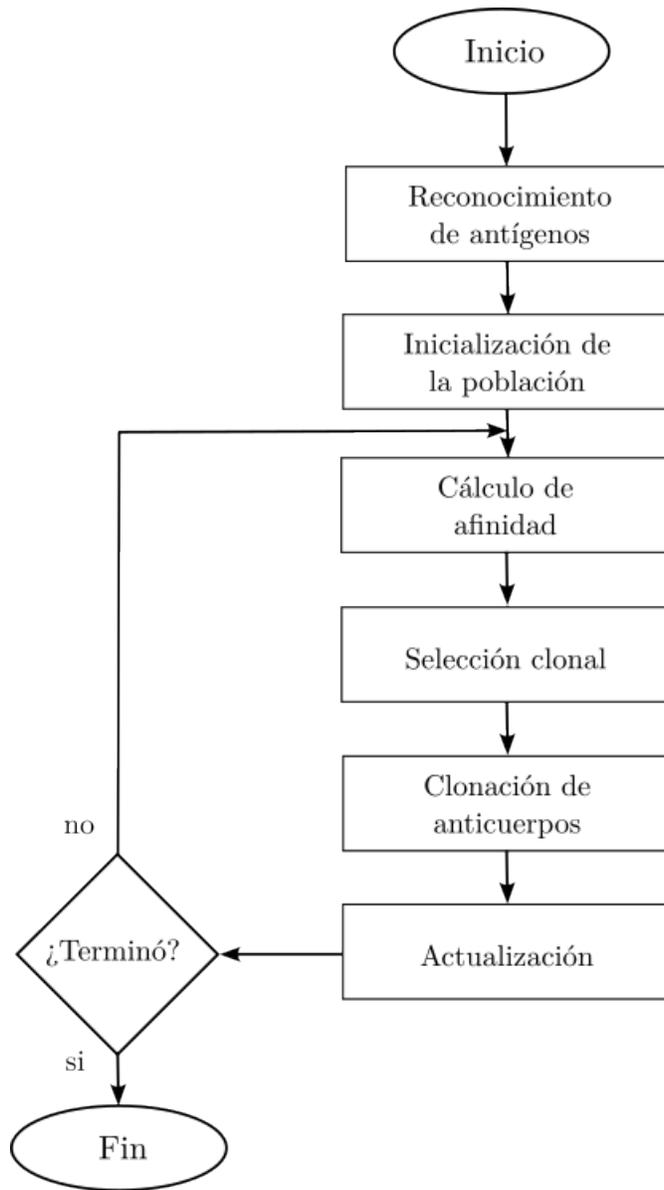


Figura 3.1: Etapas de un SIAM en el proceso de optimización

3.2.2.1. NNIA

NNIA [31] tiene como inspiración el principio de selección clonal y plantea la selección de sus individuos para clonación de acuerdo a su valor de *distancia de agrupamiento* (denominada *crowding distance* en inglés). Este mecanismo hace que los conjuntos de aproximación producidos por el algoritmo cuenten con una buena distribución a lo largo del frente de Pareto, pues se enfoca en elegir individuos no dominados que se encuentren en áreas menos pobladas del frente de Pareto. NNIA incluye elitismo en su proceso, manteniendo un archivo externo con las soluciones no dominadas encontradas hasta el momento. Este algoritmo tiene dificultades para mantener la diversidad y convergencia de sus soluciones cuando la cantidad de objetivos aumenta debido a la estrategia de selección que utiliza.

3.2.2.2. NICA

El Nuevo Algoritmo Inmune Clonal [32] (NICA, por sus siglas en inglés) es un enfoque similar al NNIA en el sentido de que ambos utilizan la optimalidad de Pareto para efectuar la selección clonal. Sin embargo, NICA adopta el concepto de optimalidad de Pareto como parte de su operador de clonación donde sólo aquellas soluciones que son no dominadas son sometidas al proceso de clonación y a todas se les asigna una cantidad igual de clones. NICA también emplea *distancia de agrupamiento* para suprimir a un individuo no dominado en cada generación, esto con el objetivo de mantener una aproximación del frente de Pareto con una buena distribución. Al utilizar una selección basada en optimalidad de Pareto, NICA experimenta dificultades para converger al frente de Pareto verdadero en problemas con un gran número de objetivos.

3.2.2.3. HEAI

HEAI es un entorno evolutivo híbrido para sistemas inmunes artificiales orientados a problemas multi-objetivo [33] que combina mecanismos inmunológicos con mecanismos evolutivos para mejorar la capacidad de búsqueda de un SIAM que dependen únicamente de operadores de mutación (en otras palabras, es un esquema híbrido). En específico, HEAI adopta esquemas de cruce y mutación que son aplicados sobre subpoblaciones generadas aleatoriamente dentro de la población tratando de encontrar un compromiso entre proximidad y diversidad en el conjunto de aproximación. La estrategia de selección involucra categorizar a las soluciones como no dominadas y dominadas, eliminar aquellas que son dominadas y ordenar a las restantes por su valor de *distancia de agrupamiento*. HEAI incluye un mecanismo elitista que consiste en un archivo un archivo donde se conservan las mejores soluciones no dominadas encontradas hasta el momento.

3.2.2.4. AIMA

AIMA [34] adopta el marco de NNIA con cambios significativos en la forma en que se mantiene el archivo externo y la manera en que se aplica el operador de cruza. AIMA es un *SIAM* híbrido que se vale de elementos de evolución diferencial para afinar la capacidad de búsqueda a lo largo de las generaciones, incorporando un método adaptativo de selección que permite elegir una de tres estrategias de evolución diferencial de acuerdo al estado actual de la población. Estos cambios fueron introducidos con la intención de aliviar la pérdida de diversidad que se produce con las aproximaciones obtenidas por NNIA.

3.2.2.5. MOAI-DPS

MOAI-DPS [35] es un *SIAM* híbrido que incorpora un mecanismo para controlar el tamaño de la población dinámicamente el cual depende del estado del archivo de soluciones no dominadas encontradas hasta el momento. Esto se hace con el objetivo de intensificar la capacidad de exploración de la búsqueda aumentando gradualmente el tamaño de la población cuando el archivo aún no está lleno, y disminuyéndolo cuando está lleno. Esta estrategia se presenta en conjunto con un operador de cruza de evolución diferencial con dos modelos de búsqueda que se aplican sobre la población de acuerdo a un parámetro pre-definido para mantener la diversidad entre la soluciones.

3.2.2.6. MOAI-DCSS

MOAI-DCSS [36] es un algoritmo con base en descomposición donde los individuo son asociados a un subproblema con un vector ponderado. La cantidad de clones asignados a cada individuo depende de la mejora de acuerdo al subproblema asignado a través de las generaciones. Además, el algoritmo incorpora un operador de cruza de evolución diferencial para reforzar la capacidad de exploración y mejorar la diversidad de la aproximación. Para actualizar la población, MOAI-DCSS utiliza la mejora máxima de la función de agregación correspondiente para determinar si una nueva solución reemplaza a una anterior.

3.2.2.7. VD-MOAI

VD-MOAI [30] utiliza un enfoque de descomposición con la función de Tchebyshev donde se propone una selección clonal basada en la distancia vertical que existe entre los individuos y los vectores ponderados asociados a los subproblemas. El método determina la cantidad de clones destinados a cada individuo con la intención de asegurar convergencia y enfocándose en la diversidad de las soluciones procurando asignar más clones a aquellos que tengan una distancia vertical menor. Incorpora el operador de cruza de la evolución diferencial.

3.2.2.8. BCD-MOAI

BCD-MOAI [37] es un SIAM con base en descomposición que introduce un operador de clonación para balancear la convergencia y la diversidad de las soluciones a lo largo del proceso de búsqueda. El operador consta de dos partes, donde la convergencia se mantiene tomando en cuenta la mejora relativa de la afinidad del individuo que se determina con ayuda de la función de escalarización. La diversidad, por su parte, se mantiene utilizando la distancia perpendicular para determinar a los individuos más cercanos al vector ponderado asociado. Estas métricas se combinan con un factor de penalización que regula el efecto que cada una tiene con la intención de fomentar una búsqueda orientada a la diversidad en las primeras etapas y a la convergencia conforme el proceso de búsqueda finaliza.

Estos algoritmos están diseñados para dar solución a problemas de optimización de dos o tres objetivos y su rendimiento es competitivo con respecto a otras heurísticas. Sin embargo cuando la cantidad de objetivos aumenta, el desempeño de algunos de ellos se ve significativamente reducido en términos de diversidad y convergencia, especialmente en problemas que superan los diez objetivos [10].

3.2.3. Sistemas inmunes artificiales para problemas con muchos objetivos

RD-ICA [38] es un *SIAM* híbrido que incorpora información de las preferencias del usuario final. Con la ayuda de esta información más una dirección de búsqueda, se categoriza a los individuos en la población para efectuar la selección. El operador de clonación depende del rango de soluciones con respecto al ordenamiento previamente mencionado. RD-ICA utiliza un operador de cruce inteligente. Este algoritmo muestra resultados competitivos en términos de convergencia en problemas de alta dimensionalidad en el espacio objetivo, pero deficientes en términos de diversidad.

MaIA [39] es un algoritmo inmune especialmente diseñado para lidiar con problemas de optimización con muchos objetivos con base en optimalidad de Pareto, adoptando un estimador de densidad [40]. El enfoque presenta un operador de clonación que utiliza información global de la población para determinar cuántos clones le son asignados a cada individuo. Adicionalmente, MaIA incluye un operador de evolución diferencial y pone especial cuidado en la selección de los padres para producir un número limitado de descendencia altamente apta y mantener la diversidad en la población. MaIA obtiene resultados competitivos, pero su desempeño se degrada en problemas con frentes de Pareto desconectados debido a la búsqueda no balanceada que su esquema de selección ocasiona.

Como indicamos anteriormente, los SIAMs son algoritmos donde algunos principios inmunológicos se utilizan como inspiración para desarrollar estrategias y mecanismos que permitan realizar una búsqueda efectiva con el propósito de solucionar un problema de optimización multi-objetivo. Sin embargo, una parte importante de los algoritmos revisados anteriormente utilizan el componente inmunológico como asistencia adicional, relegándo-

los a un segundo plano mientras que el enfoque de diseño principal permanece centrado en alguna otra estrategia. Dadas las cualidades propias de los SIAs, parece prometedor explotar los recursos detrás de éstas ideas para diseñar un algoritmo cuyo desarrollo gire, principalmente, en torno a procesos inmunes.

| Algoritmo | Modelo | Representación | Selección | Clonación | Mutación | Cruza | Otros mecanismos |
|-----------|---------------------------------|----------------|---|---------------------------|------------|--|--|
| NNIA [31] | Principio clonal | Real | Distancia de agrupamiento | Distancia de agrupamiento | Polinomial | Cruza binaria simulada | Elitismo |
| NICA [32] | Principio clonal | Binaria | Dominancia de Pareto | Total | Estática | No incluye cruce | Supresión del individuo no dominado que se encuentra en la región más densamente poblada |
| HEAI [33] | Principio clonal, hibridización | Real | Dominancia de Pareto, distancia de agrupamiento | Distancia de agrupamiento | Polinomial | Cruza binaria simulada, Evolución diferencial | Elitismo |
| AIMA [34] | Principio clonal, hibridización | Real | Dominancia de Pareto, distancia euclidiana a los vecinos más cercanos | Distancia de agrupamiento | Polinomial | Selección adaptativa de estrategias de evolución diferencial | Elitismo |

Tabla 3.1: Cuadro comparativo de algunos *SIAMs* para problemas de optimización multi-objetivo.

| Algoritmo | Modelo | Representación | Selección | Clonación | Mutación | Cruza | Otros meca- nismos |
|-----------------------|---------------------|----------------|---|--|--|---|---|
| MOAI- DPS [35] | Principio clonal | Real | Dominancia de Pareto y Dis- tancia de agru- pamiento | Distancia de agrupamiento | Operador de evo- lución diferencial | Evolución diferencial con dos modelos de búsqueda | Estrategia de control del tamaño de la po- blación dinámica, Elitismo |
| MOAI- DCSS [36] | Principio clonal | Real | Descomposición | Mejora de acuerdo al subproblema relacionado | Polinomial | Evolución diferencial | No involucra otros meca- nismos |
| VD-MOAI [30] | Principio clonal | Real | Descomposición | Distancia Vertical | Polinomial | Evolución diferencial | No involucra otros meca- nismos |
| BCD- MOAI [37] | Principio clonal | Real | Descomposición | Operador de balance entre convergencia y diversidad | Polinomial | Evolución diferencial | No involucra otros meca- nismos |
| MaIA* [39] | Principio clonal | Real | Dominancia de Pareto, distan- cia de agrupa- miento | Información global de la población | Polinomial | Cruza binaria simulada | No involucra otros meca- nismos |
| RD-ICA* [38] | Princpio clonal | Real | Dirección de preferencia | Rango | Polinomial | Inteligente | Elitismo |

Tabla 3.2: Cuadro comparativo de algunos *SIAMs* para problemas de optimización multi-objetivo y de muchos objetivos (indicados estos últimos con el símbolo ‘*’) (Continuación).

Capítulo 4

Un nuevo sistema inmune artificial basado en descomposición para optimización multi-objetivo

4.1. Modelo inmunológico

El modelo inmunológico en el que se basa un SIAM influye de manera importante en el desempeño del mismo. Los SIAM que utilizan el principio de selección clonal destinan recursos en áreas del espacio de búsqueda que son prometedoras, debido a que en la selección clonal se identifica a los individuos más aptos para proliferarlos. Algunos algoritmos con base en este principio se enfrentan a la pérdida de diversidad; los resultados pueden deteriorarse aún más si se trata de resolver problemas de alta complejidad o con un frente de Pareto con una geometría específica. Otros procuran mantener soluciones diversas a lo largo del proceso, aunque la convergencia puede llegar a sufrir estragos y la búsqueda puede estancarse en óptimos locales [10]. Un diseño minucioso es crucial, tomando en cuenta el balance entre convergencia y diversidad como un factor importante en el proceso de búsqueda. Por lo tanto, al utilizar el principio de selección clonal como modelo de un SIAM se deben incorporar operadores adicionales que permitan regular la composición del conjunto de aproximación final.

En este trabajo, se propone un SIAM modelado con base en el proceso de maduración de las células B. Este proceso permite aprovechar las cualidades de expansión de la selección clonal, mientras regula a la población con recursos adicionales. Como se menciona en la sección 3.1.2.1, la selección clonal por si sola no es suficiente para construir un repertorio inmunológico útil para la respuesta inmune por lo que distintos procesos adicionales se incluyen en la construcción de dicho repertorio. El proceso de maduración de las células B se compone de dos procesos adicionales al principio de la selección clonal: la selección positiva y la selección negativa. La selección positiva forma parte de cualquier SIAM de manera implícita y consiste en seleccionar a las células de entre la población con

los anticuerpos más aptos reconociendo antígenos para su activación posterior. En un SIAM, esto puede ser interpretado como la selección de los anticuerpos que se unen a la población principal después de la etapa de evolución y que eventualmente se convierten en el conjunto de aproximación final. La selección negativa, por su parte, consiste en eliminar a aquellas células con anticuerpos que resultan ser auto-reactivos. Así, el sistema inmune natural previene que se desencadene una reacción en contra de su propio anfitrión, como lo son las enfermedades auto-inmunes.

4.2. Descomposición

Uno de los objetivos detrás del diseño del algoritmo es que cuente con la capacidad de abordar POMs con varios objetivos sin que el desempeño se vea afectado de manera drástica. El paradigma de descomposición ofrece ciertas características atractivas para el diseño de un SIAM, pues los algoritmos bajo este esquema no presentan problemas respecto a la disminución de la presión de selección conforme la cantidad de objetivos aumenta. Además, el diseño de un SIAM alrededor del concepto de descomposición resulta bastante directo. En este trabajo se retoma el marco de trabajo de MOEA/D [3], como se presentó en la sección 2.4.1.3, en la página 20.

Sin embargo, para poder acoplar el concepto de un SIAM con un esquema de descomposición se requiere de ciertos ajustes en las etapas de reproducción y actualización de manera que las características de un SIAM puro puedan ser aprovechadas.

A continuación, se proporciona una descripción de los componentes que se mantienen en cada generación del algoritmo:

- una población de anticuerpos (Ab) que representan las soluciones potenciales,
- un conjunto de N vectores de pesos $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$,
- una función de escalarización $g^{scl}(\cdot)$
- un vecindario $B(i)$ compuesto de los T subproblemas más cercanos a cada anticuerpo (Ab_i).
- una población de N_c clones (C)
- una función de afinidad $Aff(\cdot)$

En MOEA/D, un subproblema es optimizado de manera simultánea y cooperativa con los subproblemas en su vecindario. Para realizarlo, se toma de entre las soluciones en el vecindario un subconjunto de soluciones que funcionan como los padres en el operador de cruce seleccionado. Estas soluciones producirán un hijo y que será mutado, y al cual, en caso de no ser factible le será aplicado algún algoritmo de reparación produciendo y' . El

hijo se utiliza para la actualización del vecindario o de la población general. Esto se decide con una tasa de selección local $(1 - \rho)$ definida al inicio del algoritmo por el usuario. El criterio que se utiliza para decidir si el hijo reemplaza a una solución x_i asociada a un sub-problema en particular es el valor de escalarización. Si $g^{scl}(x_i) > g^{scl}(y')$ el hijo tomará el lugar como la solución asociada al subproblema en cuestión. Para evitar disminuir la presencia de individuos duplicados en la población, se fija un número de reemplazos al inicio de la ejecución. Este número indica la cantidad de veces que una solución en particular puede ser copiada en la población.

Un SIAM puro no involucra operadores de cruza, debido a lo cual la etapa de mejora del vecindario/población presenta una serie de cambios que permitan optimizar los problemas evitando las limitaciones que implica no generar nuevos individuos derivados de la recombinación en cada generación. En lugar de generar un nuevo individuo producto de la cruza, el algoritmo mantiene una población de clones durante todo el proceso de optimización. La población de clones se llena continuamente de los clones provenientes de los anticuerpos más afines al sub-problema. Una vez llena la población, los clones son sometidos a un proceso de *mutación hiper-somática*. El algoritmo utiliza el esquema de mutación polinomial [41] donde para un individuo padre x_i dado, la solución mutada x'_i se crea con ayuda de un número aleatorio u en el rango $[0, 1]$. La solución mutada tiene la forma:

$$x'_i = \begin{cases} y_i + \bar{\delta}_L(y_i - y_i^{(L)}) & \text{para } u \leq 0.5 \\ y_i + \bar{\delta}_R(y_i^{(U)} - y_i) & \text{para } u > 0.5 \end{cases}$$

donde

$$\bar{\delta}_L = (2u^{\frac{1}{1+\eta_m}}) - 1 \text{ para } u \leq 0.5,$$

$$\bar{\delta}_R = 1 - (2(1-u)^{\frac{1}{1+\eta_m}}) \text{ para } u > 0.5$$

y η_m es un parámetro definido por el usuario. Este es el esquema de mutación polinomial altamente disruptivo.

Mantener una población de clones es una idea recurrente en el diseño de SIAM híbridos, donde se utiliza como un conjunto de opciones para seleccionar a los individuos que actúan como padres en operadores de cruza [10]. Después de esta selección el proceso sigue de manera similar a la de un AEMO basado en descomposición, utilizando el individuo hijo para la mejora. En lugar de utilizar un solo individuo en la etapa de mejora, el algoritmo utiliza la población completa de clones comparando cada uno de ellos con cada solución asociada a cada subproblema dentro del vecindario o población según corresponda. De esta manera se aprovechan las soluciones mutadas y los clones idénticos (presentes en menor medida en esta población) y aumentan las posibilidades de encontrar una solución que optimice mejor a un subproblema dado. El criterio que se utiliza para determinar si un miembro de la población de clones se asocia como solución de un sub-problema es la misma que en el marco del trabajo original. Es decir, un miembro de la población de

clones C_i reemplaza a un anticuerpos asociado a un subproblema Ab_j si:

$$g^{scl}(C_i) < g^{scl}(Ab_j)$$

4.3. Operador de asignación de clones

En NNIA[31], el operador de asignación de clones es el siguiente:

$$c_i = \left\lceil |C| \times \frac{\zeta(Ab_i, C)}{\sum_{j=1}^{|C|} \zeta(Ab_j, C)} \right\rceil$$

donde c_i es la cantidad de clones asignada a un anticuerpo Ab_i , $|C|$ es el tamaño de la población de clones, $\zeta(Ab_i, C)$ es el valor de *crowding-distance* de un anticuerpo Ab_i con relación a la población de clones C . NNIA es un SIAM basado en optimalidad de Pareto; el uso del valor de la distancia de agrupamiento es principalmente para preservar la diversidad de las soluciones en la población principal, de manera que se asignaran más clones en las regiones de búsqueda que se encuentren menos pobladas. Este esquema de asignación de clones es proporcional, es decir, que la cantidad de clones que recibe cada anticuerpo es proporcional al valor de la función de afinidad definida para un SIAM dado de manera que los anticuerpos más afines tendrán más clones. Sin embargo, utilizar el valor de distancia de agrupamiento resulta no ser una medida de afinidad adecuada, en especial en problemas de alta dimensionalidad. La función de afinidad es de suma importancia, pues con base en este valor se seleccionan los anticuerpos a clonar y de esta forma, se selecciona también el tipo de individuos con los que se llena la población principal.

En la sección 2.4.1.3, en la página 20, se mencionan los enfoques de descomposición que se adoptaron en la versión original de MOEA/D. Entre estos enfoques se encuentra el PIB, que es una versión modificada del problema de la intersección de frontera basada en penalización, el cual consiste en la minimización del siguiente problema:

$$\text{mín } d_1 + \theta d_2$$

donde

$$d_1 = \frac{\|(f(x) - z^*)^T \lambda\|}{\|\lambda\|}$$

$$d_2 = \|f(x) - (z^* + d_1 \lambda)\|$$

y $\theta > 0$ es un parámetro de penalización definido por el usuario, cuyo valor se sugiere en 5 para la mayoría de los problemas. d_1 es la distancia entre z^* y la proyección de $f(x)$ sobre el vector de pesos asociado al subproblema. d_2 es la distancia entre $f(x)$ y la línea entre el vector de pesos y z^* . Las distancias más pequeñas indican mejor convergencia. La ilustración de las distancias se observa en la figura 4.1.

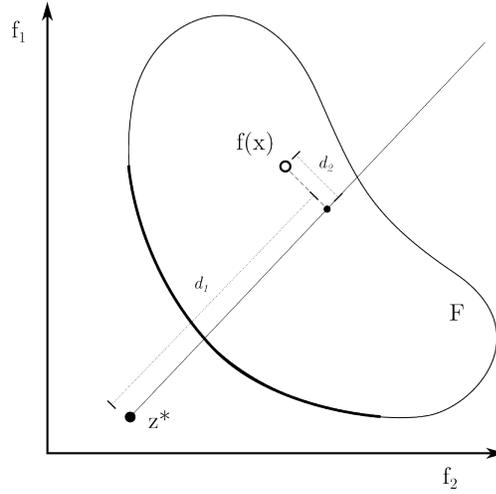


Figura 4.1: Enfoque de la intersección de frontera basada en penalización PIB.

La distancia d_2 fue utilizada por Lingie Li *et. al.* [30] en un algoritmo inmunológico híbrido como medida de afinidad en el esquema de asignación de clones de la siguiente forma:

$$c_i = \left[|C| \times \frac{(1 - d_2^i)}{\sum_{j=0}^{|C|} (1 - d_2^j)} \right]$$

donde d_2 es denominado *distancia vertical*. Este enfoque es prometedor, pues es un buen indicador de la cercanía de una solución con respecto a su vector de pesos asignado. Este esquema de asignación es el utilizado en este trabajo, con la siguiente modificación:

$$c_i = \left[|C| \times \frac{\frac{1}{d_2^i}}{\sum_{j=0}^{|C|} \frac{1}{d_2^j}} \right]$$

Una vez asignada la cantidad de clones a cada uno de los anticuerpos seleccionados, el proceso de clonación se lleva a cabo con la siguiente operación:

$$C = \bigcup_{i=1}^T [Ab_i \otimes c_i]$$

donde \otimes representa la operación de clonación, es decir, el proceso de replicar o copiar un anticuerpo con todos sus atributos intactos las veces que sean necesarias.

El psedocódigo del proceso de clonación se encuentra en el algoritmo 5, mientras que el proceso del operador de mutación se puede observar en el algoritmo 6.

4.4. Selección positiva y negativa

Una vez generados los clones, la población es sometida a mutación que utiliza la distancia d_2 estandarizada en el rango $[0, 1]$. Este valor se utiliza como el porcentaje de mutación. La idea que se presenta en CLONALG [27] es que los anticuerpos menos afines deben de experimentar más mutaciones que aquellos anticuerpos extremadamente afines. Esto permite refinar la búsqueda alrededor de los anticuerpos más aptos y realizar una exploración alrededor de aquellos que no lo son. Como en un SIAM puro el único operador de variación es la mutación y la mutación está regulada por la afinidad de un anticuerpo aunado a la naturaleza del operador. El rango de diversidad que se observa hasta este punto en la población de clones es limitado. Si se continúa con el proceso de optimización con la población de clones en su composición actual, la búsqueda prodría sufrir de pérdida de diversidad y convergencia prematura. Para prevenirlo, hemos incorporado un mecanismo adicional cuya motivación se encuentra en el proceso inmunológico de selección negativa.

En la sección 3.1.2.2, en la página 28, se describe a la selección negativa como el proceso mediante el cual las células inmunes, cuyos anticuerpos reconocen a los antígenos propios, son eliminadas para evitar que el sistema inmune se ataque a sí mismo. En el contexto del algoritmo, se inspecciona a los anticuerpos que forman parte de la población de clones con el objetivo de identificar aquellos que sean idénticos a su padre después de la mutación. Si se encuentra un clon idéntico que esté presente en la población de clones más de una vez, éste será candidato para ser removido de la población.

Una vez identificados los anticuerpos que no seguirán formando parte del proceso de optimización, estos pueden ser ignorados -anérgicos- durante todo el resto proceso o pueden ser reemplazados por nuevos anticuerpos generados aleatoriamente. La meta es mantener una población de anticuerpos diversos entre los clones para ofrecer un buen repertorio en la etapa de mejora local/global, aunque para procurar mantener una buena convergencia el algoritmo utiliza una porcentaje de selección p_{SN} que ayuda a decidir si el anticuerpo debe descartarse o no. La generación de nuevos anticuerpos en cada generación es un mecanismo auxiliar para preservar variación entre las soluciones, como se presenta en CLONALG [27]. El pseudocódigo del proceso de selección negativa se encuentra en el Algoritmo 7.

La selección positiva se puede interpretar como el proceso de mejora local o global. Esto es, cada elemento activo de la población de clones C se compara con los miembros del vecindario $B(i)$ (mejora local) o con los de la población principal P (mejora global) y se determina si el clon es más apto para solucionar el sub-problema adyacente. Un clon puede convertirse en la solución asociada a un sub-problema si $g^{scl}(C_i|\lambda, z^*) < g^{scl}(Ab_j|\lambda, z^*)$ para $i = 1, \dots, |C|$ y $j = 1, \dots, N$. Es decir, el clon tomará el lugar como la mejor solución actual a un sub-problema si tiene un valor de escalarización más pequeño que el de la solución asociada a él en ese instante.

4.5. Algoritmo propuesto

Uniando las partes, el proceso completo del Sistema Inmune Artificial Multi-objetivo basado en Descomposición (**SIAMD**) se presenta en el algoritmo 4. El algoritmo comienza con la *inicialización*, donde se calculan los T vectores de pesos más cercanos a cada problema para determinar su vecindario. Después, se generan N anticuerpos Ab de manera aleatoria, mismos que conforman la población principal P y posteriormente se calcula el valor objetivo asociado a cada anticuerpo. Una vez que se cuenta con la población, comienza el ciclo principal del algoritmo. En el ciclo principal, primero se actualiza el punto de referencia z^* . Después, se realiza el proceso de clonación donde de acuerdo al subproblema, se seleccionan los anticuerpos más afines utilizando su valor de distancia vertical y se les asigna un número de clones. Para cada anticuerpo seleccionado, se produce la cantidad de clones calculada previamente y los clones resultantes se colocan en la población de clones C hasta que la población esté llena o se hayan producido todos los clones asignados a los anticuerpos seleccionados.

Cuando la clonación finaliza, la población de clones es mutada. El porcentaje de mutación para cada clon es inversamente proporcional a su afinidad. Es decir, los clones menos afines son mutados con un porcentaje más alto que aquellos más afines.

La selección negativa se encarga de disminuir la cantidad de clones idénticos en la población de clones C , reemplazando algunos de ellos por anticuerpos nuevos generados aleatoriamente. Solo una cierta cantidad de éstos son producidos por generación; esta cantidad es controlada por el usuario. Uno de los últimos pasos es la actualización o mejora global/local. Este paso puede ser visto como la selección positiva, donde aquellas células muy afines a antígenos son seleccionadas para su activación. En el algoritmo, los miembros de la población de clones altamente afines son asignados como la solución adjunta a un sub-problema en particular dependiendo de su valor de función de escalarización.

Una vez que todos los pasos anteriores son ejecutados sobre la población, si se cuenta con un archivo externo, se incluyen las soluciones no dominadas como parte de éste; de otra forma se continúa con el proceso de optimización hasta que se alcance el criterio de paro. Si no se cuenta con un archivo externo, al final de la ejecución del algoritmo se devuelve la población principal P como el conjunto de aproximación final.

Algoritmo 4: Algoritmo de SIAMD

Entrada:

- POM: problema de optimización multi-objetivo,
- un criterio de paro,
- N : el número de subproblemas considerados en MOEA/D,
- un conjunto de vectores de pesos uniformemente distribuidos $\lambda^1, \dots, \lambda^N$,
- T : un número de vectores de pesos en el vecindario de cada vector de peso
- N_c : o $|C|$ tamaño de la población de clones C

inicio**Inicialización;** $EP = \emptyset$;

Calcular las distancias Euclidianas entre dos vectores de pesos cualquiera y determinar los T vectores más cercanos para cada vector. Por cada $i = 1, \dots, N$, encontrar $B(i) = \{i_1, \dots, i_N\}$, donde $\lambda^{i_1}, \dots, \lambda^{i_T}$ son los T vectores de pesos más cercanos a λ^i ;

Generar aleatoriamente una población inicial Ab^1, \dots, Ab^N o por un método específico al problema. Asignar $FV^i = F(x^i)$;

Actualización;**mientras** *no se alcance el criterio de paro* **hacer** **para** $i = 0$ **a** N **hacer** **Actualización** del punto de referencia z^* : Para cada $j = 1, \dots, k$ si $z_j < f_j(y)$, entonces $z_j = f_j(y)$; **Clonación** Algoritmo 5; **Mutación** Algoritmo 6; **Selección negativa** Algoritmo 7; **Actualización local/global (selección positiva):** Por cada $i = 1, \dots, N_c$ y por cada índice $j \in B(i)$, si $g^{scl}(C_i|\lambda, z) \leq g^{scl}(Ab_j|\lambda, z)$ entonces $Ab_j = C_i$ y $FV^j = F(C_i)$; **Actualización de EP** ; **fin****fin****fin**

Algoritmo 5: Clonación(P, C)**Entrada:** P : población principal, $N_C = |C|$: tamaño de la población de clones**Salida:** C : población de clones**inicio** **para** $i \leftarrow 1$ **a** N **hacer**

$$n_c = \lceil N_C \times \frac{\frac{1}{aff_i}}{\sum_{j=1}^{N_C} \frac{1}{aff_j}} \rceil;$$

$$C_i = n_c \otimes P_i;$$

$$C = C \cup C_i;$$

fin**fin****Algoritmo 6: Mutación**(C)**Entrada:** C : Población de clones**Salida:** C : Población de clones mutados**inicio** Normalizar la afinidad para cada elementos dentro de C ; **para** $i \leftarrow 1$ **a** N_C **hacer**

$$pm = \exp(-10 * aff_i);$$

 Generar un número aleatorio U entre 0 y 1; **si** $U > pm$ **entonces** mutar(C_i) **fin** **fin****fin****Algoritmo 7: Selección negativa**(C)**Entrada:** C : población de clones, N_{ns} : número máximo de nuevos individuos**Salida:** C : población de clones**inicio**

número actual de reemplazos = 0;

para $i \leftarrow 1$ **a** N_C **hacer** **si** c_i idéntico a su padre **entonces**

Asignar una afinidad de 0;

si $N_R < \text{número actual de reemplazos}$ **entonces** **Reemplazar**(P, N_R) Algoritmo 8;

número actual de reemplazos++;

fin **fin** **fin****fin****Algoritmo 8: Reemplazar**(P, N_R)**Entrada:** C : población de clones**Salida:** C **inicio** **para** $i \leftarrow 1$ **a** N_c **hacer** **si** C cumple criterio para reemplazo **entonces**

Capítulo 5

Resultados experimentales

A continuación exploramos el desempeño del algoritmo propuesto con respecto a algunos SIAMs y AEMOs pertenecientes al estado del arte en problemas cuya cantidad de objetivos varía desde tres hasta diez. También exploramos la eficacia del SIAM puro en contraste con su versión utilizando un operador de recombinación en la búsqueda.

5.1. Problemas de prueba

Para llevar a cabo los experimentos seleccionamos dos conjuntos de prueba. El primero es el conjunto *Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler* o DTLZ [42] del cual se toman siete instancias. El segundo conjunto corresponde a *The Walking Fish Group* o WFG [43] donde se contemplan los nueve problemas que le conforman. Los detalles, así como las expresiones matemáticas y características de los problemas pueden consultarse en el Apéndice A. Los problemas de minimización previamente seleccionados son escalables tanto en el número de objetivos como en el número de variables, y muestran una serie de características importantes en la evaluación del desempeño de un optimizador multi-objetivo como: geometrías de frentes de Pareto variadas, frentes degenerados, separabilidad y frentes multi-frontales, entre otras.

Para el conjunto de problemas DTLZ, la cantidad de variables se asigna utilizando la siguiente expresión $n = m + k - 1$, donde m indica la cantidad de objetivos y k es una constante que para DTLZ1 es $k = 5$, para DTLZ2-6 $k = 10$ y para DTLZ7 $k = 20$. Para los problemas WFG la cantidad de variables correspondientes para cada problema por objetivo se especifica en la tabla 5.1, donde también se especifica los cantidad de variables de posición.

Tabla 5.1: Parámetros.

| Parámetros | 3D | 4D | 5D | 6D | 7D | 8D | 9D | 10D |
|------------|---------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| N | 136 | 166 | 175 | 203 | 210 | 240 | 270 | 290 |
| Nicho | 27 | 33 | 35 | 40 | 42 | 54 | 58 | 60 |
| WFG | Variables | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 40 |
| | Variables de posición | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| SBX | $p_c = 1.0, \eta_c = 20, \eta_m = 20$ | | | | | | | |

5.2. Indicadores de desempeño

Para realizar comparaciones entre conjuntos de aproximación producidos por distintos AEMOs y SIAMs, en los experimentos empleamos tres indicadores de desempeño: el hipervolumen [44], la Distancia Generacional Invertida modificada (IGD+) [45] y el espaciado [46].

El hipervolumen corresponde al tamaño del área dominada en el espacio objetivo por un conjunto de aproximación demarcado por un punto de referencia. Se puede interpretar como la suma de los rectángulos cubiertos por las soluciones óptimas de Pareto. Su expresión matemática es la siguiente:

$$I_{HV}(A : z^{\vec{ref}}) = \{\cup \text{volumen}(v : z^{\vec{ref}}) | v \in A\} \tag{5.1}$$

donde A es el conjunto de aproximación y $z^{\vec{ref}}$ es el punto de referencia. La selección de este último es de suma importancia en el cálculo de este indicador, por lo que los puntos utilizados se especifican en la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Puntos de referencia para el cálculo del hipervolumen.

| Problema | Punto de referencia |
|-------------|----------------------------|
| DTLZ1-2,4-6 | $(2, 2, \dots, 2)$ |
| DTLZ3 | $(4, 4, \dots, 4)$ |
| WFG1-9 | $(3, 5, \dots, 2 * k + 1)$ |

El indicador IGD+ es una versión modificada de la Distancia Generacional Invertida (IGD) cuya intención es disminuir los resultados engañosos ocasionados en algunos escenarios. Para su cálculo se requiere un conjunto de referencia de soluciones no dominadas en el espacio objetivo. Si la solución evaluada es dominada por un punto de referencia, se utiliza la distancia Euclidiana sin modificación. Si ambos puntos (la solución y el punto de referencia) son mutuamente no dominados, se calcula la distancia mínima desde el punto de referencia a la región no dominada por la solución. La expresión matemática es la siguiente:

$$IGD^+(A) = \frac{1}{|Z|} \left(\sum_{j=1}^{|Z|} \hat{d}_j^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.2)$$

donde en lugar de utilizar la norma Euclidiana como en IGD, se utiliza:

$$\hat{d}_j = \sqrt{(\max\{z_1 - a_1, 0\})^2 + \dots + (\max\{z_k - a_k, 0\})^2} \quad (5.3)$$

El indicador espaciado (*spacing*) [46] refleja la varianza en la distancia de cada miembro que es parte del frente óptimo de Pareto con su vecino más cercano. Al tomar en cuenta los vecinos de un miembro, este indicador no refleja hoyos en conjunto de aproximación que se evalúa y no brinda mucha información cuando éstos se encuentran separados pero no uniformemente distribuidos. Se busca un frente que minimice este valor. El espaciado se calcula a través de la siguiente expresión:

$$SP(PF) = \sqrt{\frac{1}{|PF| - 1} \sum_{j=1}^{|PF|} (\bar{d} - d_1(y_j, PF \setminus \{y_j\}))^2} \quad (5.4)$$

donde $d_1(y_j, PF \setminus \{y_j\}) = \min_{y \in PF \setminus \{y_j\}} \|y - y_j\|_1$ es la distancia l_1 de $y_j \in PF$ al conjunto $PF \setminus \{y_j\}$ y \bar{d} es la media de toda $d_1(y_j, PF \setminus \{y_j\})$ para $j = 1, 2, \dots, |PF|$

5.3. Experimentos

A continuación y en las secciones 5.4 y 5.5, detallamos la configuración de los experimentos y los parámetros de cada uno de los siete algoritmos seleccionados para comparación. En cada experimento, realizamos 50 ejecuciones independientes para cada algoritmo, problema y número de objetivos. Las implementaciones de SIAMDX, MOEAD y NSGA2 fueron realizadas en C/C++ en el proyecto EMO [47]; las implementaciones de MOIA-DCSS, VD-MOIA, BCD-MOIA y HEIA fueron realizadas en Java en el marco algorítmico jMetal [48].

SIAMDX, MOIA-DCSS, VD-MOIA, BCD-MOIA y MOEA/D requieren un conjunto de vectores ponderados que fueron generados utilizando el método Das-Dennis [49] para 3, 4 y 7 objetivos. Los conjuntos de vectores ponderados para 5,6-10 objetivos fueron generados utilizando un enfoque de dos capas [14, 50]. Además de los conjuntos previamente mencionados, los algoritmos basados en descomposición requieren un tamaño específico de vecindario o nicho denotado por T ; dichos valores se observan en la tabla 5.1. El tamaño de población para cada número de objetivos, N , así como la cantidad total de evaluaciones designadas como criterio de parada se pueden observar en la tabla 5.1. Los SIAMs requieren de un tamaño de población de clones N_A que fue fijado en 20 para todos los experimentos.

5.4. Comparación entre SIAM puro y SIAM con recombinación (SIAMDX)

Como establecimos en el capítulo 3, un SIAM emula procesos inmunológicos en una computadora con el objetivo de resolver un problema de optimización multi-objetivo. Un SIAM es puro solo si se utilizan operadores inspirados en algún proceso inmune. Uno de los operadores inmunes es la hipermutación somática; la idea detrás de este tipo de operador es que la búsqueda se pueda efectuar a través de mutaciones guiadas a un ritmo acelerado. El porcentaje de mutación no permanece estático a lo largo de la búsqueda, sino que es modificado para reflejar el nivel de afinidad de un anticuerpo dado contra un antígeno. Entre más alta afinidad posea un determinado anticuerpo, su tasa de mutación será menor y por lo tanto sufrirá menos cambios una vez se mute. En el caso opuesto, los anticuerpos con menor afinidad serán sometidos a una mayor cantidad de modificaciones con lo que se pretende elevar su afinidad.

Un SIAM híbrido se vale tanto de operadores inmunológicos como de elementos tomados de otros AEMOs. La intención principal de los algoritmos híbridos es aprovechar las fortalezas de distintos paradigmas de la inteligencia computacional para producir un mejor optimizador. Los SIAMs que utilizan operadores de recombinación, por ejemplo, suelen colocarse en esta última categoría. El argumento principal es que no existe un proceso inmunológico natural que referencie explícitamente la idea de cruza a nivel inmunológico.

Sin embargo, se puede ver el proceso de la selección natural utilizada en los algoritmos evolutivos actuando en el sistema inmune natural. Por ejemplo, en la manera en que los linfocitos son seleccionados para someterse al proceso de clonación con base en su afinidad a un patógeno dado. Este se denomina *microevolución inmune* [9] y consta de procesos como la selección clonal y maduración de afinidad (Capítulo 3). La suposición del principio de selección clonal es que el repertorio inmune tiene una gran variedad debido al proceso de recombinación genética aleatoria de los segmentos de genes de distintas bibliotecas, más la inserción aleatoria de secuencias de genes durante el desarrollo de las células. La diversidad del repertorio inmune asegura que por lo menos uno de los anticuerpos que lo componen pueda ser lo suficientemente afín a un antígeno como para unírsele y así desencadenar su proliferación y comenzar la respuesta inmune.

Lo anterior destaca las similitudes entre los SIAs y los algoritmos evolutivos si tomamos en cuenta que los procesos responsables de la producción de anticuerpos en los SIAs (recombinación genética y mutación), son los mismos que aquellos que se ven involucrados en la reproducción de las especies (cruza y mutación). Aún cuando la cruza y la recombinación genética son operadores mediante los cuales se obtiene variación, es importante tener en cuenta que ambos difieren en la forma en la que se aplican. El primero, implica la inserción o eliminación aleatoria de nucleótidos de segmentos de genes de inmunoglobulina y el segundo, se refiere a la combinación del material genético de dos individuos produciendo hijos que tendrán una mezcla genética de sus padres.

Bajo la idea anterior y tratando de emular el proceso inmune de la manera más fidedig-

na posible, hemos desarrollado una versión incorporando un operador de recombinación. A falta de un operador de recombinación inmunológico, el operador de recombinación seleccionado fue SBX para observar el comportamiento del algoritmo incorporando variación. Esta adición se lleva a cabo seleccionando a los padres de entre la población de clones e incorporando al hijo a esta misma para someterla a mutación y al proceso de selección.

En el conjunto DTLZ (5.3), SIAMDX tiene mejores resultados que SIAMD de manera general. En los problemas DTLZ1, DTLZ2, DTLZ3, DTLZ5 y DTLZ7, SIAMDX supera a SIAMD en todos los objetivos. De forma interesante, en los problemas DTLZ4 y DTLZ6, SIAMD obtiene mejores resultados que SIAMDX en todos los objetivos para DTLZ4 y en 3, 5 y 6 objetivos para DTLZ6. Esto puede deberse a la capacidad de exploración pura de SIAMD que se vale sólo de la mutación para realizar la búsqueda. En el conjunto de problemas WFG, SIAMDX muestra un ventaja absoluta sobre los resultados de SIAMD. En contraste, SIAMD obtiene mejores resultados en cuanto a espaciado en la mayor parte de problemas de ambos conjuntos.

Tabla 5.3: Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas DTLZ según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de hipervolumen se indica en negritas.

| Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | | | |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|-----------------|-------|----------|-----------------|-----------------|-------|-----------------|-----------------|
| 3D | DTLZ1 | 7.97E+00 | 7.97E+00 | 5D | DTLZ1 | 3.16E+01 | 3.19E+01 | 7D | DTLZ1 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 9D | DTLZ1 | 5.08E+02 | 5.11E+02 | | | |
| | | 1.51E-03 | 1.50E-04 | | | 2.43E-01 | 2.33E-02 | | | 1.76E-01 | 1.01E-01 | | | 1.31E+00 | 1.88E-01 | | | |
| | DTLZ2 | 7.39E+00 | 7.39E+00 | | DTLZ2 | 3.05E+01 | 3.06E+01 | | DTLZ2 | 1.25E+02 | 1.25E+02 | | DTLZ2 | 4.71E+02 | 4.74E+02 | DTLZ2 | 4.71E+02 | 4.74E+02 |
| | | 1.65E-03 | 1.37E-03 | | | 1.93E-01 | 1.79E-01 | | | 3.93E-01 | 1.28E+00 | | | 4.43E+00 | 5.34E+00 | | | |
| | DTLZ3 | 6.26E+01 | 6.34E+01 | | DTLZ3 | 9.22E+02 | 1.02E+03 | | DTLZ3 | 1.61E+04 | 1.63E+04 | | DTLZ3 | 2.39E+05 | 2.59E+05 | DTLZ3 | 2.39E+05 | 2.59E+05 |
| | | 9.88E-01 | 2.69E-03 | | | 2.50E+01 | 1.80E+00 | | | 2.08E+02 | 6.78E+01 | | | 2.17E+04 | 5.76E+02 | | | |
| | DTLZ4 | 7.21E+00 | 6.70E+00 | | DTLZ4 | 3.07E+01 | 3.00E+01 | | DTLZ4 | 1.26E+02 | 1.25E+02 | | DTLZ4 | 4.49E+02 | 4.39E+02 | DTLZ4 | 4.49E+02 | 4.39E+02 |
| 1.53E+01 | | 1.02E+00 | 1.21E+00 | 2.52E+00 | | 2.81E-01 | 2.56E+00 | 1.58E+01 | | 1.81E+01 | | | | | | | | |
| DTLZ5 | 6.09E+00 | 6.09E+00 | DTLZ5 | 2.31E+01 | 2.32E+01 | DTLZ5 | 8.71E+01 | 8.79E+01 | DTLZ5 | 3.60E+02 | 3.63E+02 | DTLZ5 | 3.60E+02 | 3.63E+02 | | | | |
| | 1.18E+01 | 1.09E-05 | | 7.19E-02 | 8.46E-02 | | 2.72E-01 | 1.09E-01 | | 1.05E+00 | 6.10E-01 | | | | | | | |
| DTLZ6 | 6.02E+00 | 5.88E+00 | DTLZ6 | 2.24E+01 | 2.17E+01 | DTLZ6 | 7.35E+01 | 7.77E+01 | DTLZ6 | 3.22E+02 | 3.39E+02 | DTLZ6 | 3.22E+02 | 3.39E+02 | | | | |
| | 1.11E+01 | 6.61E-02 | | 4.22E-02 | 3.00E-01 | | 5.40E+00 | 2.12E+00 | | 8.88E+00 | 6.12E+00 | | | | | | | |
| DTLZ7 | 1.58E+01 | 1.61E+01 | DTLZ7 | 1.58E+01 | 2.85E+01 | DTLZ7 | 1.04E+01 | 9.30E+00 | DTLZ7 | 3.38E+00 | 3.40E+01 | DTLZ7 | 3.38E+00 | 3.40E+01 | | | | |
| | 1.87E+01 | 1.88E+00 | | 6.08E+00 | 6.30E+00 | | 6.27E+00 | 1.17E+01 | | 7.14E+00 | 3.01E+01 | | | | | | | |
| 4D | DTLZ1 | 1.60E+01 | 1.60E+01 | 6D | DTLZ1 | 6.26E+01 | 6.36E+01 | 8D | DTLZ1 | 2.54E+02 | 2.56E+02 | 10D | DTLZ1 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | | | |
| | | 2.31E-03 | 4.90E-05 | | | 6.11E-01 | 1.58E-01 | | | 6.40E-01 | 1.03E-01 | | | 2.93E+00 | 4.15E-01 | | | |
| | DTLZ2 | 1.54E+01 | 1.55E+01 | | DTLZ2 | 5.88E+01 | 5.90E+01 | | DTLZ2 | 2.35E+02 | 2.37E+02 | | DTLZ2 | 9.33E+02 | 9.44E+02 | DTLZ2 | 9.33E+02 | 9.44E+02 |
| | | 3.96E-03 | 2.19E-03 | | | 5.72E-01 | 6.11E-01 | | | 2.98E+00 | 2.00E+00 | | | 1.36E+01 | 9.00E+00 | | | |
| | DTLZ3 | 2.55E+02 | 2.55E+02 | | DTLZ3 | 3.66E+03 | 4.01E+03 | | DTLZ3 | 5.95E+04 | 6.48E+04 | | DTLZ3 | 9.43E+05 | 1.04E+06 | DTLZ3 | 9.43E+05 | 1.04E+06 |
| | | 1.28E+00 | 3.52E-03 | | | 1.32E+02 | 2.63E+01 | | | 4.98E+03 | 1.51E+02 | | | 8.36E+04 | 2.75E+03 | | | |
| | DTLZ4 | 1.53E+01 | 1.48E+01 | | DTLZ4 | 6.00E+01 | 5.96E+01 | | DTLZ4 | 2.27E+02 | 2.24E+02 | | DTLZ4 | 9.02E+02 | 8.69E+02 | DTLZ4 | 9.02E+02 | 8.69E+02 |
| 2.56E-01 | | 8.85E-01 | 9.33E-01 | 5.78E-01 | | 5.60E+00 | 8.24E+00 | 2.96E+01 | | 3.22E+01 | | | | | | | | |
| DTLZ5 | 1.18E+01 | 1.19E+01 | DTLZ5 | 4.54E+01 | 4.56E+01 | DTLZ5 | 1.81E+02 | 1.82E+02 | DTLZ5 | 7.18E+02 | 7.23E+02 | DTLZ5 | 7.18E+02 | 7.23E+02 | | | | |
| | 1.83E-02 | 3.73E-03 | | 1.20E-01 | 1.72E-01 | | 4.52E-01 | 2.39E-01 | | 2.48E+00 | 1.45E+00 | | | | | | | |
| DTLZ6 | 1.11E+01 | 1.14E+01 | DTLZ6 | 4.35E+01 | 4.21E+01 | DTLZ6 | 1.68E+02 | 1.71E+02 | DTLZ6 | 6.55E+02 | 6.72E+02 | DTLZ6 | 6.55E+02 | 6.72E+02 | | | | |
| | 2.18E-01 | 1.48E-01 | | 1.03E+00 | 7.88E-01 | | 2.35E+00 | 3.26E+00 | | 1.46E+01 | 1.42E+01 | | | | | | | |
| DTLZ7 | 1.87E+01 | 2.03E+01 | DTLZ7 | 1.54E+01 | 2.49E+01 | DTLZ7 | 8.63E+00 | 4.27E+01 | DTLZ7 | 2.15E+00 | 3.36E+01 | DTLZ7 | 2.15E+00 | 3.36E+01 | | | | |
| | 3.44E+00 | 4.93E+00 | | 7.25E+00 | 8.03E+00 | | 1.02E+01 | 2.59E+01 | | 6.62E+00 | 3.05E+01 | | | | | | | |

5.5. Comparación con otros SIAMs

En el primer experimento, comparamos el desempeño de SIAMDX con respecto a cuatro SIAMs: HEIA, MOIA-DCSS, VD-MOIA y BCD-MOIA. De entre estos, tres utilizan el paradigma algorítmico de descomposición y sus detalles se abordan en el capítulo 3.

