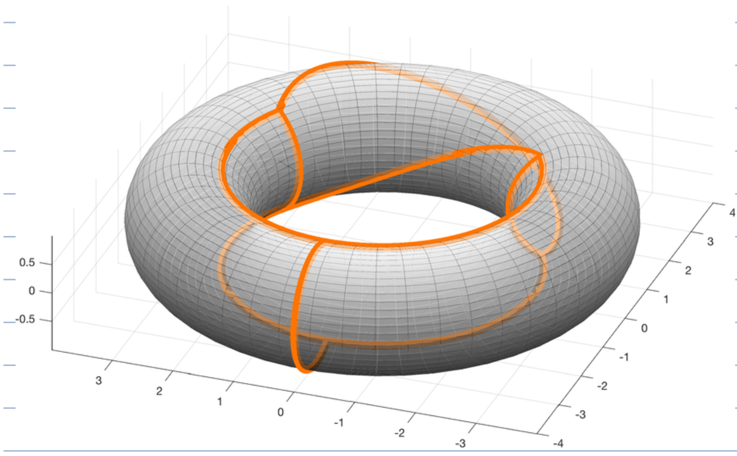
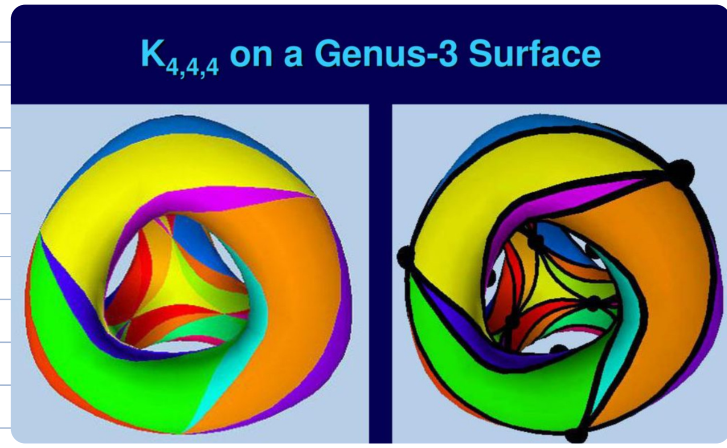
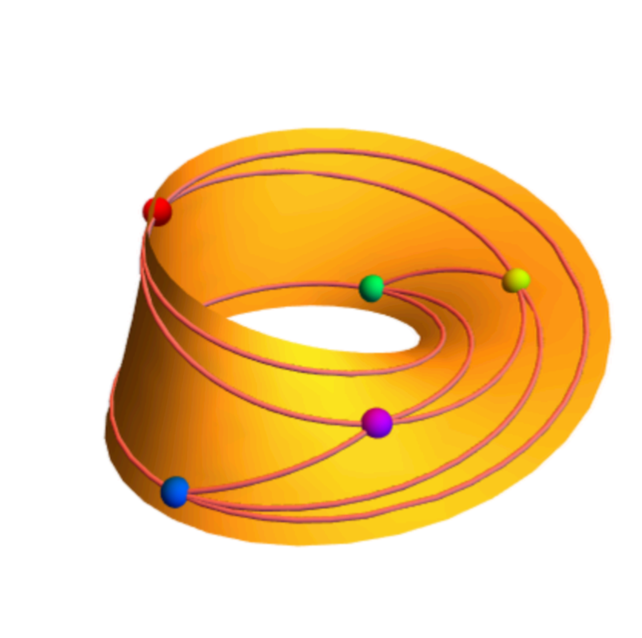
Hoy:

- Gráficos planos.