Tabla 5.4: Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas WFG según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de hipervolumen se indica en negritas.

| Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX |
|------|----------|----------------------|-----------------------------|------|----------|-----------------------------|-----------------------------|------|----------|----------------------|-----------------------------|------|----------|----------------------|-----------------------------|
| 3D | WFG1 | 4.64E+01 3.63E+02 | 5.20E+01 1.33E+00 | 5D | WFG1 | 3.91E+03 1.00E+02 | 4.59E+03 8.11E+01 | 7D | WFG1 | 6.03E+05 6.97E+04 | 7.56E+05 5.15E+04 | 9D | WFG1 | 2.20E+08 3.55E+06 | 2.47E+08 2.09E+06 |
| | WFG2 | 9.24E+01 7.67E+02 | 9.69E+01 1.01E+00 | | WFG2 | 9.29E+03 2.32E+02 | 9.48E+03 2.13E+02 | | WFG2 | 1.30E+06 1.59E+05 | 1.56E+06 1.87E+05 | | WFG2 | 5.37E+08 2.48E+07 | 6.35E+08 1.20E+07 |
| | WFG3 | 7.11E+01 5.59E+02 | 7.31E+01 6.88E-01 | | WFG3 | 5.53E+03 1.02E+02 | 5.72E+03 1.32E+02 | | WFG3 | 9.01E+05 1.92E+04 | 9.61E+05 3.18E+04 | | WFG3 | 3.67E+08 7.93E+06 | 4.07E+08 6.29E+06 |
| | WFG4 | 7.44E+01 2.81E-01 | 7.51E+01 2.30E-01 | | WFG4 | 6.97E+03 1.91E+02 | 7.25E+03 1.79E+02 | | WFG4 | 6.74E+05 6.96E+04 | 1.15E+06 6.10E+04 | | WFG4 | 3.43E+08 1.14E+07 | 3.93E+08 2.19E+07 |
| | WFG5 | 7.01E+01 2.19E-01 | 7.09E+01 3.80E-01 | | WFG5 | 6.51E+03 2.02E+02 | 6.88E+03 1.76E+02 | | WFG5 | 7.86E+05 7.54E+04 | 1.14E+06 1.91E+05 | | WFG5 | 3.48E+08 1.26E+07 | 3.85E+08 2.66E+07 |
| | WFG6 | 7.10E+01 3.37E-01 | 7.25E+01 5.13E-01 | | WFG6 | 6.38E+03 2.29E+02 | 6.84E+03 1.99E+02 | | WFG6 | 6.44E+05 7.44E+04 | 8.14E+05 1.21E+05 | | WFG6 | 3.15E+08 1.22E+07 | 3.81E+08 2.54E+07 |
| | WFG7 | 7.26E+01 2.95E-01 | 7.48E+01 2.91E-01 | | WFG7 | 6.37E+03 1.65E+02 | 7.10E+03 1.85E+02 | | WFG7 | 6.67E+05 6.44E+04 | 1.33E+06 9.53E+04 | | WFG7 | 2.87E+08 1.59E+07 | 3.87E+08 2.67E+07 |
| | WFG8 | 6.79E+01 1.16E+00 | 7.12E+01 4.08E-01 | | WFG8 | 5.35E+03 4.10E+02 | 6.29E+03 2.51E+02 | | WFG8 | 5.29E+05 6.91E+04 | 7.35E+05 5.50E+04 | | WFG8 | 2.93E+08 1.67E+07 | 3.27E+08 1.40E+07 |
| | WFG9 | 6.98E+01 1.40E+00 | 7.12E+01 1.51E+00 | | WFG9 | 6.19E+03 2.92E+02 | 6.74E+03 4.60E+02 | | WFG9 | 5.84E+05 1.43E+05 | 7.39E+05 1.22E+05 | | WFG9 | 2.79E+08 7.93E+07 | 3.43E+08 4.81E+07 |
| 4D | WFG1 | 3.63E+02 9.82E+00 | 4.38E+02 9.64E+00 | 6D | WFG1 | 4.76E+04 1.10E+03 | 5.48E+04 1.69E+03 | 8D | WFG1 | 1.22E+07 1.31E+05 | 1.35E+07 1.54E+05 | 10D | WFG1 | 4.49E+09 5.92E+08 | 4.99E+09 6.67E+07 |
| | WFG2 | 7.67E+02 1.80E+01 | 8.72E+02 1.17E+01 | | WFG2 | 1.22E+05 2.71E+03 | 1.21E+05 3.95E+03 | | WFG2 | 2.90E+07 9.45E+05 | 3.34E+07 6.18E+05 | | WFG2 | 1.15E+10 6.22E+08 | 1.32E+10 4.06E+08 |
| | WFG3 | 5.59E+02 1.34E+01 | 6.13E+02 9.97E+00 | | WFG3 | 6.70E+04 2.18E+03 | 7.77E+04 2.11E+03 | | WFG3 | 2.02E+07 4.44E+05 | 2.19E+07 3.59E+05 | | WFG3 | 7.68E+09 1.51E+08 | 8.55E+09 1.58E+08 |
| | WFG4 | 6.61E+02 1.64E+01 | 6.79E+02 9.63E+00 | | WFG4 | 8.20E+04 3.54E+03 | 8.50E+04 3.13E+03 | | WFG4 | 1.86E+07 8.51E+05 | 2.13E+07 8.47E+05 | | WFG4 | 1.03E+09 2.48E+08 | 7.83E+09 5.94E+08 |
| | WFG5 | 6.24E+02 1.01E+01 | 6.53E+02 2.20E+01 | | WFG5 | 7.70E+04 2.77E+03 | 8.19E+04 4.04E+03 | | WFG5 | 1.94E+07 1.07E+06 | 2.15E+07 7.44E+05 | | WFG5 | 7.17E+09 1.98E+08 | 8.25E+09 3.27E+08 |
| | WFG6 | 6.17E+02 9.82E+00 | 6.43E+02 8.28E+00 | | WFG6 | 7.48E+04 2.64E+03 | 7.88E+04 2.79E+03 | | WFG6 | 1.74E+07 8.39E+05 | 2.06E+07 9.80E+05 | | WFG6 | 6.24E+09 2.00E+08 | 7.49E+09 7.61E+08 |
| | WFG7 | 6.07E+02 1.20E+01 | 6.65E+02 5.90E+00 | | WFG7 | 7.40E+04 2.74E+03 | 8.18E+04 3.13E+03 | | WFG7 | 1.62E+07 9.11E+05 | 2.14E+07 1.14E+06 | | WFG7 | 5.89E+09 2.91E+08 | 7.76E+09 6.28E+08 |
| | WFG8 | 5.25E+02 2.53E+01 | 6.22E+02 8.48E+00 | | WFG8 | 6.00E+04 5.41E+03 | 6.44E+04 6.69E+03 | | WFG8 | 1.61E+07 7.45E+05 | 1.78E+07 7.17E+05 | | WFG8 | 6.10E+09 3.01E+08 | 6.84E+09 3.65E+08 |
| | WFG9 | 5.57E+02 4.57E+01 | 6.37E+02 1.62E+01 | | WFG9 | 6.98E+04 6.45E+03 | 7.84E+04 5.79E+03 | | WFG9 | 1.58E+07 1.39E+06 | 1.95E+07 1.79E+06 | | WFG9 | 5.92E+09 3.86E+08 | 6.83E+09 8.91E+08 |

Tabla 5.5: Resultados de la comparación de los valores de IGD+ de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas DTLZ según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de IGD+ se indica en negritas.

| Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX |
|------|----------|-----------------------------|-----------------------------|------|----------|-----------------------------|-----------------------------|------|----------|-----------------------------|-----------------------------|------|----------|-----------------------------|-----------------------------|
| 3D | DTLZ1 | 2.28E-02 2.32E-03 | 2.23E-02 3.89E-02 | 5D | DTLZ1 | 6.71E-02 3.46E-03 | 5.74E-02 7.81E-04 | 7D | DTLZ1 | 1.73E-01 1.93E-02 | 1.26E-01 1.73E-02 | 9D | DTLZ1 | 1.64E-01 1.96E-02 | 1.07E-01 1.09E-02 |
| | DTLZ2 | 2.92E-02 4.22E-04 | 2.93E-02 2.76E-04 | | DTLZ2 | 1.90E-01 1.05E-02 | 1.82E-01 9.33E-03 | | DTLZ2 | 2.93E-01 1.11E-02 | 2.88E-01 1.90E-02 | | DTLZ2 | 4.45E-01 1.09E-02 | 4.45E-01 1.17E-02 |
| | DTLZ3 | 1.73E-01 1.27E-01 | 7.23E-02 2.82E-01 | | DTLZ3 | 3.52E-01 2.86E-02 | 1.92E-01 1.21E-02 | | DTLZ3 | 5.21E-01 1.21E-01 | 3.42E-01 4.44E-02 | | DTLZ3 | 8.72E-01 4.78E-01 | 4.59E-01 1.58E-02 |
| | DTLZ4 | 7.54E-02 8.16E-02 | 8.03E-02 8.74E-02 | | DTLZ4 | 1.80E-01 3.99E-02 | 1.93E-01 4.84E-02 | | DTLZ4 | 2.69E-01 1.10E-02 | 2.71E-01 2.09E-02 | | DTLZ4 | 4.86E-01 2.29E-02 | 5.21E-01 1.99E-02 |
| | DTLZ5 | 3.83E-03 2.84E-05 | 3.79E-03 2.26E-06 | | DTLZ5 | 1.10E-02 1.84E-03 | 3.73E-03 1.54E-03 | | DTLZ5 | 4.27E-02 5.05E-03 | 2.67E-02 8.15E-03 | | DTLZ5 | 2.10E-02 3.25E-03 | 1.71E-02 1.25E-03 |
| | DTLZ6 | 4.97E-03 1.46E-03 | 1.15E-01 3.85E-02 | | DTLZ6 | 1.14E-02 1.30E-03 | 1.12E-01 2.78E-02 | | DTLZ6 | 2.72E-01 9.48E-02 | 1.43E-01 3.53E-02 | | DTLZ6 | 1.89E-01 4.67E-02 | 1.37E-01 3.36E-02 |
| | DTLZ7 | 1.57E-01 1.30E-01 | 8.51E-02 2.49E-02 | | DTLZ7 | 6.05E-01 1.55E-01 | 4.82E-01 5.59E-02 | | DTLZ7 | 7.38E-01 8.60E-02 | 4.48E-01 5.11E-02 | | DTLZ7 | 6.63E-01 1.81E-01 | 8.92E-01 5.71E-02 |
| 4D | DTLZ1 | 6.77E-02 5.66E-03 | 5.48E-02 3.08E-02 | 6D | DTLZ1 | 8.15E-02 2.86E-03 | 7.32E-02 1.32E-03 | 8D | DTLZ1 | 1.57E-01 1.77E-02 | 1.03E-01 5.27E-03 | 10D | DTLZ1 | 1.69E-01 1.63E-02 | 1.17E-01 1.10E-02 |
| | DTLZ2 | 8.93E-02 1.18E-03 | 8.84E-02 7.23E-04 | | DTLZ2 | 3.07E-01 1.33E-02 | 2.94E-01 1.22E-02 | | DTLZ2 | 4.38E-01 1.43E-02 | 4.33E-01 1.16E-02 | | DTLZ2 | 4.92E-01 1.41E-02 | 4.88E-01 1.38E-02 |
| | DTLZ3 | 2.12E-01 8.62E-02 | 8.83E-02 1.07E-03 | | DTLZ3 | 4.60E-01 3.36E-02 | 3.24E-01 1.35E-02 | | DTLZ3 | 7.34E-01 2.37E-01 | 4.39E-01 1.03E-02 | | DTLZ3 | 8.75E-01 3.19E-01 | 5.02E-01 1.75E-02 |
| | DTLZ4 | 1.07E-01 3.53E-02 | 1.12E-01 4.42E-02 | | DTLZ4 | 2.98E-01 1.94E-02 | 2.99E-01 2.20E-02 | | DTLZ4 | 4.82E-01 2.63E-02 | 5.28E-01 2.04E-02 | | DTLZ4 | 5.34E-01 2.63E-02 | 5.76E-01 2.30E-02 |
| | DTLZ5 | 9.79E-03 6.79E-04 | 7.24E-03 6.03E-05 | | DTLZ5 | 1.04E-02 1.77E-03 | 8.45E-03 2.04E-03 | | DTLZ5 | 2.02E-02 1.87E-03 | 1.78E-02 7.85E-04 | | DTLZ5 | 2.27E-02 3.31E-03 | 1.76E-02 1.51E-03 |
| | DTLZ6 | 1.01E-01 4.07E-02 | 1.29E-01 4.28E-02 | | DTLZ6 | 1.79E-02 6.50E-03 | 1.12E-01 3.17E-02 | | DTLZ6 | 1.59E-01 2.68E-02 | 1.30E-01 3.82E-02 | | DTLZ6 | 1.69E-01 4.51E-02 | 1.36E-01 4.14E-02 |
| | DTLZ7 | 3.15E-01 1.11E-01 | 2.40E-01 1.33E-02 | | DTLZ7 | 7.90E-01 1.07E-01 | 6.71E-01 5.69E-02 | | DTLZ7 | 8.19E-01 7.57E-02 | 1.95E+01 4.82E-02 | | DTLZ7 | 8.72E-01 7.00E-02 | 1.18E+00 5.28E-02 |

Tabla 5.6: Resultados de la comparación de los valores de IGD+ de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas WFG según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de IGD+ se indica en negritas.

| Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX |
|------|----------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------|-----------------|------|----------|----------|-----------------|
| 3D | WFG1 | 1.44E+00 | 1.24E+00 | 5D | WFG1 | 1.74E+00 | 1.59E+00 | 7D | WFG1 | 2.41E+00 | 2.20E+00 | 9D | WFG1 | 2.59E+00 | 2.21E+00 |
| | | 1.10E-02 | 1.27E-02 | | | 1.30E-02 | 2.47E-02 | | | 7.15E-02 | 9.14E-02 | | | 7.35E-02 | 4.01E-02 |
| | | 1.95E-01 | 8.10E-02 | | | 2.66E-01 | 2.89E-01 | | | 2.52E+00 | 1.35E+00 | | | 2.62E+00 | 3.43E-01 |
| | WFG2 | 3.45E-02 | 1.32E-02 | | WFG2 | 3.97E-02 | 4.97E-02 | | WFG2 | 5.40E-01 | 9.26E-01 | | WFG2 | 5.84E-01 | 7.86E-02 |
| | | 2.26E-01 | 1.29E-01 | | | 1.18E+00 | 1.10E+00 | | | 2.23E+00 | 2.28E+00 | | | 1.17E+00 | 7.32E-01 |
| | | 3.99E-02 | 3.14E-02 | | | 9.26E-02 | 8.66E-02 | | | 2.34E-01 | 1.28E-01 | | | 1.14E-01 | 5.04E-02 |
| | WFG3 | 1.29E-01 | 1.16E-01 | | WFG3 | 8.16E-01 | 8.00E-01 | | WFG3 | 3.97E+00 | 2.63E+00 | | WFG3 | 5.24E+00 | 1.99E+00 |
| | | 4.11E-03 | 2.52E-03 | | | 3.44E-02 | 3.87E-02 | | | 4.66E-01 | 4.19E-01 | | | 4.98E-01 | 4.83E-01 |
| | | 1.79E-01 | 1.73E-01 | | | 8.87E-01 | 8.27E-01 | | | 3.23E+00 | 2.14E+00 | | | 4.50E+00 | 2.15E+00 |
| WFG4 | 2.80E-03 | 2.26E-03 | WFG4 | 4.34E-02 | 4.15E-02 | WFG4 | 5.59E-01 | 6.13E-01 | WFG4 | 5.18E-01 | 1.04E-01 | | | | |
| | 1.85E-01 | 1.59E-01 | | 9.35E-01 | 8.57E-01 | | 3.85E+00 | 2.34E+00 | | 5.35E+00 | 2.00E+00 | | | | |
| | 4.77E-03 | 7.62E-03 | | 3.10E-02 | 2.93E-02 | | 3.05E-01 | 4.64E-01 | | 4.09E-01 | 3.01E-01 | | | | |
| WFG5 | 1.66E-01 | 1.21E-01 | WFG5 | 9.37E-01 | 8.15E-01 | WFG5 | 3.96E+00 | 1.68E+00 | WFG5 | 5.70E+00 | 2.21E+00 | | | | |
| | 6.63E-03 | 2.57E-03 | | 3.49E-02 | 3.54E-02 | | 3.64E-01 | 4.45E-01 | | 3.44E-01 | 7.45E-01 | | | | |
| | 2.43E-01 | 1.87E-01 | | 1.21E+00 | 9.67E-01 | | 4.02E+00 | 3.04E+00 | | 6.07E+00 | 4.73E+00 | | | | |
| WFG6 | 1.97E-02 | 6.07E-03 | WFG6 | 1.11E-01 | 5.87E-02 | WFG6 | 3.19E-01 | 2.56E-01 | WFG6 | 3.84E-01 | 3.42E-01 | | | | |
| | 2.03E-01 | 1.76E-01 | | 9.53E-01 | 8.15E-01 | | 3.85E+00 | 2.60E+00 | | 5.48E+00 | 2.14E+00 | | | | |
| | 2.11E-02 | 2.37E-02 | | 8.03E-02 | 4.80E-02 | | 5.25E-01 | 4.23E-01 | | 5.44E-01 | 8.95E-01 | | | | |
| 4D | WFG1 | 1.73E+00 | 1.48E+00 | 6D | WFG1 | 1.90E+00 | 1.76E+00 | 8D | WFG1 | 2.41E+00 | 2.06E+00 | 10D | WFG1 | 2.77E+00 | 2.37E+00 |
| | | 4.42E-02 | 1.59E-02 | | | 1.17E-02 | 2.62E-02 | | | 6.41E-02 | 3.10E-02 | | | 6.29E-02 | 5.29E-02 |
| | | 6.22E-01 | 2.10E-01 | | | 2.91E-01 | 3.47E-01 | | | 1.88E+00 | 3.08E-01 | | | 2.92E+00 | 4.32E-01 |
| | WFG2 | 7.23E-02 | 1.76E-02 | | WFG2 | 3.02E-02 | 5.46E-02 | | WFG2 | 3.83E-01 | 2.32E-02 | | WFG2 | 6.12E-01 | 1.80E-01 |
| | | 7.14E-01 | 3.34E-01 | | | 1.54E+00 | 1.60E+00 | | | 9.87E-01 | 5.83E-01 | | | 1.22E+00 | 7.02E-01 |
| | | 9.74E-02 | 3.60E-02 | | | 9.58E-02 | 9.45E-02 | | | 8.54E-02 | 5.11E-02 | | | 9.83E-02 | 6.03E-02 |
| | WFG3 | 4.98E-01 | 4.66E-01 | | WFG3 | 1.17E+00 | 1.16E+00 | | WFG3 | 4.05E+00 | 2.00E+00 | | WFG3 | 6.73E+00 | 5.00E+00 |
| | | 2.74E-02 | 1.47E-02 | | | 3.68E-02 | 3.06E-02 | | | 3.77E-01 | 1.70E-01 | | | 4.86E-01 | 1.37E+00 |
| | | 5.30E-01 | 5.30E-01 | | | 1.27E+00 | 1.19E+00 | | | 3.34E+00 | 2.10E+00 | | | 5.95E+00 | 2.53E+00 |
| WFG4 | 2.14E-02 | 1.06E-02 | WFG4 | 4.98E-02 | 3.19E-02 | WFG4 | 6.10E-01 | 1.20E-01 | WFG4 | 5.83E-01 | 9.80E-02 | | | | |
| | 5.68E-01 | 5.15E-01 | | 1.31E+00 | 1.22E+00 | | 4.17E+00 | 2.01E+00 | | 6.95E+00 | 2.55E+00 | | | | |
| | 1.76E-02 | 1.29E-02 | | 3.03E-02 | 2.76E-02 | | 4.88E-01 | 2.12E-01 | | 4.13E-01 | 1.02E+00 | | | | |
| WFG5 | 6.07E-01 | 4.79E-01 | WFG5 | 1.32E+00 | 1.17E+00 | WFG5 | 4.52E+00 | 1.79E+00 | WFG5 | 7.26E+00 | 2.63E+00 | | | | |
| | 2.24E-02 | 1.10E-02 | | 3.49E-02 | 2.98E-02 | | 3.76E-01 | 2.43E-01 | | 3.13E-01 | 9.08E-01 | | | | |
| | 7.85E-01 | 5.59E-01 | | 1.79E+00 | 1.45E+00 | | 4.98E+00 | 3.77E+00 | | 7.66E+00 | 6.36E+00 | | | | |
| WFG6 | 5.78E-02 | 8.59E-03 | WFG6 | 1.64E-01 | 8.69E-02 | WFG6 | 2.88E-01 | 3.96E-01 | WFG6 | 4.57E-01 | 3.84E-01 | | | | |
| | 6.60E-01 | 5.41E-01 | | 1.36E+00 | 1.21E+00 | | 4.32E+00 | 1.91E+00 | | 6.87E+00 | 3.92E+00 | | | | |
| | 1.04E-01 | 3.43E-02 | | 1.22E-01 | 9.90E-02 | | 6.96E-01 | 6.89E-01 | | 8.86E-01 | 1.79E+00 | | | | |

Tabla 5.7: Resultados de la comparación de los valores de espaciado de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas DTLZ según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de espaciado se indica en negritas.

| Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|-----------------|------|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | DTLZ1 | 2.63E-02 | 2.64E-02 | 5D | DTLZ1 | 1.05E-01 | 4.20E-02 | 7D | DTLZ1 | 2.27E-01 | 2.41E-02 | 9D | DTLZ1 | 2.16E-02 | 1.62E-02 | |
| | | 1.11E-03 | 3.76E-03 | | | 1.72E-01 | 6.64E-03 | | | 3.02E-01 | 1.33E-02 | | | 1.44E-02 | 6.72E-03 | |
| | | 7.21E-02 | 7.25E-02 | | | 1.48E-01 | 1.40E-01 | | | 1.03E-01 | 9.25E-02 | | | 4.28E-02 | 4.61E-02 | |
| | DTLZ2 | 1.77E-03 | 1.03E-03 | | DTLZ2 | 1.24E-02 | 1.14E-02 | | DTLZ2 | 2.99E-02 | 2.26E-02 | | DTLZ2 | 1.80E-02 | 2.02E-02 | |
| | | 7.01E-02 | 7.55E-02 | | | 4.42E-01 | 1.37E-01 | | | 1.10E+00 | 6.39E-02 | | | 5.91E-02 | 4.35E-02 | |
| | | 2.32E-02 | 2.26E-02 | | | 7.37E-01 | 1.46E-02 | | | 1.75E+00 | 3.13E-02 | | | 4.68E-02 | 2.12E-02 | |
| | DTLZ3 | 5.12E-02 | 5.64E-02 | | DTLZ3 | 1.28E-01 | 1.34E-01 | | DTLZ3 | 1.37E-01 | 6.39E-02 | | DTLZ3 | 1.79E-02 | 2.07E-02 | |
| 3.91E-02 | | 2.85E-02 | 3.19E-02 | 4.20E-02 | | 2.35E-02 | 3.13E-02 | 1.58E-02 | | 1.63E-02 | | | | | | |
| 5.55E-03 | | 5.58E-03 | 8.36E-02 | 7.64E-02 | | 1.21E-01 | 9.56E-02 | 1.34E-01 | | 1.38E-01 | | | | | | |
| DTLZ4 | 6.84E-05 | 2.16E-05 | DTLZ4 | 1.94E-02 | 2.05E-02 | DTLZ4 | 2.52E-02 | 2.33E-02 | DTLZ4 | 1.27E-02 | 1.87E-02 | | | | | |
| | 5.57E-01 | 7.43E-02 | | 6.42E-01 | 2.01E-01 | | 5.89E-01 | 3.25E-01 | | 3.27E-01 | 1.79E-01 | | | | | |
| | 1.24E-01 | 1.88E-02 | | 8.75E-02 | 5.90E-02 | | 7.63E-02 | 1.41E-01 | | 7.17E-02 | 2.26E-02 | | | | | |
| DTLZ5 | 7.25E-02 | 7.02E-02 | DTLZ5 | 3.56E-01 | 3.42E-01 | DTLZ5 | 6.85E-01 | 3.32E-01 | DTLZ5 | 1.65E-01 | 4.97E-01 | | | | | |
| | 1.96E-02 | 4.70E-03 | | 2.34E-01 | 1.64E-01 | | 5.40E-01 | 8.55E-02 | | 3.75E-02 | 2.16E-01 | | | | | |
| | 2.87E-02 | 3.59E-02 | | 2.86E-01 | 3.58E-02 | | 2.27E-02 | 1.63E-02 | | 1.98E-02 | 1.52E-02 | | | | | |
| 4D | DTLZ1 | 4.28E-03 | 7.91E-03 | 6D | DTLZ1 | 5.50E-01 | 5.32E-03 | 8D | DTLZ1 | 1.09E-02 | 4.21E-03 | 10D | DTLZ1 | 1.62E-02 | 6.72E-03 | |
| | | 9.80E-02 | 1.21E-01 | | | 1.43E-01 | 1.52E-01 | | | DTLZ2 | 5.23E-02 | | | 5.93E-02 | 4.17E-02 | 4.23E-02 |
| | | 7.92E-03 | 7.21E-03 | | | 1.88E-02 | 1.46E-02 | | | 1.66E-02 | 2.09E-02 | | | 1.48E-02 | 2.38E-02 | |
| | DTLZ2 | 7.76E-02 | 1.23E-01 | | DTLZ2 | 1.92E+00 | 1.34E-01 | | DTLZ2 | 9.72E-02 | 4.17E-02 | | DTLZ2 | 1.07E-01 | 3.00E-02 | |
| | | 2.48E-02 | 9.31E-03 | | | 3.21E+00 | 6.83E-02 | | | 1.23E-01 | 2.01E-02 | | | 3.65E-01 | 1.66E-02 | |
| | | 8.29E-02 | 1.09E-01 | | | 1.42E-01 | 1.54E-01 | | | DTLZ3 | 1.88E-02 | | | 3.44E-02 | 1.51E-02 | 1.35E-02 |
| | DTLZ3 | 3.21E-02 | 3.31E-02 | | DTLZ3 | 3.53E-02 | 3.13E-02 | | DTLZ3 | 1.47E-02 | 2.30E-02 | | DTLZ3 | 1.92E-02 | 1.35E-02 | |
| 1.27E-01 | | 1.33E-01 | 1.13E-01 | 5.06E-02 | | 1.38E-01 | 1.40E-01 | 1.30E-01 | | 1.29E-01 | | | | | | |
| 1.95E-03 | | 4.91E-03 | 3.67E-02 | 2.51E-02 | | 8.91E-03 | 1.97E-02 | 9.28E-03 | | 1.65E-02 | | | | | | |
| DTLZ4 | 4.03E-01 | 2.82E-01 | DTLZ4 | 8.17E-01 | 2.97E-01 | DTLZ4 | 3.16E-01 | 1.76E-01 | DTLZ4 | 2.83E-01 | 1.86E-01 | | | | | |
| | 6.63E-02 | 4.63E-02 | | 2.16E-01 | 2.34E-01 | | 1.00E-01 | 2.26E-02 | | 6.46E-02 | 3.21E-02 | | | | | |
| | 1.04E-01 | 1.10E-01 | | 5.42E-01 | 6.76E-01 | | 1.55E-01 | 1.57E-01 | | 2.08E-01 | 7.51E-01 | | | | | |
| DTLZ5 | 2.01E-02 | 6.11E-03 | DTLZ5 | 1.38E-01 | 2.56E-01 | DTLZ5 | 3.20E-02 | 1.01E-01 | DTLZ5 | 3.74E-02 | 2.29E-01 | | | | | |

Tabla 5.8: Resultados de la comparación de los valores de espaciado de SIAMD y SIAMDX en el conjunto de problemas WFG según la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. El mejor valor de espaciado se indica en negritas.

| Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | Dim. | Problema | SIAMD | SIAMDX | | | |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|----------|------|-----------------|-----------------|----------|------|-----------------|-----------------|
| 3D | WFG1 | 1.57E-01 | 1.45E-01 | 5D | WFG1 | 1.19E-01 | 1.41E-01 | 7D | WFG1 | 1.09E-01 | 2.30E-01 | 9D | WFG1 | 2.22E-01 | 2.39E-01 | | | |
| | | 2.12E-02 | 3.64E-02 | | | WFG2 | 2.87E-02 | | 1.81E-02 | | WFG2 | | 7.02E-02 | 5.60E-02 | | WFG2 | 1.19E-01 | 3.98E-02 |
| | WFG2 | 1.61E-01 | 1.46E-01 | | | WFG2 | 2.05E-01 | | 1.88E-01 | | WFG2 | | 3.13E-01 | 4.94E-01 | | WFG2 | 3.05E-01 | 5.51E-01 |
| | | 4.87E-02 | 3.36E-02 | | | WFG3 | 8.66E-02 | | 3.77E-02 | | WFG3 | | 2.24E-01 | 1.86E-01 | | WFG3 | 1.20E-01 | 2.14E-01 |
| | WFG3 | 1.69E-01 | 1.69E-01 | | | WFG3 | 3.49E-01 | | 4.30E-01 | | WFG3 | | 4.90E-01 | 4.86E-01 | | WFG3 | 5.80E-01 | 6.53E-01 |
| | | 8.26E-03 | 6.72E-03 | | | WFG4 | 3.73E-02 | | 4.41E-02 | | WFG4 | | 8.87E-02 | 1.32E-01 | | WFG4 | 8.46E-02 | 1.44E-01 |
| | WFG4 | 3.12E-01 | 3.03E-01 | | | WFG4 | 7.30E-01 | | 7.11E-01 | | WFG4 | | 7.08E-01 | 8.73E-01 | | WFG4 | 7.03E-01 | 8.74E-01 |
| | | 9.55E-03 | 9.05E-03 | | | WFG5 | 5.56E-02 | | 8.03E-02 | | WFG5 | | 3.47E-01 | 2.78E-01 | | WFG5 | 2.70E-01 | 3.59E-01 |
| | WFG5 | 2.78E-01 | 2.94E-01 | | | WFG5 | 6.84E-01 | | 6.90E-01 | | WFG5 | | 9.23E-01 | 7.06E-01 | | WFG5 | 9.55E-01 | 6.81E-01 |
| | 8.31E-03 | 7.09E-03 | | WFG6 | 6.75E-02 | 7.29E-02 | | WFG6 | 3.14E-01 | 3.19E-01 | | WFG6 | 2.56E-01 | 3.05E-01 | | | | |
| WFG6 | 2.95E-01 | 3.04E-01 | | WFG6 | 6.42E-01 | 6.80E-01 | | WFG6 | 7.03E-01 | 6.69E-01 | | WFG6 | 4.40E-01 | 7.48E-01 | | | | |
| | 1.22E-02 | 8.62E-03 | | WFG7 | 7.25E-02 | 7.06E-02 | | WFG7 | 3.69E-01 | 2.58E-01 | | WFG7 | 1.51E-01 | 2.55E-01 | | | | |
| WFG7 | 2.96E-01 | 3.00E-01 | | WFG7 | 6.62E-01 | 7.12E-01 | | WFG7 | 7.01E-01 | 5.20E-01 | | WFG7 | 6.26E-01 | 5.71E-01 | | | | |
| | 1.16E-02 | 7.79E-03 | | WFG8 | 8.24E-02 | 1.24E-01 | | WFG8 | 3.65E-01 | 2.47E-01 | | WFG8 | 2.36E-01 | 1.98E-01 | | | | |
| WFG8 | 3.10E-01 | 3.19E-01 | | WFG8 | 7.02E-01 | 6.89E-01 | | WFG8 | 8.01E-01 | 1.05E+00 | | WFG8 | 4.45E-01 | 4.56E-01 | | | | |
| | 1.24E-02 | 9.05E-03 | | WFG9 | 6.02E-02 | 6.14E-02 | | WFG9 | 4.05E-01 | 1.10E-01 | | WFG9 | 2.67E-01 | 2.80E-01 | | | | |
| WFG9 | 2.97E-01 | 3.05E-01 | | WFG9 | 7.33E-01 | 7.49E-01 | | WFG9 | 8.86E-01 | 7.18E-01 | | WFG9 | 1.02E+00 | 1.43E+00 | | | | |
| | 1.01E-02 | 9.95E-03 | | WFG9 | 7.68E-02 | 1.05E-01 | | WFG9 | 3.00E-01 | 3.71E-01 | | WFG9 | 3.05E-01 | 3.34E-01 | | | | |
| 4D | WFG1 | 1.05E-01 | 1.50E-01 | 6D | WFG1 | 1.13E-01 | 1.09E-01 | 8D | WFG1 | 2.08E-01 | 2.49E-01 | 10D | WFG1 | 2.73E-01 | 2.43E-01 | | | |
| | | 3.39E-02 | 2.78E-02 | | | WFG2 | 2.12E-02 | | 1.20E-02 | | WFG2 | | 8.27E-02 | 3.88E-02 | | WFG2 | 1.38E-01 | 5.31E-02 |
| | WFG2 | 1.84E-01 | 2.44E-01 | | | WFG2 | 3.48E-01 | | 1.84E-01 | | WFG2 | | 2.82E-01 | 4.19E-01 | | WFG2 | 3.68E-01 | 6.14E-01 |
| | | 1.07E-01 | 1.14E-01 | | | WFG3 | 1.45E-01 | | 9.53E-02 | | WFG3 | | 1.19E-01 | 2.37E-01 | | WFG3 | 2.25E-01 | 2.73E-01 |
| | WFG3 | 3.46E-01 | 3.12E-01 | | | WFG3 | 3.81E-01 | | 5.51E-01 | | WFG3 | | 5.97E-01 | 6.00E-01 | | WFG3 | 6.25E-01 | 6.35E-01 |
| | | 4.30E-02 | 2.62E-02 | | | WFG4 | 5.61E-02 | | 7.09E-02 | | WFG4 | | 6.02E-02 | 1.05E-01 | | WFG4 | 9.92E-02 | 1.74E-01 |
| | WFG4 | 5.48E-01 | 5.61E-01 | | | WFG4 | 1.02E+00 | | 9.31E-01 | | WFG4 | | 5.93E-01 | 5.89E-01 | | WFG4 | 7.61E-01 | 1.19E+00 |
| | | 4.81E-02 | 3.63E-02 | | | WFG5 | 1.33E-01 | | 1.31E-01 | | WFG5 | | 2.19E-01 | 2.75E-01 | | WFG5 | 2.89E-01 | 4.89E-01 |
| | WFG5 | 5.15E-01 | 5.32E-01 | | | WFG5 | 9.92E-01 | | 9.02E-01 | | WFG5 | | 9.07E-01 | 5.65E-01 | | WFG5 | 1.26E+00 | 9.45E-01 |
| | 3.92E-02 | 2.76E-02 | | WFG6 | 1.31E-01 | 1.58E-01 | | WFG6 | 2.42E-01 | 2.64E-01 | | WFG6 | 2.76E-01 | 4.14E-01 | | | | |
| WFG6 | 4.72E-01 | 5.49E-01 | | WFG6 | 8.38E-01 | 7.63E-01 | | WFG6 | 4.64E-01 | 5.19E-01 | | WFG6 | 4.39E-01 | 1.06E+00 | | | | |
| | 4.38E-02 | 3.16E-02 | | WFG7 | 1.75E-01 | 1.07E-01 | | WFG7 | 1.90E-01 | 1.66E-01 | | WFG7 | 1.87E-01 | 3.90E-01 | | | | |
| WFG7 | 4.98E-01 | 5.33E-01 | | WFG7 | 8.53E-01 | 8.18E-01 | | WFG7 | 5.52E-01 | 5.24E-01 | | WFG7 | 6.17E-01 | 8.51E-01 | | | | |
| | 4.71E-02 | 2.80E-02 | | WFG8 | 1.83E-01 | 1.56E-01 | | WFG8 | 1.90E-01 | 1.74E-01 | | WFG8 | 2.11E-01 | 4.15E-01 | | | | |
| WFG8 | 5.12E-01 | 5.55E-01 | | WFG8 | 8.67E-01 | 8.03E-01 | | WFG8 | 3.99E-01 | 4.19E-01 | | WFG8 | 3.95E-01 | 7.29E-01 | | | | |
| | 4.60E-02 | 3.15E-02 | | WFG9 | 1.53E-01 | 1.14E-01 | | WFG9 | 1.78E-01 | 2.52E-01 | | WFG9 | 2.08E-01 | 4.39E-01 | | | | |
| WFG9 | 5.63E-01 | 5.64E-01 | | WFG9 | 9.49E-01 | 1.06E+00 | | WFG9 | 8.23E-01 | 1.07E+00 | | WFG9 | 1.11E+00 | 1.73E+00 | | | | |
| | 5.19E-02 | 4.51E-02 | | WFG9 | 1.28E-01 | 1.70E-01 | | WFG9 | 2.29E-01 | 2.80E-01 | | WFG9 | 3.77E-01 | 4.27E-01 | | | | |

- **BCD-MOIA** [37]: Utiliza descomposición y el enfoque principal de BCD-MOIA es mantener diversidad y convergencia mediante un mecanismo de clonación que las balancee, el cual consta de dos partes: la distancia perpendicular entre una solución y su vector ponderado y su valor de escalarización.
- **HEIA** [33]: Este marco algorítmico utiliza subpoblaciones de clones y cada una de ellas es evolucionada sometiéndola a una estrategia evolutiva distinta. En este caso en particular, se emplean cruza binaria simulada (SBX), evolución diferencial (ED) y mutación polinomial, además de un mecanismo de selección de grano fino y elitismo.
- **MOIA-DCSS** [36]: Utiliza descomposición y con la intención de proliferar a las soluciones más promisorias, selecciona aquellas soluciones cuya mejora sea mayor de generación a generación para clonarlas.
- **VD-MOIA** [30]: Utiliza descomposición y procurando mantener una buena diversidad de soluciones, utiliza la distancia vertical de una solución a su vector ponderado para poner más énfasis en soluciones con valores pequeños de distancia vertical.

HEIA, VD-MOIA y BCD-MOIA requieren porcentajes de mutación que permanecen constantes a lo largo del experimento y cuyo valor se estableció en $1/n$, donde n es la cantidad de variables del problema. Cada SIAM presenta operadores de variación como clonación, mutación y recombinación. Todos los algoritmos utilizan el esquema de clonación proporcional y la medida de afinidad varía entre ellos. Además, todos utilizan el esquema de mutación polinomial (Capítulo 4). HEIA se vale de la SBX y ED. VD-MOIA, BCD-MOIA y MOIA-DCSS utilizan el operador ED, mientras que la versión de SIAMD que incorpora un operador de recombinación, SIAMD_X, utiliza SBX.

En las figuras 5.1-5.4 se observan los resultados de las comparaciones de acuerdo a la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95% de confianza. En estas figuras, se muestra la cantidad de veces en las que un SIAM tuvo un desempeño superior a otros respecto a una dimensión y un problema específico. Es decir, cuántas veces un optimizador dado superó a otros en un escenario de comparación particular. Cada gráfica representa un problema del conjunto DTLZ o WFG, como se indica en la parte inferior derecha de cada gráfica. Cada color en la gráfica representa el desempeño de un SIAM.

En el conjunto de problemas DTLZ, BCD-MOIA obtiene la tercera posición de acuerdo al hipervolumen desempeñándose mejor en problemas cóncavos, uni-modales y separables tales como como DTLZ2 y DTLZ4. En problemas como DTLZ1, DTLZ3, DTLZ5 y DTLZ6, BCD-MOIA presenta problemas de convergencia y pérdida de diversidad a partir de los 5 objetivos. En general, muestra un desempeño superior a MOIA-DCSS y VD-MOIA. En el conjunto de problemas WFG también clasifica en tercera posición, mostrando resultados competitivos en los problemas WFG4 a WFG9 de 8 a 10 objetivos. En estos problemas, mantiene buena convergencia así como buena distribución de las soluciones donde muestra un desempeño superior a todos los demás SIAMs con los que se

le compara. Con respecto al indicador de espaciado, BCD-MOIA supera a la mayoría de SIAMs en 3 y 4 objetivos; en DTLZ2, DTLZ3, DTLZ7 a partir de los 6 objetivos obtiene valores competitivos de espaciado. En WFG3 y WFG4, obtiene mejores valores de espaciado que SIAMDX, VD-MOIA y MOIA-DCSS en 3 objetivos, con 4 objetivos o más supera a HEIA en la mayor parte de los casos.

En el conjunto de problemas DTLZ, HEIA solo es superado por SIAMDX de manera general. En el problema DTLZ3, HEIA presenta deterioro en cuanto a convergencia. En los problemas DTLZ2 y DTLZ4, el desempeño de HEIA es superado significativamente por BCD-MOIA, VD-MOIA y MOIA-DCSS. HEIA muestra resultados competitivos en los problemas DTLZ5-DTLZ7, superado por SIAMDX a excepción de DTLZ6. Respecto a los problemas WFG, HEIA muestra desempeño destacable en WFG1, WFG7 y WFG8 en dimensiones mayores a 6. De manera general, HEIA ocupa la primera posición en este conjunto de problemas manteniendo convergencia aceptable y buena distribución en la mayoría de ellos. Respecto al indicador de espaciado, HEIA obtiene buenos resultados en el conjunto de problemas DTLZ con pocos objetivos; en cuanto la cantidad de objetivos aumenta, los valores de espaciado que obtiene posicionan sus resultado en las últimas posiciones de la comparación. De manera similar, en el conjunto de problemas de prueba WFG HEIA obtiene los mejores resultados de espaciado en WFG1 a WFG7 con 3 objetivos. En cuanto la cantidad de objetivos aumenta, los valores de espaciado obtenidos por HEIA se deterioran.

MOIA-DCSS obtiene resultados variados, siendo superado de manera general por SIAMDX y HEIA en los conjuntos de problemas utilizados. Muestra el mejor desempeño en DTLZ1, donde supera a todos los SIAMs considerados en el experimento. En problemas como WFG1, WFG2, WFG5 su desempeño es superado solo por SIAMDX y HEIA. En los problemas WFG6, WFG8 y WFG9, HEIA presenta problemas respecto a la convergencia posicionándose en los últimos lugares. Generalmente, los conjuntos de aproximación producidos por MOIA-DCSS tienden a perder diversidad en cuanto la cantidad de objetivos aumenta. MOIA-DCSS ocupa el cuarto y quinto lugar en los conjuntos de problemas DTLZ y WFG, respectivamente. En el conjunto DTLZ, obtiene valores de espaciado competitivos con 7 objetivos o más, específicamente en los problemas DTLZ5, DTLZ6 y DTLZ7 donde supera a los demás SIAMs con 7 a 10 objetivos. En los problemas WFG5 a WFG7 y WFG9 obtiene los mejores valores de espaciado de 8 a 10 objetivos.

SIAMDX muestra un desempeño aceptable en el problema DTLZ1 superando a HEIA, VD-MOIA y BCD-MOIA por arriba de los 6 objetivos, aunque tiende a perder diversidad. En DTLZ3, sus resultados son superados solo por MOIA-DCSS. En DTLZ4 sus resultados son similares a los de HEIA, siendo superado por MOIA-DCSS, BCD-MOIA y VD-MOIA. En DTLZ5 y DTLZ7, SIAMDX obtiene los mejores resultados, siendo únicamente superado en 3 objetivos por HEIA. En DTLZ6, los resultados son competitivos por arriba de los 6 objetivos. En WFG1 y WFG3 el desempeño es aceptable, siendo superado únicamente por HEIA aunque el resultado sufre ligeramente en convergencia. En WFG2, el desempeño es competitivo de 7 objetivos en adelante. En WFG4, WFG5, WFG7, WFG8

y WFG9 su desempeño es superado de manera general por HEIA. SIAMDX obtiene los peores resultados en WFG6 para 4 o más objetivos, además de sufrir pérdida de diversidad en el conjunto final. De manera general, SIAMDX se posiciona en primer y segundo lugar con respecto a los conjuntos DTLZ y WFG, respectivamente. En los problemas DTLZ1 a DTLZ4, SIAMDX obtiene los mejores valores de espaciado con 4 objetivos o más, mientras que en 3 y 4 objetivos es superado por los demás SIAMs. Para WFG1 a WFG3, WFG8 y WFG9 SIAMDX obtiene resultados competitivos en 4 o más objetivos, obteniendo los mejores en la mayoría de los casos de comparación. En WFG7, SIAMDX es solo superado por HEIA y en WFG9 por MOIA-DCSS.

VD-MOIA tiene un desempeño aceptable en DTLZ2 y DTLZ4, siendo superado en el primero por BCD-MOIA a partir de los 5 objetivos. En problemas como DTLZ1, DTLZ3, DTLZ5 y DTLZ6 sus resultados son similares a BCD-MOIA. En DTLZ5, el desempeño es ligeramente superior a BCD-MOIA aunque sufre de deterioro en cuanto a diversidad y convergencia. En DTLZ6, VD-MOIA supera a SIAMDX hasta con 6 objetivos y de ahí en adelante solo supera a MOIA-DCSS. En DTLZ7 su desempeño es inferior a SIAMDX y HEIA pues también presenta problemas de convergencia. En WFG1, su desempeño es superior a MOIA-DCSS en 3 y 4 objetivos y presenta pérdida de diversidad a partir de los 4 objetivos. En WFG2, su desempeño es aceptable hasta con 6 objetivos superando a SIAMDX, MOIA-DCSS y BCD-MOIA. Además, la convergencia se ve mermada en cuando la cantidad de objetivos aumenta. En WFG3, solo es superado por HEIA y SIAMDX y su desempeño es similar a BCD-MOIA. En los problemas WFG4 a WFG9 su desempeño es similar a los resultados de BCD-MOIA. De manera general, VD-MOIA ocupa quinto y cuarto lugar en los conjuntos DTLZ y WFG, respectivamente. Respecto al indicador de espaciado, VD-MOIA obtiene resultados similares a los de BCD-MOIA en el conjunto de problemas DTLZ con pequeñas diferencias como en DTLZ7, donde su valor de espaciado es superado solo por SIAMDX y HEIA con pocos objetivos. En los problemas WFG1 a WFG6, WFG8 y WFG9 sus valores de espaciado son similares a los de BCD-MOIA; en WFG7 supera a MOIA-DCSS y BCD-MOIA en 3 a 5 objetivos.

5.6. Comparación con AEMOs del estado del arte

En el segundo experimento, comparamos el desempeño de SIAMD con dos AEMOs del estado del arte: MOEA/D [3] y NSGA-II [4]. MOEA/D requiere un conjunto de vectores ponderados cuyo tamaño es igual al de la población total. Los parámetros adicionales que implica la descomposición son los mismos que aquellos utilizados en la sección anterior (ver tabla 5.1). En las figuras 5.7 a 5.10 se aprecian los resultados de la prueba de suma de rangos de Wilcoxon con un 95 % de confianza. En las gráficas se muestra la cantidad de veces en las que el desempeño de un AEMO fue superior a otro; es decir, cuántas veces un optimizador superó a otro en un escenario de comparación dado.

MOEA/D supera a NSGA2 a partir de cuatro objetivos en DTLZ1 y a SIAMDX a partir

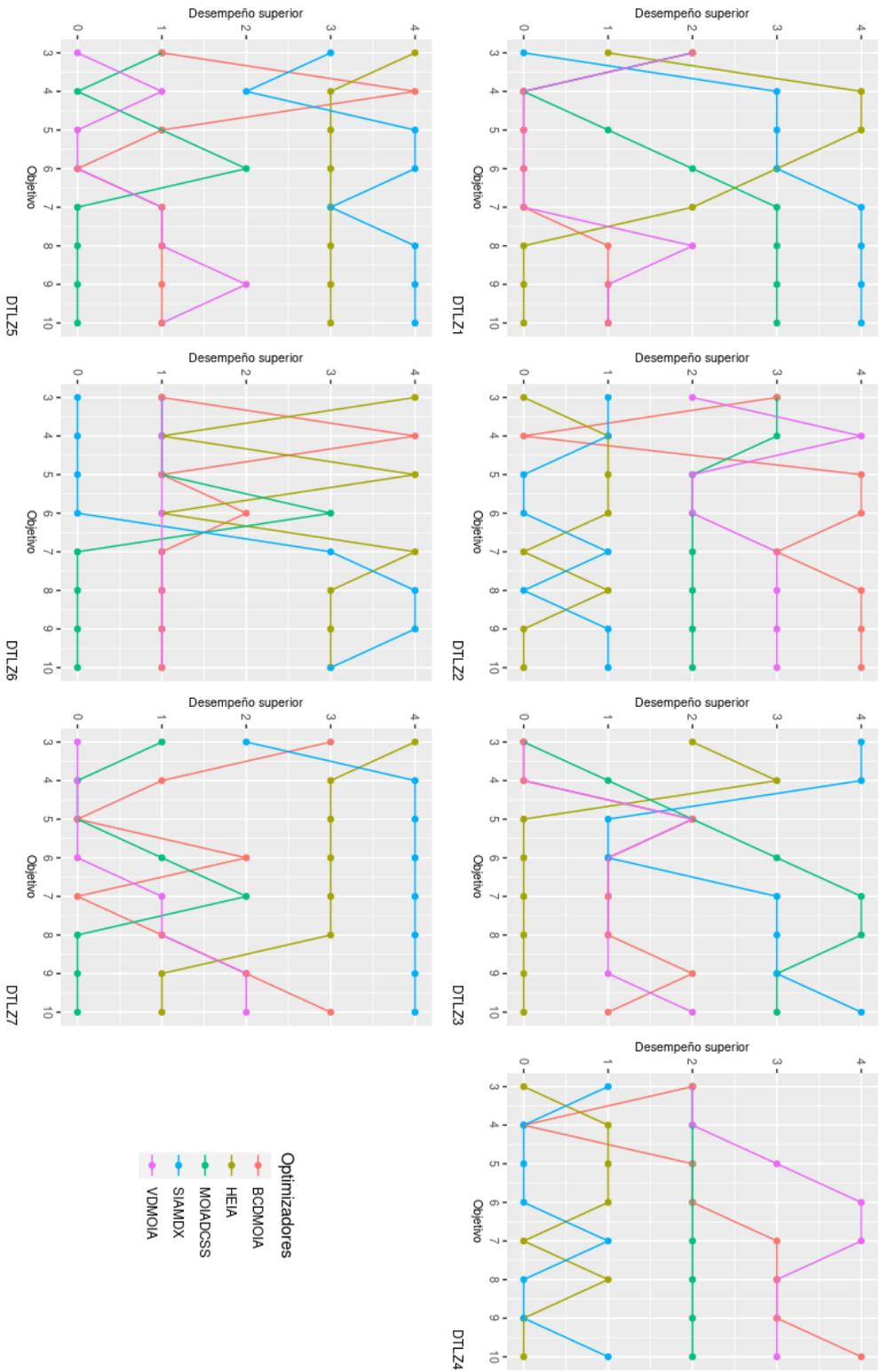


Figura 5.1: Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

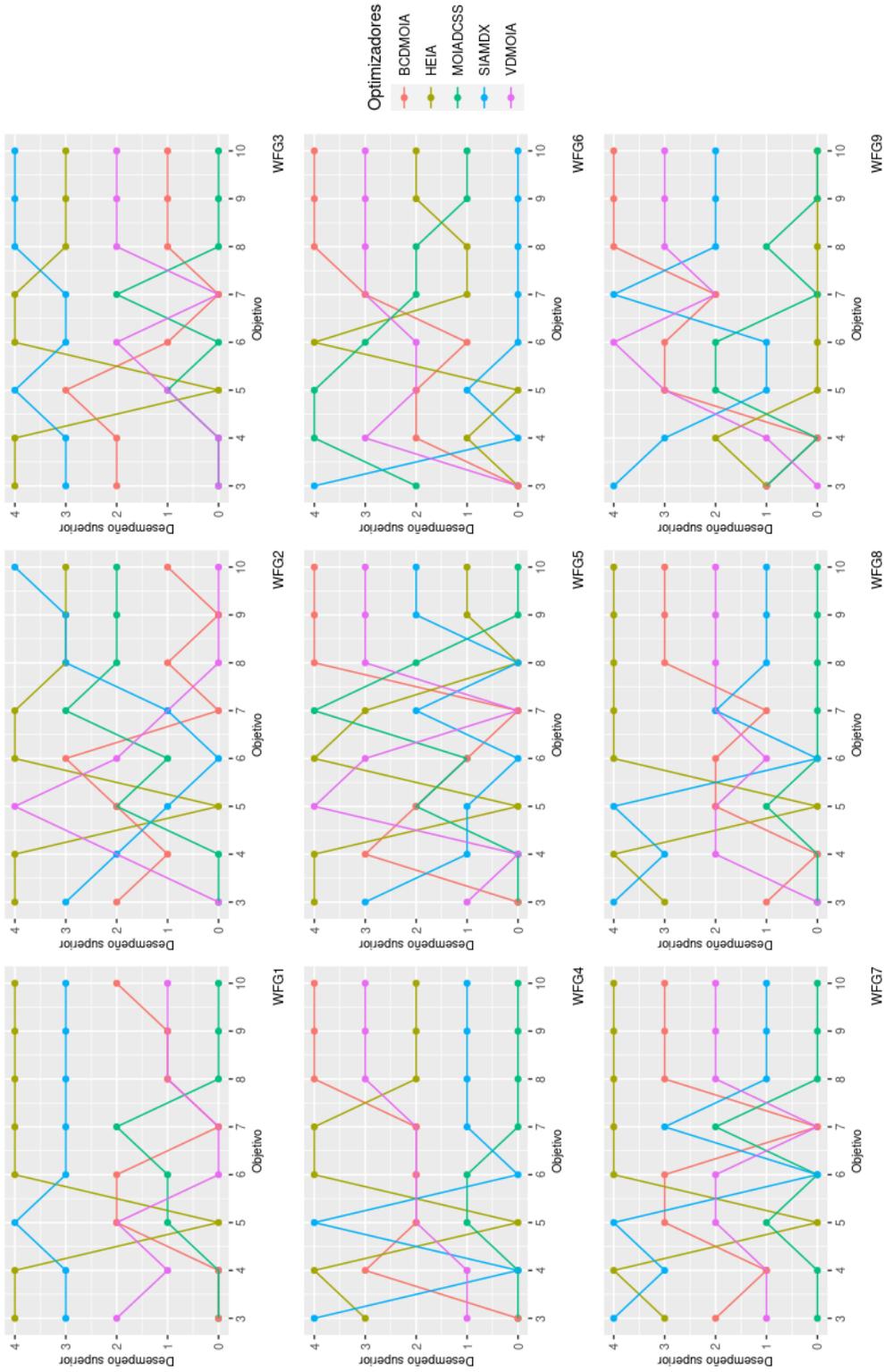


Figura 5.2: Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre los distintos SLAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

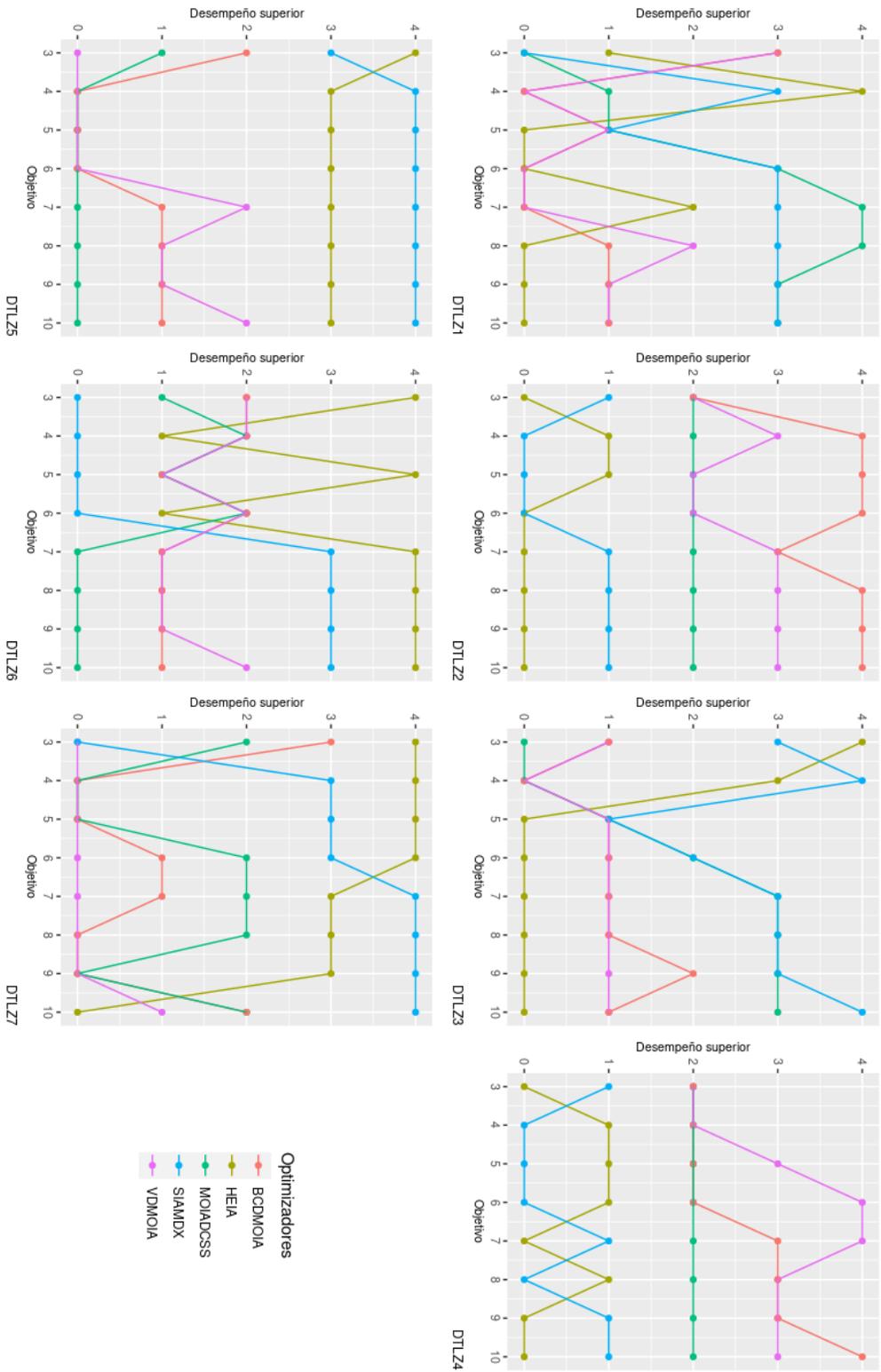


Figura 5.3: Resultados de la comparación de los valores de IDG+ entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

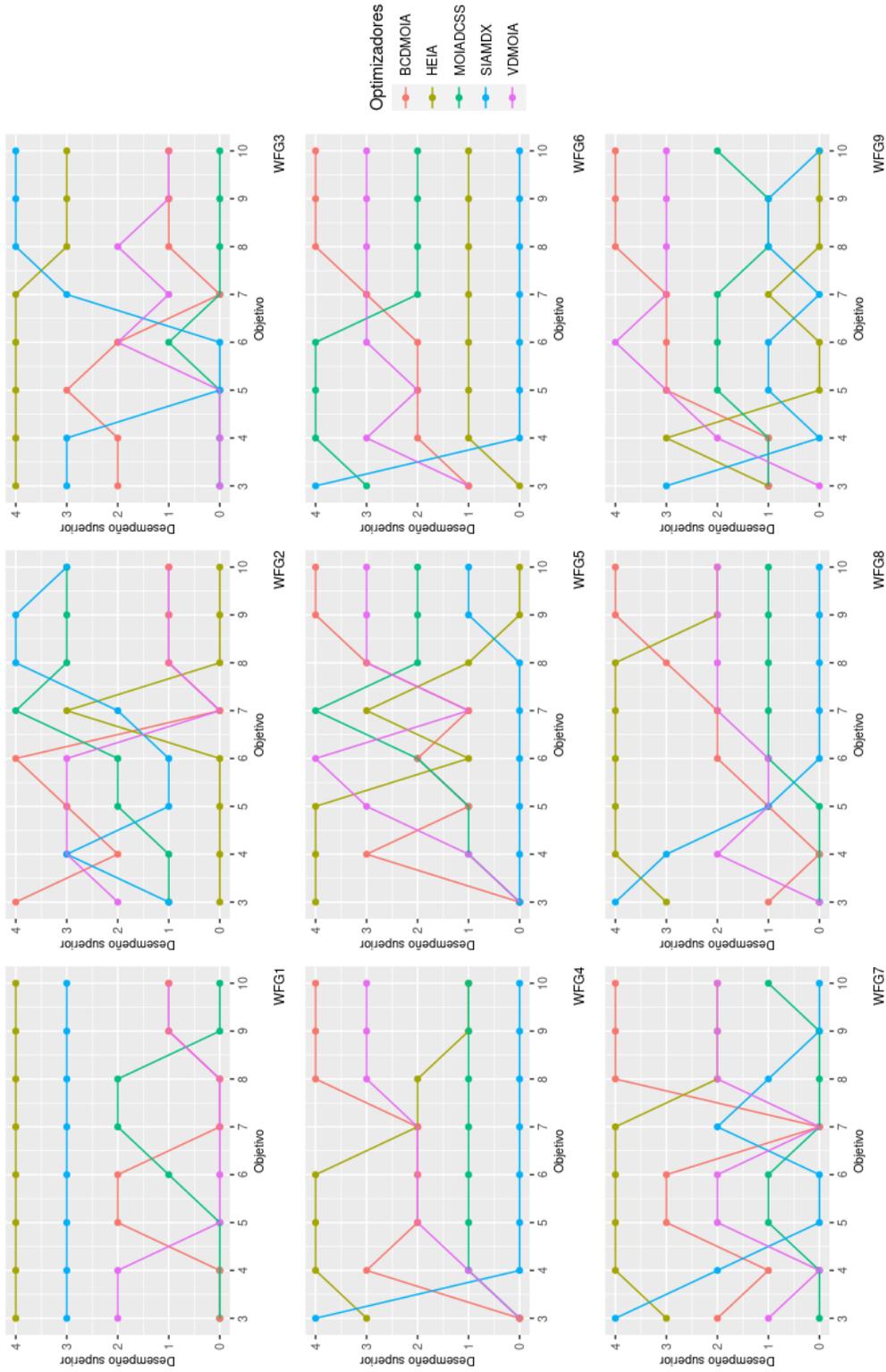


Figura 5.4: Resultados de la comparación de los valores de IGD+ entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

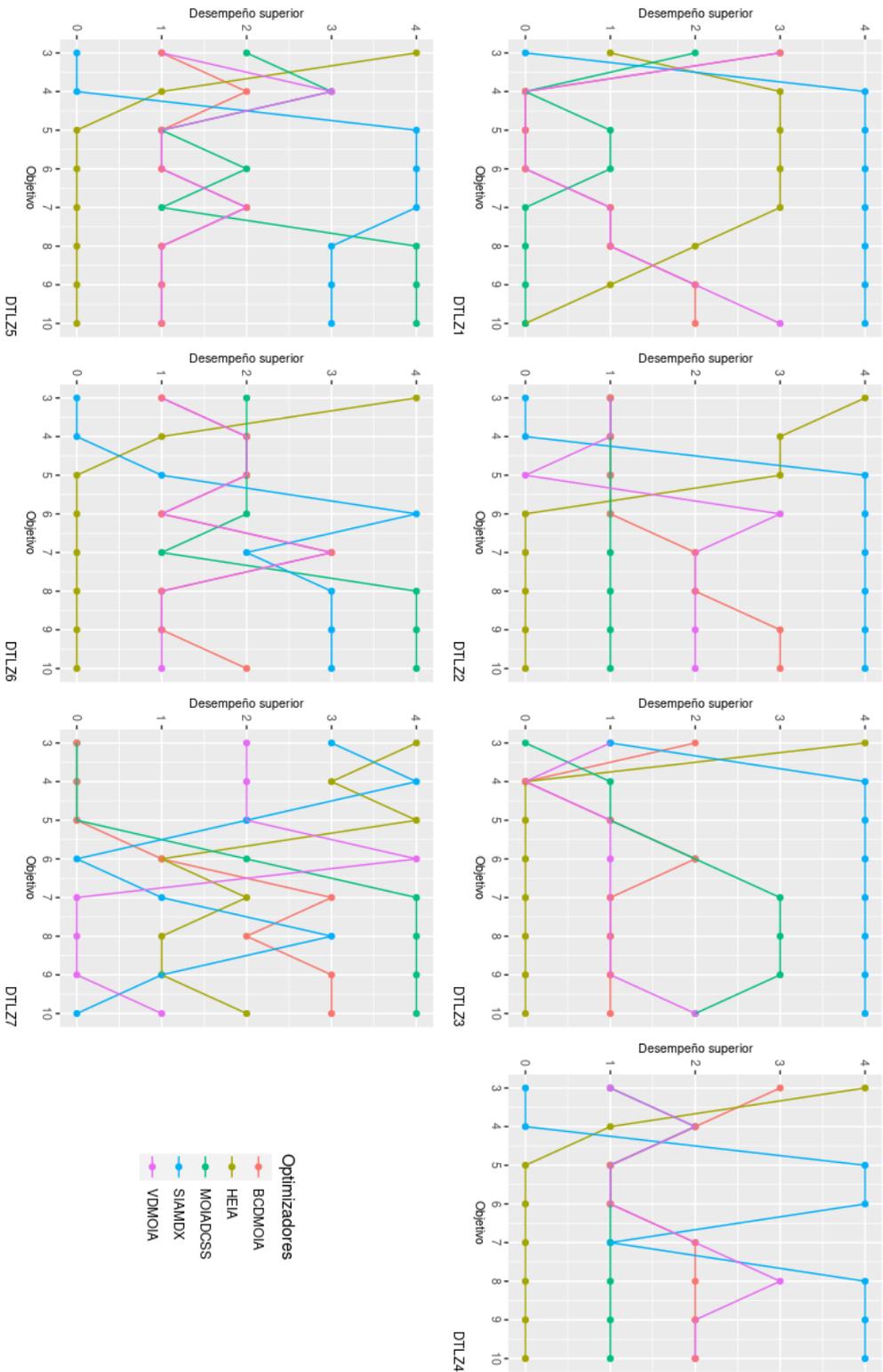


Figura 5.5: Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

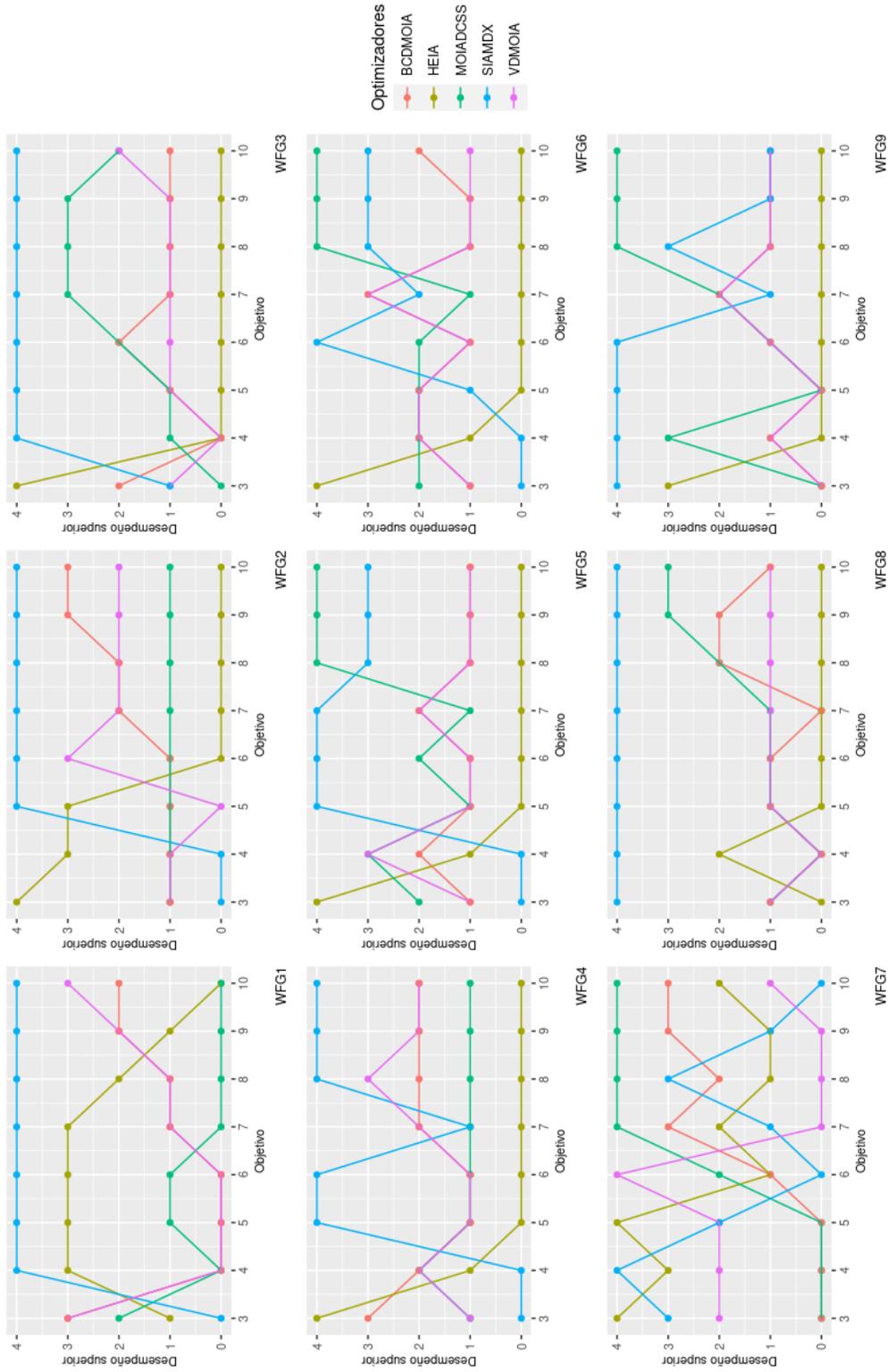


Figura 5.6: Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre los distintos SIAMs de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

de los 7 objetivos. En DTLZ2 es superado en 3 objetivos por SIAMDX y en 5 por NSGA2. En 7 objetivos supera a SIAMDX y NSGA2 y en adelante su desempeño es similar al de SIAMDX. En los problemas DTLZ3 y DTLZ4 muestra resultados competitivos por arriba de los 5 objetivos. En DTLZ5 es superado por SIAMDX y su desempeño es mejor al de NSGA2 para todos los objetivos. En DTLZ7, supera a SIAMDX y NSGA2 a partir de los 8 objetivos. En WFG1, su desempeño supera a SIAMDX y NSGA2 aunque su cobertura es reducida. En WFG2 y WFG3 muestra resultados competitivos para 8 a 10 objetivos. MOEA/D tiene un desempeño pobre en WFG4 a WFG8 siendo superado por SIAMDX y NSGA2. En WFG9, su desempeño es competitivo después de los 8 objetivos superando a SIAMDX y NSGA2. De manera general, MOEA/D ocupa la primera posición respecto al conjunto DTLZ y la tercera posición en el conjunto WFG. Con respecto a los valores del indicador de espaciado, MOEA/D obtiene valores competitivos en el conjunto DTLZ donde frecuentemente supera a NSGA2 y el superado en algunos casos por SIAMDX. En DTLZ1 a DTLZ3, supera a NSGA2 de 5 a 10 objetivos y es superado por SIAMDX. En WFG2, obtiene los mejores valores de espaciado de 8 a 10 objetivos. En WFG4, WFG5, WFG7 a WFG9 supera a NSGA2 y SIAMDX a partir de los 6 objetivos.

El desempeño de NSGA2 es competitivo en problemas con pocos objetivos. En DTLZ1 obtiene los mejores resultados para 3 objetivos. Sin embargo, en cuanto la cantidad de objetivos aumenta es superado por SIAMDX y MOEA/D. Lo mismo sucede en los problemas DTLZ5 y DTLZ7. En DTLZ2 y DTLZ4, obtiene los mejores resultados con 4 objetivos. En DTLZ3 y DTLZ5 obtiene los peores resultados. En el conjunto de problemas WFG sus resultados son mejores; en WFG2 y WFG3 los resultados son competitivos de 3 a 7 objetivos, superando a MOEA/D y SIAMDX y es superado por ambos para más objetivos. En los problemas WFG4, WFG5 y WFG7, NSGA2 obtiene buenos resultados superando constantemente el desempeño de MOEA/D y SIAMDX por abajo de los 8 objetivos. En WFG6 y WFG9 los resultados son los mejores, superando en casi todos los casos a MOEA/D y SIAMDX. De manera general, NSGA2 ocupa la tercera posición en el conjunto de problemas DTLZ y la primera posición en el conjunto WFG. En cuanto al indicador de espaciado, NSGA2 obtiene los mejores valores de este indicador en la mayor parte del conjunto de problemas DTLZ con 3 y 4 objetivos. Cuando la cantidad de objetivos aumenta, NSGA2 es superado por SIAMDX y MOEA/D. En DTLZ7, NSGA2 obtiene los mejores resultados en 3, 5 y 6 objetivos superando a SIAMDX y MOEA/D. En WFG1, supera a ambos optimizadores en 3 objetivos. En WFG5 a WFG8, obtiene los mejores valores de espaciado en 3 y 4 dimensiones y en WFG3, WFG4 y WFG9 supera a SIAMDX y MOEA/D en 3 a 5 objetivos.

SIAMDX se desempeña mejor que MOEA/D para 3 y 4 objetivos en DTLZ1. De 5 a 6 objetivos el resultado es similar a MOEA/D y en adelante es superado por MOEA/D y supera a NSGA2. En DTLZ2 y DTLZ3, SIAMDX muestra resultados competitivos para 3 y 4 objetivos superando a NSGA2 y MOEA/D. De 6 a 10 objetivos, SIAMDX supera a NSGA2 con un desempeño similar a MOEA/D. DTLZ4 tiene los mejores resultados en la mayoría de los objetivos superando a NSGA2 y MOEA/D. En DTLZ5 y DTLZ6,

los resultados de SIAMDX son ligeramente mejores a MOEA/D y supera a NSGA2. En WFG1, SIAMDX supera a NSGA2 y es superado por MOEA/D. En WFG2 y WFG3 es superior a NSGA2 a partir de 8 objetivos. Cuando se adoptan de 3 a 6 objetivos, es superado por NSGA2 y MOEA/D. En WFG4 supera a MOEA/D en todos los objetivos y supera a NSGA2 a partir de los 5 objetivos. En WFG6 y WFG7 supera a MOEA/D y NSGA2 en 3 objetivos y en adelante, tiene un desempeño similar a MOEA/D. En WFG9, muestra un desempeño superior a NSGA2 con 7 o más objetivos, siendo superado por MOEA/D. De manera general, SIAMDX ocupa la segunda posición en ambos conjuntos de problemas. Respecto al indicador de espaciado, SIAMDX obtiene mejores valores en cuanto la cantidad de objetivos aumenta en el conjunto de problemas DTLZ a excepción de DTLZ7, donde es superado por NSGA2 y MOEA/D a partir de 5 objetivos. En WFG1, SIAMDX obtiene los mejores resultados de espaciado siendo superado por NSGA2 y MOEA/D en 5, 6 y 10 objetivos. En WFG2 obtiene el mejor valor en 3 objetivos. De ahí en adelante supera a NSGA2 y es superado por MOEA/D en 8 a 10 objetivos. En WFG3, supera a ambos AEMOs a partir de los 6 objetivos. En WFG4 a WFG9 es superado por ambos AEMOs de 3 a 5 objetivos y supera a NSGA2 a partir de los 6 objetivos, siendo superado por MOEA/D.

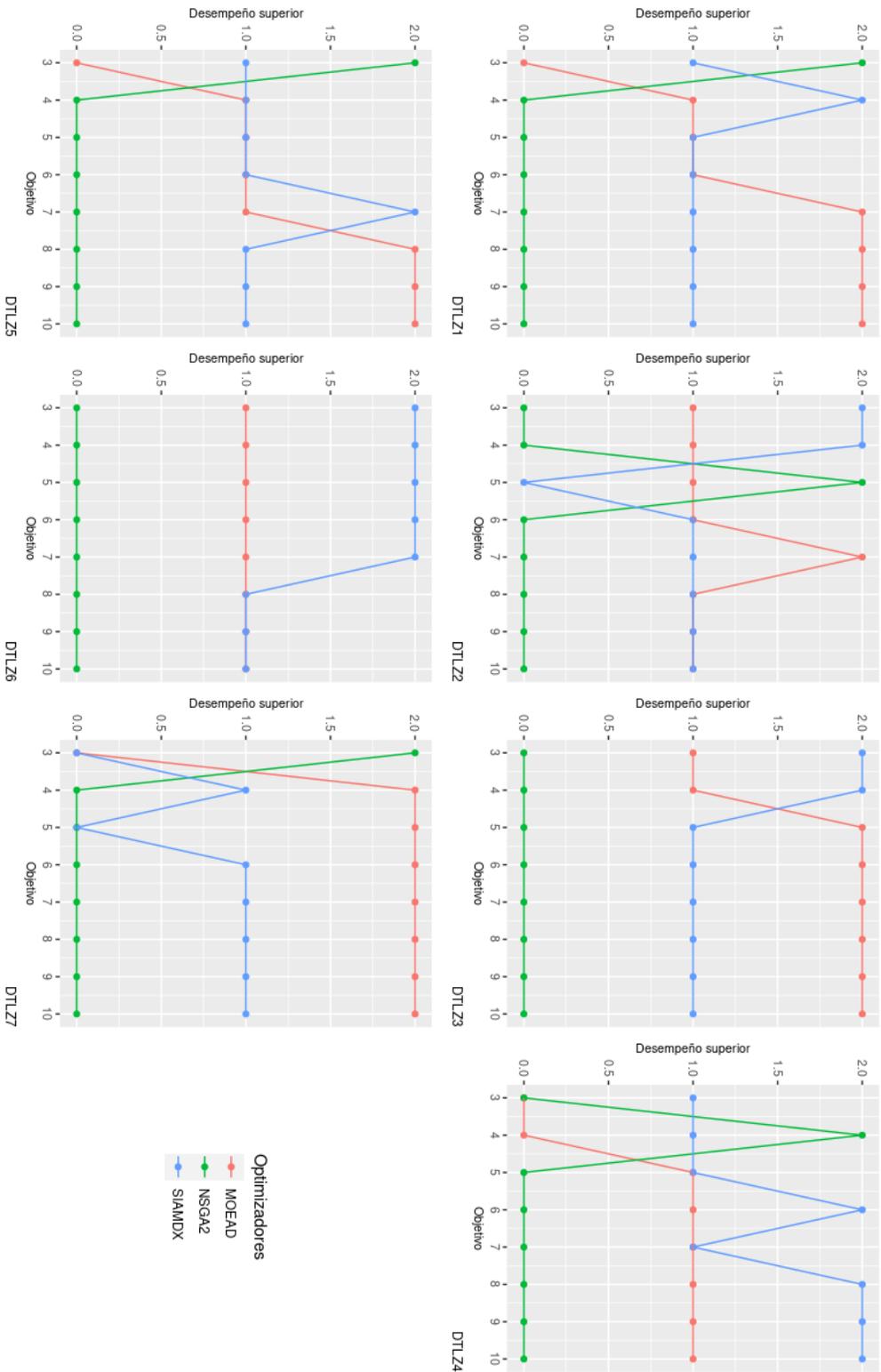


Figura 5.7: Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

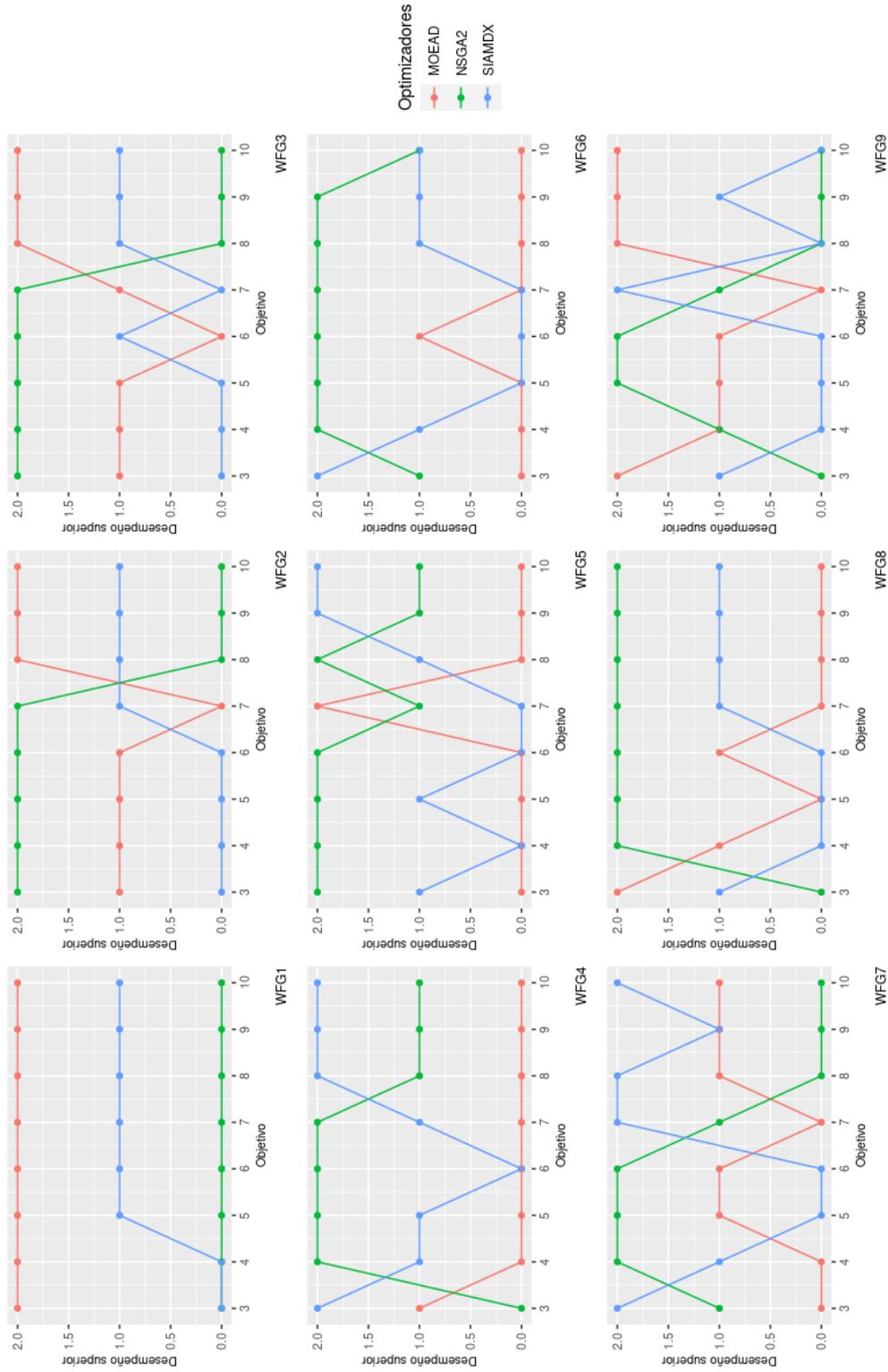


Figura 5.8: Resultados de la comparación de los valores de hipervolumen entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

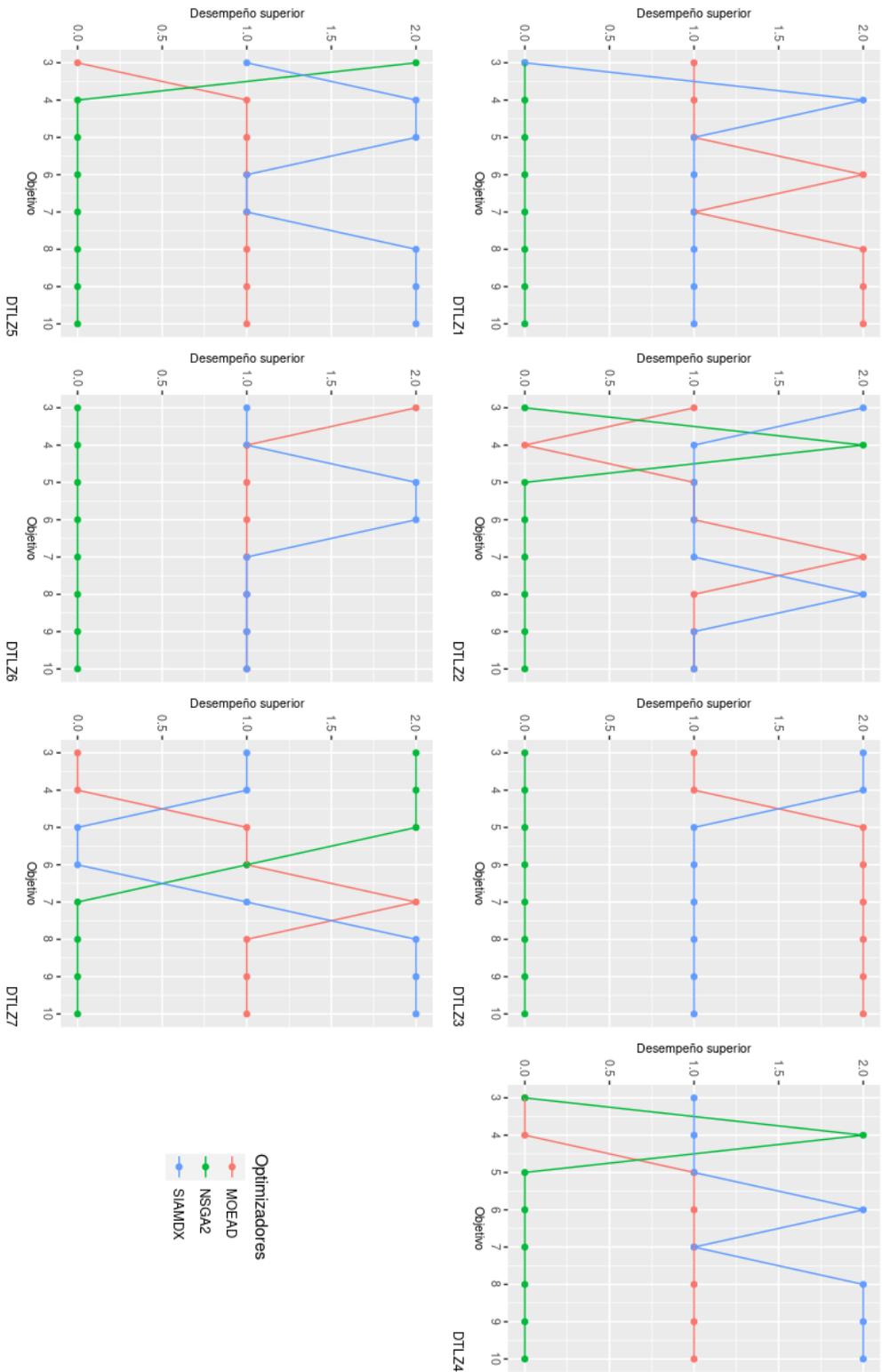


Figura 5.9: Resultados de la comparación de los valores de IGD+ entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

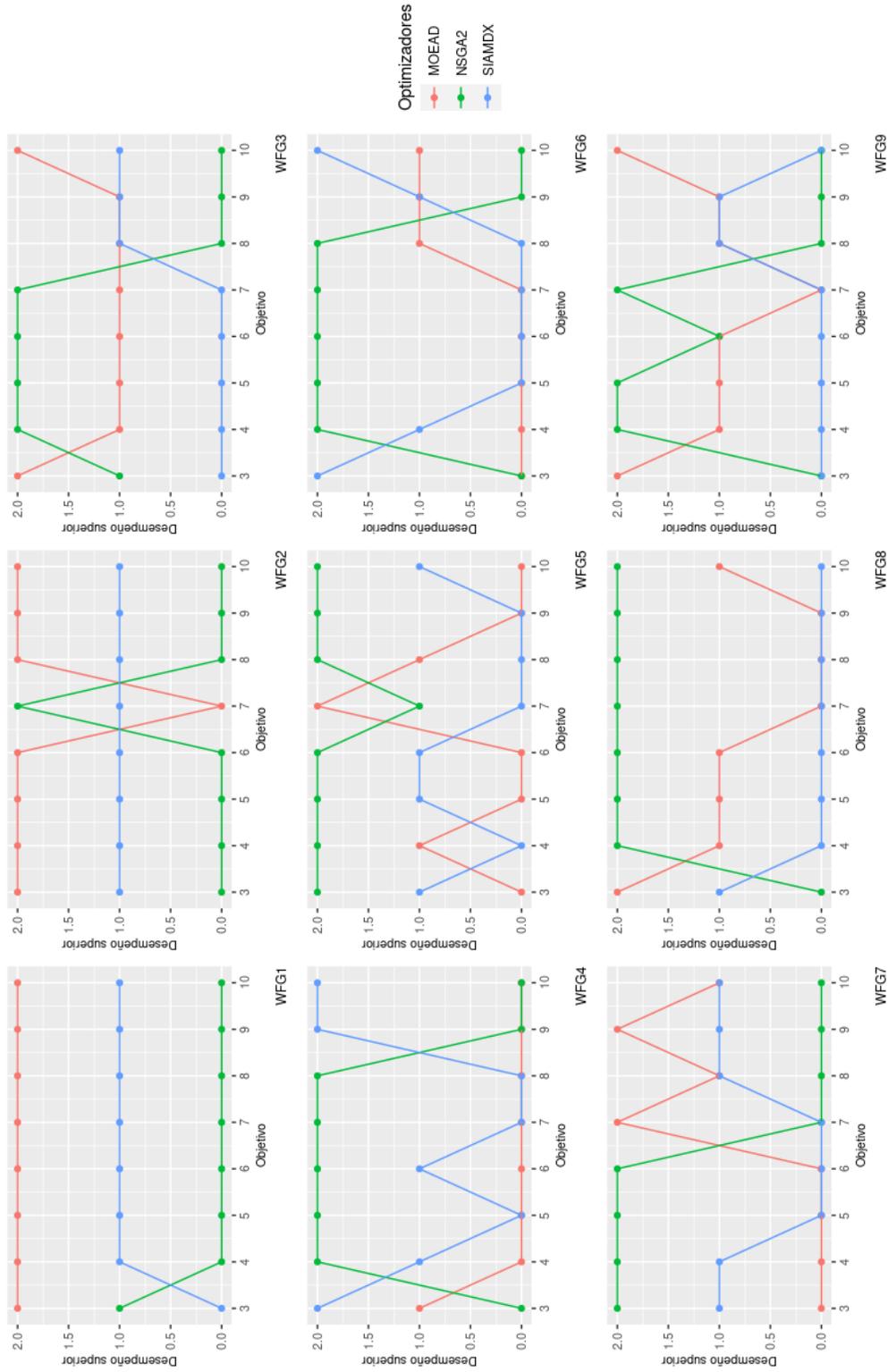


Figura 5.10: Resultados de la comparación de los valores de IGD+ entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

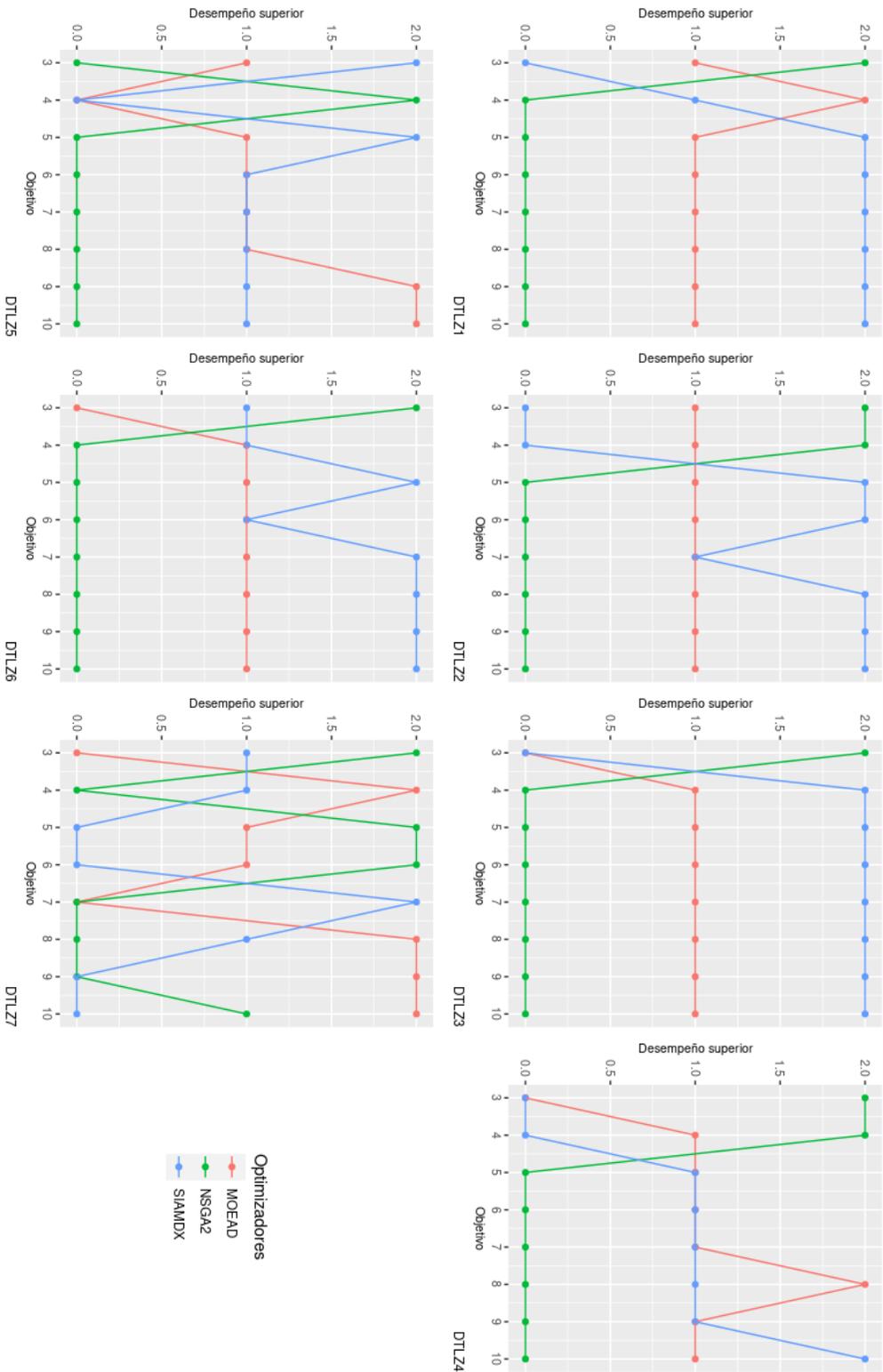


Figura 5.11: Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95 % en el conjunto de problemas DTLZ de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces en las que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

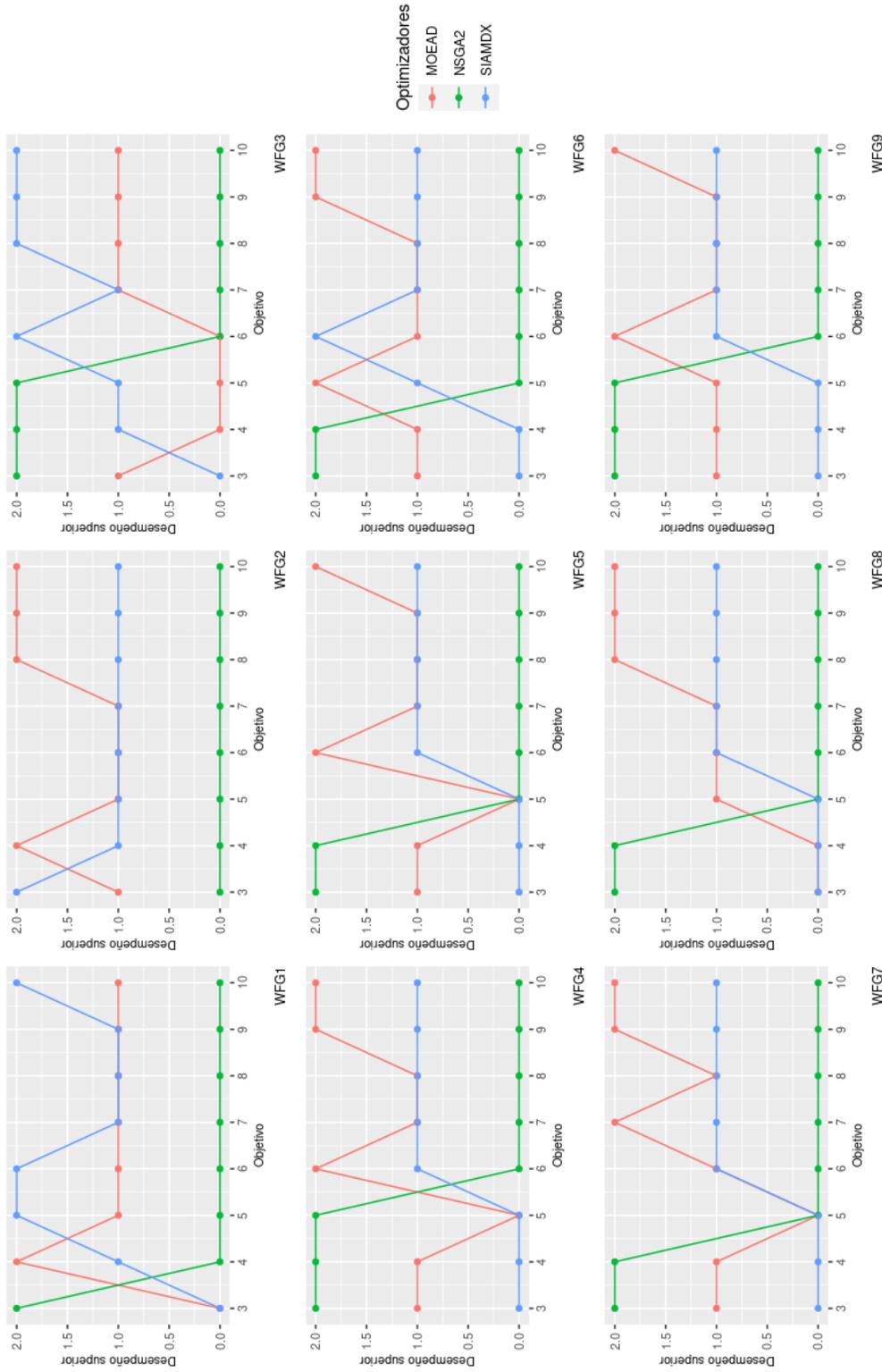


Figura 5.12: Resultados de la comparación de los valores de espaciado entre SIAMDX, MOEA/D y NSGA2 de acuerdo a la prueba Wilcoxon con un nivel de confianza del 95% en el conjunto de problemas WFG de 3 a 10 objetivos. El eje de las ordenadas representa la cantidad de veces que un optimizador es mejor que los otros de acuerdo a un problema y número de objetivos específicos, mientras que el eje de las abscisas representa la cantidad de objetivos en cada instancia de un problema.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, introducimos un nuevo sistema inmune artificial multi-objetivo (SIAM) basado en descomposición tanto en una versión pura (SIAMD) como en una que incorpora recombinación (SIAMDX). En este SIAM se priorizan los conceptos inmunes pues, incluso en el escenario donde es híbrido el diseño preserva y aprovecha el componente inmune en la selección de las soluciones no dominadas en conjunto con el paradigma de descomposición.

SIAMD y SIAMDX incorporan operadores inspirados en el principio de selección clonal, en la selección positiva y en la selección negativa. El operador de clonación se vale de la distancia vertical para asignar la cantidad de clones a los individuos seleccionados para proliferación, de tal forma que asignan más recursos a aquellos que son más afines al problema en cuestión aumentando de esta manera la posibilidad de encontrar soluciones más afines al problema. Los operadores de selección positiva y negativa permiten combatir la pérdida de diversidad que se introduce en la clonación, procurando regular la cantidad de individuos idénticos que son seleccionados a lo largo de la búsqueda.

En la comparación entre SIAMD y SIAMDX, encontramos que la versión híbrida tiende a obtener mejores resultados que la versión pura de manera general. Sin embargo, observamos que la versión pura hace un mejor trabajo en mantener una buena distribución de las soluciones que forman parte del conjunto de aproximación final.

Los resultados experimentales utilizando indicadores de calidad, muestran que SIAMDX es capaz de lidiar con problemas complejos con resultados competitivos respecto a algoritmos del estado del arte. SIAMDX muestra, generalmente, un desempeño superior al de NSGA2 en problemas con más de tres objetivos. También iguala e incluso, en algunos problemas, supera el desempeño de MOEA/D. En cuanto a otros SIAs (BCD-MOIA, HEIA, MOIA-DCSS y VD-MOIA), SIAMDX es capaz de superar el desempeño de éstos en la mayoría de los problemas de los conjuntos de prueba DTLZ y WFG.

A lo largo de esta tesis, se observa que los SIAs son técnicas válidas de optimización multi-objetivo cuyas características permiten obtener resultados competitivos y su estudio da pie al desarrollo de nuevos algoritmos de búsqueda poderosos.

Como parte del trabajo futuro, nos interesa explorar distintos esquemas de clonación

donde se tomen en cuenta otras métricas para la asignación de clones. Además, consideramos interesante profundizar en el papel que toma la selección negativa en el contexto de las soluciones disponibles en la población de clones. Quizás tomando ciertas medidas para guiarla, podríamos lograr hacerla aún más efectiva. Sin lugar a dudas, el rol de la mutación en SIAMD y SIAMD_X es sumamente importante, pues es el encargado de proveer la mayor parte de la diversidad en el repertorio inmune. Por esta razón, la elección del esquema de clonación utilizado en el algoritmo, así como la asignación adaptativa de los porcentajes de mutación representan aspectos en los que el desempeño de este SIAM puede ser mejorado. Por último, una extensión interesante sería incorporar un mecanismo para manejo de restricciones, dado que la mayor parte de los problemas de optimización del mundo real tienen restricciones.

Apéndice A

Conjunto de problemas de prueba

Con el fin de estandarizar la evaluación y comparación entre distintos AEMOs, se han propuesto distintos conjuntos de problemas de prueba [43]. Un conjunto de problemas de prueba se compone de problemas que representan cada uno distintos retos durante el proceso de optimización. Dentro de éstos, se encuentran los utilizados en el capítulo 4 para evaluar el desempeño del algoritmo propuesto. A continuación, detallamos los problemas que componen al conjunto Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler (DTLZ) [51, 52, 42] y al conjunto *Walking Fish Group* (WFG) [43] incluyendo sus características.

A.1. Conjunto Deb-Thiele-Laumanns-Zitzler (DTLZ)

Este conjunto de problemas de prueba fue publicado por primera vez en forma de un reporte técnico [51]. Los problemas DTLZ se construyen utilizando el enfoque *bottom-up* y el enfoque de superficie de restricción. El conjunto se compone de nueve problemas escalables con distintas características que pretenden probar la habilidad de un AEMO en términos de convergencia y diversidad. Los detalles de los primeros siete problemas se retoman en esta sección.

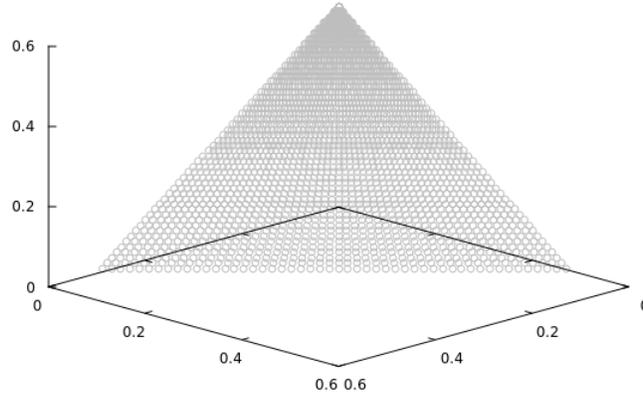


Figura A.1: DTLZ1

A.1.1. DTLZ1

El problema tiene un frente óptimo de Pareto lineal, es separable y multimodal. El problema está definido por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f_1(\vec{x}) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots x_{M-1}(1 + g(x_M)), \\
 &\text{minimizar } f_2(\vec{x}) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots (1 - x_{M-1})(1 + g(x_M)), \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{minimizar } f_{M-1}(\vec{x}) = \frac{1}{2}x_1(1 - x_2)(1 + g(x_M)), \\
 &\text{minimizar } f_M(\vec{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1)(1 + g(x_M)), \\
 &\text{sujeto a } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$g(x_M) = 100 \left[|x_M| + \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5)) \right] \tag{A.2}$$

Las soluciones óptimas de Pareto corresponden a $x_M = 0$ y los valores de las funciones objetivas se encuentran dentro del hiperplano lineal: $\sum_{m=1}^M f_m = 0.5$. Se sugiere un valor de $k = 5$ para este problema. El número total de variables es $n = M + k - 1$. La dificultad de este problema consiste en converger al hiperplano. El espacio de búsqueda contiene $(11^k - 1)$ frentes óptimos de Pareto locales y cada uno es capaz de atraer un AEMO. El frente óptimo de Pareto se puede observar en la figura A.1.

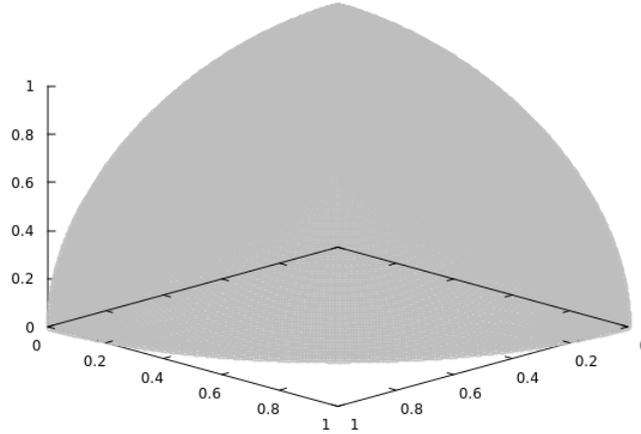


Figura A.2: DTLZ2

A.1.2. DTLZ2

El frente óptimo de Pareto de este problema es cóncavo, separable y uni-modal. El problema está definido por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f_1(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2)\cos(x_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_2(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2)\text{sen}(x_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_3(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2) \dots \text{sen}(x_{M-2}\pi/2), \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{minimizar } f_{M-1}(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\text{sen}(x_2\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_M(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\text{sen}(x_1\pi/2), \\
 &\quad \text{sujeto a } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \\
 &\quad \text{donde } g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0.5)^2.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Las soluciones óptimas de Pareto corresponden a $x_i = 0.5$ y todas las funciones objetivo deben de satisfacer $\sum_{i=1}^M (f_i)^2 = 1$. El frente óptimo de Pareto se puede observar en la figura A.2. Se recomienda un valor de $k = |x_M| = 10$ para este problema. El número total de las variables es $n = M + k - 1$.

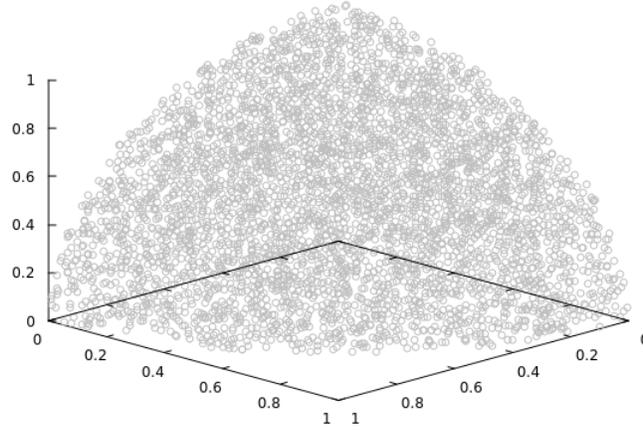


Figura A.3: DTLZ3

A.1.3. DTLZ3

El problema es similar a DTLZ2, a excepción de la función g , que la hace multi-frontal. El problema está definido por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f_1(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2)\cos(x_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_2(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2)\text{sen}(x_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_3(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2) \dots \text{sen}(x_{M-2}\pi/2), \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{minimizar } f_{M-1}(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1\pi/2)\text{sen}(x_2\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_M(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\text{sen}(x_1\pi/2), \\
 &\text{sujeto a } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $g(x_M) = 100 \left[|x_M| + \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5)) \right]$.

Se sugiere el valor de $k = |x_M| = 10$. Hay un total de $n = M + k - 1$ variables de decisión. La función g introduce $(3^k - 1)$ frentes de Pareto locales, aunque solo hay un frente óptimo de Pareto global. Todos los frentes locales están paralelos al frente global. El frente óptimo de Pareto corresponde a $x_M = (0.5, \dots, 0.5)^T$ y $g = 0$. El próximo frente óptimo de Pareto está en $g = 1$. El frente óptimo de Pareto se observa en la figura A.3.

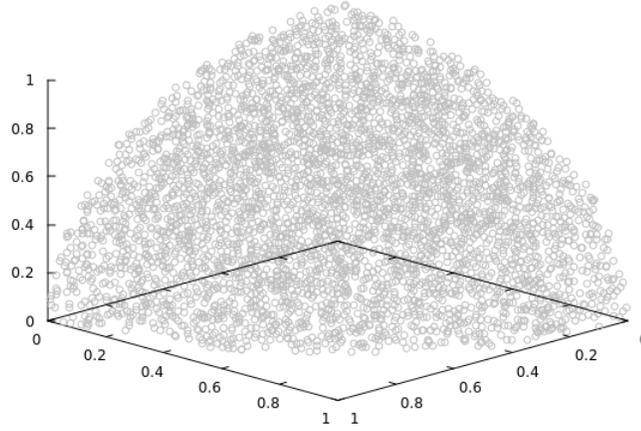


Figura A.4: DTLZ4

A.1.4. DTLZ4

El frente óptimo de Pareto correspondiente es cóncavo, separable y uni-modal. El problema tiene el objetivo de investigar la capacidad de un AEMO de mantener una buena distribución de soluciones, modificando DTLZ2. El problema está definido por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f_1(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1^\alpha \pi/2)\cos(x_2^\alpha \pi/2) \dots \cos(x_{M-2}^\alpha \pi/2)\cos(x_{M-1}^\alpha \pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_2(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1^\alpha \pi/2)\cos(x_2^\alpha \pi/2) \dots \cos(x_{M-2}^\alpha \pi/2)\text{sen}(x_{M-1}^\alpha \pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_3(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1^\alpha \pi/2)\cos(x_2^\alpha \pi/2) \dots \text{sen}(x_{M-2}^\alpha \pi/2), \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{minimizar } f_{M-1}(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(x_1^\alpha \pi/2)\text{sen}(x_2^\alpha \pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_M(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\text{sen}(x_1^\alpha \pi/2), \\
 &\text{sujeto a } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \\
 &\quad \text{donde } g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0.5)^2.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Se sugiere el valor de $\alpha = 100$. Todas las variables de decisión se encuentran en el rango $[0, 1]$. Se sugiere un valor de $k = 10$. Hay $n = M + k - 1$ variables de decisión en el problema. La modificación permite que exista un conjunto de soluciones denso cerca del plano $f_M - f_1$. El frente óptimo de Pareto se observa en la figura A.4.

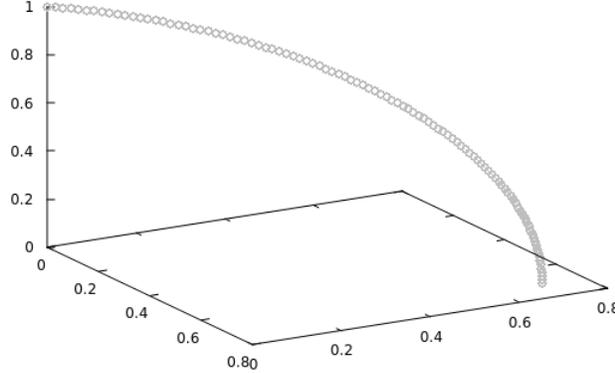


Figura A.5: DTLZ5

A.1.5. DTLZ5

El frente de óptimos de Pareto es uni-modal y degenerado. Se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f_1(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2}\pi/2)\cos(\theta_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_2(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2}\pi/2)\text{sen}(\theta_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_3(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2) \dots \text{sen}(\theta_{M-2}\pi/2), \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{minimizar } f_{M-1}(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\text{sen}(\theta_2\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_M(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\text{sen}(\theta_1\pi/2), \tag{A.6} \\
 &\quad \text{donde } \theta_i = \frac{\pi}{4(1 + g(r))}(1 + 2g(r)x_i), \text{ para } i = 2, 3, \dots, (M - 1), \\
 &\quad g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0.5)^2, \\
 &\quad \text{sujeto a } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Este problema es una modificación de DTLZ2, donde se sugiere la función g con $k = |x_M| = 10$. La cantidad de variables de decisión está dado por $n = M + k - 1$. DTLZ5 prueba la habilidad de un AEMO para converger a una curva. El frente óptimo de Pareto corresponde a $x_M = (0.5, \dots, 0.5)^T$, y todos los valores de función objetivo debe satisfacer $\sum_{n=1}^M (f_i)^2 = 1$. El frente óptimo de Pareto se observa en la figura A.5.

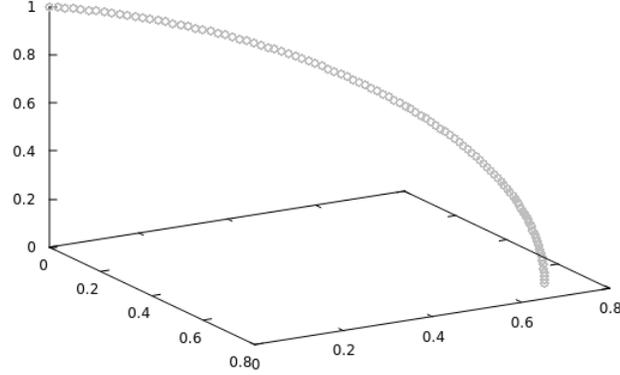


Figura A.6: DTLZ6

A.1.6. DTLZ6

Es una modificación de DTLZ5, cambiando la función g . El frente óptimo de Pareto es uni-modal y degenerado. El problema se expresa a través de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f_1(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2}\pi/2)\cos(\theta_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_2(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2) \dots \cos(\theta_{M-2}\pi/2)\text{sen}(\theta_{M-1}\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_3(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2) \dots \text{sen}(\theta_{M-2}\pi/2), \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{minimizar } f_{M-1}(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\cos(\theta_1\pi/2)\text{sen}(\theta_2\pi/2), \\
 &\text{minimizar } f_M(\vec{x}) = (1 + g(x_M))\text{sen}(\theta_1\pi/2),
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde $\theta_i = \frac{\pi}{4(1 + g(r))}(1 + 2g(r)x_i)$, para $i = 2, 3, \dots, (M - 1)$,

$$g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i)^{0.1},$$

sujeto a $0 \leq x_i \leq 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

El frente óptimo de Pareto corresponde a $x_M = (0, \dots, 0)^T$. Se sugiere el valor de $k = 10$. La falta de convergencia al frente óptimo de Pareto verdadero causa que los AEMOs encuentren una superficie dominada como el frente obtenido, mientras que el frente óptimo de Pareto verdadero es una curva. El frente óptimo de Pareto se observa en la figura A.6.

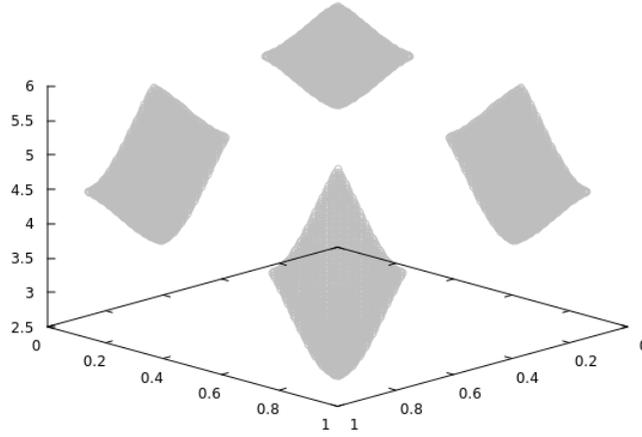


Figura A.7: DTLZ7

A.1.7. DTLZ7

El problema tiene un conjunto disconexo de 2^{M-1} regiones óptimas de Pareto en el espacio de búsqueda y prueba la capacidad del algoritmo de mantener sub-poblaciones en distintas regiones óptimas de Pareto. El problema está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } f_1(x_1) = x_1, \\
 &\text{minimizar } f_2(x_2) = x_2, \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{minimizar } f_{M-1}(x_{M-1}) = x_{M-1}, \\
 &\text{minimizar } f_M = (1 + g(x_M))h(f_1, f_2, \dots, f_{M-1}, g), \\
 &\quad \text{donde } g(x_{M-1}) = 1 + \frac{9}{|x_M|} \sum_{x_i=x_M} x_i, \\
 &\quad h(f_1, f_2, \dots, f_{M-1}, g) = M - \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{f_i}{1+g} (1 + \sin(3\pi f_i)) \right], \\
 &\text{sujeto a } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

La función g requiere de $k = |x_M| = 20$ variables de decisión. Las soluciones óptimas de Pareto corresponden a $x_M = (0, \dots, 0)^T$. El frente óptimo de Pareto se observa en la figura A.7.