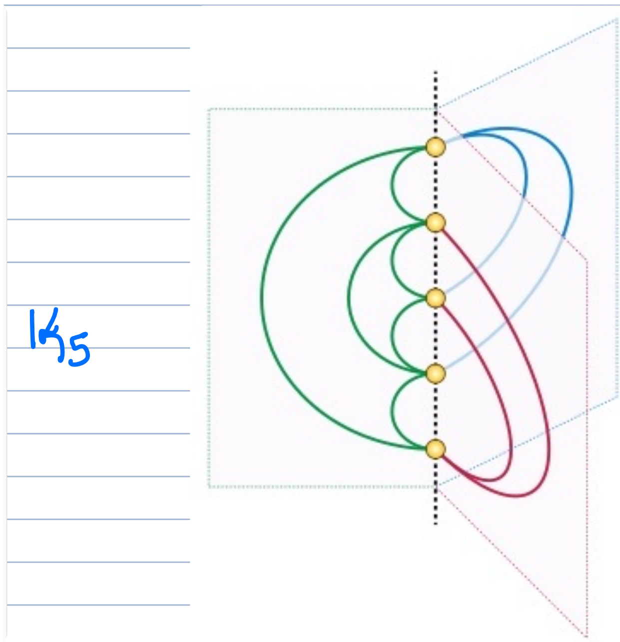
K_{33}

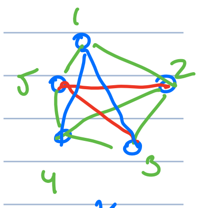




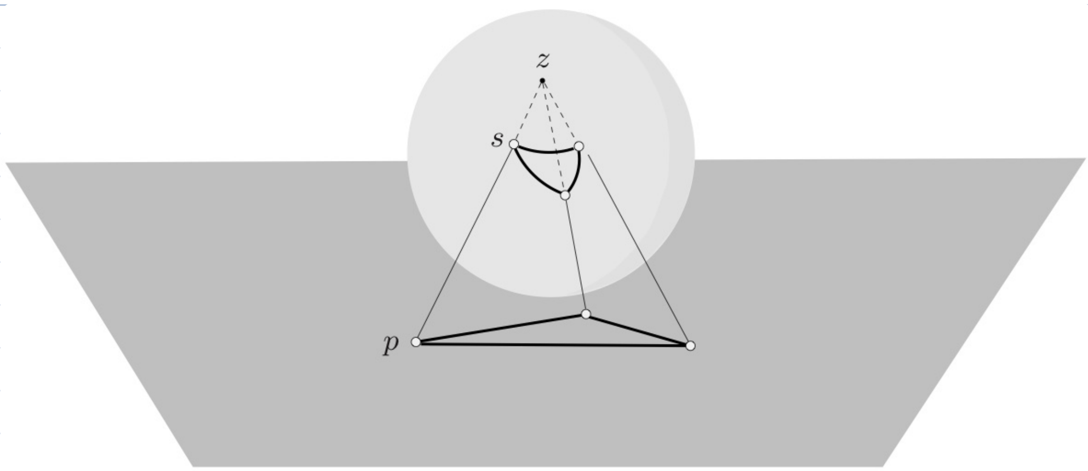


K_5





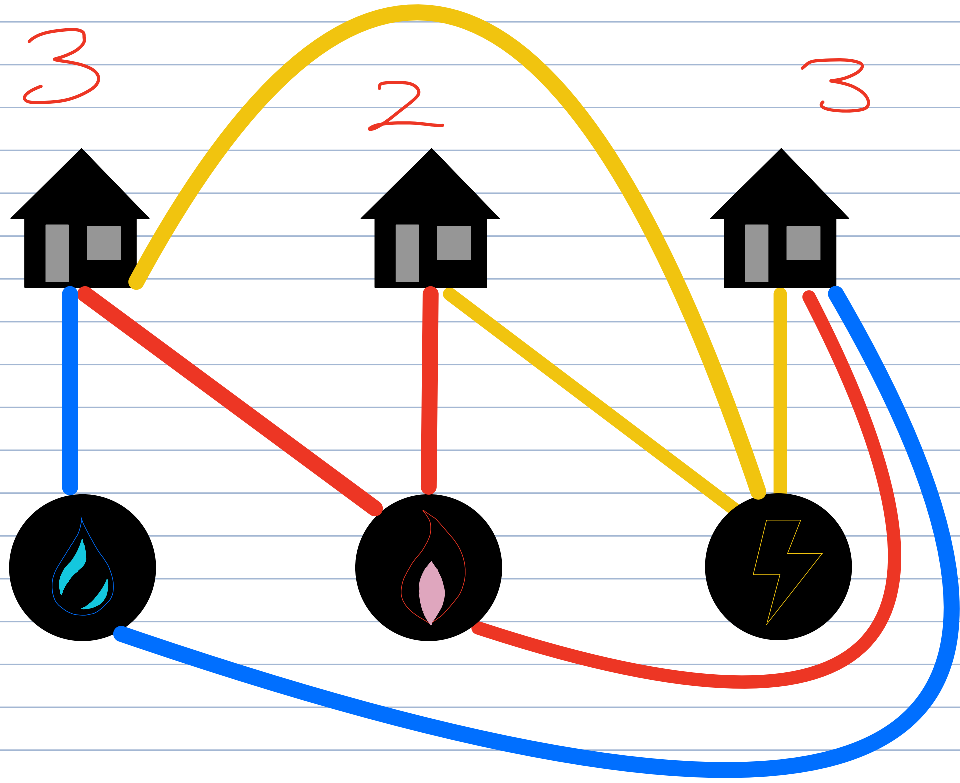
K_5



K_3

El problema de los tres servicios.

Dadas tres casas y tres servicios se desea conectar a cada casa con cada uno de los servicios, de tal forma que las líneas (curvas o rectas) que se usen para conectarlos no se auto-intersecten.



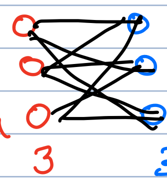
En la gráfica de arriba notamos que es imposible insertar la arista faltante sin generar un cruce.

¿Cómo podemos demostrarlo?

$K_{3,3,3}$ $K_{n,n}$ $V = V_1 \cup V_2$ tq $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ $|V_i| = 3$

Teorema: $K_{3,3}$ no es aplanable.