A.2. Conjunto *Walking Fish Group* (WFG)

El conjunto de problemas de prueba WFG [43] surge como una alternativa para aliviar deficiencias y áreas de oportunidad identificadas en los conjuntos existentes. Mediante un enfoque sistemático, se proponen nueve problemas escalables multi-objetivo, enfocándose en algunas características definidas previamente por los autores. Los problemas manipulan indirectamente al vector de variables decisión a través de un vector adicional que representa un problema simple. Este vector se obtiene aplicando al vector de variables decisión a una serie de transformaciones. Cada transformación aumenta la complejidad del problema adyacente.

$$\begin{aligned}
 & \text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 \text{minimizar } & f_{m=1:M}(\vec{x}) = D_{x_M} + S_m h_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 & \text{donde } \vec{x} = \{x_1, \dots, x_{M-1}\} \\
 & = \{\max(t_m^P, A_1)(t_{M-1}^P - 0.5) + 0.5, \dots, \max(t_M^P, A_{M-1})(t_m^P - 0.5) + 0.5, t_M^P\} \\
 & t^P = \{t_1^P, \dots, t_M^P\} \leftarrow t^{P-1} \leftarrow \dots \leftarrow t^1 \leftarrow z_{[0,1]} \\
 & z_{[0,1]} = \{z_{1,[0,1]}, \dots, z_{n,[0,1]}\} \\
 & = \{z^1/z_{1,max}, \dots, z^n/z_{n,max}\}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

donde M es el número de objetivos, x es un conjunto de M parámetros adyacentes (donde x_M es un parámetro de distancia y $x_{1:M-1}$ son parámetros de posición), z es un conjunto de $k + l = n \geq M$ parámetros (los primeros k parámetros son de posición y los últimos l son de distancia), $D > 0$ es una constante de escalamiento de distancia, $A_{1:M-1} \in \{0, 1\}$ son constantes de degeneración, $h_{1:M}$ son funciones de forma, $S_{1:M} > 0$ son constantes de escala y $t^{1:P}$ son vectores de transición, donde " \leftarrow " indica que cada vector de transición se crea de otro, utilizando funciones de transición. El dominio de las componentes de z es $[0, z_{i,max}]$, donde $z_{i,max} > 0$. Todas las componentes de x tiene el dominio de $[0, 1]$.

Las funciones de forma determinan la naturaleza del frente óptimo de Pareto y mapean los parámetros con dominio $[0, 1]$ en el rango $[0, 1]$. Estas funciones se detallan en la tabla A.2. Las funciones de transformación mapean parámetros de entrada con dominio $[0, 1]$ en el rango $[0, 1]$. Las transformaciones de sesgo afectan el proceso de búsqueda sesgando el paisaje de aptitud. Las transformaciones de desplazamiento mueven la posición del óptimo. Las transformaciones de reducción incorporan dependencias entre parámetros distintos o incluyen no-separabilidad en el problema. Estas funciones son descritas en la tabla A.2.

Todos los problemas dentro del conjunto WFG cuentan con parámetros de posición k que es un valor que debe ser divisible por el número de parámetros subyacentes de posición, $M - 1$, que simplifica las reducciones. El número de parámetros de distancia

| |
|---|
| <p>Lineal</p> $\text{linear}_1(x_1, \dots, x_{M-1}) = \prod_{i=1}^{M-1} x_i$ $\text{linear}_{m=2:M-1}(x_1, \dots, x_{M-1}) = \left(\prod_{i=1}^{M-m} x_i \right) (1 - x_{M-m+1})$ $\text{linear}_M = 1 - x_1$ <p>Donde $h_{m=1:M} = \text{linear}_m$. El frente óptimo de Pareto es un hiperplano lineal, donde $\sum_{m=1}^M h_m = 1$.</p> |
| <p>Convexo</p> $\text{convex}_1(x_1, \dots, x_{M-1}) = \prod_{i=1}^{M-1} (1 - \cos(x_i \pi/2))$ $\text{convex}_{m=2:M-1}(x_1, \dots, x_{M-1}) = \left(\prod_{i=1}^{M-m} (1 - \cos(x_i \pi/2)) \right) (1 - \sin(x_{M-m+1} \pi/2))$ $\text{convex}_M(x_1, \dots, x_{M-1}) = 1 - \sin(x_1 \pi/2)$ <p>Donde $h_{m=1:M} = \text{convex}_m$. El frente óptimo de Pareto es convexo.</p> |
| <p>Cóncavo</p> $\text{concave}_1(x_1, \dots, x_{M-1}) = \prod_{i=1}^{M-1} \sin(x_i \pi/2)$ $\text{concave}_{m=2:M-1}(x_1, \dots, x_{M-1}) = \left(\prod_{i=1}^{M-m} \sin(x_i \pi/2) \right) \cos(x_{M-m+1} \pi/2)$ $\text{concave}_M(x_1, \dots, x_{M-1}) = \cos(x_1 \pi/2)$ <p>Donde $h_{m=1:M} = \text{concave}_m$. El frente óptimo de Pareto es cóncavo, y consiste en un segmento de la hiper-esfera de radio uno centrada en el origen, donde $\sum_{m=1}^M h_m^2 = 1$.</p> |
| <p>Mixto cóncavo/convexo ($\alpha > 0, A \in \{1, 2, \dots\}$)</p> $\text{mixed}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) = \left(1 - x_1 - \frac{\cos(2A\pi x_1 + \pi/2)}{2A\pi} \right)^\alpha$ <p>Causa que el frente óptimo de Pareto contenga segmentos convexos y cóncavos, el número es controlado por A. La forma general es controlada por α: cuando $\alpha > 1$ la forma general es convexa y cuando $\alpha < 1$, la forma general es cóncava. Cuando $\alpha = 1$, la forma general es lineal.</p> |
| <p>Disconexo ($\alpha, \beta > 0, A \in \{1, 2, \dots\}$)</p> $\text{disc}_M(x_1, \dots, x_{M-1}) = 1 - (x_1)^\alpha \cos^2(A(x_1)^\beta \pi)$ <p>Causa que el frente óptimo de Pareto tenga regiones disconexas; el número de estas regiones es controlada por A. La forma general es controlada por α (donde $\alpha > 1$ o donde $\alpha < 1$, la forma general es cóncava o convexa, respectivamente, y cuando $\alpha = 1$, la forma general es lineal). β influencia la localización de las regiones disconexas (valores altos mueven la posición de regiones desconectadas hacia valores grandes de x_1, y vice versa).</p> |

Tabla A.1: Funciones de forma del conjunto de problemas WFG.

| |
|---|
| <p>Sesgo: Polinomial ($\alpha > 0, \alpha \neq 1$)</p> $\text{b_poly}(y, \alpha) = y^\alpha$ <p>donde $\alpha > 1$ o donde $\alpha < 1$, y está sesgada hacia cero o hacia uno, respectivamente.</p> |
| <p>Sesgo: Región plana ($A, B, C \in [0, 1], B < C, B = 0 \Rightarrow A = 0 \wedge C \neq 1, C = 1 \Rightarrow A = 1 \wedge B \neq 0$)</p> $\text{b_flat}(y, A, B, C) = A + \min(0, \lfloor y - B \rfloor) \frac{A(B - y)}{B} - \min(0, \lfloor C - y \rfloor) \frac{(1 - A)(y - C)}{1 - C}$ <p>Valores de y entre B y C (el área de la región plana) son todas mapeadas al valor de A.</p> |
| <p>Sesgo: Dependencia entre parámetros ($A \in (0, 1), 0 < B < C$)</p> $\text{b_param}(y, y', A, B, C) = y^{B+(C-B)v(u(y'))}$ $v(u(y')) = A - (1 - 2u(y')) [0.5 - u(y')] + A $ <p>A, B, C y el vector de parámetros secundarios y' determinan el grado en que y está sesgado siendo elevado a una potencia asociada: los valores de $u(y') \in [0, 0.5]$ son linealmente mapeados en $[B, B+(C-B)A]$, y los valores $u(y') \in [0.5, 1]$ son linealmente mapeados en $[B+(C-B)A, C]$.</p> |
| <p>Desplazamiento: Lineal $A \in (0, 1)$</p> $\text{s_lineal}(y, A) = \frac{ y - A }{ \lfloor A - y \rfloor + A}$ <p>A es el valor para el cual y se mapea a cero.</p> |
| <p>Desplazamiento: Deceptivo ($A \in (0, 1), 0 < B \ll 1 < C \ll 1, A - B > 0, A + B < 1$)</p> $\text{s_deceptive}(y, A, B, C) = 1 + (y - A - B) \times \left(\frac{\lfloor y - A + B \rfloor (1 - C + \frac{A-B}{B})}{A - B} + \frac{\lfloor A + B - y \rfloor (1 - C + \frac{1-A-B}{B})}{1 - A - B} + \frac{1}{B} \right)$ <p>A es el valor en el que y se mapea a cero, y el mínimo global de la transformación. B es el tamaño de “apertura” del pozo que lleva al mínimo global, y C es el valor del mínimo deceptivo.</p> |

Tabla A.2: Funciones de transformación para el conjunto de problemas WFG.

| |
|--|
| <p>Desplazamiento: Multi-modal ($A \in \{1, 2, \dots\}, B \geq 0, (4A + 2)\pi \geq 4B, C \in (0, 1)$)</p> $s_multi(y, A, B, C) = \frac{1 + \cos \left[(4A + 2)\pi \left(0.5 - \frac{ y-C }{2(\lfloor C-y \rfloor + C)} \right) \right] + 4B \left(\frac{ y-C }{2(\lfloor C-y \rfloor + C)} \right)^2}{B + 2}$ <p>A controla el número de mínimos, B controla la magnitud de los “tamaños de colinas” de la multi-modalidad, y C es el valor para el que y se mapea a cero. Cuando $B = 0$, $2A + 1$ valores de y (uno en C) son mapeados a cero, y cuando $B \neq 0$, hay $2A$ mínimos locales, y un mínimo local en C. Valores más grandes de A y valores más pequeños de B hacen al problema más difícil.</p> |
| <p>Reducción: Suma ponderada ($w = y , w_1, w_2, \dots, w_{ y } > 0$)</p> $r_sum(y, w) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{ y } w_i y_i \right)}{\sum_{i=1}^{ y } w_i}$ <p>Variando las constantes del vector ponderado w.</p> |
| <p>Reducción: No separable ($A \in \{1, \dots, y \}, y \bmod A = 0$)</p> $r_nonsep(y, w) = \frac{\sum_{j=1}^{ y } \left(y_j + \sum_{k=0}^{A-2} y_j - y_{1+(j+k) \bmod y } \right)}{\frac{ y }{A} \lceil A/2 \rceil (1 + 2A - 2 \lceil A/2 \rceil)}$ <p>A controla el grado de no separabilidad (notando que $r_nonsep(y, 1) = r_sum(y, \{1, \dots, 1\})$).</p> |

Tabla A.3: Funciones de transformación para el conjunto de problemas WFG (continuación).

l puede ser fijado a cualquier entero positivo, a excepción de WFG2 y WFG3, para los cuales l debe ser un múltiplo de dos. Las constantes para todos los problemas son

$$\begin{aligned} S_{m=1:M} &= 2m \\ D &= 1 \\ A_1 &= 1 \\ A_{2:M-1} &= \begin{cases} 0, & \text{para WFG3} \\ 1, & \text{de otra forma} \end{cases} \end{aligned}$$

La configuración para $S_{1:M}$ asegura que el frente óptimo de Pareto tenga frentes con magnitudes disimilares, y la configuración para $A_{1:M-1}$ asegura que el frente óptimo de Pareto no sea degenerado, a excepción del problema WFG3, que tiene un frente óptimo de Pareto unidimensional. Los parámetros de trabajo tienen dominios de magnitudes disimilares: $z_{i=1:n,\max} = 2i$.

A.2.1. WFG1

El problema es separable y unimodal, pero tiene regiones planas y polinomiales. Presenta un sesgo fuerte hacia valores pequeños de las variables, lo que aumenta su dificultad de solución. Se define con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \text{Dado } \vec{z} &= \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\ f_{m=1:M}(\vec{x}) &= x_M + 2\text{convex}_1(x_1, \dots, x_{M-1}) \\ \text{minimizar } f_{m=2:M-1}(\vec{x}) &= x_M + (2m)\text{convex}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\ f_M(\vec{x}) &= x_M + (2M)\text{mixed}_M(x_1, \dots, x_{M-1}) \\ \text{donde } x_{i=1:M-1} &= \text{r_sum}(\{y^{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y^{ik/(M-1)}\}, \\ &\quad \{2((i-1)k/(M-1)+1), \dots, 2ik/(M-1)\}) \\ x_M &= \text{r_sum}(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, \{2(k+1), \dots, 2n\}) \\ y_{i=1:n} &= \text{b_poly}(y_i, 0.02) \\ y'_{i=1:k} &= y''_i \\ y'_{k+1:n} &= \text{b_flat}(y''_i, 0.8, 0.75, 0.85) \\ y'_{i=1:k} &= \frac{z_i}{2i} \\ y''_i &= \text{s.linear}\left(\frac{z_i}{2i}, 0.35\right) \end{aligned} \tag{A.10}$$

El frente óptimo de Pareto para este problema se observa en la figura A.8.

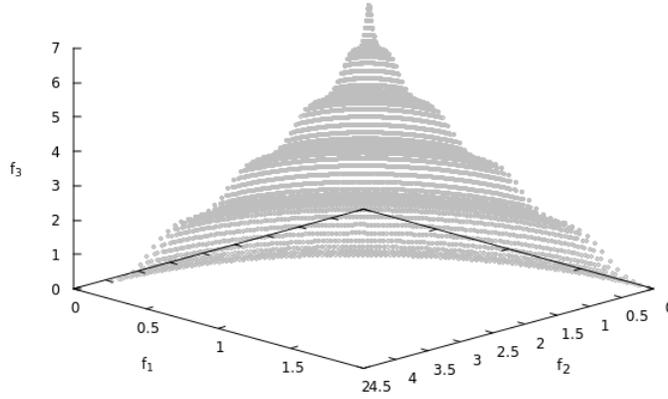


Figura A.8: WFG1

A.2.2. WFG2

El problema no es separable y multi-modal. Además, el frente óptimo de Pareto está desconectado y está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 &\quad f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + 2\text{convex}_1(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 \text{minimizar } &\quad f_{m=2:M-1}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{convex}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 &\quad f_M(\vec{x}) = x_M + (2M)\text{disc}_M(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 &\text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_sum}(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\}), \\
 &\quad x_M = \text{r_sum}(\{y_{k+1}, \dots, y_{k+l/2}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 &\quad y_{i=1:n} = \text{b_poly}(y_i, 0.02) \\
 &\quad y'_{i=1:k} = y''_i \\
 &\quad y'_{k+1:k+l/2} = \text{r_nonsep}(\{y'_{k+2(i-k)-1}, y'_{k+2(i-k)}\}, 2) \\
 &\quad y'_{i=1:k} = \frac{z_i}{2^i} \\
 &\quad y'_{i=k+l:n} = \text{s_linear}(\frac{z_i}{2^i}, 0.35)
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

El frente óptimo de Pareto se puede observar en la figura A.9.

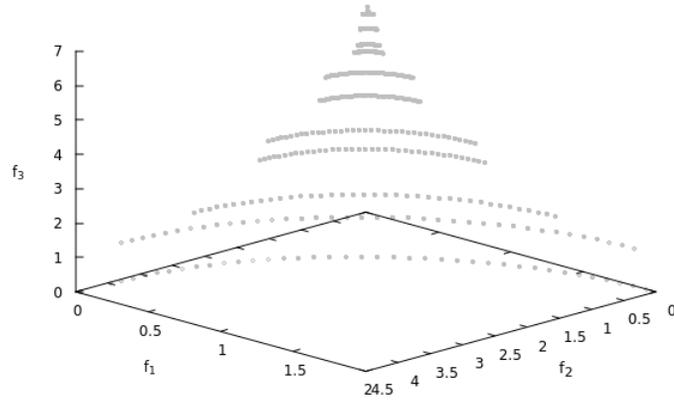


Figura A.9: WFG2

A.2.3. WFG3

El problema no es separable y unimodal. Tiene un frente óptimo de Pareto degenerado, que se define a través de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & \text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 & \text{minimizar } f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{linear}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 & \text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_sum}(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad x_M = \text{r_sum}(\{y_{k+1}, \dots, y_{k+l/2}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad y_{i=1:n} = y'_i \\
 & \quad y'_{k+1:k+l/2} = \text{r_nonsep}(\{y'_{k+2(i-k)-1}, y'_{k+2(i-k)}\}, 2) \\
 & \quad y'_{i=1:k} = \frac{z_i}{2i} \\
 & \quad y'_{i=k+l:n} = \text{s_linear}(\frac{z_i}{2i}, 0.35)
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

El frente óptimo de Pareto se observa en la figura A.10.

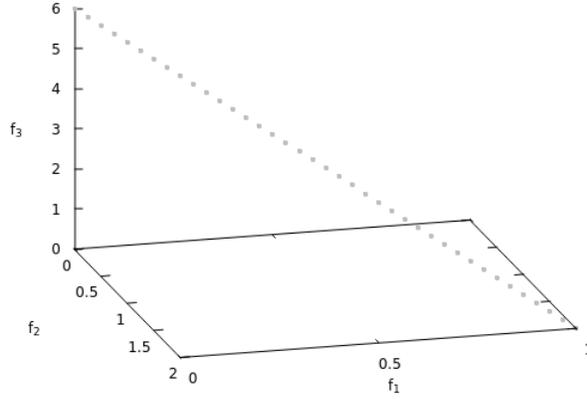


Figura A.10: WFG3

A.2.4. WFG4

El problema es separable y altamente multi-modal. El frente óptimo de Pareto es cóncavo y se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 & \text{minimizar } f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{concave}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 & \text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_sum}(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad x_M = \text{r_sum}(\{y_{k+1}, \dots, y_{k+l/2}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad y_{i=1:M-1} = \text{s_multi}(\frac{z_i}{2^i}, 30, 100.35)
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

El frente óptimo de Pareto se puede observar en la figura A.11.

A.2.5. WFG5

El problema es engañoso y separable. El frente óptimo de Pareto es cóncavo y se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 & \text{minimizar } f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{concave}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 & \text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_sum}(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad x_M = \text{r_sum}(\{y_{k+1}, \dots, y_{k+l/2}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad y_{i=1:M-1} = \text{s_decept}(\frac{z_i}{2^i}, 0.35, 0.001, 0.05)
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

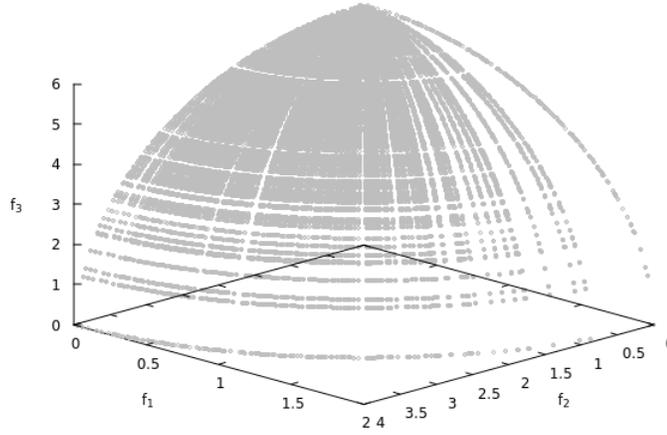


Figura A.11: WFG4

El frente óptimo de Pareto se puede observar en la figura A.12.

A.2.6. WFG6

El problema no es separable y es unimodal. El frente óptimo de Pareto es cóncavo y está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 &\text{minimizar } f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{concave}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 &\text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_nonsep}\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, k/(M-1) \\
 &\quad x_M = \text{r_nonsep}(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, 1) \\
 &\quad y_{i=1:k} = \frac{z_i}{2^i} \\
 &\quad y_{i=k+l:n} = \text{s_linear}\left(\frac{z_i}{2^i}, 0.35\right)
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

El frente óptimo de Pareto se puede observar en la figura A.13.

A.2.7. WFG7

El problema es separable y unimodal, pues tiene sesgo de dependencia entre parámetros. El frente óptimo de Pareto se puede ver en la figura A.14 y está dado por la siguiente

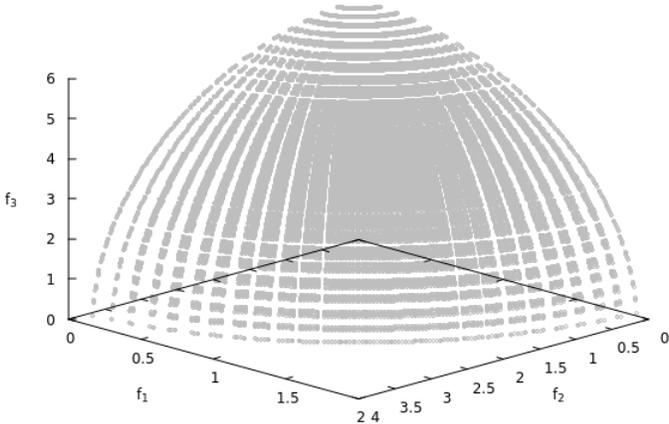


Figura A.12: WFG5

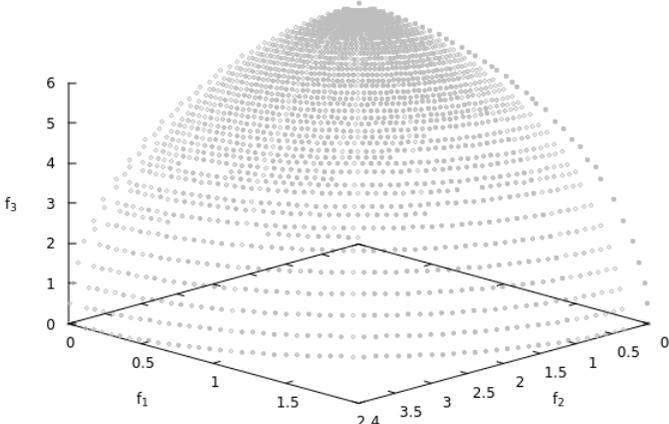


Figura A.13: WFG6

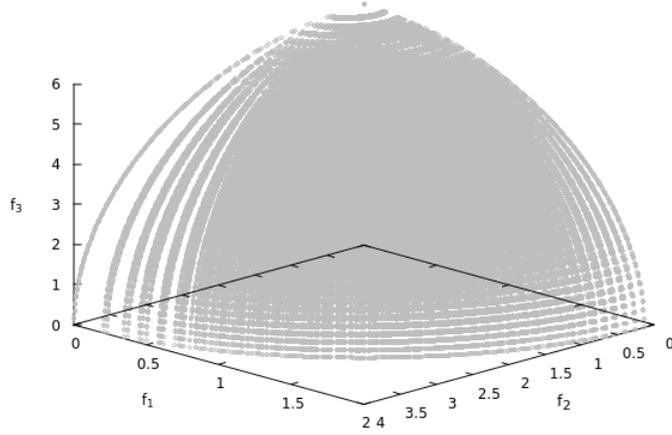


Figura A.14: WFG7

expresión:

$$\begin{aligned}
 & \text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 & \text{minimizar } f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{concave}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 & \text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_sum}(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad x_M = \text{r_sum}(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 & \quad y_{i=1:k} = y'_i \\
 & \quad y_{i=k+l:n} = \text{s_linear}(y'_i, 0.35) \\
 & \quad y_{i=l:k} = \text{b_param}\left(\frac{z_i}{2i}, \text{r_sum}\left(\left\{\frac{z_{i+l}}{2(i+l)}, \dots, \frac{z_n}{2n}\right\}, \{1, \dots, 1\}\right), 0.98/49.98, 0.02, 50\right) \\
 & \quad y'_{i=k+l:n} = \frac{z_i}{2i}
 \end{aligned}
 \tag{A.16}$$

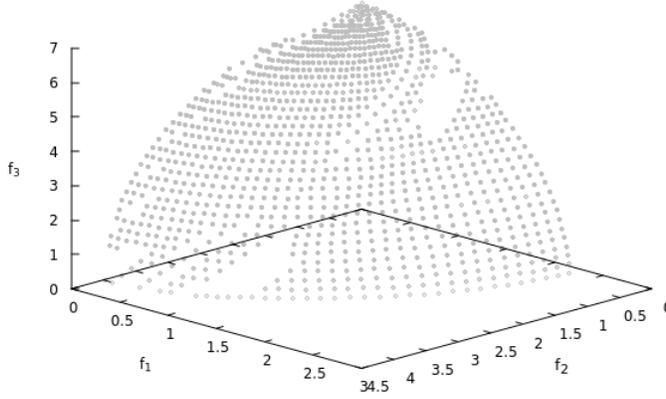


Figura A.15: WFG8

A.2.8. WFG8

El problema es no separable y unimodal, pues también tiene sesgo de dependencia entre parámetros. El frente óptimo de Pareto es cóncavo y está dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 &\text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 &\text{minimizar } f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{concave}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 &\text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_sum}(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 &\quad x_M = \text{r_sum}(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, \{1, \dots, 1\}) \\
 &\quad y_{i=1:k} = y'_i \\
 &\quad y_{i=k+l:n} = \text{s_linear}(y'_i, 0.35) \\
 &\quad y_{i=l:k} = \text{b_param}\left(\frac{z_i}{2^i}, \text{r_sum}\left(\left\{\frac{z_n}{2^n}, \dots, \frac{z_{i+l}}{2^{i+l}}\right\}, \{1, \dots, 1\}\right), 0.98/49.98, 0.02, 50\right)
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

El frente óptimo de Pareto se observa en la figura A.15.

A.2.9. WFG9

Este problema es no separable, multi-modal y engañoso y tiene sesgo de dependencia entre parámetros. Estas características hacen que este problema sea difícil de resolver. El

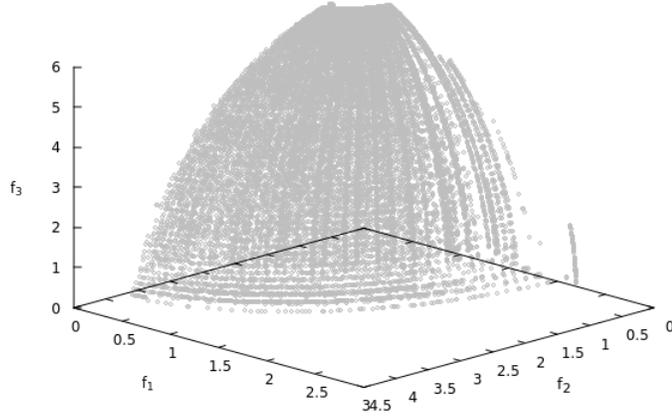


Figura A.16: WFG9

frente óptimo de Pareto es cóncavo y se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Dado } \vec{z} = \{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\} \\
 & \text{minimizar } f_{m=1:M}(\vec{x}) = x_M + (2m)\text{concave}_m(x_1, \dots, x_{M-1}) \\
 & \text{donde } x_{i=1:M-1} = \text{r_nonsep}(\{y_{(i-1)k/(M-1)+1}, \dots, y_{ik/(M-1)}\}, k/(M-1)) \\
 & \quad x_M = \text{r_nonsep}(\{y_{k+1}, \dots, y_n\}, l) \\
 & \quad y_{i=1:k} = \text{s_decept}(y_i, 0.35, 0.001, 0.05) \\
 & \quad y_{i=k+l:n} = \text{s_multi}(y_i, 30, 95, 0.35) \\
 & \quad y_{i=l:n-1} = \text{b_param}\left(\frac{z_i}{2i}, \text{r_sum}\left(\left\{\frac{z_{i+l}}{i+l}, \dots, \frac{z_n}{2n}\right\}, \{1, \dots, 1\}\right), 0.98/49.98, 0.02, 50\right) \\
 & \quad y'_n = \frac{z_n}{2n}
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

El frente óptimo de Pareto se puede ver en la figura A.16.

Apéndice B

Resultados numéricos

B.1. Hipervolumen

A continuación se muestran las tablas con los resultados de los experimentos; cada tabla cuenta con las estadísticas de los valores de hipervolumen obtenidos por cada optimizador en un experimento dado. La información que se brinda corresponde al promedio, varianza, máximo, mínimo y desviación estándar de las 50 ejecuciones por configuración de problema y algoritmo. Los mejores tres valores se encuentran resaltados en gris.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _X |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 7.97E+00 | 7.97E+00 | 7.97E+00 | 7.72E+00 | 7.74E+00 | 7.64E+00 | 7.97E+00 | 7.97E+00 |
| | var. | 8.56E-09 | 2.66E-06 | 2.94E-07 | 8.42E-01 | 6.72E-01 | 1.10E+00 | 2.29E-06 | 2.25E-08 |
| | max. | 7.97E+00 |
| | min. | 7.97E+00 | 7.96E+00 | 7.97E+00 | 1.17E+00 | 3.97E+00 | 3.19E+00 | 7.96E+00 | 7.97E+00 |
| | desv.est. | 9.25E-05 | 1.63E-03 | 7.97E-01 | 9.17E-01 | 8.20E-01 | 1.05E+00 | 1.51E-03 | 1.50E-04 |
| 4D | prom. | 1.60E+01 | 1.60E+01 | 1.60E+01 | 1.12E+01 | 9.46E+00 | 9.46E+00 | 1.60E+01 | 1.60E+01 |
| | var. | 2.44E-09 | 1.36E-07 | 6.02E-04 | 1.87E+01 | 2.73E+01 | 2.73E+01 | 5.32E-06 | 2.40E-09 |
| | max. | 1.60E+01 |
| | min. | 1.60E+01 | 1.60E+01 | 1.59E+01 | 3.64E-01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 1.60E+01 | 1.60E+01 |
| | desv.est. | 4.94E-05 | 3.68E-04 | 2.45E-02 | 4.33E+00 | 5.22E+00 | 5.22E+00 | 2.31E-03 | 4.90E-05 |
| 5D | prom. | 3.19E+01 | 3.20E+01 | 3.17E+01 | 2.93E+01 | 2.77E+01 | 2.70E+01 | 3.16E+01 | 3.19E+01 |
| | var. | 2.81E-04 | 1.00E-07 | 4.62E+00 | 2.45E+01 | 3.55E+01 | 4.84E+01 | 5.91E-02 | 5.41E-04 |
| | max. | 3.20E+01 | 3.20E+01 | 3.20E+01 | 3.20E+01 | 3.20E+01 | 3.20E+01 | 3.19E+01 | 3.20E+01 |
| | min. | 3.19E+01 | 3.20E+01 | 1.37E+01 | 1.29E+01 | 1.17E+01 | 1.15E+01 | 3.08E+01 | 3.19E+01 |
| | desv.est. | 1.68E-02 | 3.16E-04 | 2.15E+00 | 4.95E+00 | 5.96E+00 | 6.96E+00 | 2.43E-01 | 2.33E-02 |
| 6D | prom. | 6.37E+01 | 6.40E+01 | 5.73E+01 | 5.63E+01 | 4.34E+01 | 4.46E+01 | 6.26E+01 | 6.36E+01 |
| | var. | 1.28E-02 | 4.11E-06 | 1.67E+02 | 1.15E+02 | 1.60E+02 | 2.50E+02 | 3.74E-01 | 2.49E-02 |
| | max. | 6.39E+01 | 6.40E+01 | 6.40E+01 | 6.40E+01 | 6.39E+01 | 6.39E+01 | 6.36E+01 | 6.38E+01 |
| | min. | 6.34E+01 | 6.40E+01 | 0.00E+00 | 2.41E+01 | 1.42E+01 | 1.72E+01 | 6.11E+01 | 6.33E+01 |
| | desv.est. | 1.13E-01 | 2.03E-03 | 1.29E+01 | 1.07E+01 | 1.26E+01 | 1.58E+01 | 6.11E-01 | 1.58E-01 |
| 7D | prom. | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 9.28E+01 | 1.18E+02 | 3.54E+01 | 3.85E+01 | 1.28E+02 | 1.28E+02 |
| | var. | 3.82E-03 | 9.82E-05 | 1.77E+03 | 3.00E+02 | 1.73E+03 | 1.76E+03 | 3.09E-02 | 1.02E-02 |
| | max. | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.23E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 |
| | min. | 1.27E+02 | 1.28E+02 | 0.00E+00 | 5.71E+01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 1.27E+02 | 1.27E+02 |
| | desv.est. | 6.18E-02 | 9.91E-03 | 4.21E+01 | 1.73E+01 | 4.15E+01 | 4.20E+01 | 1.76E-01 | 1.01E-01 |
| 8D | prom. | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 1.20E+02 | 2.40E+02 | 2.03E+02 | 1.77E+02 | 2.54E+02 | 2.56E+02 |
| | var. | 1.76E-03 | 1.29E-04 | 8.54E+03 | 6.80E+02 | 3.37E+03 | 4.43E+03 | 4.05E-01 | 1.06E-02 |
| | max. | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.53E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.55E+02 | 2.56E+02 |
| | min. | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 0.00E+00 | 1.23E+02 | 4.24E+01 | 1.53E+01 | 2.52E+02 | 2.55E+02 |
| | desv.est. | 4.20E-02 | 1.13E-02 | 9.30E+01 | 2.61E+01 | 5.80E+01 | 6.65E+01 | 6.40E-01 | 1.03E-01 |
| 9D | prom. | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 1.13E+02 | 4.45E+02 | 3.19E+02 | 3.12E+02 | 5.08E+02 | 5.11E+02 |
| | var. | 4.03E-03 | 1.13E-03 | 2.28E+04 | 7.68E+03 | 1.85E+04 | 1.74E+04 | 1.70E+00 | 3.52E-02 |
| | max. | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 5.11E+02 | 5.12E+02 |
| | min. | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 0.00E+00 | 1.35E+02 | 2.24E+01 | 2.27E+01 | 5.05E+02 | 5.11E+02 |
| | desv.est. | 6.35E-02 | 3.37E-02 | 1.50E+02 | 8.76E+01 | 1.36E+02 | 1.32E+02 | 1.31E+00 | 1.88E-01 |
| 10D | prom. | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 2.72E+02 | 8.94E+02 | 6.54E+02 | 5.78E+02 | 1.02E+03 | 1.02E+03 |
| | var. | 1.51E-02 | 4.98E-03 | 9.52E+04 | 3.11E+04 | 6.21E+04 | 6.81E+04 | 8.58E+00 | 1.72E-01 |
| | max. | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 9.66E+02 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 2.93E+00 | 1.02E+03 |
| | min. | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 0.00E+00 | 2.54E+02 | 1.01E+02 | 1.41E+02 | 1.01E+03 | 1.02E+03 |
| | desv.est. | 1.23E-01 | 7.06E-02 | 3.09E+02 | 1.76E+02 | 2.49E+02 | 2.61E+02 | 2.93E+00 | 4.15E-01 |

Tabla B.1: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ1.

Tabla B.2: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ2.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 7.39E+00 | 7.43E+00 | 7.39E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.39E+00 | 7.39E+00 |
| | var. | 3.80E-07 | 5.79E-07 | 1.20E-05 | 3.15E-07 | 2.24E-07 | 2.00E-07 | 2.76E-06 | 1.89E-06 |
| | max. | 7.39E+00 | 7.43E+00 | 7.39E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.40E+00 | 7.40E+00 |
| | min. | 7.39E+00 | 7.42E+00 | 7.38E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.39E+00 | 7.39E+00 |
| | desv.est. | 6.17E-04 | 7.61E-04 | 3.47E-03 | 5.61E-04 | 4.73E-04 | 4.47E-04 | 1.65E-03 | 1.37E-03 |
| 4D | prom. | 1.54E+01 | 1.56E+01 | 1.55E+01 | 1.56E+01 | 1.56E+01 | 9.12E+00 | 1.54E+01 | 1.55E+01 |
| | var. | 6.46E-07 | 3.61E-07 | 1.06E-04 | 3.34E-06 | 1.57E-06 | 2.43E+01 | 1.57E-05 | 4.79E-06 |
| | max. | 1.54E+01 | 1.56E+01 | 1.55E+01 | 1.56E+01 | 1.56E+01 | 1.60E+01 | 1.55E+01 | 1.55E+01 |
| | min. | 1.54E+01 | 1.56E+01 | 1.54E+01 | 1.56E+01 | 1.56E+01 | 5.81E-01 | 1.54E+01 | 1.54E+01 |
| | desv.est. | 8.04E-04 | 6.01E-04 | 1.03E-02 | 1.83E-03 | 1.25E-03 | 4.93E+00 | 3.96E-03 | 2.19E-03 |
| 5D | prom. | 3.08E+01 | 3.16E+01 | 3.13E+01 | 3.15E+01 | 3.15E+01 | 3.16E+01 | 3.05E+01 | 3.06E+01 |
| | var. | 1.14E-02 | 2.01E-06 | 6.19E-03 | 7.68E-05 | 7.22E-05 | 6.24E-05 | 3.74E-02 | 3.21E-02 |
| | max. | 3.12E+01 | 3.16E+01 | 3.14E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 3.10E+01 | 3.09E+01 |
| | min. | 3.04E+01 | 3.16E+01 | 3.10E+01 | 3.15E+01 | 3.15E+01 | 3.15E+01 | 2.99E+01 | 3.02E+01 |
| | desv.est. | 1.07E-01 | 1.42E-03 | 7.87E-02 | 8.76E-03 | 8.50E-03 | 7.90E-03 | 1.93E-01 | 1.79E-01 |
| 6D | prom. | 5.91E+01 | 6.36E+01 | 6.19E+01 | 6.35E+01 | 6.35E+01 | 6.36E+01 | 5.88E+01 | 5.90E+01 |
| | var. | 4.09E-01 | 4.62E-05 | 1.21E-01 | 5.48E-04 | 7.27E-04 | 2.55E-04 | 3.28E-01 | 3.74E-01 |
| | max. | 6.08E+01 | 6.36E+01 | 6.28E+01 | 6.36E+01 | 6.36E+01 | 6.36E+01 | 5.99E+01 | 6.07E+01 |
| | min. | 5.73E+01 | 6.36E+01 | 6.10E+01 | 6.35E+01 | 6.35E+01 | 6.35E+01 | 5.71E+01 | 5.70E+01 |
| | desv.est. | 6.40E-01 | 6.80E-03 | 3.48E-01 | 2.34E-02 | 2.70E-02 | 1.60E-02 | 5.72E-01 | 6.11E-01 |
| 7D | prom. | 1.26E+02 | 1.28E+02 | 1.21E+02 | 1.27E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.25E+02 | 1.25E+02 |
| | var. | 2.36E-01 | 2.32E-06 | 8.51E-01 | 3.40E-03 | 8.29E-04 | 2.69E-03 | 1.54E-01 | 1.63E+00 |
| | max. | 1.26E+02 | 1.28E+02 | 1.25E+02 | 1.27E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.26E+02 | 1.26E+02 |
| | min. | 1.23E+02 | 1.28E+02 | 1.19E+02 | 1.27E+02 | 1.28E+02 | 1.27E+02 | 1.23E+02 | 1.18E+02 |
| | desv.est. | 4.85E-01 | 1.52E-03 | 9.23E-01 | 5.83E-02 | 2.88E-02 | 5.19E-02 | 3.93E-01 | 1.28E+00 |
| 8D | prom. | 2.37E+02 | 2.56E+02 | 2.39E+02 | 2.54E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.35E+02 | 2.37E+02 |
| | var. | 5.71E+00 | 8.97E-06 | 5.32E+00 | 2.18E-02 | 1.18E-04 | 5.11E-05 | 6.32E+00 | 4.02E+00 |
| | max. | 2.43E+02 | 2.56E+02 | 2.47E+02 | 2.54E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.40E+02 | 2.44E+02 |
| | min. | 2.29E+02 | 2.56E+02 | 2.33E+02 | 2.54E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.24E+02 | 2.32E+02 |
| | desv.est. | 2.39E+00 | 2.99E-03 | 2.31E+00 | 1.48E-01 | 1.09E-02 | 7.15E-03 | 2.98E+00 | 2.00E+00 |
| 9D | prom. | 4.75E+02 | 5.12E+02 | 4.61E+02 | 5.08E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 4.71E+02 | 4.74E+02 |
| | var. | 1.82E+01 | 1.54E-05 | 1.27E+02 | 1.07E-01 | 2.23E-03 | 3.74E-04 | 1.91E+01 | 2.85E+01 |
| | max. | 4.84E+02 | 5.12E+02 | 4.77E+02 | 5.09E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 4.81E+02 | 4.88E+02 |
| | min. | 4.62E+02 | 5.12E+02 | 4.02E+02 | 5.07E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 4.54E+02 | 4.61E+02 |
| | desv.est. | 4.27E+00 | 3.92E-03 | 1.13E+01 | 3.27E-01 | 4.73E-02 | 1.93E-02 | 4.43E+00 | 5.34E+00 |
| 10D | prom. | 9.50E+02 | 1.02E+03 | 8.93E+02 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 9.33E+02 | 9.44E+02 |
| | var. | 1.13E+02 | 3.33E+02 | 1.21E+03 | 5.70E-01 | 3.60E-02 | 6.69E-03 | 1.84E+02 | 8.09E+01 |
| | max. | 9.79E+02 | 1.02E+03 | 9.53E+02 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.36E+01 | 9.64E+02 |
| | min. | 9.18E+02 | 9.42E+02 | 7.73E+02 | 1.01E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 9.04E+02 | 9.19E+02 |
| | desv.est. | 1.06E+01 | 1.83E+01 | 3.48E+01 | 7.55E-01 | 1.90E-01 | 8.18E-02 | 1.36E+01 | 9.00E+00 |

Tabla B.3: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ3.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _X |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 6.34E+01 | 6.33E+01 | 6.32E+01 | 4.90E+01 | 4.98E+01 | 4.98E+01 | 6.26E+01 | 6.34E+01 |
| | var. | 3.22E-05 | 2.01E-01 | 9.20E-01 | 5.78E+02 | 5.39E+02 | 5.39E+02 | 9.87E-01 | 7.26E-06 |
| | max. | 6.34E+01 | 6.34E+01 | 6.40E+01 | 6.34E+01 | 6.34E+01 | 6.34E+01 | 6.33E+01 | 6.34E+01 |
| | min. | 6.34E+01 | 5.89E+01 | 5.89E+01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 5.85E+01 | 6.34E+01 |
| | desv.est. | 5.67E-03 | 4.49E-01 | 9.59E-01 | 2.40E+01 | 2.32E+01 | 2.32E+01 | 9.88E-01 | 2.69E-03 |
| 4D | prom. | 2.55E+02 | 2.52E+02 | 1.82E+02 | 1.50E+02 | 1.31E+02 | 1.31E+02 | 2.55E+02 | 2.55E+02 |
| | var. | 1.77E-04 | 5.86E+01 | 9.80E+03 | 1.37E+04 | 1.43E+04 | 1.43E+04 | 1.64E+00 | 1.24E-05 |
| | max. | 2.55E+02 | 2.55E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.55E+02 | 2.55E+02 |
| | min. | 2.55E+02 | 2.06E+02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 2.45E+02 | 2.55E+02 |
| | desv.est. | 1.33E-02 | 7.66E+00 | 9.90E+01 | 1.17E+02 | 1.20E+02 | 1.20E+02 | 1.28E+00 | 3.52E-03 |
| 5D | prom. | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 0.00E+00 | 8.21E+02 | 8.13E+02 | 8.13E+02 | 9.22E+02 | 1.02E+03 |
| | var. | 2.05E+00 | 6.50E+00 | 0.00E+00 | 1.39E+05 | 1.42E+05 | 1.42E+05 | 6.26E+02 | 3.22E+00 |
| | max. | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 0.00E+00 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 9.76E+02 | 1.02E+03 |
| | min. | 1.01E+03 | 9.98E+02 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 8.68E+02 | 1.01E+03 |
| | desv.est. | 1.43E+00 | 2.55E+00 | 0.00E+00 | 3.73E+02 | 3.76E+02 | 3.76E+02 | 2.50E+01 | 1.80E+00 |
| 6D | prom. | 4.03E+03 | 4.08E+03 | 0.00E+00 | 3.33E+03 | 2.83E+03 | 2.83E+03 | 3.66E+03 | 4.01E+03 |
| | var. | 5.10E+02 | 7.00E+03 | 0.00E+00 | 1.86E+06 | 2.74E+06 | 2.74E+06 | 1.75E+04 | 6.90E+02 |
| | max. | 4.06E+03 | 4.10E+03 | 0.00E+00 | 4.10E+03 | 4.10E+03 | 4.10E+03 | 4.02E+03 | 4.07E+03 |
| | min. | 3.97E+03 | 3.28E+03 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 3.41E+03 | 3.95E+03 |
| | desv.est. | 2.26E+01 | 8.36E+01 | 0.00E+00 | 1.37E+03 | 1.66E+03 | 1.66E+03 | 1.32E+02 | 2.63E+01 |
| 7D | prom. | 1.64E+04 | 1.51E+04 | 0.00E+00 | 1.51E+04 | 7.09E+02 | 7.09E+02 | 1.61E+04 | 1.63E+04 |
| | var. | 1.56E+02 | 1.34E+07 | 0.00E+00 | 1.31E+07 | 5.24E+06 | 5.24E+06 | 4.33E+04 | 4.60E+03 |
| | max. | 1.64E+04 | 1.64E+04 | 0.00E+00 | 1.64E+04 | 1.20E+04 | 1.20E+04 | 1.63E+04 | 1.64E+04 |
| | min. | 1.63E+04 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 1.45E+04 | 1.62E+04 |
| | desv.est. | 1.25E+01 | 3.67E+03 | 0.00E+00 | 3.62E+03 | 2.29E+03 | 2.29E+03 | 2.08E+02 | 6.78E+01 |
| 8D | prom. | 6.50E+04 | 5.39E+04 | 0.00E+00 | 5.40E+04 | 1.51E+04 | 1.51E+04 | 5.95E+04 | 6.48E+04 |
| | var. | 1.81E+04 | 5.88E+08 | 0.00E+00 | 4.88E+08 | 5.78E+08 | 5.78E+08 | 2.55E+07 | 2.28E+04 |
| | max. | 6.54E+04 | 6.55E+04 | 0.00E+00 | 6.55E+04 | 6.55E+04 | 6.55E+04 | 6.44E+04 | 6.52E+04 |
| | min. | 6.46E+04 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 3.21E+04 | 6.44E+04 |
| | desv.est. | 1.35E+02 | 2.42E+04 | 0.00E+00 | 2.21E+04 | 2.40E+04 | 2.40E+04 | 4.98E+03 | 1.51E+02 |
| 9D | prom. | 2.60E+05 | 1.79E+05 | 0.00E+00 | 1.81E+05 | 1.24E+04 | 1.24E+04 | 2.39E+05 | 2.59E+05 |
| | var. | 2.65E+05 | 1.33E+10 | 0.00E+00 | 1.00E+10 | 1.81E+09 | 1.81E+09 | 4.33E+08 | 3.32E+05 |
| | max. | 2.61E+05 | 2.62E+05 | 0.00E+00 | 2.62E+05 | 2.32E+05 | 2.32E+05 | 2.57E+05 | 2.61E+05 |
| | min. | 2.59E+05 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 9.86E+04 | 2.58E+05 |
| | desv.est. | 5.15E+02 | 1.15E+05 | 0.00E+00 | 1.00E+05 | 4.25E+04 | 4.25E+04 | 2.17E+04 | 5.76E+02 |
| 10D | prom. | 1.04E+06 | 3.55E+05 | 0.00E+00 | 6.29E+05 | 1.67E+05 | 1.67E+05 | 9.43E+05 | 1.04E+06 |
| | var. | 4.78E+06 | 2.18E+11 | 0.00E+00 | 2.00E+11 | 1.26E+11 | 1.26E+11 | 6.99E+09 | 7.58E+06 |
| | max. | 1.05E+06 | 1.05E+06 | 0.00E+00 | 1.05E+06 | 1.05E+06 | 1.05E+06 | 8.36E+04 | 1.04E+06 |
| | min. | 1.03E+06 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 4.74E+05 | 1.03E+06 |
| | desv.est. | 2.19E+03 | 4.67E+05 | 0.00E+00 | 4.47E+05 | 3.54E+05 | 3.54E+05 | 8.36E+04 | 2.75E+03 |

Tabla B.4: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ4.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 7.24E+00 | 7.16E+00 | 7.39E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.21E+00 | 6.70E+00 |
| | var. | 1.23E-01 | 2.85E-01 | 1.81E-05 | 1.99E-04 | 2.01E-04 | 5.51E-07 | 1.41E-01 | 1.04E+00 |
| | max. | 7.40E+00 | 7.43E+00 | 7.40E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.42E+00 | 7.40E+00 | 7.40E+00 |
| | min. | 6.41E+00 | 4.00E+00 | 7.38E+00 | 7.32E+00 | 7.32E+00 | 7.42E+00 | 6.41E+00 | 4.00E+00 |
| | desv.est. | 3.50E-01 | 5.34E-01 | 4.26E-03 | 1.41E-02 | 1.42E-02 | 7.43E-04 | 3.73E-01 | 1.02E+00 |
| 4D | prom. | 1.52E+01 | 1.54E+01 | 1.55E+01 | 1.56E+01 | 1.56E+01 | 1.23E+02 | 1.53E+01 | 1.48E+01 |
| | var. | 1.62E-01 | 2.30E-01 | 1.10E-04 | 2.28E-04 | 9.41E-05 | 1.44E+04 | 6.57E-02 | 7.83E-01 |
| | max. | 1.55E+01 | 1.56E+01 | 1.55E+01 | 1.56E+01 | 1.56E+01 | 2.56E+02 | 1.55E+01 | 1.55E+01 |
| | min. | 1.28E+01 | 1.28E+01 | 1.54E+01 | 1.55E+01 | 1.55E+01 | 0.00E+00 | 1.46E+01 | 1.28E+01 |
| | desv.est. | 4.03E-01 | 4.79E-01 | 1.05E-02 | 1.51E-02 | 9.70E-03 | 1.20E+02 | 2.56E-01 | 8.85E-01 |
| 5D | prom. | 3.08E+01 | 3.15E+01 | 3.14E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 3.07E+01 | 3.00E+01 |
| | var. | 4.55E-01 | 1.09E-01 | 2.38E-03 | 1.40E-04 | 9.11E-05 | 7.95E-05 | 1.47E+00 | 6.36E+00 |
| | max. | 3.12E+01 | 3.16E+01 | 3.15E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 3.11E+01 | 3.11E+01 |
| | min. | 2.56E+01 | 2.95E+01 | 3.12E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 3.16E+01 | 2.56E+01 | 1.60E+01 |
| | desv.est. | 6.74E-01 | 3.30E-01 | 4.88E-02 | 1.18E-02 | 9.55E-03 | 8.92E-03 | 1.21E+00 | 2.52E+00 |
| 6D | prom. | 6.37E+01 | 6.40E+01 | 6.25E+01 | 6.37E+01 | 6.37E+01 | 6.37E+01 | 6.00E+01 | 5.96E+01 |
| | var. | 1.28E-02 | 4.11E-06 | 7.98E-02 | 1.51E-04 | 1.15E-04 | 8.02E-05 | 8.70E-01 | 3.34E-01 |
| | max. | 6.39E+01 | 6.40E+01 | 6.31E+01 | 6.37E+01 | 6.37E+01 | 6.37E+01 | 6.16E+01 | 6.08E+01 |
| | min. | 6.34E+01 | 6.40E+01 | 6.17E+01 | 6.36E+01 | 6.37E+01 | 6.37E+01 | 5.82E+01 | 5.85E+01 |
| | desv.est. | 1.13E-01 | 2.03E-03 | 2.82E-01 | 1.23E-02 | 1.07E-02 | 8.95E-03 | 9.33E-01 | 5.78E-01 |
| 7D | prom. | 1.26E+02 | 1.28E+02 | 1.23E+02 | 1.27E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.26E+02 | 1.25E+02 |
| | var. | 2.27E-01 | 2.74E-01 | 6.24E-01 | 5.68E-04 | 2.86E-05 | 5.93E-05 | 7.88E-02 | 6.58E+00 |
| | max. | 1.26E+02 | 1.28E+02 | 1.25E+02 | 1.27E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.26E+02 | 1.26E+02 |
| | min. | 1.23E+02 | 1.24E+02 | 1.22E+02 | 1.27E+02 | 1.28E+02 | 1.28E+02 | 1.25E+02 | 1.16E+02 |
| | desv.est. | 4.76E-01 | 5.23E-01 | 7.90E-01 | 2.38E-02 | 5.35E-03 | 7.70E-03 | 2.81E-01 | 2.56E+00 |
| 8D | prom. | 2.13E+02 | 2.56E+02 | 2.38E+02 | 2.55E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.27E+02 | 2.24E+02 |
| | var. | 3.96E+01 | 1.31E-01 | 1.18E+02 | 2.54E-03 | 2.58E-06 | 3.78E-06 | 4.08E+01 | 6.78E+01 |
| | max. | 2.29E+02 | 2.56E+02 | 2.47E+02 | 2.55E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.44E+02 | 2.37E+02 |
| | min. | 2.02E+02 | 2.54E+02 | 1.97E+02 | 2.55E+02 | 2.56E+02 | 2.56E+02 | 2.07E+02 | 2.06E+02 |
| | desv.est. | 6.29E+00 | 3.62E-01 | 1.09E+01 | 5.04E-02 | 1.61E-03 | 1.94E-03 | 5.60E+00 | 8.24E+00 |
| 9D | prom. | 4.17E+02 | 5.12E+02 | 4.32E+02 | 5.10E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 4.49E+02 | 4.39E+02 |
| | var. | 2.00E+02 | 8.93E-02 | 1.46E+03 | 6.50E-03 | 1.94E-06 | 3.46E-06 | 2.41E+02 | 3.26E+02 |
| | max. | 4.57E+02 | 5.12E+02 | 4.86E+02 | 5.10E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 4.87E+02 | 4.73E+02 |
| | min. | 3.94E+02 | 5.11E+02 | 3.47E+02 | 5.09E+02 | 5.12E+02 | 5.12E+02 | 4.07E+02 | 3.98E+02 |
| | desv.est. | 1.41E+01 | 2.99E-01 | 3.82E+01 | 8.06E-02 | 1.39E-03 | 1.86E-03 | 1.58E+01 | 1.81E+01 |
| 10D | prom. | 8.22E+02 | 1.02E+03 | 8.05E+02 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 9.02E+02 | 8.69E+02 |
| | var. | 8.49E+02 | 1.88E+00 | 7.36E+03 | 3.73E-02 | 9.26E-07 | 6.35E-07 | 8.76E+02 | 1.03E+03 |
| | max. | 9.09E+02 | 1.02E+03 | 9.42E+02 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 2.96E+01 | 9.43E+02 |
| | min. | 7.69E+02 | 1.01E+03 | 5.94E+02 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 1.02E+03 | 8.05E+02 | 8.01E+02 |
| | desv.est. | 2.91E+01 | 1.37E+00 | 8.58E+01 | 1.93E-01 | 9.62E-04 | 7.97E-04 | 2.96E+01 | 3.22E+01 |