no la puedo dibujar en el plano sin que haya cruces entre sus aristas

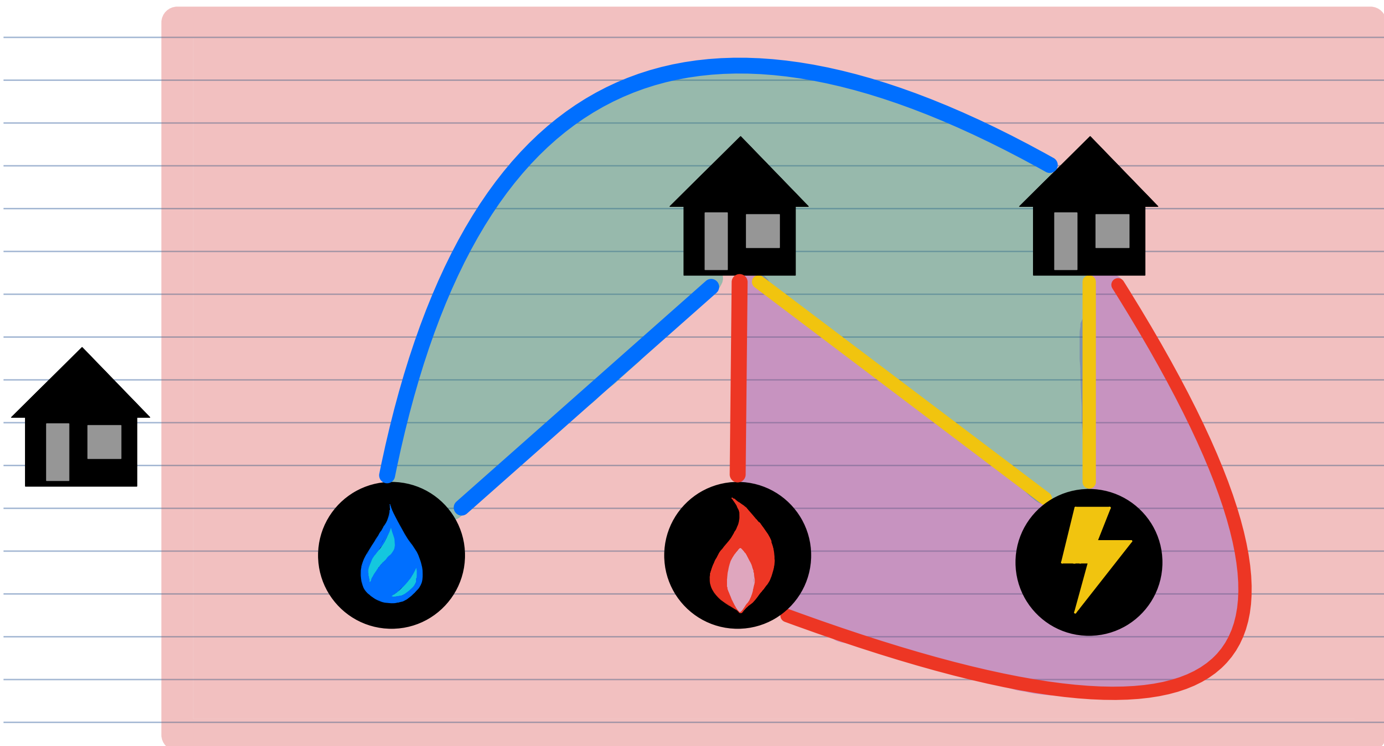


Bipartita

$E = \{(e_1, e_2) \mid e_1 \in V_1, e_2 \in V_2\}$

Demostración:

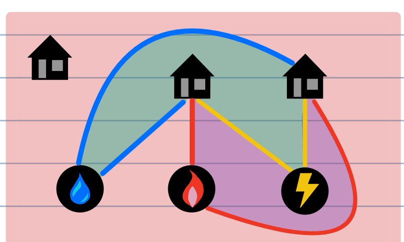
Consideremos la partición del plano generada por el siguiente dibujo de $K_{2,3}$.



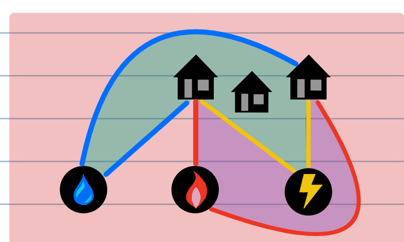
Dicha partición divide al plano en tres regiones, en el dibujo se muestran de tres colores distintos.

Para completar $K_{2,3}$ a $K_{3,3}$ necesitamos agregar la tercera casita, llamemosle C_3.

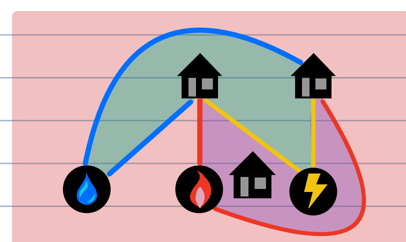
Hay tres opciones para colocar C_3: en la región rosa, morada o verde:



Para conectarla a la electricidad hay que cruzar una arista roja o una arista azul.