Tabla B.5: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ5.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 6.09E+00 | 5.85E+00 | 6.10E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.09E+00 | 6.09E+00 |
| | var. | 4.08E-08 | 4.29E-02 | 1.08E-07 | 6.11E-09 | 1.06E-08 | 5.44E-09 | 2.56E-08 | 1.18E-10 |
| | max. | 6.09E+00 | 6.08E+00 | 6.10E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.09E+00 | 6.09E+00 |
| | min. | 6.09E+00 | 5.11E+00 | 6.10E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.09E+00 | 6.09E+00 |
| | desv.est. | 2.02E-04 | 2.07E-01 | 6.10E-01 | 7.82E-05 | 1.03E-04 | 7.37E-05 | 1.59E-04 | 1.09E-05 |
| 4D | prom. | 1.19E+01 | 1.15E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.56E+01 | 1.18E+01 | 1.19E+01 |
| | var. | 8.03E-04 | 4.34E-02 | 3.90E-04 | 2.33E-06 | 2.88E-07 | 3.86E-05 | 3.36E-04 | 1.39E-05 |
| | max. | 1.19E+01 | 1.18E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.56E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 |
| | min. | 1.17E+01 | 1.05E+01 | 1.18E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.55E+01 | 1.18E+01 | 1.19E+01 |
| | desv.est. | 2.83E-02 | 2.08E-01 | 1.97E-02 | 1.53E-03 | 5.36E-04 | 6.21E-03 | 1.83E-02 | 3.73E-03 |
| 5D | prom. | 2.33E+01 | 2.21E+01 | 2.32E+01 | 2.18E+01 | 2.18E+01 | 2.18E+01 | 2.31E+01 | 2.32E+01 |
| | var. | 1.44E-02 | 3.02E-01 | 2.33E+01 | 3.37E-02 | 4.29E-02 | 5.56E-02 | 5.18E-03 | 7.16E-03 |
| | max. | 2.35E+01 | 2.28E+01 | 2.32E+01 | 2.26E+01 | 2.28E+01 | 2.27E+01 | 2.32E+01 | 2.34E+01 |
| | min. | 2.29E+01 | 2.04E+01 | 2.29E+01 | 2.16E+01 | 2.16E+01 | 2.16E+01 | 2.25E+01 | 2.30E+01 |
| | desv.est. | 1.20E-01 | 5.49E-01 | 2.29E+01 | 1.84E-01 | 2.07E-01 | 2.36E-01 | 7.19E-02 | 8.46E-02 |
| 6D | prom. | 5.91E+01 | 6.36E+01 | 4.48E+01 | 4.39E+01 | 4.37E+01 | 4.37E+01 | 4.54E+01 | 4.56E+01 |
| | var. | 4.09E-01 | 4.62E-05 | 4.61E-02 | 2.19E-01 | 2.33E-01 | 1.98E-01 | 1.45E-02 | 2.97E-02 |
| | max. | 6.08E+01 | 6.36E+01 | 4.51E+01 | 4.47E+01 | 4.46E+01 | 4.46E+01 | 4.58E+01 | 4.59E+01 |
| | min. | 5.73E+01 | 6.36E+01 | 4.40E+01 | 4.30E+01 | 4.29E+01 | 4.29E+01 | 4.44E+01 | 4.51E+01 |
| | desv.est. | 6.40E-01 | 6.80E-03 | 4.48E+00 | 4.68E-01 | 4.83E-01 | 4.45E-01 | 1.20E-01 | 1.72E-01 |
| 7D | prom. | 8.75E+01 | 6.69E+01 | 8.77E+01 | 4.79E+01 | 7.63E+01 | 7.60E+01 | 8.71E+01 | 8.79E+01 |
| | var. | 6.97E-01 | 5.75E+01 | 2.04E-01 | 1.15E-01 | 1.80E+00 | 2.84E+00 | 7.42E-02 | 1.18E-02 |
| | max. | 8.80E+01 | 7.86E+01 | 8.86E+01 | 4.87E+01 | 7.89E+01 | 7.91E+01 | 8.82E+01 | 8.80E+01 |
| | min. | 8.46E+01 | 4.06E+01 | 8.66E+01 | 4.71E+01 | 7.41E+01 | 7.41E+01 | 8.62E+01 | 8.75E+01 |
| | desv.est. | 8.35E-01 | 7.58E+00 | 4.52E-01 | 3.39E-01 | 1.34E+00 | 1.69E+00 | 2.72E-01 | 1.09E-01 |
| 8D | prom. | 1.83E+02 | 9.59E+01 | 1.73E+02 | 6.62E+01 | 1.67E+02 | 1.67E+02 | 1.81E+02 | 1.82E+02 |
| | var. | 4.89E-02 | 5.54E+02 | 1.13E+00 | 0.00E+00 | 8.97E-01 | 1.33E+00 | 2.02E-01 | 5.71E-02 |
| | max. | 1.83E+02 | 1.44E+02 | 1.76E+02 | 6.62E+01 | 1.68E+02 | 1.68E+02 | 1.82E+02 | 1.83E+02 |
| | min. | 1.82E+02 | 3.40E+01 | 1.71E+02 | 6.62E+01 | 1.65E+02 | 1.64E+02 | 1.80E+02 | 1.82E+02 |
| | desv.est. | 2.21E-01 | 2.35E+01 | 1.06E+00 | 0.00E+00 | 9.47E-01 | 1.15E+00 | 4.52E-01 | 2.39E-01 |
| 9D | prom. | 3.64E+02 | 1.39E+02 | 3.45E+02 | 1.30E+02 | 3.25E+02 | 3.24E+02 | 3.60E+02 | 3.63E+02 |
| | var. | 1.80E-01 | 1.65E+03 | 7.15E+00 | 0.00E+00 | 4.06E+00 | 5.54E+00 | 1.20E+00 | 3.73E-01 |
| | max. | 3.65E+02 | 2.37E+02 | 3.49E+02 | 1.30E+02 | 3.29E+02 | 3.28E+02 | 3.62E+02 | 3.64E+02 |
| | min. | 3.62E+02 | 3.54E+01 | 3.36E+02 | 1.30E+02 | 3.18E+02 | 3.18E+02 | 3.57E+02 | 3.61E+02 |
| | desv.est. | 4.24E-01 | 4.07E+01 | 2.67E+00 | 0.00E+00 | 2.02E+00 | 2.35E+00 | 1.05E+00 | 6.10E-01 |
| 10D | prom. | 7.24E+02 | 2.49E+02 | 6.86E+02 | 2.55E+02 | 6.29E+02 | 6.28E+02 | 7.18E+02 | 7.23E+02 |
| | var. | 9.91E-01 | 6.44E+03 | 3.08E+01 | 0.00E+00 | 2.30E+01 | 2.44E+01 | 6.13E+00 | 2.10E+00 |
| | max. | 7.28E+02 | 4.98E+02 | 6.96E+02 | 2.55E+02 | 6.38E+02 | 6.37E+02 | 2.48E+00 | 7.28E+02 |
| | min. | 7.21E+02 | 8.30E+01 | 6.74E+02 | 2.55E+02 | 6.20E+02 | 6.15E+02 | 7.12E+02 | 7.21E+02 |
| | desv.est. | 9.95E-01 | 8.02E+01 | 5.55E+00 | 0.00E+00 | 4.80E+00 | 4.94E+00 | 2.48E+00 | 1.45E+00 |

Tabla B.6: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ6.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 5.79E+00 | 5.68E+00 | 6.11E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.02E+00 | 5.88E+00 |
| | var. | 7.62E-03 | 1.01E-02 | 2.95E-09 | 1.36E-10 | 1.28E-10 | 8.35E-11 | 2.24E-04 | 4.37E-03 |
| | max. | 6.00E+00 | 5.94E+00 | 6.11E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.09E+00 | 6.03E+00 |
| | min. | 5.57E+00 | 5.42E+00 | 6.11E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.08E+00 | 6.01E+00 | 5.72E+00 |
| | desv.est. | 8.73E-02 | 1.01E-01 | 5.43E-05 | 1.17E-05 | 1.13E-05 | 9.14E-06 | 1.49E-02 | 6.61E-02 |
| 4D | prom. | 1.12E+01 | 3.30E+00 | 1.18E+01 | 1.18E+01 | 1.18E+01 | 1.19E+01 | 1.11E+01 | 1.14E+01 |
| | var. | 3.05E-02 | 4.16E-01 | 2.21E-03 | 2.43E-03 | 1.97E-03 | 2.56E-06 | 4.74E-02 | 2.18E-02 |
| | max. | 1.16E+01 | 5.61E+00 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.19E+01 | 1.15E+01 | 1.18E+01 |
| | min. | 1.07E+01 | 2.11E+00 | 1.17E+01 | 1.17E+01 | 1.17E+01 | 1.19E+01 | 1.05E+01 | 1.11E+01 |
| | desv.est. | 1.75E-01 | 6.45E-01 | 1.18E+00 | 4.93E-02 | 4.44E-02 | 1.60E-03 | 2.18E-01 | 1.48E-01 |
| 5D | prom. | 2.01E+01 | 1.76E+00 | 2.24E+01 | 2.20E+01 | 2.19E+01 | 2.20E+01 | 2.24E+01 | 2.17E+01 |
| | var. | 8.85E-01 | 4.94E-01 | 1.50E-02 | 1.86E-01 | 1.65E-01 | 1.55E-01 | 1.78E-03 | 9.00E-02 |
| | max. | 2.21E+01 | 4.07E+00 | 2.27E+01 | 2.28E+01 | 2.27E+01 | 2.27E+01 | 2.28E+01 | 2.24E+01 |
| | min. | 1.81E+01 | 4.83E-01 | 2.20E+01 | 2.13E+01 | 2.13E+01 | 2.13E+01 | 2.23E+01 | 2.11E+01 |
| | desv.est. | 9.41E-01 | 7.03E-01 | 1.22E-01 | 4.31E-01 | 4.06E-01 | 3.94E-01 | 4.22E-02 | 3.00E-01 |
| 6D | prom. | 4.02E+03 | 4.05E+03 | 4.36E+01 | 4.39E+01 | 4.36E+01 | 4.38E+01 | 4.35E+01 | 4.21E+01 |
| | var. | 3.99E+03 | 3.98E+03 | 5.75E-03 | 3.54E-01 | 2.98E-01 | 3.15E-01 | 1.07E+00 | 6.21E-01 |
| | max. | 4.04E+03 | 4.09E+03 | 4.41E+01 | 4.51E+01 | 4.47E+01 | 4.50E+01 | 4.50E+01 | 4.43E+01 |
| | min. | 4.04E+03 | 4.10E+03 | 4.35E+01 | 4.27E+01 | 4.27E+01 | 4.29E+01 | 4.06E+01 | 4.04E+01 |
| | desv.est. | 4.04E+03 | 4.09E+03 | 7.58E-02 | 5.95E-01 | 5.46E-01 | 5.62E-01 | 1.03E+00 | 7.88E-01 |
| 7D | prom. | 7.68E+01 | 0.00E+00 | 8.59E+01 | 4.68E+01 | 7.49E+01 | 7.50E+01 | 7.35E+01 | 7.77E+01 |
| | var. | 4.25E+00 | 0.00E+00 | 3.81E-01 | 1.25E+00 | 1.62E+00 | 1.97E+00 | 2.92E+01 | 4.50E+00 |
| | max. | 8.17E+01 | 0.00E+00 | 8.64E+01 | 4.87E+01 | 7.85E+01 | 7.92E+01 | 8.06E+01 | 8.19E+01 |
| | min. | 7.20E+01 | 0.00E+00 | 8.43E+01 | 4.48E+01 | 7.41E+01 | 7.41E+01 | 5.76E+01 | 7.20E+01 |
| | desv.est. | 2.06E+00 | 0.00E+00 | 6.17E-01 | 1.12E+00 | 1.27E+00 | 1.40E+00 | 5.40E+00 | 2.12E+00 |
| 8D | prom. | 1.72E+02 | 0.00E+00 | 1.70E+02 | 6.62E+01 | 1.66E+02 | 1.66E+02 | 1.68E+02 | 1.71E+02 |
| | var. | 9.73E+00 | 0.00E+00 | 1.72E+00 | 6.59E-03 | 2.33E+00 | 3.87E+00 | 5.40E+00 | 1.06E+01 |
| | max. | 1.80E+02 | 0.00E+00 | 1.72E+02 | 6.62E+01 | 1.69E+02 | 1.69E+02 | 1.72E+02 | 1.82E+02 |
| | min. | 1.64E+02 | 0.00E+00 | 1.67E+02 | 6.55E+01 | 1.61E+02 | 1.59E+02 | 1.62E+02 | 1.65E+02 |
| | desv.est. | 3.12E+00 | 0.00E+00 | 1.31E+00 | 8.12E-02 | 1.53E+00 | 1.97E+00 | 2.35E+00 | 3.26E+00 |
| 9D | prom. | 3.41E+02 | 0.00E+00 | 3.37E+02 | 1.30E+02 | 3.23E+02 | 3.23E+02 | 3.22E+02 | 3.39E+02 |
| | var. | 3.30E+01 | 0.00E+00 | 6.40E+00 | 5.11E-02 | 1.24E+01 | 1.43E+01 | 7.75E+01 | 3.75E+01 |
| | max. | 3.55E+02 | 0.00E+00 | 3.43E+02 | 1.30E+02 | 3.29E+02 | 3.29E+02 | 3.39E+02 | 3.53E+02 |
| | min. | 3.28E+02 | 0.00E+00 | 3.32E+02 | 1.27E+02 | 3.16E+02 | 3.12E+02 | 3.05E+02 | 3.26E+02 |
| | desv.est. | 5.74E+00 | 0.00E+00 | 2.53E+00 | 2.26E-01 | 3.52E+00 | 3.78E+00 | 8.88E+00 | 6.12E+00 |
| 10D | prom. | 6.75E+02 | 0.00E+00 | 6.71E+02 | 2.55E+02 | 6.27E+02 | 6.25E+02 | 6.55E+02 | 6.72E+02 |
| | var. | 2.00E+02 | 0.00E+00 | 2.23E+01 | 1.20E-01 | 4.43E+01 | 4.22E+01 | 2.12E+02 | 2.02E+02 |
| | max. | 7.12E+02 | 0.00E+00 | 6.82E+02 | 2.55E+02 | 6.37E+02 | 6.38E+02 | 1.46E+01 | 7.01E+02 |
| | min. | 6.42E+02 | 0.00E+00 | 6.59E+02 | 2.52E+02 | 6.12E+02 | 6.09E+02 | 6.10E+02 | 6.41E+02 |
| | desv.est. | 1.41E+01 | 0.00E+00 | 4.72E+00 | 3.46E-01 | 6.65E+00 | 6.50E+00 | 1.46E+01 | 1.42E+01 |

Tabla B.7: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ7.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _X |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 1.73E+01 | 1.73E+01 | 1.72E+01 | 1.67E+01 | 1.50E+01 | 1.70E+01 | 1.58E+01 | 1.61E+01 |
| | var. | 9.64E-02 | 9.31E-02 | 5.13E-01 | 2.20E+00 | 7.79E+00 | 9.76E-01 | 2.83E+00 | 3.52E+00 |
| | max. | 1.73E+01 | 1.74E+01 | 1.74E+01 | 1.74E+01 | 1.74E+01 | 1.74E+01 | 1.72E+01 | 1.73E+01 |
| | min. | 1.42E+01 | 1.43E+01 | 1.43E+01 | 1.12E+01 | 1.12E+01 | 1.43E+01 | 1.12E+01 | 1.11E+01 |
| | desv.est. | 3.10E-01 | 3.05E-01 | 7.16E-01 | 1.48E+00 | 2.79E+00 | 9.88E-01 | 1.67E+00 | 1.88E+00 |
| 4D | prom. | 2.59E+01 | 2.54E+01 | 2.46E+01 | 2.02E+01 | 2.04E+01 | 2.07E+01 | 1.87E+01 | 2.03E+01 |
| | var. | 3.31E-01 | 1.00E+00 | 1.23E-01 | 4.12E+00 | 1.06E+01 | 2.38E+00 | 1.18E+01 | 2.44E+01 |
| | max. | 2.59E+01 | 2.64E+01 | 2.55E+01 | 2.62E+01 | 2.61E+01 | 2.51E+01 | 2.23E+01 | 2.60E+01 |
| | min. | 2.02E+01 | 2.06E+01 | 2.38E+01 | 1.63E+01 | 9.34E+00 | 1.74E+01 | 9.33E+00 | 8.96E+00 |
| | desv.est. | 5.75E-01 | 1.00E+00 | 3.50E-01 | 2.03E+00 | 3.25E+00 | 1.54E+00 | 3.44E+00 | 4.93E+00 |
| 5D | prom. | 3.00E+01 | 2.72E+01 | 2.63E+01 | 1.33E+01 | 1.19E+01 | 1.34E+01 | 1.58E+01 | 2.85E+01 |
| | var. | 5.96E+00 | 7.28E+00 | 8.88E-01 | 2.00E+00 | 3.02E+01 | 2.23E+00 | 3.70E+01 | 3.97E+01 |
| | max. | 3.45E+01 | 3.26E+01 | 2.83E+01 | 1.72E+01 | 1.79E+01 | 1.92E+01 | 2.06E+01 | 3.58E+01 |
| | min. | 2.24E+01 | 1.85E+01 | 2.41E+01 | 1.21E+01 | 0.00E+00 | 1.23E+01 | 0.00E+00 | 1.60E+01 |
| | desv.est. | 2.44E+00 | 2.70E+00 | 9.42E-01 | 1.42E+00 | 5.50E+00 | 1.49E+00 | 6.08E+00 | 6.30E+00 |
| 6D | prom. | 5.94E+01 | 6.36E+01 | 2.27E+01 | 1.07E+01 | 6.90E+00 | 1.13E+01 | 1.54E+01 | 2.49E+01 |
| | var. | 4.44E-01 | 5.09E-02 | 2.90E+00 | 3.05E+00 | 2.06E+01 | 6.29E-01 | 5.26E+01 | 6.45E+01 |
| | max. | 6.06E+01 | 6.36E+01 | 2.73E+01 | 1.25E+01 | 1.17E+01 | 1.24E+01 | 2.22E+01 | 3.79E+01 |
| | min. | 5.79E+01 | 6.21E+01 | 1.79E+01 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 8.43E+00 | 0.00E+00 | 5.04E+00 |
| | desv.est. | 6.66E-01 | 2.26E-01 | 1.70E+00 | 1.75E+00 | 4.54E+00 | 7.93E-01 | 7.25E+00 | 8.03E+00 |
| 7D | prom. | 3.95E+01 | 1.17E+01 | 1.74E+01 | 9.66E+00 | 1.05E+01 | 8.46E+00 | 1.04E+01 | 9.30E+00 |
| | var. | 2.40E+02 | 3.77E+01 | 3.29E+00 | 1.39E+01 | 4.31E-01 | 1.80E+00 | 3.93E+01 | 1.37E+02 |
| | max. | 5.32E+01 | 2.70E+01 | 2.33E+01 | 1.26E+01 | 1.18E+01 | 1.07E+01 | 1.98E+01 | 5.28E+01 |
| | min. | 2.85E+00 | 0.00E+00 | 1.29E+01 | 0.00E+00 | 8.49E+00 | 3.94E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| | desv.est. | 1.55E+01 | 6.14E+00 | 2.51E+00 | 3.73E+00 | 6.56E-01 | 1.34E+00 | 6.27E+00 | 1.17E+01 |
| 8D | prom. | 7.43E+01 | 8.48E-01 | 1.25E+01 | 6.26E+00 | 1.17E+01 | 1.17E+01 | 8.63E+00 | 4.27E+01 |
| | var. | 2.25E+01 | 5.04E+00 | 2.83E+00 | 2.04E+01 | 5.77E-02 | 2.10E-01 | 1.17E+02 | 6.72E+02 |
| | max. | 7.52E+01 | 1.28E+01 | 1.70E+01 | 1.26E+01 | 1.24E+01 | 1.23E+01 | 3.11E+01 | 7.52E+01 |
| | min. | 4.12E+01 | 0.00E+00 | 8.49E+00 | 0.00E+00 | 1.12E+01 | 9.79E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| | desv.est. | 4.74E+00 | 2.25E+00 | 1.68E+00 | 4.52E+00 | 2.40E-01 | 4.58E-01 | 1.02E+01 | 2.59E+01 |
| 9D | prom. | 7.96E+01 | 3.40E-02 | 9.23E+00 | 3.28E+00 | 1.19E+01 | 1.18E+01 | 3.38E+00 | 3.40E+01 |
| | var. | 8.32E+01 | 5.64E-02 | 2.84E+00 | 1.77E+01 | 1.92E-01 | 2.43E+00 | 2.81E+01 | 9.06E+02 |
| | max. | 8.19E+01 | 2.23E+00 | 1.36E+01 | 1.30E+01 | 1.24E+01 | 1.49E+01 | 2.58E+01 | 8.18E+01 |
| | min. | 3.51E+01 | 0.00E+00 | 5.50E+00 | 0.00E+00 | 9.33E+00 | 2.04E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| | desv.est. | 9.12E+00 | 2.38E-01 | 1.69E+00 | 4.21E+00 | 4.38E-01 | 1.56E+00 | 7.14E+00 | 3.01E+01 |
| 10D | prom. | 7.61E+01 | 0.00E+00 | 7.23E+00 | 1.16E+00 | 1.23E+01 | 1.25E+01 | 2.15E+00 | 3.36E+01 |
| | var. | 8.44E+01 | 0.00E+00 | 3.64E+00 | 8.07E+00 | 2.58E-01 | 7.70E-01 | 4.38E+01 | 9.30E+02 |
| | max. | 7.85E+01 | 0.00E+00 | 1.22E+01 | 1.22E+01 | 1.32E+01 | 1.40E+01 | 6.62E+00 | 7.87E+01 |
| | min. | 3.12E+01 | 0.00E+00 | 1.99E+00 | 0.00E+00 | 9.39E+00 | 8.59E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| | desv.est. | 9.19E+00 | 0.00E+00 | 1.91E+00 | 2.84E+00 | 5.08E-01 | 8.77E-01 | 6.62E+00 | 3.05E+01 |

Tabla B.8: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG1.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 5.49E+01 | 5.08E+01 | 8.03E+01 | 4.31E+01 | 4.34E+01 | 4.30E+01 | 4.64E+01 | 5.10E+01 |
| | var. | 1.69E+00 | 4.11E+00 | 6.61E+00 | 1.03E+00 | 9.32E-01 | 1.03E+00 | 1.32E-01 | 1.25E+00 |
| | max. | 5.70E+01 | 5.37E+01 | 8.92E+01 | 4.56E+01 | 4.51E+01 | 4.55E+01 | 4.73E+01 | 5.29E+01 |
| | min. | 5.29E+01 | 4.74E+01 | 7.40E+01 | 4.09E+01 | 4.15E+01 | 4.15E+01 | 4.57E+01 | 4.91E+01 |
| | desv.est. | 1.30E+00 | 2.03E+00 | 2.57E+00 | 1.02E+00 | 9.65E-01 | 1.02E+00 | 3.62E-01 | 1.12E+00 |
| 4D | prom. | 4.72E+02 | 4.11E+02 | 6.81E+02 | 3.40E+02 | 3.41E+02 | 3.37E+02 | 3.63E+02 | 4.33E+02 |
| | var. | 8.71E+01 | 2.22E+02 | 4.11E+02 | 1.78E+02 | 1.45E+02 | 2.10E+02 | 9.65E+01 | 1.20E+02 |
| | max. | 4.91E+02 | 4.40E+02 | 7.34E+02 | 3.70E+02 | 3.74E+02 | 3.66E+02 | 3.89E+02 | 4.57E+02 |
| | min. | 4.49E+02 | 3.84E+02 | 6.11E+02 | 3.13E+02 | 3.21E+02 | 3.14E+02 | 3.30E+02 | 4.13E+02 |
| | desv.est. | 9.33E+00 | 1.49E+01 | 2.03E+01 | 1.33E+01 | 1.20E+01 | 1.45E+01 | 9.82E+00 | 1.10E+01 |
| 5D | prom. | 4.85E+03 | 3.78E+03 | 6.81E+02 | 3.75E+03 | 3.80E+03 | 3.81E+03 | 3.91E+03 | 4.59E+03 |
| | var. | 9.74E+03 | 3.65E+04 | 4.11E+02 | 4.56E+03 | 1.76E+03 | 2.38E+03 | 1.00E+04 | 5.52E+03 |
| | max. | 5.04E+03 | 4.18E+03 | 7.34E+02 | 3.88E+03 | 3.88E+03 | 3.93E+03 | 4.17E+03 | 4.76E+03 |
| | min. | 4.58E+03 | 3.39E+03 | 6.11E+02 | 3.57E+03 | 3.68E+03 | 3.68E+03 | 3.59E+03 | 4.44E+03 |
| | desv.est. | 9.87E+01 | 1.91E+02 | 2.03E+01 | 6.75E+01 | 4.19E+01 | 4.88E+01 | 1.00E+02 | 7.43E+01 |
| 6D | prom. | 5.76E+04 | 4.53E+04 | 8.70E+04 | 4.54E+04 | 4.53E+04 | 4.56E+04 | 4.76E+04 | 5.40E+04 |
| | var. | 1.69E+06 | 1.45E+06 | 1.33E+07 | 2.43E+05 | 2.56E+05 | 1.53E+05 | 1.22E+06 | 2.03E+06 |
| | max. | 6.16E+04 | 4.83E+04 | 9.46E+04 | 4.69E+04 | 4.65E+04 | 4.63E+04 | 5.07E+04 | 5.78E+04 |
| | min. | 5.53E+04 | 4.14E+04 | 7.92E+04 | 4.43E+04 | 4.38E+04 | 4.46E+04 | 4.52E+04 | 5.06E+04 |
| | desv.est. | 1.30E+03 | 1.20E+03 | 3.64E+03 | 4.93E+02 | 5.06E+02 | 3.91E+02 | 1.10E+03 | 1.43E+03 |
| 7D | prom. | 8.78E+05 | 6.66E+05 | 1.28E+06 | 4.66E+05 | 3.07E+05 | 3.23E+05 | 6.03E+05 | 7.56E+05 |
| | var. | 1.71E+08 | 4.02E+08 | 2.79E+09 | 8.42E+08 | 1.64E+09 | 3.06E+09 | 4.86E+09 | 2.65E+09 |
| | max. | 9.04E+05 | 7.32E+05 | 1.42E+06 | 5.38E+05 | 4.06E+05 | 4.96E+05 | 7.38E+05 | 8.11E+05 |
| | min. | 8.44E+05 | 6.26E+05 | 1.16E+06 | 3.95E+05 | 2.15E+05 | 2.11E+05 | 4.26E+05 | 5.61E+05 |
| | desv.est. | 1.31E+04 | 2.01E+04 | 5.28E+04 | 2.90E+04 | 4.04E+04 | 5.53E+04 | 6.97E+04 | 5.15E+04 |
| 8D | prom. | 1.45E+07 | 1.08E+07 | 2.04E+07 | 9.81E+06 | 1.09E+07 | 1.09E+07 | 1.22E+07 | 1.33E+07 |
| | var. | 3.10E+10 | 2.84E+10 | 6.15E+11 | 1.11E+11 | 2.09E+09 | 2.65E+09 | 1.64E+10 | 2.38E+10 |
| | max. | 1.49E+07 | 1.13E+07 | 2.22E+07 | 1.07E+07 | 1.10E+07 | 1.10E+07 | 1.27E+07 | 1.37E+07 |
| | min. | 1.41E+07 | 1.03E+07 | 1.86E+07 | 8.71E+06 | 1.08E+07 | 1.08E+07 | 1.17E+07 | 1.28E+07 |
| | desv.est. | 1.76E+05 | 1.68E+05 | 7.84E+05 | 3.33E+05 | 4.57E+04 | 5.15E+04 | 1.31E+05 | 1.54E+05 |
| 9D | prom. | 2.67E+08 | 1.94E+08 | 3.50E+08 | 1.71E+08 | 1.96E+08 | 1.96E+08 | 2.20E+08 | 2.45E+08 |
| | var. | 1.15E+13 | 2.01E+13 | 1.95E+14 | 3.62E+13 | 6.64E+11 | 9.50E+11 | 1.27E+13 | 6.88E+12 |
| | max. | 2.80E+08 | 2.06E+08 | 3.79E+08 | 1.84E+08 | 1.99E+08 | 2.01E+08 | 2.31E+08 | 2.51E+08 |
| | min. | 2.60E+08 | 1.79E+08 | 3.19E+08 | 1.56E+08 | 1.94E+08 | 1.94E+08 | 2.10E+08 | 2.37E+08 |
| | desv.est. | 3.39E+06 | 4.49E+06 | 1.40E+07 | 6.02E+06 | 8.15E+05 | 9.75E+05 | 3.55E+06 | 2.62E+06 |
| 10D | prom. | 5.44E+09 | 3.74E+09 | 6.94E+09 | 3.44E+09 | 3.93E+09 | 3.94E+09 | 4.49E+09 | 4.99E+09 |
| | var. | 6.03E+15 | 2.07E+16 | 7.36E+16 | 9.09E+15 | 1.16E+14 | 1.33E+14 | 3.15E+15 | 3.47E+15 |
| | max. | 5.59E+09 | 4.21E+09 | 7.66E+09 | 3.72E+09 | 3.96E+09 | 3.96E+09 | 5.62E+07 | 5.09E+09 |
| | min. | 5.30E+09 | 3.35E+09 | 6.14E+09 | 3.21E+09 | 3.91E+09 | 3.92E+09 | 4.34E+09 | 4.81E+09 |
| | desv.est. | 7.76E+07 | 1.44E+08 | 2.71E+08 | 9.53E+07 | 1.08E+07 | 1.15E+07 | 5.62E+07 | 5.89E+07 |

Tabla B.9: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG2.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _X |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 9.79E+01 | 1.00E+02 | 9.97E+01 | 9.64E+01 | 9.65E+01 | 9.67E+01 | 9.24E+01 | 9.63E+01 |
| | var. | 1.37E-01 | 1.22E-02 | 7.75E-02 | 4.15E-01 | 3.37E-01 | 2.90E-01 | 1.70E+00 | 1.14E+00 |
| | max. | 9.89E+01 | 1.01E+02 | 1.00E+02 | 9.81E+01 | 9.79E+01 | 9.85E+01 | 9.66E+01 | 9.79E+01 |
| | min. | 9.67E+01 | 1.00E+02 | 9.87E+01 | 9.50E+01 | 9.53E+01 | 9.57E+01 | 8.91E+01 | 9.28E+01 |
| | desv.est. | 3.71E-01 | 1.11E-01 | 2.78E-01 | 6.44E-01 | 5.81E-01 | 5.39E-01 | 1.30E+00 | 1.07E+00 |
| 4D | prom. | 8.91E+02 | 9.27E+02 | 9.22E+02 | 8.63E+02 | 8.83E+02 | 8.71E+02 | 7.67E+02 | 8.69E+02 |
| | var. | 1.61E+01 | 3.59E+00 | 1.81E+01 | 2.51E+02 | 2.71E+02 | 3.17E+02 | 3.23E+02 | 1.48E+02 |
| | max. | 9.01E+02 | 9.31E+02 | 9.29E+02 | 8.97E+02 | 9.18E+02 | 9.10E+02 | 8.19E+02 | 8.99E+02 |
| | min. | 8.83E+02 | 9.22E+02 | 9.11E+02 | 8.22E+02 | 8.46E+02 | 8.27E+02 | 7.22E+02 | 8.37E+02 |
| | desv.est. | 4.02E+00 | 1.90E+00 | 4.26E+00 | 1.58E+01 | 1.65E+01 | 1.78E+01 | 1.80E+01 | 1.22E+01 |
| 5D | prom. | 9.77E+03 | 1.01E+04 | 9.22E+02 | 9.74E+03 | 9.82E+03 | 9.78E+03 | 9.29E+03 | 9.36E+03 |
| | var. | 2.70E+04 | 1.45E+03 | 1.81E+01 | 9.80E+03 | 5.40E+03 | 8.31E+03 | 5.38E+04 | 4.91E+04 |
| | max. | 1.01E+04 | 1.02E+04 | 9.29E+02 | 9.95E+03 | 9.97E+03 | 9.94E+03 | 9.81E+03 | 9.81E+03 |
| | min. | 9.37E+03 | 1.00E+04 | 9.11E+02 | 9.44E+03 | 9.67E+03 | 9.52E+03 | 8.38E+03 | 8.81E+03 |
| | desv.est. | 1.64E+02 | 3.81E+01 | 4.26E+00 | 9.90E+01 | 7.35E+01 | 9.11E+01 | 2.32E+02 | 2.22E+02 |
| 6D | prom. | 1.27E+05 | 1.30E+05 | 1.33E+05 | 1.24E+05 | 1.25E+05 | 1.26E+05 | 1.22E+05 | 1.19E+05 |
| | var. | 5.54E+06 | 1.95E+06 | 4.57E+05 | 8.35E+05 | 6.32E+05 | 7.62E+05 | 7.33E+06 | 1.42E+07 |
| | max. | 1.32E+05 | 1.34E+05 | 1.34E+05 | 1.26E+05 | 1.27E+05 | 1.28E+05 | 1.28E+05 | 1.26E+05 |
| | min. | 1.21E+05 | 1.27E+05 | 1.31E+05 | 1.21E+05 | 1.23E+05 | 1.24E+05 | 1.14E+05 | 1.12E+05 |
| | desv.est. | 2.35E+03 | 1.40E+03 | 6.76E+02 | 9.14E+02 | 7.95E+02 | 8.73E+02 | 2.71E+03 | 3.77E+03 |
| 7D | prom. | 1.72E+06 | 1.98E+06 | 1.99E+06 | 1.89E+06 | 1.76E+06 | 1.70E+06 | 1.30E+06 | 1.56E+06 |
| | var. | 2.34E+10 | 6.04E+07 | 1.31E+08 | 6.83E+09 | 1.42E+10 | 1.70E+10 | 2.54E+10 | 3.51E+10 |
| | max. | 1.94E+06 | 1.99E+06 | 2.01E+06 | 2.00E+06 | 1.93E+06 | 1.88E+06 | 1.57E+06 | 1.91E+06 |
| | min. | 1.19E+06 | 1.96E+06 | 1.96E+06 | 1.65E+06 | 1.38E+06 | 1.36E+06 | 9.67E+05 | 1.06E+06 |
| | desv.est. | 1.53E+05 | 7.77E+03 | 1.14E+04 | 8.26E+04 | 1.19E+05 | 1.31E+05 | 1.59E+05 | 1.87E+05 |
| 8D | prom. | 3.41E+07 | 3.30E+07 | 3.38E+07 | 3.27E+07 | 3.06E+07 | 3.08E+07 | 2.90E+07 | 3.33E+07 |
| | var. | 1.22E+10 | 5.74E+10 | 4.73E+10 | 6.77E+11 | 2.01E+11 | 3.09E+11 | 1.29E+12 | 4.54E+11 |
| | max. | 3.43E+07 | 3.35E+07 | 3.42E+07 | 3.38E+07 | 3.14E+07 | 3.19E+07 | 3.15E+07 | 3.41E+07 |
| | min. | 3.38E+07 | 3.25E+07 | 3.28E+07 | 2.95E+07 | 2.95E+07 | 2.94E+07 | 2.60E+07 | 3.16E+07 |
| | desv.est. | 1.10E+05 | 2.40E+05 | 2.18E+05 | 8.23E+05 | 4.49E+05 | 5.56E+05 | 9.45E+05 | 6.74E+05 |
| 9D | prom. | 6.49E+08 | 6.31E+08 | 6.40E+08 | 6.22E+08 | 5.75E+08 | 5.77E+08 | 5.37E+08 | 6.34E+08 |
| | var. | 2.27E+12 | 1.73E+13 | 1.42E+13 | 1.25E+14 | 9.09E+13 | 1.08E+14 | 7.00E+14 | 2.87E+14 |
| | max. | 6.52E+08 | 6.39E+08 | 6.48E+08 | 6.40E+08 | 5.96E+08 | 5.98E+08 | 5.86E+08 | 6.51E+08 |
| | min. | 6.43E+08 | 6.17E+08 | 6.26E+08 | 5.82E+08 | 5.53E+08 | 5.57E+08 | 4.88E+08 | 5.47E+08 |
| | desv.est. | 1.51E+06 | 4.16E+06 | 3.77E+06 | 1.12E+07 | 9.53E+06 | 1.04E+07 | 2.48E+07 | 1.70E+07 |
| 10D | prom. | 1.36E+10 | 1.32E+10 | 1.34E+10 | 1.30E+10 | 1.18E+10 | 1.19E+10 | 1.15E+10 | 1.32E+10 |
| | var. | 2.14E+15 | 6.27E+15 | 1.06E+16 | 7.95E+16 | 2.45E+16 | 4.51E+16 | 3.86E+17 | 1.65E+17 |
| | max. | 1.37E+10 | 1.34E+10 | 1.36E+10 | 1.34E+10 | 1.22E+10 | 1.24E+10 | 6.22E+08 | 1.37E+10 |
| | min. | 1.34E+10 | 1.30E+10 | 1.31E+10 | 1.19E+10 | 1.15E+10 | 1.16E+10 | 1.02E+10 | 1.20E+10 |
| | desv.est. | 4.63E+07 | 7.92E+07 | 1.03E+08 | 2.82E+08 | 1.56E+08 | 2.12E+08 | 6.22E+08 | 4.06E+08 |

Tabla B.10: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG3.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 7.47E+01 | 7.42E+01 | 7.46E+01 | 7.15E+01 | 7.16E+01 | 7.20E+01 | 7.11E+01 | 7.24E+01 |
| | var. | 1.19E-01 | 4.25E-02 | 7.29E-02 | 5.51E-01 | 3.02E-01 | 4.24E-01 | 9.65E-01 | 8.17E-01 |
| | max. | 7.51E+01 | 7.45E+01 | 7.52E+01 | 7.29E+01 | 7.30E+01 | 7.31E+01 | 7.34E+01 | 7.39E+01 |
| | min. | 7.31E+01 | 7.36E+01 | 7.37E+01 | 6.99E+01 | 7.04E+01 | 7.06E+01 | 6.88E+01 | 6.90E+01 |
| | desv.est. | 3.46E-01 | 2.06E-01 | 2.70E-01 | 7.42E-01 | 5.50E-01 | 6.51E-01 | 9.78E-01 | 9.04E-01 |
| 4D | prom. | 6.32E+02 | 6.32E+02 | 6.41E+02 | 5.67E+02 | 5.62E+02 | 5.83E+02 | 5.59E+02 | 6.05E+02 |
| | var. | 3.37E+01 | 1.91E+01 | 3.21E+01 | 3.77E+02 | 2.08E+02 | 4.35E+02 | 1.79E+02 | 8.20E+01 |
| | max. | 6.44E+02 | 6.42E+02 | 6.52E+02 | 6.12E+02 | 6.07E+02 | 6.11E+02 | 5.99E+02 | 6.23E+02 |
| | min. | 6.11E+02 | 6.19E+02 | 6.27E+02 | 5.34E+02 | 5.38E+02 | 5.44E+02 | 5.27E+02 | 5.87E+02 |
| | desv.est. | 5.81E+00 | 4.37E+00 | 5.66E+00 | 1.94E+01 | 1.44E+01 | 2.09E+01 | 1.34E+01 | 9.05E+00 |
| 5D | prom. | 5.87E+03 | 4.72E+03 | 6.41E+02 | 5.11E+03 | 5.15E+03 | 5.21E+03 | 5.53E+03 | 5.72E+03 |
| | var. | 8.31E+03 | 6.02E+04 | 3.21E+01 | 9.99E+03 | 1.21E+04 | 1.46E+04 | 1.04E+04 | 1.75E+04 |
| | max. | 6.14E+03 | 5.45E+03 | 6.52E+02 | 5.35E+03 | 5.44E+03 | 5.53E+03 | 5.70E+03 | 6.03E+03 |
| | min. | 5.59E+03 | 4.10E+03 | 6.27E+02 | 4.92E+03 | 4.93E+03 | 4.97E+03 | 5.27E+03 | 5.45E+03 |
| | desv.est. | 9.11E+01 | 2.45E+02 | 5.66E+00 | 1.00E+02 | 1.10E+02 | 1.21E+02 | 1.02E+02 | 1.32E+02 |
| 6D | prom. | 6.63E+04 | 5.77E+04 | 8.59E+04 | 5.70E+04 | 5.90E+04 | 5.83E+04 | 6.70E+04 | 6.77E+04 |
| | var. | 2.78E+06 | 3.18E+06 | 1.86E+06 | 3.28E+06 | 3.77E+06 | 3.83E+06 | 4.76E+06 | 4.46E+06 |
| | max. | 7.04E+04 | 6.19E+04 | 8.98E+04 | 6.09E+04 | 6.30E+04 | 6.30E+04 | 7.11E+04 | 7.37E+04 |
| | min. | 6.27E+04 | 5.37E+04 | 8.27E+04 | 5.33E+04 | 5.37E+04 | 5.46E+04 | 6.18E+04 | 6.35E+04 |
| | desv.est. | 1.67E+03 | 1.78E+03 | 1.36E+03 | 1.81E+03 | 1.94E+03 | 1.96E+03 | 2.18E+03 | 2.11E+03 |
| 7D | prom. | 1.01E+06 | 1.18E+06 | 1.27E+06 | 9.26E+05 | 8.82E+05 | 8.79E+05 | 9.01E+05 | 9.61E+05 |
| | var. | 3.54E+08 | 3.99E+08 | 3.64E+08 | 1.51E+08 | 5.12E+08 | 4.65E+08 | 3.68E+08 | 1.01E+09 |
| | max. | 1.06E+06 | 1.22E+06 | 1.31E+06 | 9.56E+05 | 9.31E+05 | 9.36E+05 | 9.69E+05 | 1.04E+06 |
| | min. | 9.59E+05 | 1.12E+06 | 1.23E+06 | 8.92E+05 | 8.17E+05 | 8.24E+05 | 8.53E+05 | 8.67E+05 |
| | desv.est. | 1.88E+04 | 2.00E+04 | 1.91E+04 | 1.23E+04 | 2.26E+04 | 2.16E+04 | 1.92E+04 | 3.18E+04 |
| 8D | prom. | 2.23E+07 | 1.86E+07 | 2.15E+07 | 8.62E+06 | 1.62E+07 | 1.60E+07 | 2.02E+07 | 2.17E+07 |
| | var. | 4.12E+10 | 2.11E+11 | 1.60E+11 | 2.26E+11 | 7.43E+10 | 8.03E+10 | 1.93E+11 | 1.61E+11 |
| | max. | 2.27E+07 | 2.10E+07 | 2.23E+07 | 9.39E+06 | 1.70E+07 | 1.67E+07 | 2.11E+07 | 2.24E+07 |
| | min. | 2.18E+07 | 1.79E+07 | 2.04E+07 | 7.19E+06 | 1.57E+07 | 1.53E+07 | 1.90E+07 | 2.06E+07 |
| | desv.est. | 2.03E+05 | 4.59E+05 | 4.00E+05 | 4.76E+05 | 2.73E+05 | 2.83E+05 | 4.44E+05 | 4.01E+05 |
| 9D | prom. | 4.15E+08 | 3.65E+08 | 4.03E+08 | 1.53E+08 | 2.86E+08 | 2.82E+08 | 3.67E+08 | 4.05E+08 |
| | var. | 2.20E+13 | 4.08E+14 | 4.70E+13 | 8.62E+13 | 3.56E+13 | 3.54E+13 | 5.36E+13 | 5.35E+13 |
| | max. | 4.25E+08 | 4.08E+08 | 4.21E+08 | 1.70E+08 | 2.96E+08 | 2.97E+08 | 3.95E+08 | 4.18E+08 |
| | min. | 4.03E+08 | 3.40E+08 | 3.87E+08 | 1.27E+08 | 2.71E+08 | 2.64E+08 | 3.51E+08 | 3.76E+08 |
| | desv.est. | 4.69E+06 | 2.02E+07 | 6.85E+06 | 9.29E+06 | 5.96E+06 | 5.95E+06 | 7.93E+06 | 7.32E+06 |
| 10D | prom. | 8.72E+09 | 8.07E+09 | 8.42E+09 | 3.07E+09 | 5.69E+09 | 5.57E+09 | 7.68E+09 | 8.51E+09 |
| | var. | 7.49E+15 | 1.54E+17 | 2.51E+16 | 2.83E+16 | 8.20E+15 | 1.10E+16 | 2.29E+16 | 2.31E+16 |
| | max. | 8.94E+09 | 8.60E+09 | 8.71E+09 | 3.41E+09 | 5.87E+09 | 5.79E+09 | 1.51E+08 | 8.87E+09 |
| | min. | 8.57E+09 | 6.76E+09 | 7.97E+09 | 2.54E+09 | 5.44E+09 | 5.37E+09 | 7.06E+09 | 8.16E+09 |
| | desv.est. | 8.65E+07 | 3.92E+08 | 1.58E+08 | 1.68E+08 | 9.05E+07 | 1.05E+08 | 1.51E+08 | 1.52E+08 |

Tabla B.11: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG4.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 7.45E+01 | 7.63E+01 | 7.36E+01 | 6.96E+01 | 6.98E+01 | 6.98E+01 | 7.44E+01 | 7.51E+01 |
| | var. | 3.20E-02 | 1.75E-02 | 1.66E-01 | 4.63E-01 | 3.76E-01 | 4.88E-01 | 7.98E-02 | 5.31E-02 |
| | max. | 7.50E+01 | 7.67E+01 | 7.46E+01 | 7.13E+01 | 7.10E+01 | 7.13E+01 | 7.51E+01 | 7.55E+01 |
| | min. | 7.41E+01 | 7.60E+01 | 7.24E+01 | 6.79E+01 | 6.83E+01 | 6.87E+01 | 7.37E+01 | 7.45E+01 |
| | desv.est. | 1.79E-01 | 1.32E-01 | 4.07E-01 | 6.81E-01 | 6.13E-01 | 6.99E-01 | 2.81E-01 | 2.30E-01 |
| 4D | prom. | 6.74E+02 | 7.60E+02 | 7.16E+02 | 6.78E+02 | 6.82E+02 | 6.88E+02 | 6.61E+02 | 6.79E+02 |
| | var. | 2.64E+01 | 2.57E+00 | 4.34E+01 | 2.24E+02 | 1.97E+02 | 2.04E+02 | 2.70E+02 | 9.27E+01 |
| | max. | 6.87E+02 | 7.64E+02 | 7.29E+02 | 7.08E+02 | 7.12E+02 | 7.13E+02 | 7.00E+02 | 7.01E+02 |
| | min. | 6.64E+02 | 7.57E+02 | 7.00E+02 | 6.45E+02 | 6.46E+02 | 6.43E+02 | 6.24E+02 | 6.67E+02 |
| | desv.est. | 5.14E+00 | 1.60E+00 | 6.59E+00 | 1.50E+01 | 1.40E+01 | 1.43E+01 | 1.64E+01 | 9.63E+00 |
| 5D | prom. | 7.17E+03 | 8.32E+03 | 7.16E+02 | 7.00E+03 | 7.11E+03 | 7.07E+03 | 6.97E+03 | 7.19E+03 |
| | var. | 2.68E+04 | 1.97E+03 | 4.34E+01 | 3.17E+04 | 1.38E+04 | 2.12E+04 | 3.66E+04 | 3.79E+04 |
| | max. | 7.84E+03 | 8.44E+03 | 7.29E+02 | 7.52E+03 | 7.40E+03 | 7.46E+03 | 7.40E+03 | 7.76E+03 |
| | min. | 6.85E+03 | 8.21E+03 | 7.00E+02 | 6.64E+03 | 6.88E+03 | 6.79E+03 | 6.49E+03 | 6.81E+03 |
| | desv.est. | 1.64E+02 | 4.43E+01 | 6.59E+00 | 1.78E+02 | 1.18E+02 | 1.46E+02 | 1.91E+02 | 1.95E+02 |
| 6D | prom. | 8.43E+04 | 9.39E+04 | 1.04E+05 | 8.75E+04 | 8.91E+04 | 8.92E+04 | 8.20E+04 | 8.50E+04 |
| | var. | 5.86E+06 | 3.43E+07 | 2.87E+06 | 2.87E+06 | 2.51E+06 | 1.63E+06 | 1.25E+07 | 9.78E+06 |
| | max. | 9.36E+04 | 1.05E+05 | 1.08E+05 | 9.30E+04 | 9.33E+04 | 9.33E+04 | 9.11E+04 | 9.34E+04 |
| | min. | 8.06E+04 | 8.25E+04 | 9.92E+04 | 8.34E+04 | 8.58E+04 | 8.72E+04 | 7.74E+04 | 8.09E+04 |
| | desv.est. | 2.42E+03 | 5.85E+03 | 1.69E+03 | 1.69E+03 | 1.58E+03 | 1.28E+03 | 3.54E+03 | 3.13E+03 |
| 7D | prom. | 9.68E+05 | 1.81E+06 | 1.55E+06 | 1.13E+06 | 1.41E+06 | 1.42E+06 | 6.74E+05 | 1.15E+06 |
| | var. | 9.65E+09 | 8.04E+07 | 1.17E+09 | 7.22E+09 | 4.61E+09 | 2.55E+09 | 4.84E+09 | 3.72E+09 |
| | max. | 1.26E+06 | 1.82E+06 | 1.64E+06 | 1.32E+06 | 1.52E+06 | 1.53E+06 | 8.69E+05 | 1.33E+06 |
| | min. | 7.64E+05 | 1.78E+06 | 1.47E+06 | 9.23E+05 | 1.23E+06 | 1.30E+06 | 5.49E+05 | 1.04E+06 |
| | desv.est. | 9.82E+04 | 8.97E+03 | 3.41E+04 | 8.50E+04 | 6.79E+04 | 5.05E+04 | 6.96E+04 | 6.10E+04 |
| 8D | prom. | 2.10E+07 | 2.93E+07 | 2.59E+07 | 2.00E+07 | 2.72E+07 | 2.75E+07 | 1.86E+07 | 2.13E+07 |
| | var. | 8.61E+11 | 8.85E+10 | 4.16E+11 | 2.13E+12 | 1.42E+11 | 1.38E+11 | 5.83E+11 | 7.18E+11 |
| | max. | 2.41E+07 | 2.99E+07 | 2.75E+07 | 2.37E+07 | 2.80E+07 | 2.82E+07 | 2.10E+07 | 2.31E+07 |
| | min. | 1.96E+07 | 2.86E+07 | 2.44E+07 | 1.66E+07 | 2.62E+07 | 2.67E+07 | 1.69E+07 | 1.86E+07 |
| | desv.est. | 9.28E+05 | 2.97E+05 | 6.45E+05 | 1.46E+06 | 3.77E+05 | 3.71E+05 | 8.51E+05 | 8.47E+05 |
| 9D | prom. | 3.92E+08 | 5.70E+08 | 4.69E+08 | 3.67E+08 | 5.13E+08 | 5.19E+08 | 3.43E+08 | 3.93E+08 |
| | var. | 3.59E+14 | 3.37E+13 | 2.35E+14 | 6.95E+14 | 8.97E+13 | 6.93E+13 | 1.20E+14 | 4.80E+14 |
| | max. | 4.54E+08 | 5.83E+08 | 5.04E+08 | 4.31E+08 | 5.32E+08 | 5.34E+08 | 3.73E+08 | 4.38E+08 |
| | min. | 3.58E+08 | 5.53E+08 | 4.10E+08 | 3.05E+08 | 4.92E+08 | 5.04E+08 | 2.92E+08 | 3.39E+08 |
| | desv.est. | 1.90E+07 | 5.81E+06 | 1.53E+07 | 2.64E+07 | 9.47E+06 | 8.32E+06 | 1.14E+07 | 2.19E+07 |
| 10D | prom. | 8.06E+09 | 1.18E+10 | 9.64E+09 | 7.69E+09 | 1.07E+10 | 1.09E+10 | 7.03E+09 | 7.78E+09 |
| | var. | 2.10E+17 | 7.04E+15 | 1.24E+17 | 4.43E+17 | 3.42E+16 | 2.53E+16 | 6.13E+16 | 5.91E+17 |
| | max. | 9.29E+09 | 1.20E+10 | 1.05E+10 | 1.02E+10 | 1.11E+10 | 1.13E+10 | 2.48E+08 | 9.46E+09 |
| | min. | 7.29E+09 | 1.16E+10 | 8.39E+09 | 6.19E+09 | 1.03E+10 | 1.05E+10 | 6.31E+09 | 6.44E+09 |
| | desv.est. | 4.58E+08 | 8.39E+07 | 3.52E+08 | 6.65E+08 | 1.85E+08 | 1.59E+08 | 2.48E+08 | 7.69E+08 |

Tabla B.12: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG5.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 7.07E+01 | 7.38E+01 | 7.24E+01 | 7.02E+01 | 7.04E+01 | 7.03E+01 | 7.01E+01 | 7.09E+01 |
| | var. | 1.31E-02 | 5.53E-03 | 9.25E-02 | 3.45E-01 | 2.96E-01 | 2.85E-01 | 4.83E-02 | 1.84E-01 |
| | max. | 7.10E+01 | 7.39E+01 | 7.28E+01 | 7.21E+01 | 7.25E+01 | 7.18E+01 | 7.08E+01 | 7.16E+01 |
| | min. | 7.01E+01 | 7.35E+01 | 7.14E+01 | 6.93E+01 | 6.95E+01 | 6.95E+01 | 6.95E+01 | 7.00E+01 |
| | desv.est. | 1.15E-01 | 7.44E-02 | 3.04E-01 | 5.87E-01 | 5.44E-01 | 5.34E-01 | 2.19E-01 | 4.29E-01 |
| 4D | prom. | 6.76E+02 | 7.40E+02 | 7.05E+02 | 6.71E+02 | 6.68E+02 | 6.80E+02 | 6.24E+02 | 6.34E+02 |
| | var. | 1.55E+02 | 2.26E+00 | 7.01E+01 | 3.98E+02 | 2.45E+02 | 3.02E+02 | 1.02E+02 | 8.93E+01 |
| | max. | 6.99E+02 | 7.43E+02 | 7.19E+02 | 7.06E+02 | 7.01E+02 | 7.09E+02 | 6.54E+02 | 6.64E+02 |
| | min. | 6.47E+02 | 7.35E+02 | 6.69E+02 | 6.11E+02 | 6.30E+02 | 6.32E+02 | 5.89E+02 | 6.22E+02 |
| | desv.est. | 1.24E+01 | 1.50E+00 | 8.37E+00 | 2.00E+01 | 1.56E+01 | 1.74E+01 | 1.01E+01 | 9.45E+00 |
| 5D | prom. | 6.78E+03 | 8.14E+03 | 7.05E+02 | 7.28E+03 | 7.34E+03 | 7.30E+03 | 6.51E+03 | 6.88E+03 |
| | var. | 2.25E+04 | 1.80E+03 | 7.01E+01 | 1.48E+04 | 1.31E+04 | 6.19E+03 | 4.08E+04 | 2.10E+04 |
| | max. | 7.45E+03 | 8.24E+03 | 7.19E+02 | 7.67E+03 | 7.54E+03 | 7.50E+03 | 7.03E+03 | 7.24E+03 |
| | min. | 6.54E+03 | 8.01E+03 | 6.69E+02 | 7.00E+03 | 7.05E+03 | 7.14E+03 | 6.08E+03 | 6.59E+03 |
| | desv.est. | 1.50E+02 | 4.24E+01 | 8.37E+00 | 1.22E+02 | 1.14E+02 | 7.87E+01 | 2.02E+02 | 1.45E+02 |
| 6D | prom. | 8.04E+04 | 8.06E+04 | 9.78E+04 | 9.48E+04 | 9.57E+04 | 9.49E+04 | 7.70E+04 | 8.14E+04 |
| | var. | 7.65E+06 | 1.25E+08 | 1.90E+07 | 4.00E+06 | 2.64E+06 | 3.60E+06 | 7.70E+06 | 1.06E+07 |
| | max. | 9.20E+04 | 1.04E+05 | 1.04E+05 | 9.86E+04 | 9.91E+04 | 9.91E+04 | 8.51E+04 | 9.01E+04 |
| | min. | 7.65E+04 | 6.12E+04 | 8.61E+04 | 8.87E+04 | 9.24E+04 | 9.03E+04 | 6.96E+04 | 7.64E+04 |
| | desv.est. | 2.77E+03 | 1.12E+04 | 4.36E+03 | 2.00E+03 | 1.62E+03 | 1.90E+03 | 2.77E+03 | 3.25E+03 |
| 7D | prom. | 1.50E+06 | 1.77E+06 | 1.36E+06 | 1.45E+06 | 1.09E+06 | 1.09E+06 | 7.86E+05 | 1.14E+06 |
| | var. | 9.50E+09 | 1.16E+07 | 6.73E+09 | 2.64E+09 | 9.03E+09 | 1.18E+10 | 5.68E+09 | 3.65E+10 |
| | max. | 1.68E+06 | 1.78E+06 | 1.56E+06 | 1.50E+06 | 1.34E+06 | 1.40E+06 | 1.20E+06 | 1.50E+06 |
| | min. | 1.16E+06 | 1.76E+06 | 1.20E+06 | 1.06E+06 | 8.82E+05 | 8.56E+05 | 6.41E+05 | 7.57E+05 |
| | desv.est. | 9.75E+04 | 3.41E+03 | 8.20E+04 | 5.14E+04 | 9.50E+04 | 1.09E+05 | 7.54E+04 | 1.91E+05 |
| 8D | prom. | 1.97E+07 | 2.82E+07 | 2.19E+07 | 2.27E+07 | 2.81E+07 | 2.83E+07 | 1.94E+07 | 2.15E+07 |
| | var. | 7.09E+11 | 1.53E+11 | 2.54E+12 | 6.97E+12 | 1.69E+11 | 2.09E+11 | 1.01E+12 | 5.53E+11 |
| | max. | 2.23E+07 | 2.90E+07 | 2.55E+07 | 2.58E+07 | 2.90E+07 | 2.93E+07 | 2.31E+07 | 2.31E+07 |
| | min. | 1.82E+07 | 2.67E+07 | 1.88E+07 | 1.61E+07 | 2.71E+07 | 2.72E+07 | 1.75E+07 | 2.03E+07 |
| | desv.est. | 8.42E+05 | 3.92E+05 | 1.59E+06 | 2.64E+06 | 4.11E+05 | 4.57E+05 | 1.07E+06 | 7.44E+05 |
| 9D | prom. | 3.68E+08 | 5.54E+08 | 4.00E+08 | 3.69E+08 | 5.21E+08 | 5.32E+08 | 3.48E+08 | 3.85E+08 |
| | var. | 3.92E+14 | 2.34E+13 | 1.44E+14 | 3.82E+15 | 7.56E+13 | 5.96E+13 | 1.29E+14 | 7.06E+14 |
| | max. | 4.31E+08 | 5.64E+08 | 4.30E+08 | 4.82E+08 | 5.43E+08 | 5.47E+08 | 3.95E+08 | 4.48E+08 |
| | min. | 3.31E+08 | 5.37E+08 | 3.65E+08 | 2.63E+08 | 4.98E+08 | 5.13E+08 | 3.17E+08 | 3.46E+08 |
| | desv.est. | 1.98E+07 | 4.84E+06 | 1.20E+07 | 6.18E+07 | 8.70E+06 | 7.72E+06 | 1.26E+07 | 2.66E+07 |
| 10D | prom. | 7.42E+09 | 1.15E+10 | 8.23E+09 | 7.40E+09 | 1.08E+10 | 1.10E+10 | 7.17E+09 | 7.87E+09 |
| | var. | 1.98E+17 | 3.06E+15 | 5.05E+16 | 1.12E+18 | 3.93E+16 | 2.62E+16 | 3.92E+16 | 3.07E+17 |
| | max. | 8.76E+09 | 1.17E+10 | 9.13E+09 | 9.70E+09 | 1.13E+10 | 1.14E+10 | 1.98E+08 | 9.11E+09 |
| | min. | 6.77E+09 | 1.14E+10 | 7.77E+09 | 5.24E+09 | 1.02E+10 | 1.06E+10 | 6.40E+09 | 6.36E+09 |
| | desv.est. | 4.45E+08 | 5.53E+07 | 2.25E+08 | 1.06E+09 | 1.98E+08 | 1.62E+08 | 1.98E+08 | 5.54E+08 |

Tabla B.13: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG6.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _X |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 7.18E+01 | 7.40E+01 | 7.14E+01 | 7.18E+01 | 7.17E+01 | 7.15E+01 | 7.10E+01 | 7.25E+01 |
| | var. | 2.11E-01 | 1.16E-01 | 1.30E+00 | 1.33E-01 | 6.13E-01 | 2.04E-01 | 1.14E-01 | 2.73E-01 |
| | max. | 7.30E+01 | 7.49E+01 | 7.33E+01 | 7.35E+01 | 7.41E+01 | 7.34E+01 | 7.18E+01 | 7.37E+01 |
| | min. | 7.09E+01 | 7.29E+01 | 6.96E+01 | 7.13E+01 | 7.07E+01 | 7.12E+01 | 7.03E+01 | 7.13E+01 |
| | desv.est. | 4.59E-01 | 3.40E-01 | 1.14E+00 | 3.65E-01 | 7.83E-01 | 4.52E-01 | 3.37E-01 | 5.22E-01 |
| 4D | prom. | 6.37E+02 | 7.38E+02 | 6.81E+02 | 7.23E+02 | 7.22E+02 | 7.19E+02 | 6.17E+02 | 6.43E+02 |
| | var. | 3.55E+03 | 1.36E+01 | 2.31E+01 | 4.32E+02 | 2.82E+02 | 1.30E+02 | 9.65E+01 | 6.85E+01 |
| | max. | 6.59E+02 | 7.48E+02 | 7.01E+02 | 7.65E+02 | 7.63E+02 | 7.62E+02 | 6.37E+02 | 6.73E+02 |
| | min. | 4.92E+01 | 7.30E+02 | 6.70E+02 | 6.41E+02 | 6.68E+02 | 6.66E+02 | 5.88E+02 | 6.30E+02 |
| | desv.est. | 5.96E+01 | 3.69E+00 | 4.81E+00 | 2.08E+01 | 1.68E+01 | 1.14E+01 | 9.82E+00 | 8.28E+00 |
| 5D | prom. | 6.89E+03 | 8.12E+03 | 6.81E+02 | 7.75E+03 | 7.59E+03 | 7.56E+03 | 6.38E+03 | 6.84E+03 |
| | var. | 2.34E+04 | 1.15E+04 | 2.31E+01 | 2.79E+04 | 2.55E+04 | 3.08E+04 | 5.24E+04 | 3.94E+04 |
| | max. | 7.29E+03 | 8.26E+03 | 7.01E+02 | 8.06E+03 | 7.99E+03 | 7.90E+03 | 7.02E+03 | 7.32E+03 |
| | min. | 6.57E+03 | 7.29E+03 | 6.70E+02 | 7.23E+03 | 7.24E+03 | 7.16E+03 | 6.05E+03 | 6.41E+03 |
| | desv.est. | 1.53E+02 | 1.07E+02 | 4.81E+00 | 1.67E+02 | 1.60E+02 | 1.75E+02 | 2.29E+02 | 1.99E+02 |
| 6D | prom. | 8.08E+04 | 7.89E+04 | 1.01E+05 | 9.65E+04 | 9.52E+04 | 9.39E+04 | 7.48E+04 | 7.88E+04 |
| | var. | 4.98E+06 | 1.20E+08 | 8.34E+05 | 4.58E+06 | 3.08E+06 | 3.66E+06 | 6.99E+06 | 7.77E+06 |
| | max. | 8.93E+04 | 1.04E+05 | 1.04E+05 | 1.02E+05 | 9.88E+04 | 9.95E+04 | 8.25E+04 | 8.62E+04 |
| | min. | 7.56E+04 | 6.10E+04 | 9.88E+04 | 9.22E+04 | 9.00E+04 | 9.05E+04 | 6.96E+04 | 7.34E+04 |
| | desv.est. | 2.23E+03 | 1.10E+04 | 9.13E+02 | 2.14E+03 | 1.76E+03 | 1.91E+03 | 2.64E+03 | 2.79E+03 |
| 7D | prom. | 8.94E+05 | 1.78E+06 | 1.54E+06 | 1.54E+06 | 1.63E+06 | 1.64E+06 | 6.44E+05 | 8.12E+05 |
| | var. | 1.34E+10 | 9.47E+07 | 1.58E+08 | 1.87E+09 | 2.81E+10 | 2.66E+10 | 5.54E+09 | 1.98E+10 |
| | max. | 1.29E+06 | 1.81E+06 | 1.58E+06 | 1.60E+06 | 1.83E+06 | 1.73E+06 | 9.04E+05 | 1.25E+06 |
| | min. | 6.51E+05 | 1.75E+06 | 1.52E+06 | 1.32E+06 | 1.21E+06 | 1.16E+06 | 4.98E+05 | 6.47E+05 |
| | desv.est. | 1.16E+05 | 9.73E+03 | 1.26E+04 | 4.33E+04 | 1.68E+05 | 1.63E+05 | 7.44E+04 | 1.41E+05 |
| 8D | prom. | 2.01E+07 | 2.84E+07 | 2.63E+07 | 2.65E+07 | 2.97E+07 | 2.98E+07 | 1.74E+07 | 2.06E+07 |
| | var. | 8.95E+11 | 1.82E+11 | 5.75E+10 | 9.93E+11 | 1.51E+10 | 1.07E+10 | 8.68E+11 | 9.60E+11 |
| | max. | 2.28E+07 | 2.93E+07 | 2.69E+07 | 2.74E+07 | 3.00E+07 | 2.99E+07 | 1.90E+07 | 2.27E+07 |
| | min. | 1.84E+07 | 2.66E+07 | 2.57E+07 | 2.12E+07 | 2.94E+07 | 2.95E+07 | 1.49E+07 | 1.73E+07 |
| | desv.est. | 9.46E+05 | 4.26E+05 | 2.40E+05 | 9.96E+05 | 1.23E+05 | 1.03E+05 | 8.39E+05 | 9.80E+05 |
| 9D | prom. | 3.71E+08 | 5.58E+08 | 5.23E+08 | 5.03E+08 | 5.69E+08 | 5.73E+08 | 3.15E+08 | 3.76E+08 |
| | var. | 3.67E+14 | 3.22E+13 | 1.23E+13 | 8.41E+14 | 1.02E+13 | 4.64E+12 | 1.78E+14 | 8.22E+14 |
| | max. | 4.41E+08 | 5.68E+08 | 5.31E+08 | 5.19E+08 | 5.75E+08 | 5.76E+08 | 3.47E+08 | 4.50E+08 |
| | min. | 3.42E+08 | 5.41E+08 | 5.14E+08 | 3.33E+08 | 5.62E+08 | 5.69E+08 | 2.83E+08 | 3.22E+08 |
| | desv.est. | 1.92E+07 | 5.67E+06 | 3.51E+06 | 2.90E+07 | 3.19E+06 | 2.16E+06 | 1.22E+07 | 2.87E+07 |
| 10D | prom. | 7.56E+09 | 1.16E+10 | 1.12E+10 | 1.07E+10 | 1.21E+10 | 1.21E+10 | 6.24E+09 | 7.09E+09 |
| | var. | 1.84E+17 | 6.89E+15 | 5.10E+15 | 6.99E+16 | 9.53E+14 | 1.36E+15 | 4.01E+16 | 3.93E+17 |
| | max. | 8.62E+09 | 1.18E+10 | 1.13E+10 | 1.09E+10 | 1.22E+10 | 1.22E+10 | 2.00E+08 | 9.34E+09 |
| | min. | 6.24E+09 | 1.13E+10 | 1.09E+10 | 8.82E+09 | 1.20E+10 | 1.20E+10 | 5.79E+09 | 5.92E+09 |
| | desv.est. | 4.29E+08 | 8.30E+07 | 7.14E+07 | 2.64E+08 | 3.09E+07 | 3.68E+07 | 2.00E+08 | 6.27E+08 |

Tabla B.14: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG7.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 7.42E+01 | 7.69E+01 | 7.45E+01 | 7.21E+01 | 7.23E+01 | 7.24E+01 | 7.26E+01 | 7.48E+01 |
| | var. | 1.63E-02 | 2.67E-03 | 6.19E-02 | 1.78E-01 | 1.15E-01 | 1.34E-01 | 8.79E-02 | 8.48E-02 |
| | max. | 7.49E+01 | 7.70E+01 | 7.50E+01 | 7.34E+01 | 7.33E+01 | 7.34E+01 | 7.38E+01 | 7.52E+01 |
| | min. | 7.40E+01 | 7.67E+01 | 7.39E+01 | 7.11E+01 | 7.16E+01 | 7.17E+01 | 7.19E+01 | 7.41E+01 |
| | desv.est. | 1.28E-01 | 5.17E-02 | 2.49E-01 | 4.22E-01 | 3.39E-01 | 3.66E-01 | 2.95E-01 | 2.91E-01 |
| 4D | prom. | 6.67E+02 | 7.71E+02 | 7.18E+02 | 6.44E+02 | 6.51E+02 | 6.50E+02 | 6.07E+02 | 6.65E+02 |
| | var. | 1.85E+01 | 1.46E+00 | 2.41E+01 | 2.97E+02 | 3.15E+02 | 2.63E+02 | 1.43E+02 | 3.48E+01 |
| | max. | 6.86E+02 | 7.73E+02 | 7.30E+02 | 6.89E+02 | 6.85E+02 | 6.86E+02 | 6.32E+02 | 6.85E+02 |
| | min. | 6.60E+02 | 7.65E+02 | 7.04E+02 | 5.99E+02 | 6.21E+02 | 6.10E+02 | 5.85E+02 | 6.57E+02 |
| | desv.est. | 4.31E+00 | 1.21E+00 | 4.91E+00 | 1.72E+01 | 1.78E+01 | 1.62E+01 | 1.20E+01 | 5.90E+00 |
| 5D | prom. | 7.18E+03 | 8.18E+03 | 7.18E+02 | 6.69E+03 | 6.78E+03 | 6.85E+03 | 6.37E+03 | 7.10E+03 |
| | var. | 3.44E+04 | 1.96E+04 | 2.41E+01 | 1.99E+04 | 1.21E+04 | 1.42E+04 | 2.71E+04 | 3.44E+04 |
| | max. | 7.65E+03 | 8.41E+03 | 7.30E+02 | 7.07E+03 | 7.02E+03 | 7.13E+03 | 6.97E+03 | 7.44E+03 |
| | min. | 6.73E+03 | 7.60E+03 | 7.04E+02 | 6.38E+03 | 6.48E+03 | 6.65E+03 | 6.09E+03 | 6.74E+03 |
| | desv.est. | 1.86E+02 | 1.40E+02 | 4.91E+00 | 1.41E+02 | 1.10E+02 | 1.19E+02 | 1.65E+02 | 1.85E+02 |
| 6D | prom. | 8.38E+04 | 8.38E+04 | 1.06E+05 | 8.21E+04 | 8.41E+04 | 8.54E+04 | 7.40E+04 | 8.18E+04 |
| | var. | 6.82E+06 | 1.00E+08 | 3.63E+06 | 2.85E+06 | 3.66E+06 | 3.54E+06 | 7.48E+06 | 6.98E+06 |
| | max. | 9.04E+04 | 1.04E+05 | 1.09E+05 | 8.64E+04 | 8.83E+04 | 8.93E+04 | 8.14E+04 | 8.96E+04 |
| | min. | 7.89E+04 | 6.44E+04 | 9.82E+04 | 7.82E+04 | 7.94E+04 | 8.14E+04 | 6.67E+04 | 7.65E+04 |
| | desv.est. | 2.61E+03 | 1.00E+04 | 1.90E+03 | 1.69E+03 | 1.91E+03 | 1.88E+03 | 2.74E+03 | 2.64E+03 |
| 7D | prom. | 1.14E+06 | 1.86E+06 | 1.59E+06 | 1.04E+06 | 1.01E+06 | 9.88E+05 | 6.67E+05 | 1.33E+06 |
| | var. | 1.38E+10 | 1.63E+07 | 1.34E+09 | 1.31E+10 | 1.30E+10 | 1.49E+10 | 4.15E+09 | 9.09E+09 |
| | max. | 1.43E+06 | 1.87E+06 | 1.64E+06 | 1.38E+06 | 1.27E+06 | 1.23E+06 | 8.91E+05 | 1.46E+06 |
| | min. | 8.77E+05 | 1.85E+06 | 1.47E+06 | 7.84E+05 | 7.50E+05 | 7.07E+05 | 5.15E+05 | 8.89E+05 |
| | desv.est. | 1.17E+05 | 4.03E+03 | 3.66E+04 | 1.14E+05 | 1.14E+05 | 1.22E+05 | 6.44E+04 | 9.53E+04 |
| 8D | prom. | 2.09E+07 | 2.96E+07 | 2.72E+07 | 1.66E+07 | 2.49E+07 | 2.55E+07 | 1.62E+07 | 2.14E+07 |
| | var. | 8.39E+11 | 1.64E+11 | 8.52E+11 | 2.15E+12 | 4.51E+11 | 2.93E+11 | 6.85E+11 | 1.29E+12 |
| | max. | 2.39E+07 | 3.05E+07 | 2.86E+07 | 2.01E+07 | 2.64E+07 | 2.66E+07 | 1.83E+07 | 2.45E+07 |
| | min. | 1.95E+07 | 2.84E+07 | 2.34E+07 | 1.36E+07 | 2.33E+07 | 2.44E+07 | 1.42E+07 | 1.77E+07 |
| | desv.est. | 9.16E+05 | 4.05E+05 | 9.23E+05 | 1.47E+06 | 6.71E+05 | 5.41E+05 | 9.11E+05 | 1.14E+06 |
| 9D | prom. | 3.87E+08 | 5.83E+08 | 4.85E+08 | 2.97E+08 | 4.54E+08 | 4.73E+08 | 2.87E+08 | 3.87E+08 |
| | var. | 3.27E+14 | 3.12E+13 | 3.94E+14 | 5.07E+14 | 1.50E+14 | 1.01E+14 | 2.77E+14 | 7.11E+14 |
| | max. | 4.39E+08 | 5.94E+08 | 5.27E+08 | 3.62E+08 | 4.79E+08 | 4.90E+08 | 3.20E+08 | 4.36E+08 |
| | min. | 3.59E+08 | 5.66E+08 | 4.28E+08 | 2.51E+08 | 4.29E+08 | 4.48E+08 | 2.57E+08 | 2.96E+08 |
| | desv.est. | 1.81E+07 | 5.59E+06 | 1.99E+07 | 2.25E+07 | 1.22E+07 | 1.01E+07 | 1.59E+07 | 2.67E+07 |
| 10D | prom. | 7.71E+09 | 1.22E+10 | 9.95E+09 | 6.01E+09 | 9.36E+09 | 9.84E+09 | 5.89E+09 | 7.76E+09 |
| | var. | 2.13E+17 | 3.77E+15 | 1.63E+17 | 2.33E+17 | 1.29E+17 | 6.52E+16 | 8.45E+16 | 3.94E+17 |
| | max. | 8.94E+09 | 1.23E+10 | 1.09E+10 | 7.22E+09 | 1.03E+10 | 1.05E+10 | 2.91E+08 | 9.00E+09 |
| | min. | 6.43E+09 | 1.20E+10 | 9.08E+09 | 4.80E+09 | 8.26E+09 | 9.21E+09 | 5.14E+09 | 6.34E+09 |
| | desv.est. | 4.61E+08 | 6.14E+07 | 4.04E+08 | 4.82E+08 | 3.60E+08 | 2.55E+08 | 2.91E+08 | 6.28E+08 |

Tabla B.15: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG8.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _X |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 7.17E+01 | 7.29E+01 | 6.94E+01 | 6.52E+01 | 6.55E+01 | 6.58E+01 | 6.79E+01 | 7.12E+01 |
| | var. | 4.92E-02 | 3.18E-02 | 1.93E-01 | 8.86E-01 | 8.48E-01 | 4.82E-01 | 1.35E+00 | 1.67E-01 |
| | max. | 7.21E+01 | 7.34E+01 | 7.04E+01 | 6.75E+01 | 6.73E+01 | 6.75E+01 | 6.95E+01 | 7.18E+01 |
| | min. | 7.07E+01 | 7.24E+01 | 6.83E+01 | 6.27E+01 | 6.30E+01 | 6.42E+01 | 6.35E+01 | 6.99E+01 |
| | desv.est. | 2.22E-01 | 1.78E-01 | 4.39E-01 | 9.41E-01 | 9.21E-01 | 6.94E-01 | 1.16E+00 | 4.08E-01 |
| 4D | prom. | 6.29E+02 | 7.28E+02 | 6.43E+02 | 5.43E+02 | 5.58E+02 | 5.46E+02 | 5.25E+02 | 6.22E+02 |
| | var. | 1.87E+01 | 4.04E+00 | 6.81E+01 | 2.52E+02 | 2.03E+02 | 2.48E+02 | 6.38E+02 | 7.19E+01 |
| | max. | 6.39E+02 | 7.33E+02 | 6.60E+02 | 5.83E+02 | 5.90E+02 | 5.84E+02 | 5.87E+02 | 6.40E+02 |
| | min. | 6.18E+02 | 7.23E+02 | 6.27E+02 | 5.05E+02 | 5.26E+02 | 5.19E+02 | 4.26E+02 | 5.99E+02 |
| | desv.est. | 4.33E+00 | 2.01E+00 | 8.25E+00 | 1.59E+01 | 1.42E+01 | 1.57E+01 | 2.53E+01 | 8.48E+00 |
| 5D | prom. | 6.36E+03 | 7.88E+03 | 6.43E+02 | 5.71E+03 | 5.82E+03 | 5.81E+03 | 5.35E+03 | 6.29E+03 |
| | var. | 6.04E+04 | 3.82E+03 | 6.81E+01 | 4.00E+04 | 4.59E+04 | 3.96E+04 | 1.68E+05 | 6.30E+04 |
| | max. | 6.75E+03 | 8.00E+03 | 6.60E+02 | 6.11E+03 | 6.29E+03 | 6.33E+03 | 6.30E+03 | 6.76E+03 |
| | min. | 5.27E+03 | 7.68E+03 | 6.27E+02 | 5.28E+03 | 5.40E+03 | 5.29E+03 | 4.37E+03 | 5.66E+03 |
| | desv.est. | 2.46E+02 | 6.18E+01 | 8.25E+00 | 2.00E+02 | 2.14E+02 | 1.99E+02 | 4.10E+02 | 2.51E+02 |
| 6D | prom. | 6.95E+04 | 8.58E+04 | 8.94E+04 | 6.66E+04 | 6.82E+04 | 6.87E+04 | 6.00E+04 | 6.44E+04 |
| | var. | 2.07E+07 | 6.04E+07 | 4.72E+06 | 4.02E+06 | 5.59E+06 | 6.10E+06 | 2.93E+07 | 4.47E+07 |
| | max. | 7.90E+04 | 9.77E+04 | 9.41E+04 | 7.13E+04 | 7.31E+04 | 7.46E+04 | 7.08E+04 | 7.28E+04 |
| | min. | 4.94E+04 | 6.28E+04 | 8.05E+04 | 6.03E+04 | 6.41E+04 | 6.41E+04 | 4.66E+04 | 5.05E+04 |
| | desv.est. | 4.55E+03 | 7.77E+03 | 2.17E+03 | 2.01E+03 | 2.36E+03 | 2.47E+03 | 5.41E+03 | 6.69E+03 |
| 7D | prom. | 7.14E+05 | 1.71E+06 | 1.32E+06 | 6.48E+05 | 7.45E+05 | 7.17E+05 | 5.29E+05 | 7.35E+05 |
| | var. | 9.21E+08 | 5.50E+07 | 1.20E+09 | 4.30E+09 | 4.71E+09 | 6.70E+09 | 4.78E+09 | 3.03E+09 |
| | max. | 8.40E+05 | 1.73E+06 | 1.39E+06 | 8.09E+05 | 8.78E+05 | 9.49E+05 | 6.96E+05 | 8.60E+05 |
| | min. | 6.52E+05 | 1.69E+06 | 1.21E+06 | 4.70E+05 | 6.19E+05 | 5.91E+05 | 3.74E+05 | 6.20E+05 |
| | desv.est. | 3.03E+04 | 7.42E+03 | 3.47E+04 | 6.56E+04 | 6.86E+04 | 8.19E+04 | 6.91E+04 | 5.50E+04 |
| 8D | prom. | 1.78E+07 | 2.58E+07 | 2.18E+07 | 1.07E+07 | 2.07E+07 | 2.14E+07 | 1.61E+07 | 1.78E+07 |
| | var. | 4.13E+11 | 3.71E+11 | 8.01E+11 | 1.24E+12 | 4.79E+11 | 5.19E+11 | 7.89E+11 | 5.15E+11 |
| | max. | 1.98E+07 | 2.68E+07 | 2.37E+07 | 1.30E+07 | 2.22E+07 | 2.30E+07 | 1.75E+07 | 1.92E+07 |
| | min. | 1.64E+07 | 2.42E+07 | 1.94E+07 | 8.47E+06 | 1.92E+07 | 1.95E+07 | 1.42E+07 | 1.57E+07 |
| | desv.est. | 6.43E+05 | 6.09E+05 | 8.95E+05 | 1.11E+06 | 6.92E+05 | 7.21E+05 | 7.45E+05 | 7.17E+05 |
| 9D | prom. | 3.22E+08 | 5.15E+08 | 4.02E+08 | 1.81E+08 | 3.80E+08 | 3.92E+08 | 2.93E+08 | 3.27E+08 |
| | var. | 1.79E+14 | 4.61E+13 | 1.95E+14 | 4.78E+14 | 1.94E+14 | 2.33E+14 | 2.72E+14 | 1.95E+14 |
| | max. | 3.62E+08 | 5.27E+08 | 4.35E+08 | 2.38E+08 | 4.05E+08 | 4.22E+08 | 3.26E+08 | 3.54E+08 |
| | min. | 2.92E+08 | 4.96E+08 | 3.62E+08 | 1.39E+08 | 3.30E+08 | 3.60E+08 | 2.46E+08 | 3.02E+08 |
| | desv.est. | 1.34E+07 | 6.79E+06 | 1.40E+07 | 2.19E+07 | 1.39E+07 | 1.53E+07 | 1.67E+07 | 1.40E+07 |
| 10D | prom. | 6.71E+09 | 1.09E+10 | 8.30E+09 | 3.34E+09 | 7.96E+09 | 8.14E+09 | 6.10E+09 | 6.84E+09 |
| | var. | 1.50E+17 | 3.08E+16 | 1.01E+17 | 1.49E+17 | 1.10E+17 | 1.12E+17 | 9.07E+16 | 1.33E+17 |
| | max. | 7.77E+09 | 1.12E+10 | 9.00E+09 | 4.37E+09 | 8.75E+09 | 8.92E+09 | 3.01E+08 | 7.86E+09 |
| | min. | 5.89E+09 | 1.02E+10 | 7.64E+09 | 2.59E+09 | 7.22E+09 | 7.39E+09 | 4.55E+09 | 6.22E+09 |
| | desv.est. | 3.88E+08 | 1.75E+08 | 3.19E+08 | 3.86E+08 | 3.31E+08 | 3.35E+08 | 3.01E+08 | 3.65E+08 |

Tabla B.16: Comparación de los valores de hipervolumen obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG9.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VC-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDX |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 7.24E+01 | 7.40E+01 | 6.92E+01 | 6.92E+01 | 6.88E+01 | 6.99E+01 | 6.98E+01 | 7.12E+01 |
| | var. | 1.84E+00 | 4.44E-01 | 8.23E-01 | 1.09E+00 | 1.07E+00 | 3.33E+00 | 1.98E+00 | 2.27E+00 |
| | max. | 7.38E+01 | 7.47E+01 | 7.25E+01 | 7.30E+01 | 7.32E+01 | 7.31E+01 | 7.34E+01 | 7.40E+01 |
| | min. | 6.83E+01 | 7.05E+01 | 6.77E+01 | 6.80E+01 | 6.77E+01 | 6.75E+01 | 6.77E+01 | 6.87E+01 |
| | desv.est. | 1.36E+00 | 6.66E-01 | 9.07E-01 | 1.04E+00 | 1.04E+00 | 1.82E+00 | 1.40E+00 | 1.51E+00 |
| 4D | prom. | 6.52E+02 | 7.23E+02 | 6.36E+02 | 6.26E+02 | 6.33E+02 | 6.28E+02 | 5.57E+02 | 6.37E+02 |
| | var. | 2.06E+02 | 1.03E+02 | 2.47E+02 | 2.54E+02 | 4.53E+02 | 5.09E+02 | 2.09E+03 | 2.62E+02 |
| | max. | 6.77E+02 | 7.39E+02 | 6.81E+02 | 6.69E+02 | 7.00E+02 | 7.03E+02 | 6.48E+02 | 6.64E+02 |
| | min. | 6.09E+02 | 6.94E+02 | 5.99E+02 | 5.91E+02 | 5.94E+02 | 5.90E+02 | 4.42E+02 | 6.02E+02 |
| | desv.est. | 1.43E+01 | 1.02E+01 | 1.57E+01 | 1.59E+01 | 2.13E+01 | 2.26E+01 | 4.57E+01 | 1.62E+01 |
| 5D | prom. | 7.11E+03 | 7.39E+03 | 6.45E+03 | 7.21E+03 | 7.25E+03 | 7.25E+03 | 6.19E+03 | 6.74E+03 |
| | var. | 4.53E+04 | 8.51E+04 | 1.20E+05 | 1.82E+04 | 1.99E+04 | 1.85E+04 | 8.55E+04 | 2.11E+05 |
| | max. | 7.86E+03 | 8.00E+03 | 7.06E+03 | 7.48E+03 | 7.51E+03 | 7.57E+03 | 6.89E+03 | 7.44E+03 |
| | min. | 6.62E+03 | 6.49E+03 | 5.57E+03 | 6.91E+03 | 6.98E+03 | 6.92E+03 | 4.77E+03 | 4.27E+03 |
| | desv.est. | 2.13E+02 | 2.92E+02 | 3.47E+02 | 1.35E+02 | 1.41E+02 | 1.36E+02 | 2.92E+02 | 4.60E+02 |
| 6D | prom. | 8.56E+04 | 7.83E+04 | 7.33E+04 | 9.10E+04 | 9.30E+04 | 9.19E+04 | 6.98E+04 | 7.84E+04 |
| | var. | 8.92E+06 | 1.02E+08 | 1.89E+07 | 4.31E+06 | 3.51E+06 | 2.56E+06 | 4.16E+07 | 3.35E+07 |
| | max. | 9.29E+04 | 9.34E+04 | 8.85E+04 | 9.63E+04 | 9.65E+04 | 9.49E+04 | 8.36E+04 | 8.96E+04 |
| | min. | 7.79E+04 | 5.85E+04 | 6.36E+04 | 8.61E+04 | 8.80E+04 | 8.81E+04 | 5.04E+04 | 5.13E+04 |
| | desv.est. | 2.99E+03 | 1.01E+04 | 4.35E+03 | 2.08E+03 | 1.87E+03 | 1.60E+03 | 6.45E+03 | 5.79E+03 |
| 7D | prom. | 8.67E+05 | 1.72E+06 | 1.02E+06 | 1.01E+06 | 1.15E+06 | 1.14E+06 | 5.84E+05 | 7.39E+05 |
| | var. | 1.93E+10 | 3.87E+08 | 2.49E+09 | 2.53E+10 | 1.22E+10 | 1.13E+10 | 2.05E+10 | 1.48E+10 |
| | max. | 1.26E+06 | 1.75E+06 | 1.18E+06 | 1.32E+06 | 1.44E+06 | 1.37E+06 | 1.16E+06 | 1.02E+06 |
| | min. | 6.64E+05 | 1.66E+06 | 9.28E+05 | 6.34E+05 | 8.28E+05 | 8.68E+05 | 3.67E+05 | 4.77E+05 |
| | desv.est. | 1.39E+05 | 1.97E+04 | 4.99E+04 | 1.59E+05 | 1.11E+05 | 1.06E+05 | 1.43E+05 | 1.22E+05 |
| 8D | prom. | 2.25E+07 | 2.72E+07 | 1.55E+07 | 1.73E+07 | 2.68E+07 | 2.71E+07 | 1.58E+07 | 1.95E+07 |
| | var. | 4.57E+12 | 3.20E+11 | 7.59E+11 | 5.00E+12 | 8.27E+11 | 4.59E+11 | 2.16E+12 | 3.21E+12 |
| | max. | 2.64E+07 | 2.85E+07 | 1.81E+07 | 2.26E+07 | 2.88E+07 | 2.84E+07 | 2.14E+07 | 2.33E+07 |
| | min. | 1.69E+07 | 2.57E+07 | 1.31E+07 | 1.05E+07 | 2.38E+07 | 2.57E+07 | 1.34E+07 | 1.38E+07 |
| | desv.est. | 2.14E+06 | 5.66E+05 | 8.71E+05 | 2.24E+06 | 9.09E+05 | 6.78E+05 | 1.39E+06 | 1.79E+06 |
| 9D | prom. | 4.25E+08 | 5.33E+08 | 3.20E+08 | 3.30E+08 | 5.02E+08 | 5.10E+08 | 2.79E+08 | 3.43E+08 |
| | var. | 2.30E+15 | 5.78E+13 | 1.49E+14 | 1.40E+15 | 2.30E+14 | 2.58E+14 | 2.42E+14 | 2.31E+15 |
| | max. | 5.21E+08 | 5.51E+08 | 3.49E+08 | 4.22E+08 | 5.41E+08 | 5.40E+08 | 3.57E+08 | 4.28E+08 |
| | min. | 3.18E+08 | 5.12E+08 | 2.94E+08 | 2.54E+08 | 4.58E+08 | 4.78E+08 | 2.48E+08 | 2.68E+08 |
| | desv.est. | 4.80E+07 | 7.61E+06 | 1.22E+07 | 3.75E+07 | 1.52E+07 | 1.61E+07 | 1.73E+07 | 4.81E+07 |
| 10D | prom. | 8.76E+09 | 1.12E+10 | 6.71E+09 | 6.64E+09 | 1.03E+10 | 1.05E+10 | 5.92E+09 | 6.83E+09 |
| | var. | 8.73E+17 | 1.50E+16 | 7.60E+16 | 4.84E+17 | 1.30E+17 | 1.33E+17 | 1.49E+17 | 7.94E+17 |
| | max. | 1.11E+10 | 1.15E+10 | 7.40E+09 | 8.59E+09 | 1.10E+10 | 1.12E+10 | 3.86E+08 | 9.24E+09 |
| | min. | 6.32E+09 | 1.09E+10 | 6.10E+09 | 4.84E+09 | 9.49E+09 | 9.62E+09 | 5.10E+09 | 5.39E+09 |
| | desv.est. | 9.34E+08 | 1.22E+08 | 2.76E+08 | 6.96E+08 | 3.60E+08 | 3.64E+08 | 3.86E+08 | 8.91E+08 |

B.2. IGD+

A continuación se muestran las tablas con los resultados de los experimentos; cada tabla cuenta con las estadísticas de los valores de IGD+ obtenidos por cada optimizador en un experimento dado. La información que se brinda corresponde al promedio, varianza, máximo, mínimo y desviación estándar de las 50 ejecuciones por configuración para cada problema y algoritmo. Los mejores tres valores se encuentran resaltados en gris. Cada tabla representa un problema.

Tabla B.17: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ1.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 1.66E-02 | 1.31E-02 | 1.61E-02 | 1.63E-01 | 8.75E-02 | 9.98E-02 | 2.28E-02 | 1.65E-02 |
| | var. | 2.28E-08 | 2.41E-05 | 4.48E-07 | 6.72E-02 | 5.51E-02 | 6.06E-02 | 5.37E-06 | 4.31E-09 |
| | max. | 1.73E-02 | 4.26E-02 | 1.87E-02 | 8.78E-01 | 1.06E+00 | 1.15E+00 | 2.78E-02 | 1.67E-02 |
| | min. | 1.64E-02 | 1.16E-02 | 1.49E-02 | 1.23E-02 | 1.22E-02 | 1.21E-02 | 1.80E-02 | 1.64E-02 |
| | desv.est. | 1.51E-04 | 4.91E-03 | 6.70E-04 | 2.59E-01 | 2.35E-01 | 2.46E-01 | 2.32E-03 | 6.57E-05 |
| 4D | prom. | 5.08E-02 | 2.74E-02 | 4.86E-02 | 5.56E-01 | 7.52E-01 | 7.95E-01 | 6.77E-02 | 5.06E-02 |
| | var. | 9.90E-08 | 3.51E-06 | 3.68E-04 | 1.99E-01 | 3.98E-01 | 3.48E-01 | 3.21E-05 | 7.63E-08 |
| | max. | 5.16E-02 | 3.66E-02 | 1.81E-01 | 1.70E+00 | 2.30E+00 | 2.04E+00 | 8.55E-02 | 5.12E-02 |
| | min. | 5.00E-02 | 2.58E-02 | 4.12E-02 | 2.87E-02 | 2.90E-02 | 3.12E-02 | 5.90E-02 | 4.99E-02 |
| | desv.est. | 3.15E-04 | 1.87E-03 | 1.92E-02 | 4.47E-01 | 6.31E-01 | 2.71E-01 | 5.66E-03 | 2.76E-04 |
| 5D | prom. | 5.72E-02 | 4.63E-02 | 1.38E-01 | 1.71E-01 | 1.96E-01 | 2.71E-01 | 6.71E-02 | 5.74E-02 |
| | var. | 8.14E-07 | 4.19E-06 | 1.15E-02 | 4.23E-02 | 5.05E-02 | 1.04E-01 | 1.20E-05 | 6.10E-07 |
| | max. | 5.91E-02 | 5.72E-02 | 5.60E-01 | 7.43E-01 | 8.25E-01 | 1.06E+00 | 7.54E-02 | 5.88E-02 |
| | min. | 5.51E-02 | 4.45E-02 | 7.60E-02 | 4.87E-02 | 4.87E-02 | 4.87E-02 | 6.07E-02 | 5.58E-02 |
| | desv.est. | 9.02E-04 | 2.05E-03 | 1.07E-01 | 2.06E-01 | 2.25E-01 | 3.23E-01 | 3.46E-03 | 7.81E-04 |
| 6D | prom. | 7.18E-02 | 5.73E-02 | 5.75E-01 | 2.29E-01 | 4.61E-01 | 4.85E-01 | 8.15E-02 | 7.32E-02 |
| | var. | 1.31E-06 | 3.22E-05 | 2.81E-01 | 6.25E-02 | 8.83E-02 | 1.54E-01 | 8.19E-06 | 1.73E-06 |
| | max. | 7.46E-02 | 8.28E-02 | 3.03E+00 | 8.88E-01 | 1.46E+00 | 1.31E+00 | 8.95E-02 | 7.71E-02 |
| | min. | 6.95E-02 | 5.41E-02 | 1.08E-01 | 5.83E-02 | 5.84E-02 | 5.81E-02 | 7.58E-02 | 7.05E-02 |
| | desv.est. | 1.14E-03 | 5.67E-03 | 5.30E-01 | 2.50E-01 | 2.97E-01 | 3.92E-01 | 2.86E-03 | 1.32E-03 |
| 7D | prom. | 1.23E-01 | 6.91E-02 | 1.01E+00 | 1.64E-01 | 1.74E+00 | 1.75E+00 | 1.73E-01 | 1.24E-01 |
| | var. | 1.32E-04 | 1.05E-04 | 5.08E-01 | 2.33E-02 | 1.10E+00 | 1.52E+00 | 3.72E-04 | 2.03E-04 |
| | max. | 1.51E-01 | 1.09E-01 | 3.38E+00 | 5.91E-01 | 3.86E+00 | 4.64E+00 | 2.11E-01 | 1.57E-01 |
| | min. | 1.06E-01 | 6.30E-02 | 2.04E-01 | 7.43E-02 | 1.51E-01 | 1.90E-01 | 1.34E-01 | 9.95E-02 |
| | desv.est. | 1.15E-02 | 1.03E-02 | 7.13E-01 | 1.53E-01 | 1.05E+00 | 1.23E+00 | 1.93E-02 | 1.43E-02 |
| 8D | prom. | 9.96E-02 | 8.22E-02 | 1.51E+00 | 1.48E-01 | 5.16E-01 | 7.03E-01 | 1.57E-01 | 1.08E-01 |
| | var. | 2.82E-06 | 3.27E-04 | 1.33E+00 | 2.14E-02 | 1.91E-01 | 2.25E-01 | 3.12E-04 | 9.45E-05 |
| | max. | 1.02E-01 | 1.31E-01 | 5.59E+00 | 9.76E-01 | 1.72E+00 | 1.98E+00 | 2.11E-01 | 1.30E-01 |
| | min. | 9.61E-02 | 7.01E-02 | 3.83E-01 | 8.79E-02 | 9.65E-02 | 8.82E-02 | 1.22E-01 | 9.53E-02 |
| | desv.est. | 1.68E-03 | 1.81E-02 | 1.15E+00 | 1.46E-01 | 4.37E-01 | 4.75E-01 | 1.77E-02 | 9.72E-03 |
| 9D | prom. | 9.31E-02 | 1.07E-01 | 2.27E+00 | 2.03E-01 | 8.10E-01 | 8.08E-01 | 1.64E-01 | 1.11E-01 |
| | var. | 4.82E-06 | 2.69E-04 | 3.25E+00 | 5.62E-02 | 2.37E-01 | 2.37E-01 | 3.84E-04 | 1.62E-04 |
| | max. | 1.01E-01 | 1.50E-01 | 1.15E+01 | 1.27E+00 | 2.00E+00 | 2.01E+00 | 2.12E-01 | 1.38E-01 |
| | min. | 8.93E-02 | 9.21E-02 | 6.04E-01 | 8.52E-02 | 1.05E-01 | 1.01E-01 | 1.26E-01 | 9.15E-02 |
| | desv.est. | 2.20E-03 | 1.64E-02 | 1.80E+00 | 2.37E-01 | 4.87E-01 | 4.86E-01 | 1.96E-02 | 1.27E-02 |
| 10D | prom. | 1.01E-01 | 1.17E-01 | 1.96E+00 | 2.47E-01 | 7.57E-01 | 8.99E-01 | 1.69E-01 | 1.18E-01 |
| | var. | 4.59E-06 | 3.52E-04 | 2.02E+00 | 6.72E-02 | 1.84E-01 | 2.21E-01 | 2.67E-04 | 1.51E-04 |
| | max. | 1.09E-01 | 1.63E-01 | 9.28E+00 | 1.17E+00 | 1.81E+00 | 1.67E+00 | 2.11E-01 | 1.41E-01 |
| | min. | 9.70E-02 | 7.40E-02 | 5.95E-01 | 9.12E-02 | 1.05E-01 | 1.05E-01 | 1.34E-01 | 9.65E-02 |
| | desv.est. | 2.14E-03 | 1.88E-02 | 1.42E+00 | 2.59E-01 | 4.28E-01 | 4.70E-01 | 1.63E-02 | 1.23E-02 |

Tabla B.18: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ2..

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 3.00E-02 | 1.86E-02 | 3.12E-02 | 2.01E-02 | 2.01E-02 | 2.01E-02 | 2.92E-02 | 2.94E-02 |
| | var. | 1.65E-08 | 6.63E-08 | 1.01E-06 | 3.33E-08 | 3.69E-08 | 3.26E-08 | 1.78E-07 | 6.64E-08 |
| | max. | 3.02E-02 | 1.96E-02 | 3.38E-02 | 2.07E-02 | 2.06E-02 | 2.07E-02 | 3.01E-02 | 2.99E-02 |
| | min. | 2.97E-02 | 1.83E-02 | 2.96E-02 | 1.97E-02 | 1.97E-02 | 1.96E-02 | 2.82E-02 | 2.88E-02 |
| | desv.est. | 1.28E-04 | 2.57E-04 | 1.01E-03 | 1.83E-04 | 1.92E-04 | 1.81E-04 | 4.22E-04 | 2.58E-04 |
| 4D | prom. | 9.06E-02 | 4.24E-02 | 8.35E-02 | 4.92E-02 | 4.88E-02 | 4.85E-02 | 8.93E-02 | 8.78E-02 |
| | var. | 7.63E-08 | 8.30E-08 | 1.00E-05 | 4.70E-07 | 2.77E-07 | 2.89E-07 | 1.39E-06 | 4.00E-07 |
| | max. | 9.10E-02 | 4.32E-02 | 9.21E-02 | 5.10E-02 | 5.03E-02 | 4.96E-02 | 9.20E-02 | 8.91E-02 |
| | min. | 8.96E-02 | 4.19E-02 | 7.53E-02 | 4.73E-02 | 4.79E-02 | 4.72E-02 | 8.70E-02 | 8.62E-02 |
| | desv.est. | 2.76E-04 | 2.88E-04 | 3.16E-03 | 6.85E-04 | 5.27E-04 | 5.38E-04 | 1.18E-03 | 6.33E-04 |
| 5D | prom. | 1.82E-01 | 9.56E-02 | 1.70E-01 | 1.15E-01 | 1.16E-01 | 1.13E-01 | 1.90E-01 | 1.82E-01 |
| | var. | 7.83E-05 | 4.13E-07 | 1.41E-04 | 8.41E-06 | 7.64E-06 | 6.57E-06 | 1.09E-04 | 8.70E-05 |
| | max. | 1.99E-01 | 9.73E-02 | 1.93E-01 | 1.22E-01 | 1.23E-01 | 1.20E-01 | 2.07E-01 | 2.03E-01 |
| | min. | 1.60E-01 | 9.44E-02 | 1.37E-01 | 1.08E-01 | 1.11E-01 | 1.09E-01 | 1.68E-01 | 1.57E-01 |
| | desv.est. | 8.85E-03 | 6.42E-04 | 1.19E-02 | 2.90E-03 | 2.76E-03 | 2.56E-03 | 1.05E-02 | 9.33E-03 |
| 6D | prom. | 2.95E-01 | 1.33E-01 | 2.95E-01 | 1.60E-01 | 1.61E-01 | 1.54E-01 | 3.07E-01 | 2.94E-01 |
| | var. | 1.18E-04 | 3.82E-06 | 4.41E-04 | 2.73E-05 | 3.48E-05 | 1.40E-05 | 1.77E-04 | 1.48E-04 |
| | max. | 3.15E-01 | 1.41E-01 | 3.40E-01 | 1.72E-01 | 1.79E-01 | 1.63E-01 | 3.40E-01 | 3.23E-01 |
| | min. | 2.61E-01 | 1.31E-01 | 2.53E-01 | 1.50E-01 | 1.49E-01 | 1.46E-01 | 2.65E-01 | 2.57E-01 |
| | desv.est. | 1.09E-02 | 1.95E-03 | 2.10E-02 | 5.23E-03 | 5.90E-03 | 3.74E-03 | 1.33E-02 | 1.22E-02 |
| 7D | prom. | 2.76E-01 | 1.00E-01 | 3.99E-01 | 2.30E-01 | 1.47E-01 | 1.47E-01 | 2.93E-01 | 2.93E-01 |
| | var. | 2.18E-04 | 1.18E-06 | 4.70E-04 | 4.14E-05 | 1.14E-04 | 1.47E-04 | 1.22E-04 | 5.43E-04 |
| | max. | 3.27E-01 | 1.03E-01 | 4.44E-01 | 2.45E-01 | 1.71E-01 | 1.93E-01 | 3.25E-01 | 3.90E-01 |
| | min. | 2.42E-01 | 9.79E-02 | 2.98E-01 | 2.21E-01 | 1.32E-01 | 1.33E-01 | 2.70E-01 | 2.63E-01 |
| | desv.est. | 1.48E-02 | 1.09E-03 | 2.17E-02 | 6.44E-03 | 1.07E-02 | 1.21E-02 | 1.11E-02 | 2.33E-02 |
| 8D | prom. | 4.41E-01 | 1.42E-01 | 4.86E-01 | 2.89E-01 | 1.42E-01 | 1.40E-01 | 4.38E-01 | 4.31E-01 |
| | var. | 2.82E-04 | 7.28E-07 | 6.87E-04 | 6.14E-05 | 1.51E-05 | 9.44E-06 | 2.06E-04 | 1.53E-04 |
| | max. | 4.81E-01 | 1.45E-01 | 5.35E-01 | 3.07E-01 | 1.59E-01 | 1.48E-01 | 4.66E-01 | 4.67E-01 |
| | min. | 3.96E-01 | 1.40E-01 | 4.11E-01 | 2.75E-01 | 1.36E-01 | 1.35E-01 | 4.12E-01 | 3.93E-01 |
| | desv.est. | 1.68E-02 | 8.53E-04 | 2.62E-02 | 7.84E-03 | 3.89E-03 | 3.07E-03 | 1.43E-02 | 1.24E-02 |
| 9D | prom. | 4.41E-01 | 1.62E-01 | 5.87E-01 | 3.26E-01 | 1.87E-01 | 1.81E-01 | 4.45E-01 | 4.42E-01 |
| | var. | 1.44E-04 | 1.01E-06 | 2.02E-03 | 2.53E-05 | 7.89E-05 | 3.80E-05 | 1.20E-04 | 2.27E-04 |
| | max. | 4.62E-01 | 1.64E-01 | 7.57E-01 | 3.42E-01 | 2.14E-01 | 2.03E-01 | 4.72E-01 | 4.76E-01 |
| | min. | 4.13E-01 | 1.60E-01 | 5.10E-01 | 3.16E-01 | 1.73E-01 | 1.67E-01 | 4.21E-01 | 4.13E-01 |
| | desv.est. | 1.20E-02 | 1.01E-03 | 4.49E-02 | 5.03E-03 | 8.88E-03 | 6.17E-03 | 1.09E-02 | 1.51E-02 |
| 10D | prom. | 4.89E-01 | 2.22E-01 | 6.60E-01 | 3.63E-01 | 2.20E-01 | 2.08E-01 | 4.92E-01 | 4.96E-01 |
| | var. | 1.88E-04 | 9.28E-03 | 4.34E-03 | 5.65E-05 | 2.86E-04 | 1.07E-04 | 2.00E-04 | 1.97E-04 |
| | max. | 5.16E-01 | 5.31E-01 | 8.61E-01 | 3.81E-01 | 2.64E-01 | 2.51E-01 | 5.35E-01 | 5.31E-01 |
| | min. | 4.61E-01 | 1.86E-01 | 5.52E-01 | 3.48E-01 | 1.97E-01 | 1.94E-01 | 4.65E-01 | 4.73E-01 |
| | desv.est. | 1.37E-02 | 9.63E-02 | 6.59E-02 | 7.52E-03 | 1.69E-02 | 1.04E-02 | 1.41E-02 | 1.41E-02 |

Tabla B.19: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ3.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _x |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 3.23E-02 | 3.26E-02 | 6.97E-02 | 3.36E+00 | 2.10E+00 | 2.09E+00 | 1.73E-01 | 2.98E-02 |
| | var. | 4.93E-06 | 1.73E-04 | 3.94E-02 | 2.61E+01 | 3.62E+01 | 2.63E+01 | 1.61E-02 | 6.94E-07 |
| | max. | 3.75E-02 | 1.09E-01 | 1.04E+00 | 1.97E+01 | 3.91E+01 | 2.88E+01 | 5.47E-01 | 3.32E-02 |
| | min. | 2.92E-02 | 1.96E-02 | 0.00E+00 | 2.32E-02 | 2.16E-02 | 2.13E-02 | 5.71E-02 | 2.81E-02 |
| | desv.est. | 2.22E-03 | 1.32E-02 | 1.99E-01 | 5.11E+00 | 6.02E+00 | 5.13E+00 | 1.27E-01 | 8.33E-04 |
| 4D | prom. | 9.30E-02 | 3.28E-01 | 1.63E+00 | 5.25E+00 | 9.32E+00 | 6.80E+00 | 2.12E-01 | 8.83E-02 |
| | var. | 2.17E-05 | 2.36E-01 | 4.09E+00 | 1.00E+02 | 1.89E+02 | 1.05E+02 | 7.43E-03 | 1.14E-06 |
| | max. | 1.06E-01 | 2.18E+00 | 7.15E+00 | 4.09E+01 | 5.76E+01 | 4.32E+01 | 5.86E-01 | 9.04E-02 |
| | min. | 8.62E-02 | 7.09E-02 | 0.00E+00 | 5.37E-02 | 5.84E-02 | 5.28E-02 | 1.20E-01 | 8.64E-02 |
| | desv.est. | 4.66E-03 | 4.86E-01 | 2.02E+00 | 1.00E+01 | 1.37E+01 | 1.02E+01 | 8.62E-02 | 1.07E-03 |
| 5D | prom. | 1.87E-01 | 1.64E-01 | 2.37E+01 | 9.70E-01 | 2.52E+00 | 3.43E+00 | 3.52E-01 | 1.92E-01 |
| | var. | 1.84E-04 | 2.05E-02 | 1.48E+02 | 2.89E+00 | 5.30E+01 | 5.03E+01 | 8.17E-04 | 1.48E-04 |
| | max. | 2.18E-01 | 1.14E+00 | 5.25E+01 | 7.49E+00 | 4.74E+01 | 3.13E+01 | 4.26E-01 | 2.10E-01 |
| | min. | 1.61E-01 | 1.01E-01 | 5.24E+00 | 1.28E-01 | 1.28E-01 | 1.18E-01 | 2.90E-01 | 1.65E-01 |
| | desv.est. | 1.36E-02 | 1.43E-01 | 1.22E+01 | 1.70E+00 | 7.28E+00 | 7.09E+00 | 2.86E-02 | 1.21E-02 |
| 6D | prom. | 3.18E-01 | 3.65E-01 | 7.99E+01 | 1.40E+00 | 3.11E+00 | 3.94E+00 | 4.60E-01 | 3.24E-01 |
| | var. | 1.60E-04 | 1.11E-01 | 4.78E+02 | 8.97E+00 | 3.81E+01 | 7.81E+01 | 1.13E-03 | 1.83E-04 |
| | max. | 3.59E-01 | 1.27E+00 | 1.29E+02 | 1.70E+01 | 3.18E+01 | 4.51E+01 | 5.27E-01 | 3.47E-01 |
| | min. | 2.91E-01 | 1.53E-01 | 2.16E+01 | 1.92E-01 | 1.87E-01 | 1.83E-01 | 3.85E-01 | 2.87E-01 |
| | desv.est. | 1.27E-02 | 3.34E-01 | 2.19E+01 | 2.99E+00 | 6.17E+00 | 8.84E+00 | 3.36E-02 | 1.35E-02 |
| 7D | prom. | 3.11E-01 | 1.35E+00 | 1.15E+02 | 8.09E-01 | 2.45E+01 | 2.50E+01 | 5.21E-01 | 3.55E-01 |
| | var. | 5.83E-04 | 5.40E+00 | 6.77E+02 | 1.77E+00 | 3.32E+02 | 3.96E+02 | 1.47E-02 | 2.37E-03 |
| | max. | 3.53E-01 | 1.31E+01 | 1.74E+02 | 7.91E+00 | 8.95E+01 | 7.73E+01 | 1.10E+00 | 4.32E-01 |
| | min. | 2.74E-01 | 1.47E-01 | 6.31E+01 | 2.51E-01 | 9.48E-01 | 6.55E-01 | 3.66E-01 | 2.66E-01 |
| | desv.est. | 2.42E-02 | 2.32E+00 | 2.60E+01 | 1.33E+00 | 1.82E+01 | 1.99E+01 | 1.21E-01 | 4.87E-02 |
| 8D | prom. | 4.23E-01 | 1.28E+00 | 1.35E+02 | 1.95E+00 | 1.13E+01 | 9.79E+00 | 7.34E-01 | 4.45E-01 |
| | var. | 3.66E-04 | 6.73E+00 | 5.47E+02 | 3.36E+01 | 1.10E+02 | 1.30E+02 | 5.59E-02 | 2.56E-04 |
| | max. | 4.55E-01 | 1.33E+01 | 1.78E+02 | 3.72E+01 | 4.60E+01 | 5.86E+01 | 1.78E+00 | 4.85E-01 |
| | min. | 3.65E-01 | 1.68E-01 | 8.42E+01 | 3.06E-01 | 2.24E-01 | 2.56E-01 | 4.78E-01 | 4.07E-01 |
| | desv.est. | 1.91E-02 | 2.59E+00 | 2.34E+01 | 5.79E+00 | 1.05E+01 | 1.14E+01 | 2.37E-01 | 1.60E-02 |
| 9D | prom. | 4.39E-01 | 2.83E+00 | 1.51E+02 | 2.03E+00 | 2.14E+01 | 1.20E+01 | 8.72E-01 | 4.61E-01 |
| | var. | 2.24E-04 | 1.20E+01 | 5.73E+02 | 3.50E+01 | 2.37E+02 | 1.24E+02 | 2.29E-01 | 2.38E-04 |
| | max. | 4.70E-01 | 1.34E+01 | 1.90E+02 | 4.21E+01 | 6.07E+01 | 4.63E+01 | 2.60E+00 | 4.92E-01 |
| | min. | 3.95E-01 | 1.86E-01 | 6.91E+01 | 3.61E-01 | 9.76E-01 | 3.72E-01 | 5.61E-01 | 4.21E-01 |
| | desv.est. | 1.50E-02 | 3.46E+00 | 2.39E+01 | 5.91E+00 | 1.54E+01 | 1.11E+01 | 4.78E-01 | 1.54E-02 |
| 10D | prom. | 4.86E-01 | 4.16E+00 | 1.56E+02 | 4.34E+00 | 1.40E+01 | 1.55E+01 | 8.75E-01 | 5.05E-01 |
| | var. | 1.81E-04 | 1.31E+01 | 3.53E+02 | 7.77E+01 | 1.47E+02 | 1.65E+02 | 1.01E-01 | 3.28E-04 |
| | max. | 5.15E-01 | 1.59E+01 | 1.98E+02 | 4.27E+01 | 4.00E+01 | 6.72E+01 | 1.79E+00 | 5.47E-01 |
| | min. | 4.54E-01 | 2.03E-01 | 1.24E+02 | 3.84E-01 | 3.93E-01 | 6.63E-01 | 6.00E-01 | 4.65E-01 |
| | desv.est. | 1.35E-02 | 3.62E+00 | 1.88E+01 | 8.82E+00 | 1.21E+01 | 1.29E+01 | 3.19E-01 | 1.81E-02 |

Tabla B.20: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ4..