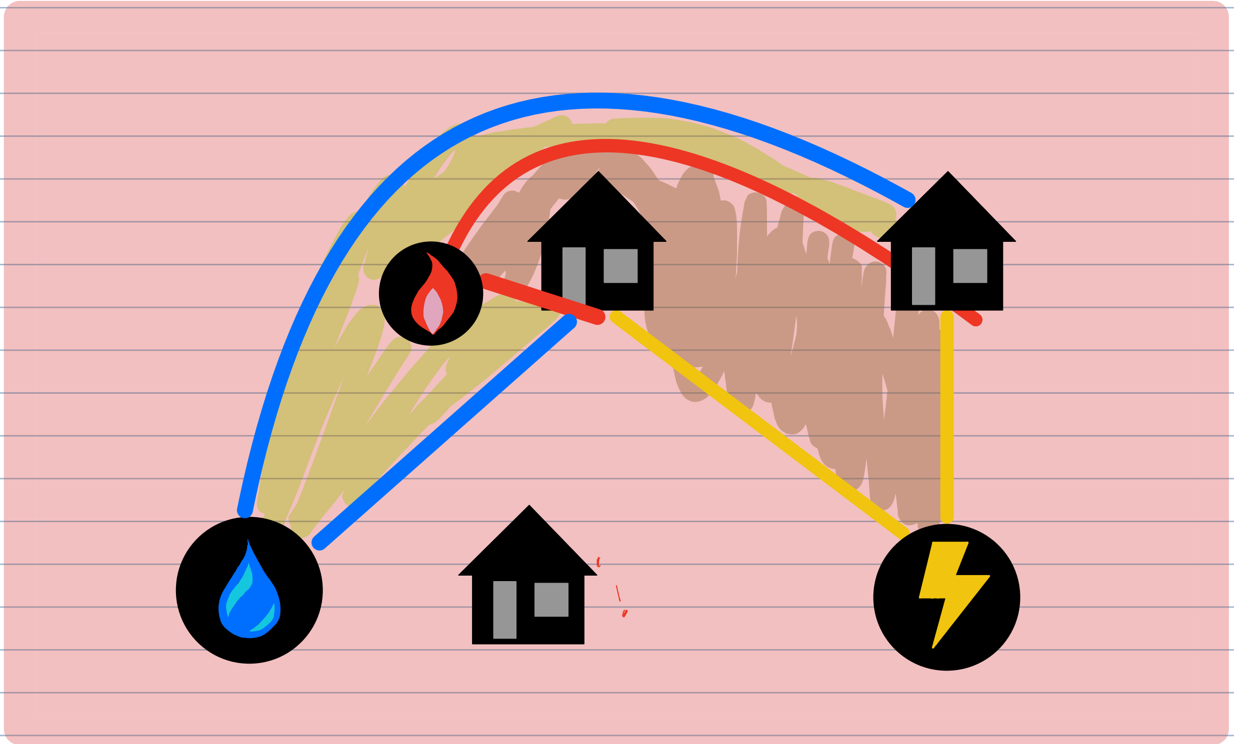


Para conectarla al gas hay que cruzar una arista amarilla o una arista azul.

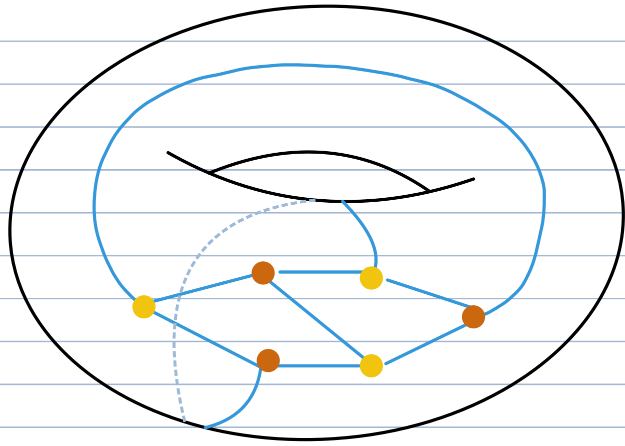


Para conectarla al agua hay que cruzar una arista amarilla o una arista roja.

∎



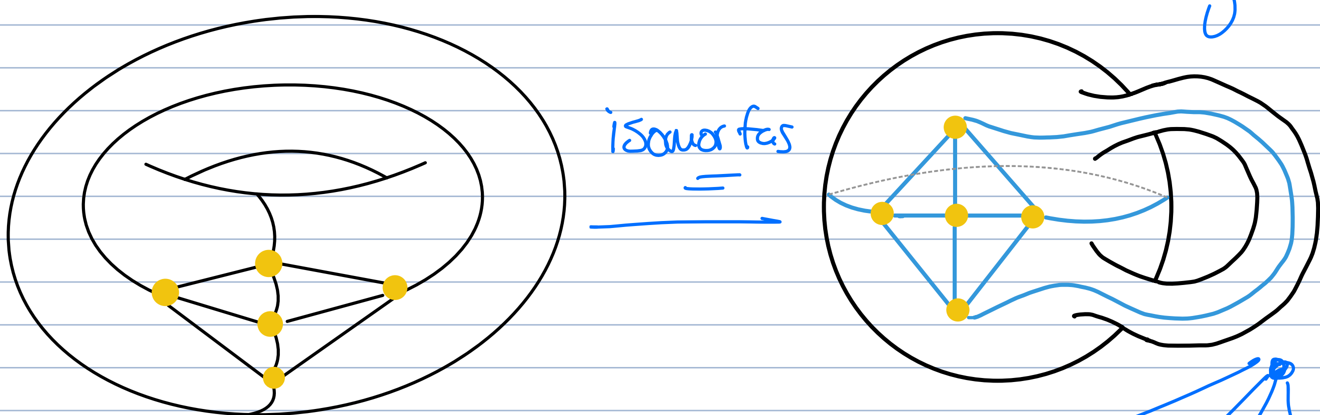
$K_{3,3}$ se puede encajar en el toro.

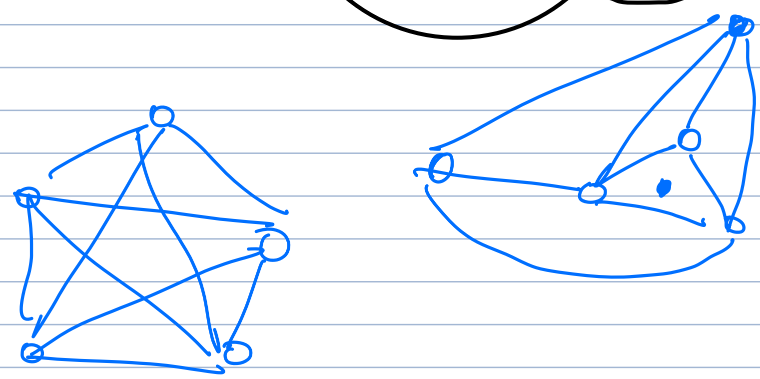


= taza.

K_5 se puede encajar en el toro.

taza.





Encajes en el plano

Definición. Decimos que una gráfica es encajable en el plano, o aplanable (planar) si puede dibujarse en el plano de tal forma que sus aristas únicamente se intersecten en los vértices.

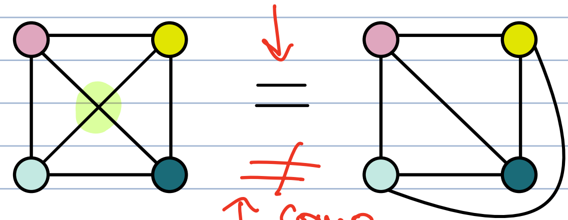
$K_{3,3}$ no es aplanable.
K_5 no es aplanable.

A un dibujo con tales características le llamamos encaje plano.

$G=(V,E) \leftarrow$ gráfica abstracta. K_4 $\quad V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$
$E=\{\{v_i,v_j\} \mid i\neq j\}$.

como gráfica

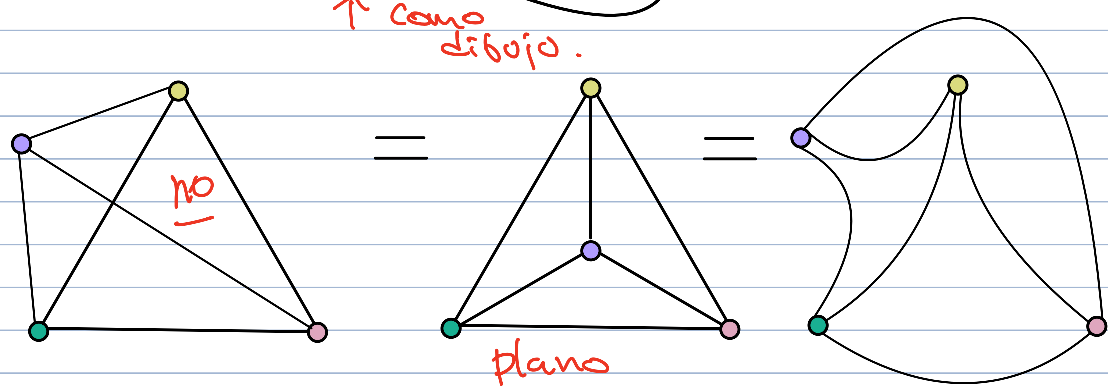
no es un encaje plano



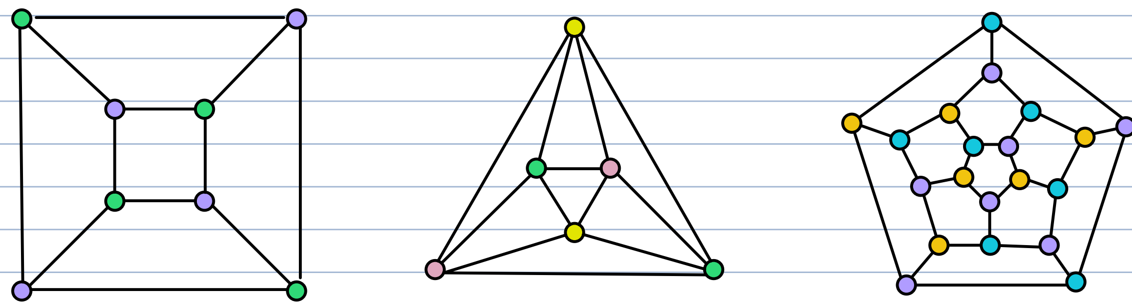
es un encaje plano.

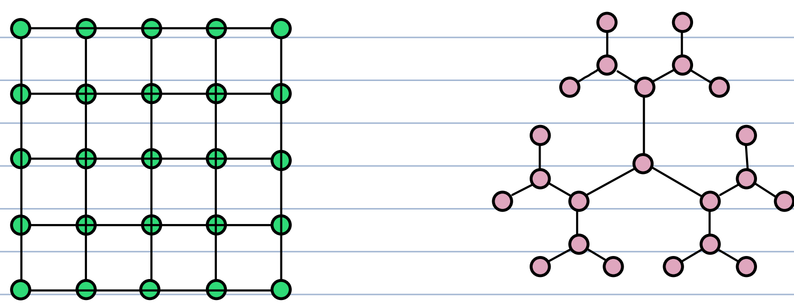
como dibujo.