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 5.33E-02 | 6.42E-02 | 3.09E-02 | 2.02E-02 | 2.09E-02 | 2.02E-02 | 7.54E-02 | 1.49E-01 |
| | var. | 4.16E-03 | 7.59E-03 | 1.43E-06 | 7.77E-08 | 2.43E-05 | 6.92E-08 | 6.65E-03 | 2.42E-02 |
| | max. | 2.26E-01 | 2.27E-01 | 3.40E-02 | 2.12E-02 | 5.50E-02 | 2.06E-02 | 2.26E-01 | 5.20E-01 |
| | min. | 2.81E-02 | 1.83E-02 | 2.88E-02 | 1.97E-02 | 1.97E-02 | 1.97E-02 | 2.62E-02 | 2.75E-02 |
| | desv.est. | 6.45E-02 | 8.71E-02 | 1.20E-03 | 2.79E-04 | 4.93E-03 | 2.63E-04 | 8.16E-02 | 1.56E-01 |
| 4D | prom. | 1.17E-01 | 6.87E-02 | 8.17E-02 | 4.75E-02 | 4.70E-02 | 4.65E-02 | 1.07E-01 | 1.68E-01 |
| | var. | 2.95E-03 | 2.93E-03 | 7.55E-06 | 2.84E-05 | 1.04E-05 | 4.08E-06 | 1.24E-03 | 8.11E-03 |
| | max. | 3.54E-01 | 1.81E-01 | 8.77E-02 | 7.65E-02 | 6.04E-02 | 5.98E-02 | 2.10E-01 | 3.54E-01 |
| | min. | 8.49E-02 | 4.16E-02 | 7.60E-02 | 4.49E-02 | 4.46E-02 | 4.51E-02 | 8.43E-02 | 8.36E-02 |
| | desv.est. | 5.43E-02 | 5.41E-02 | 2.75E-03 | 5.33E-03 | 3.22E-03 | 2.02E-03 | 3.53E-02 | 9.00E-02 |
| 5D | prom. | 1.97E-01 | 1.15E-01 | 1.53E-01 | 9.01E-02 | 8.84E-02 | 8.90E-02 | 1.80E-01 | 2.27E-01 |
| | var. | 2.50E-03 | 2.06E-03 | 5.60E-05 | 1.41E-05 | 8.00E-06 | 7.65E-06 | 1.59E-03 | 9.82E-03 |
| | max. | 4.39E-01 | 2.82E-01 | 1.73E-01 | 1.04E-01 | 9.96E-02 | 9.92E-02 | 4.39E-01 | 6.61E-01 |
| | min. | 1.48E-01 | 9.38E-02 | 1.34E-01 | 8.48E-02 | 8.35E-02 | 8.50E-02 | 1.55E-01 | 1.61E-01 |
| | desv.est. | 5.00E-02 | 4.54E-02 | 7.48E-03 | 3.76E-03 | 2.83E-03 | 2.77E-03 | 3.99E-02 | 9.91E-02 |
| 6D | prom. | 3.06E-01 | 1.36E-01 | 2.56E-01 | 1.17E-01 | 1.14E-01 | 1.17E-01 | 2.98E-01 | 3.05E-01 |
| | var. | 2.51E-04 | 3.15E-04 | 3.31E-04 | 1.22E-05 | 9.83E-06 | 6.90E-06 | 3.76E-04 | 3.96E-04 |
| | max. | 3.68E-01 | 1.99E-01 | 2.97E-01 | 1.25E-01 | 1.23E-01 | 1.23E-01 | 3.66E-01 | 3.68E-01 |
| | min. | 2.79E-01 | 1.29E-01 | 2.14E-01 | 1.09E-01 | 1.09E-01 | 1.12E-01 | 2.56E-01 | 2.79E-01 |
| | desv.est. | 1.58E-02 | 1.77E-02 | 1.82E-02 | 3.49E-03 | 3.14E-03 | 2.63E-03 | 1.94E-02 | 1.99E-02 |
| 7D | prom. | 2.69E-01 | 1.20E-01 | 3.69E-01 | 1.85E-01 | 1.16E-01 | 1.17E-01 | 2.69E-01 | 2.78E-01 |
| | var. | 3.31E-04 | 2.67E-03 | 4.85E-04 | 1.22E-05 | 3.91E-06 | 8.22E-06 | 1.22E-04 | 2.19E-03 |
| | max. | 3.37E-01 | 2.94E-01 | 4.13E-01 | 1.96E-01 | 1.22E-01 | 1.25E-01 | 2.99E-01 | 4.35E-01 |
| | min. | 2.53E-01 | 9.35E-02 | 2.99E-01 | 1.79E-01 | 1.12E-01 | 1.11E-01 | 2.47E-01 | 2.50E-01 |
| | desv.est. | 1.82E-02 | 5.17E-02 | 2.20E-02 | 3.50E-03 | 1.98E-03 | 2.87E-03 | 1.10E-02 | 4.68E-02 |
| 8D | prom. | 5.37E-01 | 1.58E-01 | 4.96E-01 | 2.36E-01 | 1.23E-01 | 1.23E-01 | 4.82E-01 | 4.99E-01 |
| | var. | 4.04E-04 | 1.55E-03 | 3.64E-03 | 1.33E-05 | 6.49E-07 | 8.93E-07 | 6.91E-04 | 9.01E-04 |
| | max. | 5.69E-01 | 2.63E-01 | 7.16E-01 | 2.45E-01 | 1.25E-01 | 1.26E-01 | 5.26E-01 | 5.55E-01 |
| | min. | 4.87E-01 | 1.36E-01 | 4.11E-01 | 2.28E-01 | 1.22E-01 | 1.22E-01 | 4.10E-01 | 4.46E-01 |
| | desv.est. | 2.01E-02 | 3.94E-02 | 6.03E-02 | 3.65E-03 | 8.06E-04 | 9.45E-04 | 2.63E-02 | 3.00E-02 |
| 9D | prom. | 5.40E-01 | 1.65E-01 | 6.54E-01 | 2.85E-01 | 1.49E-01 | 1.49E-01 | 4.86E-01 | 5.19E-01 |
| | var. | 3.71E-04 | 7.13E-04 | 4.66E-03 | 9.80E-06 | 9.12E-07 | 1.56E-06 | 5.26E-04 | 4.37E-04 |
| | max. | 5.72E-01 | 2.48E-01 | 8.17E-01 | 2.93E-01 | 1.52E-01 | 1.54E-01 | 5.55E-01 | 5.63E-01 |
| | min. | 4.88E-01 | 1.55E-01 | 5.49E-01 | 2.77E-01 | 1.47E-01 | 1.48E-01 | 4.38E-01 | 4.70E-01 |
| | desv.est. | 1.93E-02 | 2.67E-02 | 6.83E-02 | 3.13E-03 | 9.55E-04 | 1.25E-03 | 2.29E-02 | 2.09E-02 |
| 10D | prom. | 6.02E-01 | 2.08E-01 | 7.36E-01 | 3.18E-01 | 1.76E-01 | 1.76E-01 | 5.34E-01 | 5.74E-01 |
| | var. | 2.41E-04 | 1.53E-03 | 7.52E-03 | 8.01E-06 | 2.69E-07 | 2.29E-07 | 6.94E-04 | 5.01E-04 |
| | max. | 6.28E-01 | 3.62E-01 | 9.83E-01 | 3.23E-01 | 1.78E-01 | 1.77E-01 | 5.72E-01 | 6.10E-01 |
| | min. | 5.58E-01 | 1.83E-01 | 5.92E-01 | 3.11E-01 | 1.76E-01 | 1.75E-01 | 4.71E-01 | 5.07E-01 |
| | desv.est. | 1.55E-02 | 3.91E-02 | 8.67E-02 | 2.83E-03 | 5.19E-04 | 4.79E-04 | 2.63E-02 | 2.24E-02 |

Tabla B.21: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ5.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _x |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 3.81E-03 | 2.24E-02 | 1.84E-03 | 6.09E-03 | 6.11E-03 | 6.08E-03 | 3.83E-03 | 3.79E-03 |
| | var. | 1.18E-08 | 3.93E-04 | 1.02E-08 | 5.49E-10 | 1.18E-09 | 5.86E-10 | 8.06E-10 | 4.52E-12 |
| | max. | 4.55E-03 | 8.36E-02 | 2.07E-03 | 6.16E-03 | 6.21E-03 | 6.14E-03 | 3.90E-03 | 3.80E-03 |
| | min. | 3.79E-03 | 4.52E-03 | 1.66E-03 | 6.05E-03 | 6.04E-03 | 6.03E-03 | 3.77E-03 | 3.79E-03 |
| | desv.est. | 1.09E-04 | 1.98E-02 | 1.01E-04 | 2.34E-05 | 3.44E-05 | 2.42E-05 | 2.84E-05 | 2.13E-06 |
| 4D | prom. | 7.79E-03 | 6.31E-02 | 1.36E-02 | 1.45E-02 | 1.45E-02 | 1.45E-02 | 9.79E-03 | 7.23E-03 |
| | var. | 1.01E-06 | 3.84E-04 | 4.01E-06 | 3.45E-09 | 3.87E-09 | 2.82E-09 | 4.61E-07 | 6.70E-10 |
| | max. | 1.05E-02 | 1.05E-01 | 1.78E-02 | 1.47E-02 | 1.47E-02 | 1.47E-02 | 1.06E-02 | 7.32E-03 |
| | min. | 7.22E-03 | 2.63E-02 | 9.61E-03 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 7.43E-03 | 7.19E-03 |
| | desv.est. | 1.01E-03 | 1.96E-02 | 2.00E-03 | 5.87E-05 | 6.22E-05 | 5.31E-05 | 6.79E-04 | 2.59E-05 |
| 5D | prom. | 8.49E-03 | 1.33E-01 | 1.89E-02 | 4.58E-02 | 4.59E-02 | 4.58E-02 | 1.10E-02 | 7.08E-03 |
| | var. | 4.31E-06 | 1.14E-03 | 1.91E-05 | 7.97E-08 | 9.26E-08 | 7.85E-08 | 3.40E-06 | 3.51E-07 |
| | max. | 1.39E-02 | 2.21E-01 | 3.08E-02 | 4.64E-02 | 4.64E-02 | 4.66E-02 | 1.40E-02 | 7.82E-03 |
| | min. | 5.98E-03 | 8.11E-02 | 1.30E-02 | 4.53E-02 | 4.50E-02 | 4.54E-02 | 6.92E-03 | 6.02E-03 |
| | desv.est. | 2.08E-03 | 3.37E-02 | 4.37E-03 | 2.82E-04 | 3.04E-04 | 2.80E-04 | 1.84E-03 | 5.92E-04 |
| 6D | prom. | 8.46E-03 | 2.92E-01 | 2.59E-02 | 3.57E-02 | 3.62E-02 | 3.55E-02 | 1.04E-02 | 8.75E-03 |
| | var. | 3.22E-06 | 6.07E-03 | 4.48E-05 | 7.54E-06 | 7.06E-06 | 2.57E-06 | 3.15E-06 | 4.74E-06 |
| | max. | 1.26E-02 | 5.74E-01 | 4.66E-02 | 5.25E-02 | 4.49E-02 | 4.24E-02 | 1.43E-02 | 1.46E-02 |
| | min. | 6.25E-03 | 1.44E-01 | 1.71E-02 | 3.43E-02 | 3.42E-02 | 3.39E-02 | 7.59E-03 | 6.31E-03 |
| | desv.est. | 1.79E-03 | 7.79E-02 | 6.69E-03 | 2.75E-03 | 2.66E-03 | 1.60E-03 | 1.77E-03 | 2.18E-03 |
| 7D | prom. | 2.70E-02 | 5.42E-01 | 3.13E-02 | 2.63E-01 | 1.70E-01 | 1.70E-01 | 4.27E-02 | 2.26E-02 |
| | var. | 8.59E-05 | 1.56E-02 | 3.35E-05 | 1.60E-08 | 7.98E-12 | 2.37E-12 | 2.55E-05 | 8.15E-06 |
| | max. | 4.35E-02 | 8.79E-01 | 4.20E-02 | 2.63E-01 | 1.70E-01 | 1.70E-01 | 5.78E-02 | 3.46E-02 |
| | min. | 2.15E-02 | 3.23E-01 | 2.04E-02 | 2.63E-01 | 1.70E-01 | 1.70E-01 | 2.67E-02 | 2.15E-02 |
| | desv.est. | 9.27E-03 | 1.25E-01 | 5.79E-03 | 1.27E-04 | 2.82E-06 | 1.54E-06 | 5.05E-03 | 2.85E-03 |
| 8D | prom. | 1.80E-02 | 7.73E-01 | 3.57E-02 | 3.77E-01 | 1.46E-01 | 1.47E-01 | 2.02E-02 | 1.67E-02 |
| | var. | 4.87E-07 | 3.00E-02 | 5.69E-05 | 7.86E-32 | 1.27E-05 | 1.26E-05 | 3.50E-06 | 3.25E-06 |
| | max. | 1.88E-02 | 1.37E+00 | 5.22E-02 | 3.77E-01 | 1.53E-01 | 1.53E-01 | 2.58E-02 | 1.83E-02 |
| | min. | 1.65E-02 | 4.29E-01 | 2.19E-02 | 3.77E-01 | 1.41E-01 | 1.42E-01 | 1.72E-02 | 9.97E-03 |
| | desv.est. | 6.98E-04 | 1.73E-01 | 7.55E-03 | 2.80E-16 | 3.57E-03 | 3.54E-03 | 1.87E-03 | 1.80E-03 |
| 9D | prom. | 1.79E-02 | 9.86E-01 | 3.59E-02 | 3.77E-01 | 1.58E-01 | 1.58E-01 | 2.10E-02 | 1.66E-02 |
| | var. | 1.06E-07 | 3.44E-02 | 9.60E-05 | 7.86E-32 | 1.31E-08 | 1.30E-08 | 1.06E-05 | 2.91E-06 |
| | max. | 1.83E-02 | 1.48E+00 | 6.03E-02 | 3.77E-01 | 1.58E-01 | 1.58E-01 | 3.20E-02 | 1.86E-02 |
| | min. | 1.67E-02 | 7.30E-01 | 2.06E-02 | 3.77E-01 | 1.57E-01 | 1.57E-01 | 1.08E-02 | 1.05E-02 |
| | desv.est. | 3.26E-04 | 1.85E-01 | 9.80E-03 | 2.80E-16 | 1.15E-04 | 1.14E-04 | 3.25E-03 | 1.71E-03 |
| 10D | prom. | 1.86E-02 | 1.01E+00 | 3.64E-02 | 3.77E-01 | 1.62E-01 | 1.62E-01 | 2.27E-02 | 1.73E-02 |
| | var. | 2.09E-06 | 3.39E-02 | 8.45E-05 | 7.86E-32 | 9.11E-09 | 1.35E-08 | 1.10E-05 | 3.96E-06 |
| | max. | 1.98E-02 | 1.45E+00 | 5.52E-02 | 3.77E-01 | 1.62E-01 | 1.62E-01 | 3.16E-02 | 1.98E-02 |
| | min. | 1.09E-02 | 5.01E-01 | 2.22E-02 | 3.77E-01 | 1.62E-01 | 1.62E-01 | 1.83E-02 | 1.09E-02 |
| | desv.est. | 1.45E-03 | 1.84E-01 | 9.19E-03 | 2.80E-16 | 9.54E-05 | 1.16E-04 | 3.31E-03 | 1.99E-03 |

Tabla B.22: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ6.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _x |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 9.85E-02 | 1.59E-01 | 1.28E-03 | 5.98E-03 | 5.98E-03 | 5.98E-03 | 4.97E-03 | 9.13E-02 |
| | var. | 1.08E-03 | 1.30E-03 | 1.15E-10 | 3.27E-12 | 4.53E-12 | 3.08E-12 | 2.14E-06 | 8.08E-04 |
| | max. | 1.64E-01 | 2.42E-01 | 1.31E-03 | 5.99E-03 | 5.99E-03 | 5.99E-03 | 1.49E-02 | 1.60E-01 |
| | min. | 2.46E-02 | 6.85E-02 | 1.25E-03 | 5.98E-03 | 5.98E-03 | 5.98E-03 | 3.85E-03 | 2.39E-02 |
| | desv.est. | 3.28E-02 | 3.60E-02 | 1.07E-05 | 1.81E-06 | 2.13E-06 | 1.76E-06 | 1.46E-03 | 2.84E-02 |
| 4D | prom. | 1.28E-01 | 1.27E+00 | 1.77E-02 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 1.01E-01 | 1.06E-01 |
| | var. | 1.60E-03 | 7.96E-03 | 1.22E-05 | 9.49E-11 | 1.26E-10 | 8.87E-11 | 1.65E-03 | 1.10E-03 |
| | max. | 1.95E-01 | 1.42E+00 | 3.02E-02 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 2.02E-01 | 1.64E-01 |
| | min. | 4.90E-02 | 1.11E+00 | 1.16E-02 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 1.44E-02 | 1.41E-02 | 9.35E-03 |
| | desv.est. | 4.00E-02 | 8.92E-02 | 3.49E-03 | 9.74E-06 | 1.12E-05 | 9.42E-06 | 4.07E-02 | 3.32E-02 |
| 5D | prom. | 1.38E-01 | 1.75E+00 | 3.56E-02 | 4.57E-02 | 4.57E-02 | 4.57E-02 | 1.14E-02 | 1.12E-01 |
| | var. | 1.47E-03 | 8.53E-03 | 3.41E-05 | 6.91E-09 | 3.02E-09 | 8.19E-09 | 1.70E-06 | 7.71E-04 |
| | max. | 2.05E-01 | 1.94E+00 | 5.47E-02 | 4.58E-02 | 4.58E-02 | 4.58E-02 | 1.74E-02 | 1.79E-01 |
| | min. | 5.71E-02 | 1.55E+00 | 2.40E-02 | 4.54E-02 | 4.55E-02 | 4.54E-02 | 7.59E-03 | 5.09E-02 |
| | desv.est. | 3.83E-02 | 9.24E-02 | 5.84E-03 | 8.31E-05 | 5.49E-05 | 9.05E-05 | 1.30E-03 | 2.78E-02 |
| 6D | prom. | 1.33E-01 | 2.20E+00 | 4.31E-02 | 3.41E-02 | 3.39E-02 | 3.40E-02 | 1.79E-02 | 1.12E-01 |
| | var. | 1.84E-03 | 1.70E-02 | 5.82E-06 | 2.07E-07 | 8.27E-08 | 2.16E-07 | 4.23E-05 | 1.00E-03 |
| | max. | 2.23E-01 | 2.50E+00 | 4.79E-02 | 3.51E-02 | 3.50E-02 | 3.51E-02 | 3.25E-02 | 1.71E-01 |
| | min. | 2.89E-02 | 1.95E+00 | 3.31E-02 | 3.37E-02 | 3.36E-02 | 3.36E-02 | 8.00E-03 | 3.17E-02 |
| | desv.est. | 4.29E-02 | 1.30E-01 | 2.41E-03 | 4.55E-04 | 2.88E-04 | 4.65E-04 | 6.50E-03 | 3.17E-02 |
| 7D | prom. | 1.51E-01 | 4.41E+00 | 4.92E-02 | 2.63E-01 | 1.70E-01 | 1.70E-01 | 2.72E-01 | 1.40E-01 |
| | var. | 1.28E-03 | 5.41E-02 | 6.44E-05 | 6.33E-06 | 5.03E-32 | 3.82E-07 | 9.00E-03 | 1.10E-03 |
| | max. | 2.37E-01 | 4.86E+00 | 6.66E-02 | 2.78E-01 | 1.70E-01 | 1.70E-01 | 5.46E-01 | 2.21E-01 |
| | min. | 7.55E-02 | 3.85E+00 | 4.24E-02 | 2.57E-01 | 1.70E-01 | 1.65E-01 | 1.33E-01 | 7.74E-02 |
| | desv.est. | 3.58E-02 | 2.33E-01 | 8.03E-03 | 2.52E-03 | 2.24E-16 | 6.18E-04 | 9.48E-02 | 3.31E-02 |
| 8D | prom. | 1.29E-01 | 6.65E+00 | 5.18E-02 | 3.77E-01 | 1.51E-01 | 1.50E-01 | 1.59E-01 | 1.27E-01 |
| | var. | 1.64E-03 | 8.29E-02 | 5.03E-05 | 7.86E-32 | 8.43E-06 | 1.13E-05 | 7.21E-04 | 1.37E-03 |
| | max. | 2.29E-01 | 7.30E+00 | 6.85E-02 | 3.77E-01 | 1.53E-01 | 1.53E-01 | 2.05E-01 | 2.09E-01 |
| | min. | 4.24E-02 | 5.86E+00 | 4.17E-02 | 3.77E-01 | 1.43E-01 | 1.41E-01 | 9.45E-02 | 1.84E-02 |
| | desv.est. | 4.05E-02 | 2.88E-01 | 7.09E-03 | 2.80E-16 | 2.90E-03 | 3.36E-03 | 2.68E-02 | 3.70E-02 |
| 9D | prom. | 1.37E-01 | 7.17E+00 | 5.37E-02 | 3.77E-01 | 1.58E-01 | 1.58E-01 | 1.89E-01 | 1.29E-01 |
| | var. | 1.13E-03 | 8.51E-02 | 5.61E-05 | 8.00E-14 | 5.55E-09 | 1.04E-08 | 2.18E-03 | 1.55E-03 |
| | max. | 2.05E-01 | 7.75E+00 | 6.64E-02 | 3.77E-01 | 1.58E-01 | 1.58E-01 | 2.97E-01 | 2.25E-01 |
| | min. | 6.47E-02 | 6.61E+00 | 4.27E-02 | 3.77E-01 | 1.57E-01 | 1.57E-01 | 9.90E-02 | 5.49E-02 |
| | desv.est. | 3.37E-02 | 2.92E-01 | 7.49E-03 | 2.83E-07 | 7.45E-05 | 1.02E-04 | 4.67E-02 | 3.94E-02 |
| 10D | prom. | 1.42E-01 | 7.84E+00 | 5.50E-02 | 3.77E-01 | 1.62E-01 | 1.62E-01 | 1.69E-01 | 1.31E-01 |
| | var. | 1.83E-03 | 1.41E-01 | 5.19E-05 | 7.86E-32 | 5.11E-10 | 9.10E-10 | 2.03E-03 | 1.39E-03 |
| | max. | 2.20E-01 | 8.54E+00 | 6.96E-02 | 3.77E-01 | 1.62E-01 | 1.62E-01 | 2.77E-01 | 2.27E-01 |
| | min. | 4.25E-02 | 6.76E+00 | 4.26E-02 | 3.77E-01 | 1.62E-01 | 1.62E-01 | 4.74E-02 | 5.81E-02 |
| | desv.est. | 4.27E-02 | 3.76E-01 | 7.20E-03 | 2.80E-16 | 2.26E-05 | 3.02E-05 | 4.51E-02 | 3.73E-02 |

Tabla B.23: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema DTLZ7.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 8.27E-02 | 3.41E-02 | 5.21E-02 | 1.21E-01 | 2.74E-01 | 8.07E-02 | 1.57E-01 | 1.62E-01 |
| | var. | 7.65E-07 | 2.39E-06 | 2.55E-03 | 2.20E-02 | 7.40E-02 | 3.19E-03 | 1.70E-02 | 2.31E-02 |
| | max. | 8.36E-02 | 3.83E-02 | 2.22E-01 | 6.62E-01 | 6.63E-01 | 2.33E-01 | 6.58E-01 | 6.78E-01 |
| | min. | 8.04E-02 | 3.11E-02 | 3.18E-02 | 5.04E-02 | 4.94E-02 | 5.01E-02 | 6.48E-02 | 7.76E-02 |
| | desv.est. | 8.75E-04 | 1.54E-03 | 5.05E-02 | 1.48E-01 | 2.72E-01 | 5.65E-02 | 1.30E-01 | 1.52E-01 |
| 4D | prom. | 2.40E-01 | 1.05E-01 | 1.54E-01 | 4.18E-01 | 3.96E-01 | 4.21E-01 | 3.15E-01 | 3.46E-01 |
| | var. | 8.55E-05 | 7.00E-05 | 1.35E-04 | 8.85E-03 | 2.19E-02 | 3.46E-03 | 1.22E-02 | 1.80E-02 |
| | max. | 3.04E-01 | 1.40E-01 | 1.80E-01 | 5.50E-01 | 9.57E-01 | 5.39E-01 | 9.50E-01 | 9.66E-01 |
| | min. | 2.37E-01 | 9.32E-02 | 1.29E-01 | 1.93E-01 | 1.52E-01 | 2.27E-01 | 2.50E-01 | 2.34E-01 |
| | desv.est. | 9.25E-03 | 8.36E-03 | 1.16E-02 | 9.41E-02 | 1.48E-01 | 5.88E-02 | 1.11E-01 | 1.34E-01 |
| 5D | prom. | 4.07E-01 | 2.19E-01 | 2.94E-01 | 7.28E-01 | 7.58E-01 | 7.31E-01 | 6.05E-01 | 3.79E-01 |
| | var. | 2.30E-03 | 7.19E-04 | 3.07E-04 | 7.70E-03 | 6.76E-02 | 8.54E-03 | 2.40E-02 | 2.63E-03 |
| | max. | 5.46E-01 | 3.15E-01 | 3.29E-01 | 7.93E-01 | 1.36E+00 | 7.88E-01 | 1.26E+00 | 4.88E-01 |
| | min. | 3.03E-01 | 1.68E-01 | 2.54E-01 | 4.37E-01 | 4.65E-01 | 4.38E-01 | 4.31E-01 | 2.84E-01 |
| | desv.est. | 4.80E-02 | 2.68E-02 | 1.75E-02 | 8.78E-02 | 2.60E-01 | 9.24E-02 | 1.55E-01 | 5.12E-02 |
| 6D | prom. | 5.65E-01 | 4.32E-01 | 5.20E-01 | 9.03E-01 | 1.05E+00 | 9.31E-01 | 7.90E-01 | 7.05E-01 |
| | var. | 1.48E-03 | 3.74E-03 | 7.07E-04 | 6.14E-03 | 1.44E-01 | 4.03E-03 | 1.14E-02 | 4.01E-03 |
| | max. | 6.70E-01 | 6.89E-01 | 5.78E-01 | 9.86E-01 | 1.79E+00 | 9.91E-01 | 9.65E-01 | 8.12E-01 |
| | min. | 4.88E-01 | 3.49E-01 | 4.62E-01 | 7.29E-01 | 5.86E-01 | 7.65E-01 | 6.02E-01 | 5.65E-01 |
| | desv.est. | 3.85E-02 | 6.11E-02 | 2.66E-02 | 7.84E-02 | 3.80E-01 | 6.35E-02 | 1.07E-01 | 6.33E-02 |
| 7D | prom. | 4.17E-01 | 5.82E-01 | 7.84E-01 | 1.13E+00 | 1.24E+00 | 1.20E+00 | 7.38E-01 | 6.14E-01 |
| | var. | 1.67E-03 | 4.82E-03 | 3.66E-03 | 1.35E-02 | 5.23E-04 | 2.16E-03 | 7.40E-03 | 2.57E-02 |
| | max. | 6.15E-01 | 8.61E-01 | 9.55E-01 | 1.31E+00 | 1.28E+00 | 1.26E+00 | 1.16E+00 | 1.18E+00 |
| | min. | 3.93E-01 | 4.76E-01 | 6.70E-01 | 9.28E-01 | 1.16E+00 | 1.00E+00 | 6.40E-01 | 3.85E-01 |
| | desv.est. | 4.09E-02 | 6.94E-02 | 6.05E-02 | 1.16E-01 | 2.29E-02 | 4.65E-02 | 8.60E-02 | 1.60E-01 |
| 8D | prom. | 8.49E-01 | 8.68E-01 | 9.96E-01 | 1.16E+00 | 1.16E+00 | 1.14E+00 | 5.59E-01 | 7.18E-01 |
| | var. | 3.65E-04 | 4.41E-02 | 6.46E-03 | 2.41E-02 | 1.10E-03 | 3.40E-03 | 5.73E-03 | 8.85E-03 |
| | max. | 8.55E-01 | 1.44E+00 | 1.18E+00 | 1.95E+00 | 1.19E+00 | 1.21E+00 | 9.16E-01 | 8.55E-01 |
| | min. | 7.19E-01 | 5.46E-01 | 8.38E-01 | 9.84E-01 | 9.62E-01 | 8.53E-01 | 4.73E-01 | 5.62E-01 |
| | desv.est. | 1.91E-02 | 2.10E-01 | 8.04E-02 | 1.55E-01 | 3.32E-02 | 5.83E-02 | 7.57E-02 | 9.41E-02 |
| 9D | prom. | 9.86E-01 | 1.22E+00 | 1.22E+00 | 1.25E+00 | 1.26E+00 | 1.26E+00 | 6.63E-01 | 8.07E-01 |
| | var. | 8.48E-04 | 1.17E-01 | 4.97E-03 | 1.06E-02 | 1.00E-03 | 9.35E-04 | 3.27E-02 | 1.12E-02 |
| | max. | 1.00E+00 | 2.04E+00 | 1.40E+00 | 1.47E+00 | 1.30E+00 | 1.31E+00 | 1.73E+00 | 1.00E+00 |
| | min. | 8.70E-01 | 7.72E-01 | 1.05E+00 | 1.07E+00 | 1.13E+00 | 1.11E+00 | 5.54E-01 | 6.35E-01 |
| | desv.est. | 2.91E-02 | 3.42E-01 | 7.05E-02 | 1.03E-01 | 3.17E-02 | 3.06E-02 | 1.81E-01 | 1.06E-01 |
| 10D | prom. | 1.28E+00 | 1.48E+00 | 1.52E+00 | 1.46E+00 | 1.50E+00 | 1.47E+00 | 8.72E-01 | 1.11E+00 |
| | var. | 3.94E-03 | 1.22E-01 | 4.73E-03 | 1.12E-02 | 7.02E-04 | 5.92E-03 | 4.90E-03 | 7.92E-03 |
| | max. | 1.36E+00 | 2.80E+00 | 1.74E+00 | 1.65E+00 | 1.55E+00 | 1.53E+00 | 1.11E+00 | 1.31E+00 |
| | min. | 1.12E+00 | 1.06E+00 | 1.38E+00 | 1.25E+00 | 1.40E+00 | 1.21E+00 | 7.66E-01 | 9.09E-01 |
| | desv.est. | 6.28E-02 | 3.50E-01 | 6.88E-02 | 1.06E-01 | 2.65E-02 | 7.70E-02 | 7.00E-02 | 8.90E-02 |

Tabla B.24: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG1.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 1.12E+00 | 1.23E+00 | 5.51E-01 | 1.49E+00 | 1.49E+00 | 1.49E+00 | 1.44E+00 | 1.21E+00 |
| | var. | 8.97E-05 | 1.65E-04 | 7.83E-03 | 2.20E-04 | 2.05E-04 | 2.94E-04 | 1.20E-04 | 1.94E-04 |
| | max. | 1.13E+00 | 1.26E+00 | 7.25E-01 | 1.52E+00 | 1.52E+00 | 1.52E+00 | 1.46E+00 | 1.24E+00 |
| | min. | 1.10E+00 | 1.21E+00 | 7.33E-02 | 1.46E+00 | 1.46E+00 | 1.45E+00 | 1.40E+00 | 1.19E+00 |
| | desv.est. | 9.47E-03 | 1.28E-02 | 8.85E-02 | 1.48E-02 | 1.43E-02 | 1.72E-02 | 1.10E-02 | 1.39E-02 |
| 4D | prom. | 1.34E+00 | 1.53E+00 | 9.76E-01 | 1.84E+00 | 1.82E+00 | 1.83E+00 | 1.73E+00 | 1.45E+00 |
| | var. | 2.39E-04 | 2.56E-04 | 4.22E-03 | 1.58E-03 | 1.63E-03 | 1.75E-03 | 1.95E-03 | 2.26E-04 |
| | max. | 1.38E+00 | 1.56E+00 | 1.14E+00 | 1.95E+00 | 1.96E+00 | 1.92E+00 | 1.93E+00 | 1.48E+00 |
| | min. | 1.32E+00 | 1.48E+00 | 8.36E-01 | 1.74E+00 | 1.76E+00 | 1.70E+00 | 1.67E+00 | 1.42E+00 |
| | desv.est. | 1.54E-02 | 1.60E-02 | 6.49E-02 | 3.97E-02 | 4.04E-02 | 4.18E-02 | 4.42E-02 | 1.50E-02 |
| 5D | prom. | 1.49E+00 | 1.86E+00 | 1.24E+00 | 1.93E+00 | 1.93E+00 | 1.92E+00 | 1.74E+00 | 1.59E+00 |
| | var. | 5.05E-04 | 4.31E-04 | 6.74E-03 | 8.89E-05 | 8.35E-05 | 8.23E-05 | 1.69E-04 | 2.56E-04 |
| | max. | 1.57E+00 | 1.91E+00 | 1.41E+00 | 1.95E+00 | 1.95E+00 | 1.94E+00 | 1.77E+00 | 1.62E+00 |
| | min. | 1.45E+00 | 1.80E+00 | 1.10E+00 | 1.91E+00 | 1.91E+00 | 1.89E+00 | 1.72E+00 | 1.55E+00 |
| | desv.est. | 2.25E-02 | 2.08E-02 | 8.21E-02 | 9.43E-03 | 9.14E-03 | 9.07E-03 | 1.30E-02 | 1.60E-02 |
| 6D | prom. | 1.63E+00 | 2.10E+00 | 1.52E+00 | 2.14E+00 | 2.14E+00 | 2.13E+00 | 1.90E+00 | 1.75E+00 |
| | var. | 7.41E-04 | 3.60E-04 | 1.04E-02 | 1.03E-04 | 1.32E-04 | 1.47E-04 | 1.37E-04 | 6.92E-04 |
| | max. | 1.70E+00 | 2.14E+00 | 1.74E+00 | 2.16E+00 | 2.19E+00 | 2.16E+00 | 1.92E+00 | 1.83E+00 |
| | min. | 1.58E+00 | 2.05E+00 | 1.21E+00 | 2.12E+00 | 2.12E+00 | 2.08E+00 | 1.87E+00 | 1.70E+00 |
| | desv.est. | 2.72E-02 | 1.90E-02 | 1.02E-01 | 1.01E-02 | 1.15E-02 | 1.21E-02 | 1.17E-02 | 2.63E-02 |
| 7D | prom. | 2.01E+00 | 2.16E+00 | 1.63E+00 | 2.60E+00 | 2.90E+00 | 2.88E+00 | 2.41E+00 | 2.41E+00 |
| | var. | 6.75E-03 | 1.52E-03 | 1.11E-02 | 3.87E-03 | 5.14E-03 | 3.38E-03 | 5.11E-03 | 3.78E-02 |
| | max. | 2.20E+00 | 2.29E+00 | 1.88E+00 | 2.72E+00 | 3.05E+00 | 2.98E+00 | 2.61E+00 | 2.98E+00 |
| | min. | 1.88E+00 | 2.07E+00 | 1.40E+00 | 2.47E+00 | 2.70E+00 | 2.74E+00 | 2.22E+00 | 2.03E+00 |
| | desv.est. | 8.22E-02 | 3.89E-02 | 1.05E-01 | 6.22E-02 | 7.17E-02 | 5.81E-02 | 7.15E-02 | 1.94E-01 |
| 8D | prom. | 1.88E+00 | 2.38E+00 | 1.77E+00 | 2.51E+00 | 2.54E+00 | 2.53E+00 | 2.41E+00 | 2.10E+00 |
| | var. | 8.17E-04 | 7.16E-04 | 1.49E-02 | 6.32E-03 | 4.27E-04 | 3.14E-04 | 4.11E-03 | 1.34E-03 |
| | max. | 1.94E+00 | 2.42E+00 | 2.01E+00 | 2.69E+00 | 2.59E+00 | 2.57E+00 | 2.53E+00 | 2.16E+00 |
| | min. | 1.84E+00 | 2.30E+00 | 1.51E+00 | 2.34E+00 | 2.50E+00 | 2.50E+00 | 2.23E+00 | 2.02E+00 |
| | desv.est. | 2.86E-02 | 2.68E-02 | 1.22E-01 | 7.95E-02 | 2.07E-02 | 1.77E-02 | 6.41E-02 | 3.65E-02 |
| 9D | prom. | 1.99E+00 | 2.57E+00 | 1.99E+00 | 2.77E+00 | 2.74E+00 | 2.73E+00 | 2.59E+00 | 2.24E+00 |
| | var. | 1.37E-03 | 8.55E-04 | 8.57E-03 | 9.58E-04 | 5.40E-04 | 5.17E-04 | 5.40E-03 | 1.96E-03 |
| | max. | 2.09E+00 | 2.64E+00 | 2.15E+00 | 2.83E+00 | 2.79E+00 | 2.80E+00 | 2.72E+00 | 2.35E+00 |
| | min. | 1.94E+00 | 2.50E+00 | 1.75E+00 | 2.70E+00 | 2.68E+00 | 2.69E+00 | 2.42E+00 | 2.16E+00 |
| | desv.est. | 3.71E-02 | 2.92E-02 | 9.26E-02 | 3.10E-02 | 2.32E-02 | 2.27E-02 | 7.35E-02 | 4.43E-02 |
| 10D | prom. | 2.14E+00 | 2.76E+00 | 2.10E+00 | 2.93E+00 | 2.90E+00 | 2.90E+00 | 2.77E+00 | 2.40E+00 |
| | var. | 2.87E-03 | 4.37E-03 | 1.60E-02 | 1.04E-03 | 4.31E-04 | 2.75E-04 | 3.96E-03 | 4.51E-03 |
| | max. | 2.26E+00 | 2.92E+00 | 2.35E+00 | 3.01E+00 | 2.93E+00 | 2.94E+00 | 2.96E+00 | 2.62E+00 |
| | min. | 2.05E+00 | 2.61E+00 | 1.77E+00 | 2.87E+00 | 2.86E+00 | 2.86E+00 | 2.64E+00 | 2.27E+00 |
| | desv.est. | 5.36E-02 | 6.61E-02 | 1.27E-01 | 3.23E-02 | 2.08E-02 | 1.66E-02 | 6.29E-02 | 6.71E-02 |

Tabla B.25: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG2.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 6.18E-02 | 4.86E-02 | 1.04E-01 | 7.89E-02 | 7.62E-02 | 7.22E-02 | 1.95E-01 | 8.39E-02 |
| | var. | 8.11E-06 | 4.63E-06 | 1.26E-04 | 4.97E-05 | 3.85E-05 | 2.12E-05 | 1.19E-03 | 4.54E-04 |
| | max. | 7.35E-02 | 5.46E-02 | 1.29E-01 | 9.47E-02 | 9.25E-02 | 8.17E-02 | 2.90E-01 | 1.83E-01 |
| | min. | 5.82E-02 | 4.36E-02 | 7.83E-02 | 6.54E-02 | 6.18E-02 | 6.19E-02 | 9.45E-02 | 6.07E-02 |
| | desv.est. | 2.85E-03 | 2.15E-03 | 1.12E-02 | 7.05E-03 | 6.20E-03 | 4.60E-03 | 3.45E-02 | 2.13E-02 |
| 4D | prom. | 2.00E-01 | 1.16E-01 | 3.07E-01 | 2.45E-01 | 2.08E-01 | 2.24E-01 | 6.22E-01 | 2.28E-01 |
| | var. | 2.93E-05 | 2.12E-05 | 1.50E-03 | 1.23E-03 | 6.45E-04 | 8.82E-04 | 5.22E-03 | 7.22E-04 |
| | max. | 2.18E-01 | 1.29E-01 | 3.96E-01 | 3.38E-01 | 2.66E-01 | 3.12E-01 | 7.70E-01 | 3.16E-01 |
| | min. | 1.94E-01 | 1.09E-01 | 2.47E-01 | 1.69E-01 | 1.44E-01 | 1.63E-01 | 4.65E-01 | 1.91E-01 |
| | desv.est. | 5.41E-03 | 4.61E-03 | 3.87E-02 | 3.50E-02 | 2.54E-02 | 2.97E-02 | 7.23E-02 | 2.69E-02 |
| 5D | prom. | 2.33E-01 | 2.13E-01 | 5.73E-01 | 2.14E-01 | 2.03E-01 | 2.02E-01 | 2.66E-01 | 2.75E-01 |
| | var. | 1.00E-03 | 1.54E-04 | 6.36E-03 | 1.39E-04 | 5.47E-05 | 6.92E-05 | 1.58E-03 | 1.55E-03 |
| | max. | 3.05E-01 | 2.38E-01 | 8.15E-01 | 2.40E-01 | 2.22E-01 | 2.30E-01 | 3.59E-01 | 3.69E-01 |
| | min. | 1.85E-01 | 1.66E-01 | 4.39E-01 | 1.95E-01 | 1.90E-01 | 1.84E-01 | 1.95E-01 | 2.06E-01 |
| | desv.est. | 3.16E-02 | 1.24E-02 | 7.98E-02 | 1.18E-02 | 7.40E-03 | 8.32E-03 | 3.97E-02 | 3.94E-02 |
| 6D | prom. | 2.65E-01 | #DIV/0! | 7.13E-01 | 2.41E-01 | 2.31E-01 | 2.24E-01 | 2.91E-01 | 3.54E-01 |
| | var. | 1.32E-03 | #DIV/0! | 7.16E-03 | 9.70E-05 | 1.72E-05 | 2.69E-05 | 9.13E-04 | 4.29E-03 |
| | max. | 3.50E-01 | 0.00E+00 | 8.73E-01 | 2.69E-01 | 2.41E-01 | 2.36E-01 | 3.67E-01 | 5.83E-01 |
| | min. | 2.03E-01 | 0.00E+00 | 4.48E-01 | 2.26E-01 | 2.21E-01 | 2.10E-01 | 2.28E-01 | 2.36E-01 |
| | desv.est. | 3.63E-02 | #DIV/0! | 8.46E-02 | 9.85E-03 | 4.15E-03 | 5.19E-03 | 3.02E-02 | 6.55E-02 |
| 7D | prom. | 1.82E+00 | 2.79E-01 | 8.67E-01 | 6.59E-01 | 1.46E+00 | 1.60E+00 | 2.52E+00 | 1.99E+00 |
| | var. | 1.02E+00 | 1.27E-04 | 1.28E-02 | 4.79E-02 | 2.80E-01 | 2.61E-01 | 2.92E-01 | 1.50E+00 |
| | max. | 5.38E+00 | 3.03E-01 | 1.07E+00 | 1.10E+00 | 2.66E+00 | 2.73E+00 | 3.92E+00 | 5.42E+00 |
| | min. | 4.34E-01 | 2.37E-01 | 4.81E-01 | 2.39E-01 | 5.57E-01 | 6.97E-01 | 1.43E+00 | 6.36E-01 |
| | desv.est. | 1.01E+00 | 1.13E-02 | 1.13E-01 | 2.19E-01 | 5.29E-01 | 5.11E-01 | 5.40E-01 | 1.22E+00 |
| 8D | prom. | 2.95E-01 | 3.52E-01 | 9.52E-01 | 4.34E-01 | 4.87E-01 | 4.94E-01 | 1.88E+00 | 3.60E-01 |
| | var. | 5.67E-05 | 3.42E-04 | 1.61E-02 | 3.04E-03 | 5.44E-03 | 6.21E-03 | 1.46E-01 | 8.31E-03 |
| | max. | 3.16E-01 | 3.87E-01 | 1.30E+00 | 5.47E-01 | 6.71E-01 | 6.95E-01 | 3.07E+00 | 6.98E-01 |
| | min. | 2.79E-01 | 3.17E-01 | 6.75E-01 | 2.73E-01 | 3.45E-01 | 3.69E-01 | 1.15E+00 | 2.68E-01 |
| | desv.est. | 7.53E-03 | 1.85E-02 | 1.27E-01 | 5.51E-02 | 7.37E-02 | 7.88E-02 | 3.83E-01 | 9.12E-02 |
| 9D | prom. | 2.68E-01 | 3.67E-01 | 1.08E+00 | 3.72E-01 | 5.74E-01 | 5.87E-01 | 2.62E+00 | 4.38E-01 |
| | var. | 2.00E-04 | 8.60E-04 | 1.85E-02 | 1.73E-03 | 9.82E-03 | 1.42E-02 | 3.41E-01 | 2.70E-02 |
| | max. | 3.28E-01 | 4.62E-01 | 1.34E+00 | 4.70E-01 | 8.24E-01 | 8.73E-01 | 4.28E+00 | 8.92E-01 |
| | min. | 2.49E-01 | 3.18E-01 | 7.40E-01 | 2.94E-01 | 4.46E-01 | 3.70E-01 | 1.54E+00 | 2.69E-01 |
| | desv.est. | 1.41E-02 | 2.93E-02 | 1.36E-01 | 4.16E-02 | 9.91E-02 | 1.19E-01 | 5.84E-01 | 1.64E-01 |
| 10D | prom. | 3.02E-01 | 3.61E-01 | 1.10E+00 | 3.78E-01 | 6.81E-01 | 6.77E-01 | 2.92E+00 | 7.60E-01 |
| | var. | 4.26E-03 | 5.02E-04 | 2.59E-02 | 2.01E-03 | 1.43E-02 | 1.62E-02 | 3.74E-01 | 1.53E-01 |
| | max. | 5.51E-01 | 4.29E-01 | 1.44E+00 | 4.79E-01 | 1.01E+00 | 9.06E-01 | 4.56E+00 | 2.02E+00 |
| | min. | 2.59E-01 | 3.20E-01 | 7.67E-01 | 2.94E-01 | 4.31E-01 | 4.37E-01 | 1.43E+00 | 2.71E-01 |
| | desv.est. | 6.52E-02 | 2.24E-02 | 1.61E-01 | 4.49E-02 | 1.19E-01 | 1.27E-01 | 6.12E-01 | 3.92E-01 |

Tabla B.26: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG3.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 6.60E-02 | 9.17E-02 | 1.06E-01 | 1.93E-01 | 1.88E-01 | 1.75E-01 | 2.26E-01 | 1.36E-01 |
| | var. | 1.80E-04 | 6.90E-05 | 1.79E-04 | 5.46E-04 | 2.69E-04 | 5.06E-04 | 1.59E-03 | 8.61E-04 |
| | max. | 9.69E-02 | 1.11E-01 | 1.33E-01 | 2.55E-01 | 2.21E-01 | 2.22E-01 | 3.05E-01 | 2.12E-01 |
| | min. | 4.80E-02 | 7.38E-02 | 7.08E-02 | 1.45E-01 | 1.45E-01 | 1.33E-01 | 1.26E-01 | 8.92E-02 |
| | desv.est. | 1.34E-02 | 8.31E-03 | 1.34E-02 | 2.34E-02 | 1.64E-02 | 2.25E-02 | 3.99E-02 | 2.93E-02 |
| 4D | prom. | 2.80E-01 | 2.93E-01 | 3.04E-01 | 5.54E-01 | 5.68E-01 | 4.60E-01 | 7.14E-01 | 3.66E-01 |
| | var. | 7.11E-04 | 6.55E-04 | 1.83E-03 | 7.83E-03 | 7.77E-03 | 1.19E-02 | 9.50E-03 | 2.11E-03 |
| | max. | 3.72E-01 | 3.49E-01 | 4.01E-01 | 7.19E-01 | 7.68E-01 | 7.33E-01 | 9.17E-01 | 4.98E-01 |
| | min. | 2.28E-01 | 2.43E-01 | 2.21E-01 | 4.01E-01 | 3.61E-01 | 3.09E-01 | 5.45E-01 | 2.73E-01 |
| | desv.est. | 2.67E-02 | 2.56E-02 | 4.28E-02 | 8.85E-02 | 8.82E-02 | 1.09E-01 | 9.74E-02 | 4.59E-02 |
| 5D | prom. | 1.07E+00 | 1.19E+00 | 5.44E-01 | 1.11E+00 | 1.10E+00 | 1.07E+00 | 1.18E+00 | 1.13E+00 |
| | var. | 3.22E-03 | 1.10E-02 | 3.10E-03 | 4.04E-03 | 4.58E-03 | 6.50E-03 | 8.57E-03 | 5.78E-03 |
| | max. | 1.21E+00 | 1.54E+00 | 6.33E-01 | 1.25E+00 | 1.22E+00 | 1.25E+00 | 1.39E+00 | 1.31E+00 |
| | min. | 9.72E-01 | 1.00E+00 | 4.32E-01 | 9.62E-01 | 9.07E-01 | 8.98E-01 | 9.46E-01 | 9.66E-01 |
| | desv.est. | 5.68E-02 | 1.05E-01 | 5.57E-02 | 6.36E-02 | 6.77E-02 | 8.06E-02 | 9.26E-02 | 7.60E-02 |
| 6D | prom. | 1.56E+00 | 1.47E+00 | 7.22E-01 | 1.57E+00 | 1.53E+00 | 1.54E+00 | 1.54E+00 | 1.57E+00 |
| | var. | 1.11E-02 | 1.04E-02 | 8.90E-03 | 3.58E-03 | 5.54E-03 | 5.20E-03 | 9.19E-03 | 8.31E-03 |
| | max. | 1.81E+00 | 1.92E+00 | 9.49E-01 | 1.68E+00 | 1.71E+00 | 1.72E+00 | 1.79E+00 | 1.72E+00 |
| | min. | 1.32E+00 | 1.26E+00 | 5.22E-01 | 1.45E+00 | 1.38E+00 | 1.34E+00 | 1.36E+00 | 1.37E+00 |
| | desv.est. | 1.06E-01 | 1.02E-01 | 9.43E-02 | 5.99E-02 | 7.44E-02 | 7.21E-02 | 9.58E-02 | 9.12E-02 |
| 7D | prom. | 2.18E+00 | 1.15E+00 | 8.54E-01 | 2.39E+00 | 2.37E+00 | 2.41E+00 | 2.23E+00 | 2.47E+00 |
| | var. | 8.59E-03 | 8.04E-03 | 9.49E-03 | 3.16E-03 | 1.24E-02 | 1.39E-02 | 5.46E-02 | 2.50E-02 |
| | max. | 2.36E+00 | 1.34E+00 | 1.18E+00 | 2.58E+00 | 2.60E+00 | 2.66E+00 | 2.83E+00 | 2.85E+00 |
| | min. | 1.92E+00 | 8.87E-01 | 7.17E-01 | 2.31E+00 | 2.04E+00 | 2.13E+00 | 1.66E+00 | 2.08E+00 |
| | desv.est. | 9.27E-02 | 8.97E-02 | 9.74E-02 | 5.62E-02 | 1.12E-01 | 1.18E-01 | 2.34E-01 | 1.58E-01 |
| 8D | prom. | 5.88E-01 | 1.51E+00 | 9.60E-01 | 3.14E+00 | 1.95E+00 | 2.00E+00 | 9.87E-01 | 6.42E-01 |
| | var. | 6.88E-04 | 9.48E-03 | 1.90E-02 | 4.59E-03 | 2.79E-03 | 3.76E-03 | 7.30E-03 | 4.03E-03 |
| | max. | 6.39E-01 | 1.73E+00 | 1.30E+00 | 3.30E+00 | 2.09E+00 | 2.15E+00 | 1.17E+00 | 7.69E-01 |
| | min. | 5.36E-01 | 1.30E+00 | 6.84E-01 | 3.04E+00 | 1.85E+00 | 1.90E+00 | 8.10E-01 | 5.25E-01 |
| | desv.est. | 2.62E-02 | 9.73E-02 | 1.38E-01 | 6.78E-02 | 5.28E-02 | 6.13E-02 | 8.54E-02 | 6.35E-02 |
| 9D | prom. | 7.35E-01 | 1.29E+00 | 1.08E+00 | 3.39E+00 | 2.32E+00 | 2.32E+00 | 1.17E+00 | 7.65E-01 |
| | var. | 1.32E-03 | 2.07E-01 | 1.62E-02 | 8.94E-03 | 6.82E-03 | 6.51E-03 | 1.30E-02 | 4.93E-03 |
| | max. | 8.17E-01 | 1.85E+00 | 1.34E+00 | 3.61E+00 | 2.51E+00 | 2.53E+00 | 1.48E+00 | 9.33E-01 |
| | min. | 6.47E-01 | 5.18E-01 | 7.88E-01 | 3.25E+00 | 2.19E+00 | 2.17E+00 | 9.52E-01 | 6.33E-01 |
| | desv.est. | 3.63E-02 | 4.55E-01 | 1.27E-01 | 9.45E-02 | 8.26E-02 | 8.07E-02 | 1.14E-01 | 7.02E-02 |
| 10D | prom. | 6.50E-01 | 8.55E-01 | 1.15E+00 | 3.59E+00 | 2.72E+00 | 2.67E+00 | 1.22E+00 | 7.29E-01 |
| | var. | 9.21E-04 | 1.80E-01 | 2.12E-02 | 1.13E-02 | 2.36E-02 | 2.17E-02 | 9.67E-03 | 6.92E-03 |
| | max. | 7.28E-01 | 1.84E+00 | 1.50E+00 | 3.88E+00 | 3.02E+00 | 3.05E+00 | 1.46E+00 | 9.90E-01 |
| | min. | 5.95E-01 | 3.90E-01 | 8.44E-01 | 3.47E+00 | 2.48E+00 | 2.44E+00 | 1.00E+00 | 5.87E-01 |
| | desv.est. | 3.04E-02 | 4.24E-01 | 1.45E-01 | 1.06E-01 | 1.53E-01 | 1.47E-01 | 9.83E-02 | 8.32E-02 |