plano

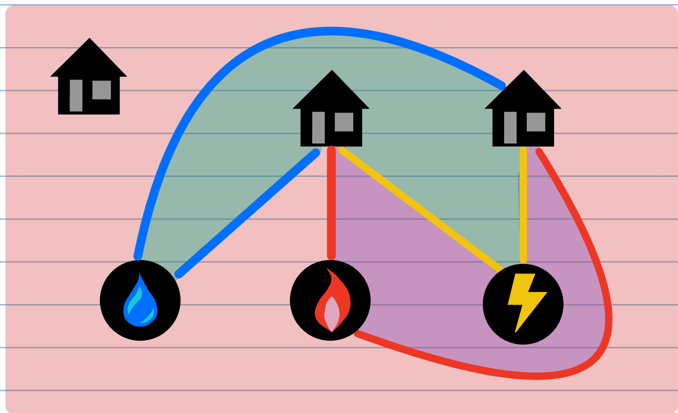


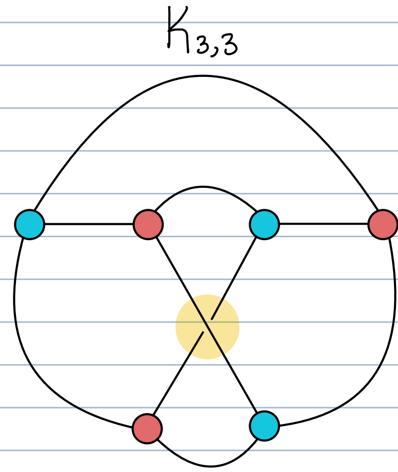
plano



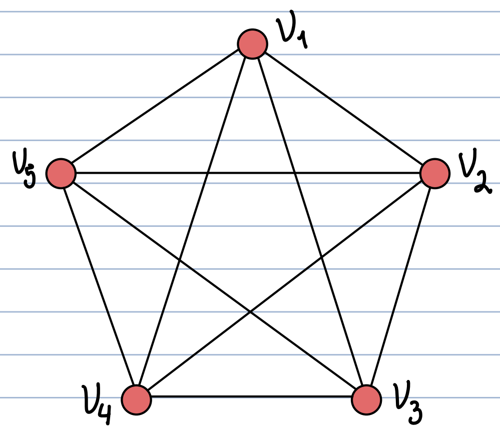


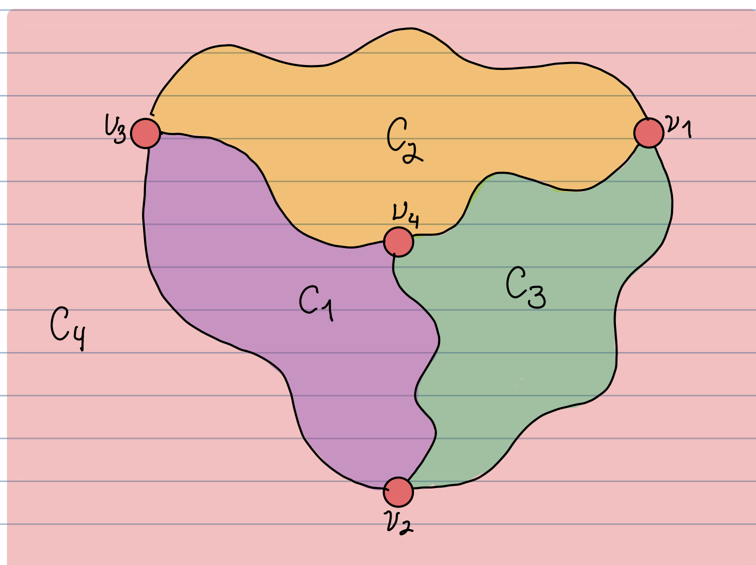
No todas las gráficas son aplanables.





Teorema. K_5 no es aplanable.

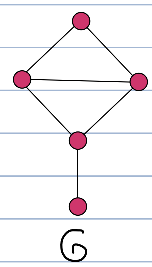


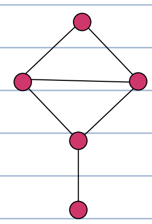
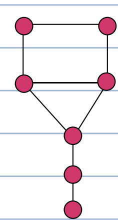
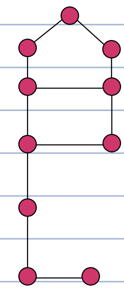


Caracterización de las gráficas aplanables

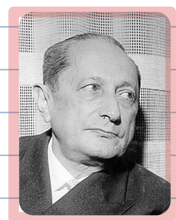
Definición. Una gráfica H es una subdivisión de una gráfica G si:

- $H = G$ o
- H puede obtenerse insertando vértices de grado 2 en las aristas de G.



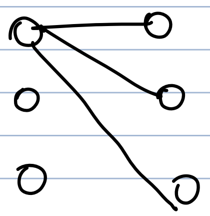




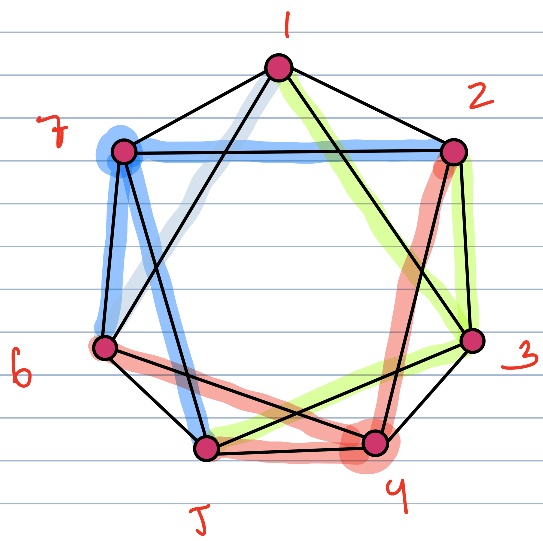
Teorema (Kuratowski)

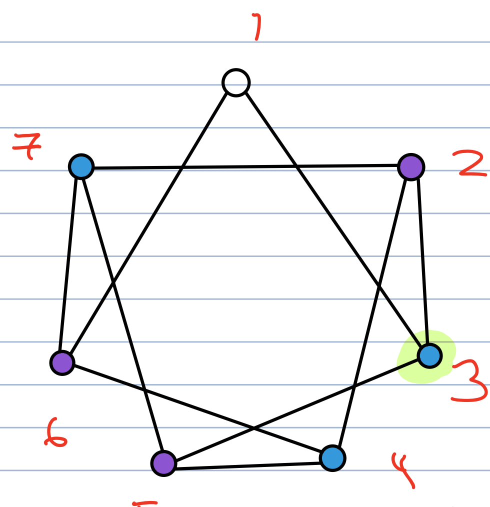


Matemático polaco.
1896–1980

Una gráfica G es aplanable si y sólo si G no contiene ninguna subgráfica que sea una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$. ∎







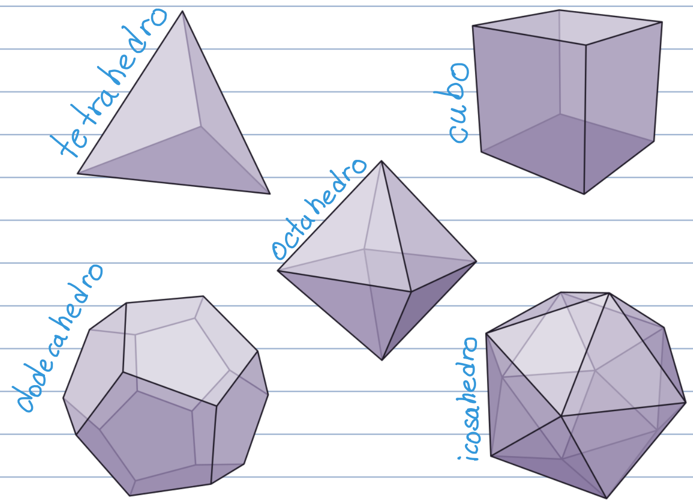
Una subdivisión de $K_{3,3}$.

Identidad de Euler

Un polihedro es un objeto 3-dimensional cuya frontera consiste de superficies planas poligonales.

Estas superficies poligonales se conocen como caras.

La frontera de una cara consiste de las aristas y los vértices del polígono.

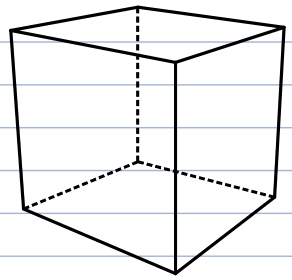
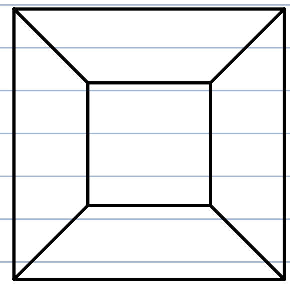
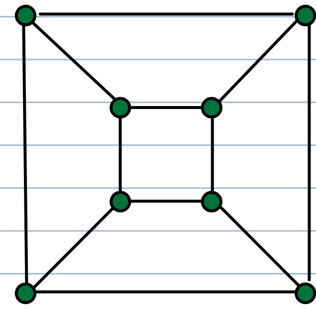


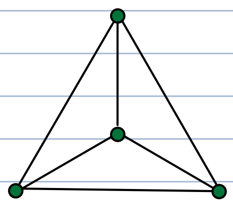
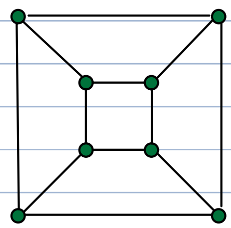
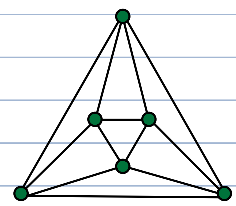
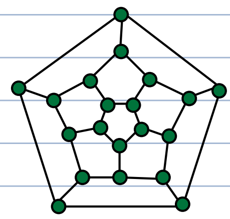
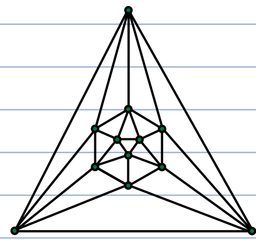
V → # de vértices
E → # de aristas
F → # de caras

Sólido platónico	V	E	F
tetrahedro	4	6	4
cubo	8	12	6
octahedro	6	12	8
dodecahedro	20	30	12
icosahedro	12	30	20

La identidad polihedral de Euler:

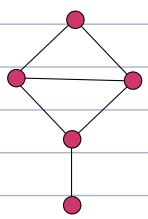
$$\boxed{V - E + F = 2}$$

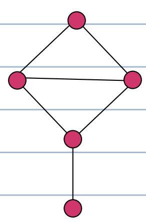
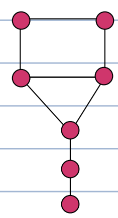
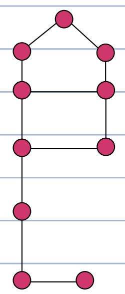






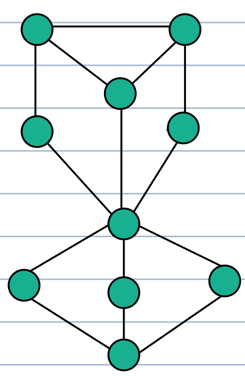
La identidad polihedral de Euler:

$$\boxed{V - E + F = 2}$$



G



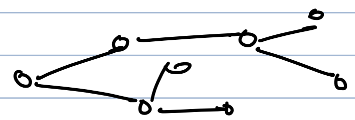
Teorema. (Identidad de Euler).

Para cada gráfica conexa con V vértices, E aristas y F caras ocurre que:

$$V-E+F=2.$$

Demostración (por inducción sobre E).

Caso base: n vértices, $n-1$ aristas

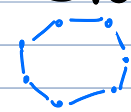


un árbol

$|F| = 1$, $|V| = n$, $|E| = n-1$

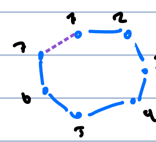
$$n-(n-1)+1 = n-n+1+1 = 2 \checkmark$$

Consideremos una gráfica con más de $n-1$ aristas, necesariamente contiene un ciclo, y por lo tanto al menos una cara acotada.