Tabla B.27: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG4.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _x |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 1.23E-01 | 8.17E-02 | 1.46E-01 | 2.02E-01 | 1.99E-01 | 1.99E-01 | 1.29E-01 | 1.16E-01 |
| | var. | 5.10E-06 | 5.12E-06 | 8.94E-05 | 7.28E-05 | 5.43E-05 | 8.29E-05 | 1.69E-05 | 6.34E-06 |
| | max. | 1.27E-01 | 8.66E-02 | 1.70E-01 | 2.24E-01 | 2.18E-01 | 2.15E-01 | 1.40E-01 | 1.22E-01 |
| | min. | 1.16E-01 | 7.72E-02 | 1.30E-01 | 1.85E-01 | 1.83E-01 | 1.78E-01 | 1.21E-01 | 1.11E-01 |
| | desv.est. | 2.26E-03 | 2.26E-03 | 9.46E-03 | 8.53E-03 | 7.37E-03 | 9.10E-03 | 4.11E-03 | 2.52E-03 |
| 4D | prom. | 4.73E-01 | 2.12E-01 | 3.50E-01 | 4.00E-01 | 3.94E-01 | 3.78E-01 | 4.98E-01 | 4.66E-01 |
| | var. | 1.27E-04 | 9.50E-06 | 2.21E-04 | 1.38E-03 | 1.13E-03 | 1.13E-03 | 7.49E-04 | 1.77E-04 |
| | max. | 4.91E-01 | 2.17E-01 | 3.78E-01 | 4.85E-01 | 4.75E-01 | 4.56E-01 | 5.61E-01 | 4.91E-01 |
| | min. | 4.40E-01 | 2.06E-01 | 3.25E-01 | 3.33E-01 | 3.26E-01 | 3.18E-01 | 4.36E-01 | 4.37E-01 |
| | desv.est. | 1.13E-02 | 3.08E-03 | 1.49E-02 | 3.71E-02 | 3.36E-02 | 3.36E-02 | 2.74E-02 | 1.33E-02 |
| 5D | prom. | 8.03E-01 | 5.00E-01 | 6.21E-01 | 7.39E-01 | 7.17E-01 | 7.20E-01 | 8.16E-01 | 7.77E-01 |
| | var. | 1.27E-03 | 4.01E-05 | 4.16E-04 | 4.50E-04 | 2.72E-04 | 3.67E-04 | 1.19E-03 | 1.29E-03 |
| | max. | 8.70E-01 | 5.14E-01 | 6.67E-01 | 7.88E-01 | 7.50E-01 | 7.59E-01 | 8.80E-01 | 8.53E-01 |
| | min. | 7.02E-01 | 4.87E-01 | 5.69E-01 | 6.89E-01 | 6.69E-01 | 6.76E-01 | 7.43E-01 | 6.94E-01 |
| | desv.est. | 3.56E-02 | 6.34E-03 | 2.04E-02 | 2.12E-02 | 1.65E-02 | 1.92E-02 | 3.44E-02 | 3.60E-02 |
| 6D | prom. | 1.17E+00 | 1.06E+00 | 8.96E-01 | 9.80E-01 | 9.62E-01 | 9.57E-01 | 1.17E+00 | 1.16E+00 |
| | var. | 1.31E-03 | 1.65E-02 | 7.05E-04 | 4.68E-04 | 3.79E-04 | 3.18E-04 | 1.35E-03 | 8.01E-04 |
| | max. | 1.24E+00 | 1.27E+00 | 9.65E-01 | 1.03E+00 | 1.01E+00 | 9.92E-01 | 1.24E+00 | 1.22E+00 |
| | min. | 1.05E+00 | 7.90E-01 | 8.35E-01 | 9.39E-01 | 9.23E-01 | 8.86E-01 | 1.09E+00 | 1.10E+00 |
| | desv.est. | 3.61E-02 | 1.29E-01 | 2.66E-02 | 2.16E-02 | 1.95E-02 | 1.78E-02 | 3.68E-02 | 2.83E-02 |
| 7D | prom. | 2.64E+00 | 6.30E-01 | 1.15E+00 | 1.44E+00 | 1.16E+00 | 1.14E+00 | 3.97E+00 | 2.61E+00 |
| | var. | 1.61E-01 | 6.51E-05 | 1.06E-03 | 5.06E-03 | 7.13E-03 | 4.31E-03 | 2.17E-01 | 1.26E-01 |
| | max. | 3.76E+00 | 6.48E-01 | 1.24E+00 | 1.57E+00 | 1.41E+00 | 1.28E+00 | 5.06E+00 | 3.58E+00 |
| | min. | 1.42E+00 | 6.15E-01 | 1.08E+00 | 1.27E+00 | 9.96E-01 | 1.02E+00 | 3.19E+00 | 1.79E+00 |
| | desv.est. | 4.01E-01 | 8.07E-03 | 3.25E-02 | 7.11E-02 | 8.45E-02 | 6.57E-02 | 4.66E-01 | 3.54E-01 |
| 8D | prom. | 2.00E+00 | 9.63E-01 | 1.34E+00 | 1.50E+00 | 1.06E+00 | 1.03E+00 | 4.05E+00 | 2.02E+00 |
| | var. | 1.85E-02 | 1.38E-03 | 2.78E-03 | 8.16E-03 | 8.54E-04 | 9.75E-04 | 1.42E-01 | 8.07E-03 |
| | max. | 2.17E+00 | 1.07E+00 | 1.55E+00 | 1.83E+00 | 1.13E+00 | 1.11E+00 | 5.05E+00 | 2.14E+00 |
| | min. | 1.64E+00 | 9.02E-01 | 1.25E+00 | 1.36E+00 | 9.94E-01 | 9.66E-01 | 3.27E+00 | 1.74E+00 |
| | desv.est. | 1.36E-01 | 3.72E-02 | 5.27E-02 | 9.04E-02 | 2.92E-02 | 3.12E-02 | 3.77E-01 | 8.98E-02 |
| 9D | prom. | 2.13E+00 | 1.05E+00 | 1.57E+00 | 1.57E+00 | 1.24E+00 | 1.22E+00 | 5.24E+00 | 2.29E+00 |
| | var. | 8.20E-03 | 9.20E-04 | 8.16E-03 | 4.95E-03 | 1.42E-03 | 9.83E-04 | 2.48E-01 | 4.66E-01 |
| | max. | 2.23E+00 | 1.14E+00 | 1.81E+00 | 1.76E+00 | 1.32E+00 | 1.28E+00 | 6.13E+00 | 4.98E+00 |
| | min. | 1.76E+00 | 1.00E+00 | 1.41E+00 | 1.46E+00 | 1.17E+00 | 1.15E+00 | 3.93E+00 | 1.64E+00 |
| | desv.est. | 9.06E-02 | 3.03E-02 | 9.03E-02 | 7.04E-02 | 3.77E-02 | 3.14E-02 | 4.98E-01 | 6.83E-01 |
| 10D | prom. | 2.49E+00 | 1.21E+00 | 1.71E+00 | 1.68E+00 | 1.35E+00 | 1.32E+00 | 6.73E+00 | 2.92E+00 |
| | var. | 1.71E-02 | 6.72E-04 | 1.49E-02 | 5.63E-03 | 1.32E-03 | 1.11E-03 | 2.36E-01 | 1.58E+00 |
| | max. | 2.65E+00 | 1.25E+00 | 2.25E+00 | 1.95E+00 | 1.44E+00 | 1.43E+00 | 7.64E+00 | 6.25E+00 |
| | min. | 2.06E+00 | 1.15E+00 | 1.55E+00 | 1.55E+00 | 1.29E+00 | 1.25E+00 | 5.64E+00 | 1.50E+00 |
| | desv.est. | 1.31E-01 | 2.59E-02 | 1.22E-01 | 7.50E-02 | 3.64E-02 | 3.33E-02 | 4.86E-01 | 1.26E+00 |

Tabla B.28: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG5.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 1.82E-01 | 1.22E-01 | 1.50E-01 | 1.74E-01 | 1.73E-01 | 1.73E-01 | 1.79E-01 | 1.75E-01 |
| | var. | 1.45E-06 | 2.08E-06 | 1.41E-05 | 2.71E-05 | 2.23E-05 | 1.91E-05 | 7.86E-06 | 5.55E-06 |
| | max. | 1.85E-01 | 1.28E-01 | 1.59E-01 | 1.84E-01 | 1.80E-01 | 1.80E-01 | 1.88E-01 | 1.81E-01 |
| | min. | 1.80E-01 | 1.20E-01 | 1.43E-01 | 1.56E-01 | 1.53E-01 | 1.61E-01 | 1.75E-01 | 1.70E-01 |
| | desv.est. | 1.20E-03 | 1.44E-03 | 3.75E-03 | 5.21E-03 | 4.73E-03 | 4.37E-03 | 2.80E-03 | 2.36E-03 |
| 4D | prom. | 4.66E-01 | 2.44E-01 | 3.39E-01 | 4.18E-01 | 4.28E-01 | 3.98E-01 | 5.30E-01 | 4.97E-01 |
| | var. | 8.93E-04 | 1.01E-05 | 2.36E-04 | 1.46E-03 | 1.18E-03 | 1.42E-03 | 4.57E-04 | 2.24E-03 |
| | max. | 5.23E-01 | 2.50E-01 | 3.92E-01 | 5.02E-01 | 4.94E-01 | 4.96E-01 | 5.96E-01 | 5.52E-01 |
| | min. | 4.08E-01 | 2.36E-01 | 3.15E-01 | 3.46E-01 | 3.46E-01 | 3.32E-01 | 4.87E-01 | 3.97E-01 |
| | desv.est. | 2.99E-02 | 3.18E-03 | 1.54E-02 | 3.82E-02 | 3.43E-02 | 3.77E-02 | 2.14E-02 | 4.73E-02 |
| 5D | prom. | 8.41E-01 | 5.19E-01 | 6.33E-01 | 6.76E-01 | 6.68E-01 | 6.74E-01 | 8.87E-01 | 8.27E-01 |
| | var. | 1.75E-03 | 2.72E-05 | 1.23E-03 | 1.70E-04 | 2.30E-04 | 1.69E-04 | 1.88E-03 | 1.69E-03 |
| | max. | 9.33E-01 | 5.33E-01 | 7.41E-01 | 7.06E-01 | 7.06E-01 | 7.03E-01 | 9.61E-01 | 9.04E-01 |
| | min. | 7.29E-01 | 5.08E-01 | 5.79E-01 | 6.43E-01 | 6.44E-01 | 6.41E-01 | 7.61E-01 | 7.22E-01 |
| | desv.est. | 4.19E-02 | 5.22E-03 | 3.51E-02 | 1.30E-02 | 1.52E-02 | 1.30E-02 | 4.34E-02 | 4.12E-02 |
| 6D | prom. | 1.22E+00 | 1.21E+00 | 1.00E+00 | 8.94E-01 | 8.80E-01 | 8.90E-01 | 1.27E+00 | 1.21E+00 |
| | var. | 1.00E-03 | 4.45E-02 | 1.16E-02 | 7.72E-04 | 3.72E-04 | 4.25E-04 | 2.48E-03 | 1.72E-03 |
| | max. | 1.30E+00 | 1.52E+00 | 1.32E+00 | 9.54E-01 | 9.40E-01 | 9.44E-01 | 1.36E+00 | 1.29E+00 |
| | min. | 1.11E+00 | 7.88E-01 | 8.80E-01 | 8.39E-01 | 8.51E-01 | 8.39E-01 | 1.17E+00 | 1.12E+00 |
| | desv.est. | 3.16E-02 | 2.11E-01 | 1.08E-01 | 2.78E-02 | 1.93E-02 | 2.06E-02 | 4.98E-02 | 4.14E-02 |
| 7D | prom. | 1.18E+00 | 6.42E-01 | 1.48E+00 | 1.08E+00 | 1.57E+00 | 1.61E+00 | 3.23E+00 | 2.09E+00 |
| | var. | 4.02E-02 | 9.84E-06 | 4.25E-02 | 1.39E-02 | 2.40E-02 | 2.91E-02 | 3.13E-01 | 4.55E-01 |
| | max. | 2.23E+00 | 6.49E-01 | 1.83E+00 | 1.81E+00 | 1.83E+00 | 1.91E+00 | 4.05E+00 | 2.88E+00 |
| | min. | 9.53E-01 | 6.36E-01 | 1.15E+00 | 1.02E+00 | 1.18E+00 | 1.21E+00 | 1.35E+00 | 1.23E+00 |
| | desv.est. | 2.01E-01 | 3.14E-03 | 2.06E-01 | 1.18E-01 | 1.55E-01 | 1.71E-01 | 5.59E-01 | 6.74E-01 |
| 8D | prom. | 2.05E+00 | 1.04E+00 | 1.97E+00 | 1.51E+00 | 1.17E+00 | 1.14E+00 | 3.34E+00 | 2.14E+00 |
| | var. | 2.01E-02 | 1.74E-03 | 8.45E-02 | 1.36E-01 | 4.48E-03 | 6.25E-03 | 3.72E-01 | 1.96E-03 |
| | max. | 2.24E+00 | 1.15E+00 | 2.45E+00 | 2.27E+00 | 1.34E+00 | 1.30E+00 | 4.30E+00 | 2.20E+00 |
| | min. | 1.63E+00 | 9.58E-01 | 1.34E+00 | 1.17E+00 | 1.04E+00 | 9.83E-01 | 1.87E+00 | 2.00E+00 |
| | desv.est. | 1.42E-01 | 4.17E-02 | 2.91E-01 | 3.69E-01 | 6.70E-02 | 7.90E-02 | 6.10E-01 | 4.43E-02 |
| 9D | prom. | 2.17E+00 | 1.09E+00 | 2.35E+00 | 1.78E+00 | 1.54E+00 | 1.44E+00 | 4.50E+00 | 2.23E+00 |
| | var. | 1.36E-02 | 8.67E-04 | 1.87E-02 | 5.11E-02 | 7.91E-03 | 6.50E-03 | 2.69E-01 | 7.78E-03 |
| | max. | 2.31E+00 | 1.18E+00 | 2.60E+00 | 2.15E+00 | 1.73E+00 | 1.58E+00 | 5.60E+00 | 2.30E+00 |
| | min. | 1.80E+00 | 1.05E+00 | 2.07E+00 | 1.24E+00 | 1.34E+00 | 1.29E+00 | 2.92E+00 | 1.85E+00 |
| | desv.est. | 1.17E-01 | 2.95E-02 | 1.37E-01 | 2.26E-01 | 8.89E-02 | 8.06E-02 | 5.18E-01 | 8.82E-02 |
| 10D | prom. | 2.63E+00 | 1.22E+00 | 2.77E+00 | 2.03E+00 | 1.88E+00 | 1.78E+00 | 5.95E+00 | 2.61E+00 |
| | var. | 2.56E-02 | 2.70E-04 | 2.94E-02 | 3.89E-02 | 2.10E-02 | 1.50E-02 | 3.40E-01 | 4.64E-03 |
| | max. | 2.75E+00 | 1.26E+00 | 3.02E+00 | 2.44E+00 | 2.27E+00 | 2.02E+00 | 7.39E+00 | 2.70E+00 |
| | min. | 2.06E+00 | 1.18E+00 | 2.41E+00 | 1.39E+00 | 1.56E+00 | 1.52E+00 | 4.03E+00 | 2.30E+00 |
| | desv.est. | 1.60E-01 | 1.64E-02 | 1.71E-01 | 1.97E-01 | 1.45E-01 | 1.22E-01 | 5.83E-01 | 6.81E-02 |

Tabla B.29: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG6.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _x |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 1.65E-01 | 1.20E-01 | 1.82E-01 | 1.62E-01 | 1.65E-01 | 1.67E-01 | 1.85E-01 | 1.56E-01 |
| | var. | 4.81E-05 | 3.80E-05 | 3.23E-04 | 2.83E-05 | 1.57E-04 | 6.52E-05 | 2.27E-05 | 5.91E-05 |
| | max. | 1.78E-01 | 1.40E-01 | 2.17E-01 | 1.74E-01 | 1.84E-01 | 1.75E-01 | 1.94E-01 | 1.70E-01 |
| | min. | 1.50E-01 | 1.08E-01 | 1.53E-01 | 1.39E-01 | 1.31E-01 | 1.42E-01 | 1.74E-01 | 1.43E-01 |
| | desv.est. | 6.94E-03 | 6.16E-03 | 1.80E-02 | 5.32E-03 | 1.25E-02 | 8.07E-03 | 4.77E-03 | 7.68E-03 |
| 4D | prom. | 5.25E-01 | 2.50E-01 | 4.28E-01 | 2.99E-01 | 2.95E-01 | 2.97E-01 | 5.68E-01 | 5.26E-01 |
| | var. | 9.41E-05 | 5.25E-05 | 1.94E-04 | 2.46E-03 | 1.56E-03 | 6.90E-04 | 3.09E-04 | 1.63E-04 |
| | max. | 5.44E-01 | 2.63E-01 | 4.55E-01 | 4.69E-01 | 4.67E-01 | 4.49E-01 | 6.19E-01 | 5.56E-01 |
| | min. | 5.04E-01 | 2.31E-01 | 3.92E-01 | 2.35E-01 | 2.22E-01 | 2.25E-01 | 5.37E-01 | 4.94E-01 |
| | desv.est. | 9.70E-03 | 7.24E-03 | 1.39E-02 | 4.96E-02 | 3.95E-02 | 2.63E-02 | 1.76E-02 | 1.28E-02 |
| 5D | prom. | 8.61E-01 | 5.35E-01 | 7.31E-01 | 6.32E-01 | 6.53E-01 | 6.59E-01 | 9.35E-01 | 8.65E-01 |
| | var. | 9.87E-04 | 8.90E-04 | 3.16E-04 | 6.20E-04 | 6.06E-04 | 5.38E-04 | 9.59E-04 | 1.32E-03 |
| | max. | 9.13E-01 | 7.23E-01 | 7.72E-01 | 7.01E-01 | 7.03E-01 | 7.17E-01 | 1.02E+00 | 9.29E-01 |
| | min. | 7.73E-01 | 5.11E-01 | 6.93E-01 | 5.88E-01 | 5.76E-01 | 6.08E-01 | 8.42E-01 | 7.81E-01 |
| | desv.est. | 3.14E-02 | 2.98E-02 | 1.78E-02 | 2.49E-02 | 2.46E-02 | 2.32E-02 | 3.10E-02 | 3.63E-02 |
| 6D | prom. | 1.22E+00 | 1.29E+00 | 9.56E-01 | 8.90E-01 | 9.11E-01 | 9.24E-01 | 1.31E+00 | 1.25E+00 |
| | var. | 8.01E-04 | 4.21E-02 | 3.96E-04 | 6.54E-04 | 4.55E-04 | 5.96E-04 | 9.17E-04 | 5.02E-04 |
| | max. | 1.26E+00 | 1.59E+00 | 9.86E-01 | 9.38E-01 | 9.70E-01 | 9.69E-01 | 1.37E+00 | 1.29E+00 |
| | min. | 1.12E+00 | 7.91E-01 | 8.88E-01 | 8.17E-01 | 8.68E-01 | 8.43E-01 | 1.24E+00 | 1.19E+00 |
| | desv.est. | 2.83E-02 | 2.05E-01 | 1.99E-02 | 2.56E-02 | 2.13E-02 | 2.44E-02 | 3.03E-02 | 2.24E-02 |
| 7D | prom. | 2.28E+00 | 6.39E-01 | 1.13E+00 | 1.01E+00 | 9.06E-01 | 8.92E-01 | 3.85E+00 | 2.79E+00 |
| | var. | 2.51E-01 | 1.11E-04 | 1.91E-04 | 1.24E-03 | 4.64E-02 | 4.50E-02 | 9.32E-02 | 3.69E-01 |
| | max. | 3.00E+00 | 6.65E-01 | 1.15E+00 | 1.15E+00 | 1.88E+00 | 1.86E+00 | 4.40E+00 | 3.88E+00 |
| | min. | 1.35E+00 | 6.16E-01 | 1.09E+00 | 9.79E-01 | 7.58E-01 | 7.69E-01 | 2.77E+00 | 1.39E+00 |
| | desv.est. | 5.01E-01 | 1.05E-02 | 1.38E-02 | 3.52E-02 | 2.15E-01 | 2.12E-01 | 3.05E-01 | 6.07E-01 |
| 8D | prom. | 1.94E+00 | 1.03E+00 | 1.26E+00 | 1.17E+00 | 9.16E-01 | 9.01E-01 | 4.17E+00 | 2.15E+00 |
| | var. | 2.43E-02 | 2.87E-03 | 1.23E-04 | 9.01E-03 | 3.34E-04 | 3.11E-04 | 2.38E-01 | 1.12E-01 |
| | max. | 2.20E+00 | 1.20E+00 | 1.29E+00 | 1.61E+00 | 9.50E-01 | 9.49E-01 | 5.25E+00 | 3.74E+00 |
| | min. | 1.57E+00 | 9.33E-01 | 1.23E+00 | 1.11E+00 | 8.69E-01 | 8.66E-01 | 3.21E+00 | 1.52E+00 |
| | desv.est. | 1.56E-01 | 5.36E-02 | 1.11E-02 | 9.49E-02 | 1.83E-02 | 1.76E-02 | 4.88E-01 | 3.35E-01 |
| 9D | prom. | 2.01E+00 | 1.09E+00 | 1.36E+00 | 1.21E+00 | 1.10E+00 | 1.06E+00 | 5.35E+00 | 2.28E+00 |
| | var. | 3.65E-02 | 6.92E-04 | 3.71E-05 | 2.39E-03 | 3.51E-04 | 2.44E-04 | 1.67E-01 | 2.95E-01 |
| | max. | 2.28E+00 | 1.16E+00 | 1.38E+00 | 1.47E+00 | 1.14E+00 | 1.10E+00 | 6.06E+00 | 5.21E+00 |
| | min. | 1.53E+00 | 1.05E+00 | 1.34E+00 | 1.17E+00 | 1.06E+00 | 1.04E+00 | 4.51E+00 | 1.72E+00 |
| | desv.est. | 1.91E-01 | 2.63E-02 | 6.09E-03 | 4.89E-02 | 1.87E-02 | 1.56E-02 | 4.09E-01 | 5.43E-01 |
| 10D | prom. | 2.55E+00 | 1.21E+00 | 1.43E+00 | 1.29E+00 | 1.16E+00 | 1.15E+00 | 6.95E+00 | 4.00E+00 |
| | var. | 5.17E-01 | 5.60E-04 | 1.47E-05 | 9.52E-05 | 1.69E-04 | 1.14E-04 | 1.71E-01 | 3.23E+00 |
| | max. | 6.04E+00 | 1.26E+00 | 1.43E+00 | 1.31E+00 | 1.20E+00 | 1.18E+00 | 7.94E+00 | 7.13E+00 |
| | min. | 1.89E+00 | 1.17E+00 | 1.41E+00 | 1.27E+00 | 1.14E+00 | 1.13E+00 | 6.16E+00 | 1.61E+00 |
| | desv.est. | 7.19E-01 | 2.37E-02 | 3.84E-03 | 9.76E-03 | 1.30E-02 | 1.07E-02 | 4.13E-01 | 1.80E+00 |

Tabla B.30: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG7.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 1.26E-01 | 7.25E-02 | 1.29E-01 | 1.60E-01 | 1.57E-01 | 1.54E-01 | 1.66E-01 | 1.24E-01 |
| | var. | 3.73E-06 | 1.05E-06 | 2.53E-05 | 4.29E-05 | 2.99E-05 | 4.38E-05 | 4.40E-05 | 1.27E-05 |
| | max. | 1.30E-01 | 7.49E-02 | 1.41E-01 | 1.73E-01 | 1.68E-01 | 1.69E-01 | 1.84E-01 | 1.33E-01 |
| | min. | 1.17E-01 | 7.05E-02 | 1.18E-01 | 1.42E-01 | 1.41E-01 | 1.42E-01 | 1.56E-01 | 1.15E-01 |
| | desv.est. | 1.93E-03 | 1.02E-03 | 5.03E-03 | 6.55E-03 | 5.47E-03 | 6.62E-03 | 6.63E-03 | 3.57E-03 |
| 4D | prom. | 4.86E-01 | 1.94E-01 | 3.63E-01 | 5.01E-01 | 4.94E-01 | 4.88E-01 | 6.07E-01 | 4.93E-01 |
| | var. | 7.91E-05 | 7.16E-06 | 1.64E-04 | 1.01E-03 | 8.52E-04 | 7.85E-04 | 5.01E-04 | 1.04E-04 |
| | max. | 4.99E-01 | 2.05E-01 | 3.99E-01 | 5.68E-01 | 5.44E-01 | 5.69E-01 | 6.53E-01 | 5.07E-01 |
| | min. | 4.54E-01 | 1.90E-01 | 3.30E-01 | 4.35E-01 | 4.26E-01 | 4.33E-01 | 5.65E-01 | 4.58E-01 |
| | desv.est. | 8.89E-03 | 2.68E-03 | 1.28E-02 | 3.17E-02 | 2.92E-02 | 2.80E-02 | 2.24E-02 | 1.02E-02 |
| 5D | prom. | 8.11E-01 | 5.34E-01 | 6.43E-01 | 8.01E-01 | 7.82E-01 | 7.70E-01 | 9.37E-01 | 8.20E-01 |
| | var. | 9.44E-04 | 5.89E-04 | 3.30E-04 | 3.64E-04 | 3.03E-04 | 2.50E-04 | 1.22E-03 | 9.59E-04 |
| | max. | 8.71E-01 | 6.23E-01 | 6.74E-01 | 8.40E-01 | 8.30E-01 | 8.04E-01 | 1.01E+00 | 8.80E-01 |
| | min. | 7.37E-01 | 4.92E-01 | 6.03E-01 | 7.45E-01 | 7.41E-01 | 7.37E-01 | 8.48E-01 | 7.30E-01 |
| | desv.est. | 3.07E-02 | 2.43E-02 | 1.82E-02 | 1.91E-02 | 1.74E-02 | 1.58E-02 | 3.49E-02 | 3.10E-02 |
| 6D | prom. | 1.18E+00 | 1.20E+00 | 8.99E-01 | 1.07E+00 | 1.04E+00 | 1.03E+00 | 1.32E+00 | 1.19E+00 |
| | var. | 6.45E-04 | 3.00E-02 | 1.17E-03 | 5.24E-04 | 4.27E-04 | 4.88E-04 | 1.22E-03 | 1.03E-03 |
| | max. | 1.23E+00 | 1.51E+00 | 1.02E+00 | 1.12E+00 | 1.10E+00 | 1.07E+00 | 1.42E+00 | 1.24E+00 |
| | min. | 1.12E+00 | 8.24E-01 | 8.30E-01 | 1.01E+00 | 9.99E-01 | 9.77E-01 | 1.24E+00 | 1.12E+00 |
| | desv.est. | 2.54E-02 | 1.73E-01 | 3.42E-02 | 2.29E-02 | 2.07E-02 | 2.21E-02 | 3.49E-02 | 3.22E-02 |
| 7D | prom. | 1.45E+00 | 5.77E-01 | 1.12E+00 | 1.66E+00 | 1.74E+00 | 1.70E+00 | 3.96E+00 | 1.61E+00 |
| | var. | 6.82E-02 | 2.45E-05 | 3.17E-03 | 2.93E-02 | 6.31E-02 | 4.97E-02 | 1.33E-01 | 2.56E-01 |
| | max. | 2.66E+00 | 5.93E-01 | 1.30E+00 | 2.00E+00 | 2.30E+00 | 2.37E+00 | 5.10E+00 | 3.58E+00 |
| | min. | 1.17E+00 | 5.68E-01 | 1.05E+00 | 1.27E+00 | 1.28E+00 | 1.32E+00 | 2.57E+00 | 1.19E+00 |
| | desv.est. | 2.61E-01 | 4.95E-03 | 5.63E-02 | 1.71E-01 | 2.51E-01 | 2.23E-01 | 3.64E-01 | 5.06E-01 |
| 8D | prom. | 1.85E+00 | 9.71E-01 | 1.26E+00 | 2.01E+00 | 1.25E+00 | 1.20E+00 | 4.52E+00 | 1.97E+00 |
| | var. | 4.46E-02 | 2.89E-03 | 4.51E-03 | 2.44E-02 | 4.40E-03 | 1.65E-03 | 1.41E-01 | 7.57E-02 |
| | max. | 2.14E+00 | 1.12E+00 | 1.62E+00 | 2.41E+00 | 1.47E+00 | 1.32E+00 | 5.38E+00 | 3.36E+00 |
| | min. | 1.31E+00 | 8.81E-01 | 1.21E+00 | 1.64E+00 | 1.15E+00 | 1.12E+00 | 3.65E+00 | 1.45E+00 |
| | desv.est. | 2.11E-01 | 5.37E-02 | 6.72E-02 | 1.56E-01 | 6.63E-02 | 4.06E-02 | 3.76E-01 | 2.75E-01 |
| 9D | prom. | 1.87E+00 | 1.03E+00 | 1.54E+00 | 2.02E+00 | 1.50E+00 | 1.42E+00 | 5.70E+00 | 2.28E+00 |
| | var. | 8.32E-02 | 9.36E-04 | 2.17E-02 | 1.74E-02 | 6.99E-03 | 3.41E-03 | 1.18E-01 | 5.36E-01 |
| | max. | 3.24E+00 | 1.12E+00 | 2.09E+00 | 2.26E+00 | 1.71E+00 | 1.59E+00 | 6.59E+00 | 5.05E+00 |
| | min. | 1.38E+00 | 9.81E-01 | 1.36E+00 | 1.74E+00 | 1.35E+00 | 1.33E+00 | 5.01E+00 | 1.64E+00 |
| | desv.est. | 2.89E-01 | 3.06E-02 | 1.47E-01 | 1.32E-01 | 8.36E-02 | 5.84E-02 | 3.44E-01 | 7.32E-01 |
| 10D | prom. | 2.78E+00 | 1.15E+00 | 1.73E+00 | 2.23E+00 | 1.81E+00 | 1.56E+00 | 7.26E+00 | 3.34E+00 |
| | var. | 1.07E+00 | 5.40E-04 | 4.72E-02 | 1.88E-02 | 1.55E-01 | 1.59E-02 | 9.79E-02 | 2.24E+00 |
| | max. | 5.97E+00 | 1.23E+00 | 2.37E+00 | 2.47E+00 | 3.14E+00 | 2.15E+00 | 7.83E+00 | 6.66E+00 |
| | min. | 1.57E+00 | 1.11E+00 | 1.50E+00 | 1.83E+00 | 1.40E+00 | 1.38E+00 | 6.54E+00 | 1.77E+00 |
| | desv.est. | 1.03E+00 | 2.32E-02 | 2.17E-01 | 1.37E-01 | 3.94E-01 | 1.26E-01 | 3.13E-01 | 1.50E+00 |

Tabla B.31: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG8.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMD _x |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|
| 3D | prom. | 1.72E-01 | 1.43E-01 | 2.24E-01 | 2.82E-01 | 2.79E-01 | 2.74E-01 | 2.43E-01 | 1.82E-01 |
| | var. | 1.35E-05 | 1.05E-05 | 5.14E-05 | 1.86E-04 | 2.84E-04 | 1.62E-04 | 3.89E-04 | 4.92E-05 |
| | max. | 1.84E-01 | 1.53E-01 | 2.37E-01 | 3.24E-01 | 3.23E-01 | 3.04E-01 | 3.02E-01 | 2.07E-01 |
| | min. | 1.65E-01 | 1.36E-01 | 2.09E-01 | 2.58E-01 | 2.44E-01 | 2.44E-01 | 2.16E-01 | 1.69E-01 |
| | desv.est. | 3.67E-03 | 3.24E-03 | 7.17E-03 | 1.36E-02 | 1.69E-02 | 1.27E-02 | 1.97E-02 | 7.01E-03 |
| 4D | prom. | 5.57E-01 | 2.86E-01 | 5.08E-01 | 7.02E-01 | 6.71E-01 | 6.92E-01 | 7.85E-01 | 5.64E-01 |
| | var. | 4.82E-05 | 1.32E-05 | 3.28E-04 | 7.09E-04 | 6.31E-04 | 7.79E-04 | 3.34E-03 | 1.65E-04 |
| | max. | 5.73E-01 | 2.95E-01 | 5.46E-01 | 7.72E-01 | 7.21E-01 | 7.47E-01 | 9.17E-01 | 5.96E-01 |
| | min. | 5.35E-01 | 2.77E-01 | 4.65E-01 | 6.39E-01 | 6.23E-01 | 6.38E-01 | 6.62E-01 | 5.39E-01 |
| | desv.est. | 6.94E-03 | 3.63E-03 | 1.81E-02 | 2.66E-02 | 2.51E-02 | 2.79E-02 | 5.78E-02 | 1.29E-02 |
| 5D | prom. | 9.31E-01 | 6.01E-01 | 8.25E-01 | 9.96E-01 | 9.73E-01 | 9.68E-01 | 1.21E+00 | 9.63E-01 |
| | var. | 2.99E-03 | 1.26E-04 | 7.71E-04 | 1.03E-03 | 7.72E-04 | 1.04E-03 | 1.24E-02 | 3.49E-03 |
| | max. | 1.13E+00 | 6.40E-01 | 8.80E-01 | 1.07E+00 | 1.05E+00 | 1.07E+00 | 1.44E+00 | 1.18E+00 |
| | min. | 8.41E-01 | 5.83E-01 | 7.75E-01 | 9.36E-01 | 9.13E-01 | 9.01E-01 | 1.04E+00 | 8.45E-01 |
| | desv.est. | 5.47E-02 | 1.12E-02 | 2.78E-02 | 3.21E-02 | 2.78E-02 | 3.23E-02 | 1.11E-01 | 5.91E-02 |
| 6D | prom. | 1.40E+00 | 1.20E+00 | 1.13E+00 | 1.32E+00 | 1.31E+00 | 1.30E+00 | 1.79E+00 | 1.53E+00 |
| | var. | 6.06E-03 | 1.70E-02 | 1.05E-03 | 9.23E-04 | 1.08E-03 | 1.15E-03 | 2.68E-02 | 2.09E-02 |
| | max. | 1.76E+00 | 1.49E+00 | 1.19E+00 | 1.40E+00 | 1.37E+00 | 1.36E+00 | 2.05E+00 | 1.91E+00 |
| | min. | 1.28E+00 | 9.47E-01 | 1.05E+00 | 1.24E+00 | 1.25E+00 | 1.23E+00 | 1.50E+00 | 1.38E+00 |
| | desv.est. | 7.78E-02 | 1.30E-01 | 3.24E-02 | 3.04E-02 | 3.28E-02 | 3.39E-02 | 1.64E-01 | 1.45E-01 |
| 7D | prom. | 2.99E+00 | 8.06E-01 | 1.43E+00 | 2.18E+00 | 2.12E+00 | 2.04E+00 | 4.02E+00 | 3.07E+00 |
| | var. | 2.78E-02 | 4.03E-05 | 2.55E-03 | 3.04E-02 | 1.12E-01 | 2.10E-02 | 1.02E-01 | 9.20E-02 |
| | max. | 3.70E+00 | 8.20E-01 | 1.58E+00 | 2.77E+00 | 3.18E+00 | 2.54E+00 | 4.72E+00 | 3.86E+00 |
| | min. | 2.71E+00 | 7.94E-01 | 1.35E+00 | 1.92E+00 | 1.76E+00 | 1.85E+00 | 3.11E+00 | 2.43E+00 |
| | desv.est. | 1.67E-01 | 6.34E-03 | 5.05E-02 | 1.74E-01 | 3.35E-01 | 1.45E-01 | 3.19E-01 | 3.03E-01 |
| 8D | prom. | 3.65E+00 | 1.38E+00 | 1.69E+00 | 2.42E+00 | 1.76E+00 | 1.70E+00 | 4.98E+00 | 3.89E+00 |
| | var. | 1.10E-01 | 5.73E-04 | 1.35E-02 | 2.99E-02 | 1.11E-02 | 5.06E-03 | 8.28E-02 | 2.43E-01 |
| | max. | 4.21E+00 | 1.43E+00 | 1.95E+00 | 2.99E+00 | 2.18E+00 | 1.84E+00 | 5.60E+00 | 4.90E+00 |
| | min. | 3.06E+00 | 1.33E+00 | 1.53E+00 | 1.97E+00 | 1.60E+00 | 1.55E+00 | 4.44E+00 | 2.90E+00 |
| | desv.est. | 3.31E-01 | 2.39E-02 | 1.16E-01 | 1.73E-01 | 1.05E-01 | 7.11E-02 | 2.88E-01 | 4.93E-01 |
| 9D | prom. | 4.61E+00 | 1.43E+00 | 2.04E+00 | 2.47E+00 | 2.18E+00 | 1.94E+00 | 6.07E+00 | 4.99E+00 |
| | var. | 6.59E-02 | 1.05E-02 | 1.82E-02 | 2.17E-02 | 1.41E-01 | 5.60E-03 | 1.48E-01 | 1.64E-01 |
| | max. | 5.38E+00 | 2.12E+00 | 2.29E+00 | 2.82E+00 | 3.13E+00 | 2.06E+00 | 6.73E+00 | 5.84E+00 |
| | min. | 3.91E+00 | 1.37E+00 | 1.78E+00 | 2.22E+00 | 1.85E+00 | 1.75E+00 | 4.94E+00 | 4.09E+00 |
| | desv.est. | 2.57E-01 | 1.03E-01 | 1.35E-01 | 1.47E-01 | 3.76E-01 | 7.48E-02 | 3.84E-01 | 4.04E-01 |
| 10D | prom. | 6.23E+00 | 1.59E+00 | 2.27E+00 | 2.70E+00 | 2.53E+00 | 2.09E+00 | 7.66E+00 | 6.76E+00 |
| | var. | 9.54E-02 | 2.20E-02 | 1.83E-02 | 2.93E-02 | 3.80E-01 | 6.51E-03 | 2.09E-01 | 2.59E-01 |
| | max. | 7.07E+00 | 2.45E+00 | 2.48E+00 | 3.11E+00 | 4.98E+00 | 2.27E+00 | 8.60E+00 | 7.91E+00 |
| | min. | 5.64E+00 | 1.53E+00 | 1.99E+00 | 2.36E+00 | 1.98E+00 | 1.94E+00 | 6.73E+00 | 5.78E+00 |
| | desv.est. | 3.09E-01 | 1.48E-01 | 1.35E-01 | 1.71E-01 | 6.17E-01 | 8.07E-02 | 4.57E-01 | 5.09E-01 |

Tabla B.32: Comparación de los valores de IGD+ obtenidos por varios optimizadores para el problema WFG9.

| Dim. | Est. | MOEAD-DE | NSGA-III | HEIA | MOIA-DCSS | VD-MOIA | BCD-MOIA | SIAMD | SIAMDx |
|------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3D | prom. | 1.59E-01 | 1.15E-01 | 1.95E-01 | 1.95E-01 | 2.03E-01 | 1.87E-01 | 2.03E-01 | 1.80E-01 |
| | var. | 5.83E-04 | 9.76E-05 | 2.75E-04 | 2.35E-04 | 1.99E-04 | 7.01E-04 | 4.43E-04 | 6.81E-04 |
| | max. | 2.14E-01 | 1.67E-01 | 2.19E-01 | 2.06E-01 | 2.15E-01 | 2.14E-01 | 2.24E-01 | 2.15E-01 |
| | min. | 1.38E-01 | 1.03E-01 | 1.51E-01 | 1.47E-01 | 1.44E-01 | 1.44E-01 | 1.49E-01 | 1.44E-01 |
| | desv.est. | 2.41E-02 | 9.88E-03 | 1.66E-02 | 1.53E-02 | 1.41E-02 | 2.65E-02 | 2.11E-02 | 2.61E-02 |
| 4D | prom. | 5.04E-01 | 2.72E-01 | 4.88E-01 | 5.06E-01 | 4.89E-01 | 4.97E-01 | 6.60E-01 | 5.29E-01 |
| | var. | 8.25E-04 | 3.35E-04 | 1.51E-03 | 7.55E-04 | 1.26E-03 | 1.23E-03 | 1.08E-02 | 8.47E-04 |
| | max. | 5.68E-01 | 3.18E-01 | 5.76E-01 | 5.67E-01 | 5.56E-01 | 5.51E-01 | 8.65E-01 | 5.87E-01 |
| | min. | 4.39E-01 | 2.45E-01 | 3.86E-01 | 4.41E-01 | 3.88E-01 | 3.78E-01 | 5.05E-01 | 4.69E-01 |
| | desv.est. | 2.87E-02 | 1.83E-02 | 3.89E-02 | 2.75E-02 | 3.55E-02 | 3.51E-02 | 1.04E-01 | 2.91E-02 |
| 5D | prom. | 7.79E-01 | 6.50E-01 | 9.55E-01 | 6.95E-01 | 6.83E-01 | 6.86E-01 | 9.53E-01 | 8.54E-01 |
| | var. | 2.26E-03 | 4.23E-03 | 1.19E-02 | 3.60E-04 | 3.89E-04 | 3.36E-04 | 6.45E-03 | 1.07E-02 |
| | max. | 8.57E-01 | 8.84E-01 | 1.23E+00 | 7.40E-01 | 7.25E-01 | 7.18E-01 | 1.22E+00 | 1.45E+00 |
| | min. | 6.16E-01 | 5.41E-01 | 7.81E-01 | 6.69E-01 | 6.34E-01 | 6.43E-01 | 8.30E-01 | 6.88E-01 |
| | desv.est. | 4.75E-02 | 6.50E-02 | 1.09E-01 | 1.90E-02 | 1.97E-02 | 1.83E-02 | 8.03E-02 | 1.03E-01 |
| 6D | prom. | 1.15E+00 | 1.26E+00 | 1.60E+00 | 9.41E-01 | 9.11E-01 | 9.22E-01 | 1.36E+00 | 1.24E+00 |
| | var. | 1.41E-03 | 5.49E-02 | 2.05E-02 | 4.99E-04 | 5.17E-04 | 4.62E-04 | 1.50E-02 | 6.56E-03 |
| | max. | 1.26E+00 | 1.64E+00 | 1.84E+00 | 1.01E+00 | 9.66E-01 | 9.74E-01 | 1.89E+00 | 1.67E+00 |
| | min. | 1.08E+00 | 9.55E-01 | 1.33E+00 | 8.88E-01 | 8.61E-01 | 8.75E-01 | 1.19E+00 | 1.14E+00 |
| | desv.est. | 3.76E-02 | 2.34E-01 | 1.43E-01 | 2.23E-02 | 2.27E-02 | 2.15E-02 | 1.22E-01 | 8.10E-02 |
| 7D | prom. | 2.50E+00 | 7.41E-01 | 2.23E+00 | 1.64E+00 | 1.48E+00 | 1.49E+00 | 3.85E+00 | 2.75E+00 |
| | var. | 2.81E-01 | 5.57E-04 | 2.20E-02 | 6.04E-02 | 4.12E-02 | 4.10E-02 | 2.76E-01 | 2.04E-01 |
| | max. | 3.03E+00 | 8.11E-01 | 2.42E+00 | 2.33E+00 | 2.02E+00 | 2.11E+00 | 4.80E+00 | 3.96E+00 |
| | min. | 1.28E+00 | 7.01E-01 | 1.77E+00 | 1.22E+00 | 1.08E+00 | 1.15E+00 | 2.02E+00 | 1.57E+00 |
| | desv.est. | 5.31E-01 | 2.36E-02 | 1.48E-01 | 2.46E-01 | 2.03E-01 | 2.02E-01 | 5.25E-01 | 4.52E-01 |
| 8D | prom. | 1.83E+00 | 1.17E+00 | 2.81E+00 | 1.78E+00 | 1.16E+00 | 1.13E+00 | 4.32E+00 | 2.25E+00 |
| | var. | 2.29E-01 | 3.87E-03 | 1.27E-02 | 6.63E-02 | 1.43E-02 | 1.37E-02 | 4.84E-01 | 8.22E-01 |
| | max. | 4.65E+00 | 1.30E+00 | 3.01E+00 | 2.37E+00 | 1.66E+00 | 1.49E+00 | 5.54E+00 | 4.85E+00 |
| | min. | 1.37E+00 | 1.05E+00 | 2.48E+00 | 1.37E+00 | 9.79E-01 | 9.55E-01 | 2.66E+00 | 1.54E+00 |
| | desv.est. | 4.79E-01 | 6.22E-02 | 1.13E-01 | 2.57E-01 | 1.19E-01 | 1.17E-01 | 6.96E-01 | 9.06E-01 |
| 9D | prom. | 1.92E+00 | 1.21E+00 | 2.92E+00 | 1.68E+00 | 1.44E+00 | 1.33E+00 | 5.48E+00 | 3.15E+00 |
| | var. | 3.98E-01 | 1.80E-03 | 5.66E-03 | 2.04E-02 | 1.77E-02 | 1.14E-02 | 2.96E-01 | 2.87E+00 |
| | max. | 5.71E+00 | 1.30E+00 | 3.09E+00 | 1.96E+00 | 1.79E+00 | 1.57E+00 | 6.59E+00 | 6.85E+00 |
| | min. | 1.46E+00 | 1.14E+00 | 2.72E+00 | 1.36E+00 | 1.15E+00 | 1.15E+00 | 4.21E+00 | 1.54E+00 |
| | desv.est. | 6.31E-01 | 4.24E-02 | 7.52E-02 | 1.43E-01 | 1.33E-01 | 1.07E-01 | 5.44E-01 | 1.70E+00 |
| 10D | prom. | 2.30E+00 | 1.34E+00 | 3.30E+00 | 1.85E+00 | 1.68E+00 | 1.60E+00 | 6.87E+00 | 4.89E+00 |
| | var. | 1.18E+00 | 8.87E-04 | 1.13E-02 | 2.61E-02 | 3.93E-02 | 2.82E-02 | 7.86E-01 | 3.91E+00 |
| | max. | 7.54E+00 | 1.40E+00 | 3.45E+00 | 2.27E+00 | 2.27E+00 | 2.18E+00 | 8.46E+00 | 7.78E+00 |
| | min. | 1.52E+00 | 1.26E+00 | 2.99E+00 | 1.54E+00 | 1.40E+00 | 1.38E+00 | 3.53E+00 | 1.66E+00 |
| | desv.est. | 1.09E+00 | 2.98E-02 | 1.07E-01 | 1.62E-01 | 1.98E-01 | 1.68E-01 | 8.86E-01 | 1.98E+00 |

Bibliografía

- [1] Carlos A. Coello Coello, Gary B. Lamont, and David A. Van Veldhuizen. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Springer, New York, second edition, September 2007. ISBN 978-0-387-33254-3.
- [2] Kaisa Miettinen. *Nonlinear multiobjective optimization*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [3] Qingfu Zhang and Hui Li. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 11(6):712–731, 2007.
- [4] Kalyanmoy Deb, Amrit Pratap, Sameer Agarwal, and T. Meyarivan. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197, April 2002.
- [5] Hisao Ishibuchi, Noritaka Tsukamoto, and Yusuke Nojima. Evolutionary many-objective optimization: A short review. In *2008 Congress on Evolutionary Computation (CEC'2008)*, pages 2424–2431, Hong Kong, June 2008. IEEE Service Center.
- [6] M. Farina and P. Amato. On the Optimal Solution Definition for Many-criteria Optimization Problems. In *Proceedings of the NAFIPS-FLINT International Conference'2002*, pages 233–238, Piscataway, New Jersey, June 2002. IEEE Service Center.
- [7] Xiaofang Guo. A survey of decomposition based evolutionary algorithms for many-objective optimization problems. *IEEE Access*, 10:72825–72838, 2022.
- [8] Eckart Zitzler, Simon Künzli, et al. Indicator-based selection in multiobjective search. In *PPSN*, volume 4, pages 832–842. Springer, 2004.
- [9] Leandro Nunes De Castro and Jonathan Timmis. *Artificial immune systems: a new computational approach*. Springer London, 2002.
- [10] Lingjie Li, Qiuzhen Lin, and Zhong Ming. A survey of artificial immune algorithms for multi-objective optimization. *Neurocomputing*, 489:211–229, 2022.

-
- [11] Carlos A. Coello Coello and Nareli Cruz Cortés. Solving Multiobjective Optimization Problems using an Artificial Immune System. *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 6(2):163–190, June 2005.
- [12] Thomas Pierrard and Carlos A. Coello Coello. A Multi-Objective Artificial Immune System Based on Hypervolume. In Carlos A. Coello Coello, Julie Greensmith, Natalio Krasnogor, Pietro Liò, Giuseppe Nicosia, and Mario Pavone, editors, *Artificial Immune Systems, 11th International Conference, ICARIS 2012*, pages 14–27. Springer. Lecture Notes in Computer Science Vol. 7597, Taormina, Italy, August 28-31 2012. ISBN 978-3-642-33756-7.
- [13] Jürgen Branke and Kalyanmoy Deb. Integrating User Preferences into Evolutionary Multi-Objective Optimization. In Yaochu Jin, editor, *Knowledge Incorporation in Evolutionary Computation*, pages 461–477. Springer, Berlin Heidelberg, 2005. ISBN 3-540-22902-7.
- [14] Kalyanmoy Deb and Himanshu Jain. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach, Part I: Solving Problems With Box Constraints. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 18(4):577–601, August 2014.
- [15] Eckart Zitzler and Lothar Thiele. Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 3(4):257–271, November 1999.
- [16] Maha Elarbi, Slim Bechikh, Lamjed Ben Said, and Rituparna Datta. Multi-objective Optimization: Classical and Evolutionary Approaches. In Slim Bechikh, Rituparna Datta, and Abhishek Gupta, editors, *Recent Advances in Evolutionary Multi-objective Optimization*, pages 1–30. Springer International Publishing, Switzerland, 2017. ISBN 978-3-319-42977-9.
- [17] Hiroyuki Sato, Hernán E. Aguirre, and Kiyoshi Tanaka. Controlling Dominance Area of Solutions and Its Impact on the Performance of MOEAs. In Shigeru Obayashi, Kalyanmoy Deb, Carlo Poloni, Tomoyuki Hiroyasu, and Tadahiko Murata, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 4th International Conference, EMO 2007*, pages 5–20, Matshushima, Japan, March 2007. Springer. Lecture Notes in Computer Science Vol. 4403.
- [18] David Corne and Joshua Knowles. Techniques for Highly Multiobjective Optimisation: Some Nondominated Points are Better than Others. In Dirk Thierens, editor, *2007 Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO'2007)*, volume 1, pages 773–780, London, UK, July 2007. ACM Press.

- [19] Eckart Zitzler. *Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, Switzerland, November 1999.
- [20] Dimo Brockhoff, Tobias Wagner, and Heike Trautmann. R2 Indicator-Based Multiobjective Search. *Evolutionary Computation*, 23(3):369–395, Fall 2015.
- [21] Yuan-Long Li, Yu-Ren Zhou, Zhi-Hui Zhan, and Jun Zhang. A Primary Theoretical Study on Decomposition-Based Multiobjective Evolutionary Algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 20(4):563–576, August 2016.
- [22] Qian Xu, Zhanqi Xu, and Tao Ma. A survey of multiobjective evolutionary algorithms based on decomposition: variants, challenges and future directions. *IEEE Access*, 8:41588–41614, 2020.
- [23] C. Berek and M. Ziegner. Clonal selection and after. In *Theoretical Immunology*, pages 63–85. A. S. Perelson and G. H. Pimbley Jr., Marcel Dekker Inc., 1978.
- [24] Niels K. Jerne. Towards a network theory of the immune system. *Annals Immunology*, 125:373–389, 1974.
- [25] Dipankar Dasgupta. An overview of artificial immune systems and their applications. *Artificial immune systems and their applications*, pages 3–21, 1999.
- [26] Alan S. Perelson and George F. Oster. Theoretical studies of clonal selection: minimal antibody repertoire size and reliability of self-non-self discrimination. *Journal of theoretical biology*, 81(4):645–670, 1979.
- [27] Leandro Nunes De Castro and Fernando J. Von Zuben. Learning and optimization using the clonal selection principle. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(3):239–251, 2002.
- [28] Leandro Nunes De Castro and Jon Timmis. An artificial immune network for multimodal function optimization. In *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No. 02TH8600)*, volume 1, pages 699–704. IEEE, 2002.
- [29] Leandro Nunes de Castro and Fernando J. Von Zuben. Ainet: an artificial immune network for data analysis. In *Data mining: a heuristic approach*, pages 231–260. IGI Global, 2002.
- [30] Lingjie Li, Qiuzhen Lin, Ke Li, and Zhong Ming. Vertical Distance-Based Clonal Selection Mechanism for the Multiobjective Immune Algorithm. *Swarm and Evolutionary Computation*, 63, June 2021. Article Number: 100886.

-
- [31] Maoguo Gong, Licheng Jiao, Haifeng Du, and Liefeng Bo. Multiobjective immune algorithm with nondominated neighbor-based selection. *Evolutionary Computation*, 16(2):225–255, Summer 2008.
- [32] Ronghua Shang, Licheng Jiao, Fang Liu, and Wenping Ma. A Novel Immune Clonal Algorithm for MO Problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 16(1):35–50, February 2012.
- [33] Qiuzhen Lin, Jianyong Chen, Zhi-Hui Zhan, Wei-Neng Chen, Carlos A. Coello Coello, Yilong Yin, Chih-Min Lin, and Jun Zhang. A Hybrid Evolutionary Immune Algorithm for Multiobjective Optimization Problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 20(5):711–729, October 2016.
- [34] Qiuzhen Lin, Yueping Ma, Jianyong Chen, Qingling Zhu, Carlos A. Coello Coello, Ka-Chun Wong, and Fei Chen. An Adaptive Immune-Inspired Multi-Objective Algorithm with Multiple Differential Evolution Strategies. *Information Sciences*, 430:46–64, March 2018.
- [35] Qiuzhen Lin, Qingling Zhu, Na Wang, Peizhi Huang, Wenjun Wang, Jianyong Chen, and Zhong Ming. A multi-objective immune algorithm with dynamic population strategy. *Swarm and Evolutionary Computation*, 50:100477, 2019.
- [36] Lingjie Li, Qiuzhen Lin, Songbai Liu, Dunwei Gong, Carlos A. Coello Coello, and Zhong Ming. A Novel Multi-Objective Immune Algorithm with a Decomposition-Based Clonal Selection. *Applied Soft Computing*, 81, August 2019. article number: UNSP 105490.
- [37] Lingjie Li, Wu Lin, Qiuzhen Lin, and Zhong Ming. Balancing convergence and diversity in multiobjective immune algorithm. In *2020 12th International Conference on Advanced Computational Intelligence (ICACI)*, pages 102–109. IEEE, 2020.
- [38] Ruochen Liu, Chenlin Ma, Fei He, Wenping Ma, and Licheng Jiao. Reference direction based immune clone algorithm for many-objective optimization. *Frontiers of Computer Science*, 8(4):642–655, August 2014.
- [39] Yuchao Su, Naili Luo, Qiuzhen Lin, and Xia Li. Many-Objective Optimization By Using An Immune Algorithm. *Swarm and Evolutionary Computation*, 69, March 2022. Article Number: 101026.
- [40] Miqing Li, Shengxiang Yang, and Xiaohui Liu. Shift-Based Density Estimation for Pareto-Based Algorithms in Many-Objective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 18(3):348–365, June 2014.
- [41] Kalyanmoy Deb, Mayank Goyal, et al. A combined genetic adaptive search (geneas) for engineering design. *Computer Science and informatics*, 26:30–45, 1996.

- [42] Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Marco Laumanns, and Eckart Zitzler. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization. In *Evolutionary multiobjective optimization: theoretical advances and applications*, pages 105–145. Springer, 2005.
- [43] Simon Huband, Philip Hingston, Luigi Barone, and Lyndon While. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 10(5):477–506, 2006.
- [44] Eckart Zitzler and Lothar Thiele. Multiobjective Optimization Using Evolutionary Algorithms—A Comparative Study. In Agoston Eiben, Thomas Bäck, Marc Schoenauer, and Hans-Paul Schwefel, editors, *Parallel Problem Solving from Nature—PPSN V*, pages 292–301, Amsterdam, The Netherlands, September 27-30 1998. Springer Verlag. Lecture Notes in Computer Science Vol. 1498.
- [45] Hisao Ishibuchi, Hiroyuki Masuda, Yuki Tanigaki, and Yusuke Nojima. Modified Distance Calculation in Generational Distance and Inverted Generational Distance. In António Gaspar-Cunha, Carlos Henggeler Antunes, and Carlos Coello Coello, editors, *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 8th International Conference, EMO 2015*, pages 110–125. Springer. Lecture Notes in Computer Science Vol. 9019, Guimarães, Portugal, March 29 - April 1 2015.
- [46] Jason R. Schott. Fault Tolerant Design Using Single and Multicriteria Genetic Algorithm Optimization. Master’s thesis, Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, May 1995.
- [47] Raquel Hernández Gómez. *Parallel Hyper-Heuristics for Multi-Objective Optimization*. PhD thesis, Ciudad de México MX, 2018.
- [48] Juan J. Durillo and Antonio J. Nebro. jMetal: A Java framework for multi-objective optimization. *Advances in Engineering Software*, 42(10):760–771, October 2011.
- [49] Julian Blank, Kalyanmoy Deb, Yashesh Dhebar, Sunith Bandaru, and Haitham Seada. Generating Well-Spaced Points on a Unit Simplex for Evolutionary Many-Objective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 25(1):48–60, February 2021.
- [50] Himanshu Jain and Kalyanmoy Deb. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, part ii: Handling constraints and extending to an adaptive approach. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 18(4):602–622, 2013.
- [51] Kalyanmoy Deb, Mayank Goyal, et al. A combined genetic adaptive search (geneas) for engineering design. Technical report, 1996.

-
- [52] Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Marco Laumanns, and Eckart Zitzler. Scalable Test Problems for Evolutionary Multiobjective Optimization. In Ajith Abraham, Lakshmi Jain, and Robert Goldberg, editors, *Evolutionary Multiobjective Optimization. Theoretical Advances and Applications*, pages 105–145, USA, 2005. Springer.