Elegimos una arista de la cara acotada y la quitamos. La gráfica resultante sigue siendo conexa pero tiene una arista menos y una cara menos. Entonces, por hipótesis de inducción tenemos que se cumple que:

$$n-e'+f'=2 \qquad e'=e-1,\ f'=f-1$$



$n=7$
$f=1$
$e=6$
n
$7-7$

$7-6+1$
$1+1=2$

$f=2$
$e=7$

$7-(6+1)+(1+1)$
$7-6-1+1+1$
$(7-6+1)$
$2-1+1$

pd. $n-e+f=2$

Al regresar la arista, tenemos:

$$n-(e'+1)+(f'+1) =$$

$$\underbrace{n-e'+f'}_{=2}-1+1 =$$

$$= 2-1+1 = 2$$

Teorema: Si G es una gráfica aplanable con $V \geq 3$ y E aristas, entonces:
$$E \leq 3V - 6.$$

Corolario: Toda gráfica completa K_n, con $n \geq 5$, es no aplanable.

Corolario: Toda gráfica aplanable contiene un vértice de grado 5 o menos.

Corolario: La gráfica $K_{3,3}$ es no aplanable.

Definición: Una gráfica aplanable G es aplanable maximal si al agregarle a G cualquier arista esta deja de ser plana.

- Necesariamente todo encaje de una gráfica plana maximal, con al menos 3 vértices, consiste de regiones cuya frontera son triángulos (C_3), y por tanto: $3F = 2E$.

$$\Rightarrow E = 3V - 6$$

Demostración de que toda triangulación tiene un encaje geométrico.

1. Tomar la gráfica abstracta aplanable y convertirla en una triangulación (gráfica plana maximal).

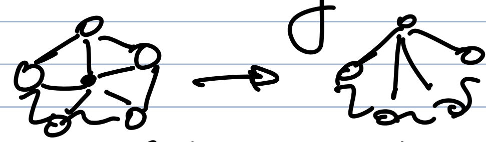
2. ◦ Every simple triangulation has an interior vertex with degree <6.

Euler: $V-E+F=6$ $\quad E=3V-6$

$\text{min-deg} \geq 3$

≥ 4 vertex with $\deg < 6$.

◦ Delete the min-deg interior vertex



◦ Retriangulate the hole

◦ Put the vertex back.

= Schnyder woods =

$\boxed{89, 90.}$

"almost magical paper"

wood = bosque = colección de árboles

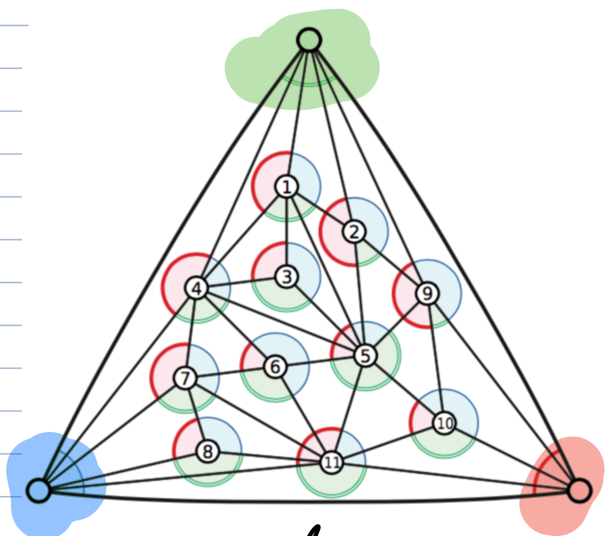
Una descomposición de una trian-

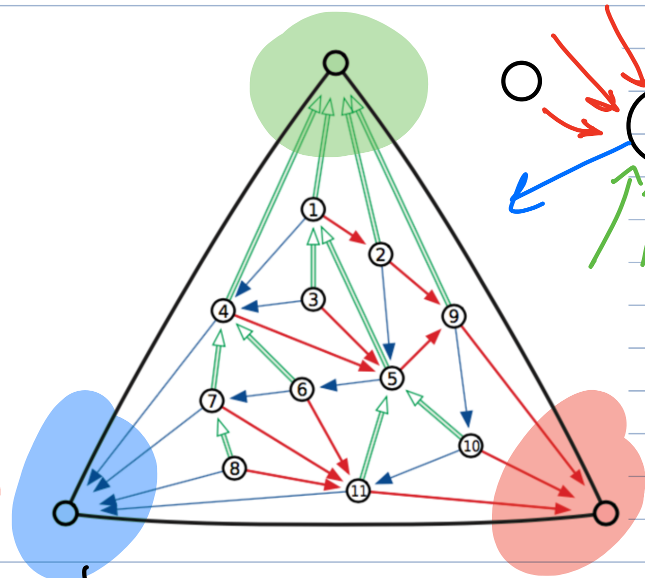
gulación en tres/spanning trees:
almost

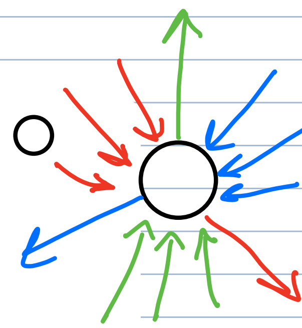
- red
- green
- blue

• 2 descripciones distintos pero equivalentes:

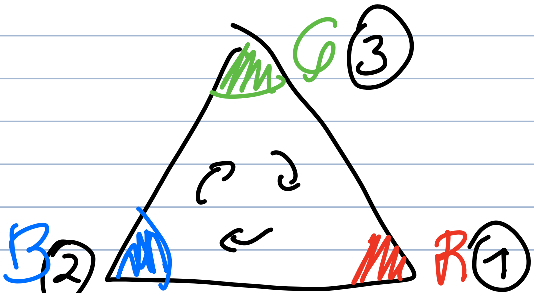
- Schnyder coloring (regular labeling)
- Schnyder wood (realizer)







assigns colors red, green, blue a los ángulos interiores de las Δ, que satisfaga 2 condiciones:



• every interior vertex has outgoing edge of every color.

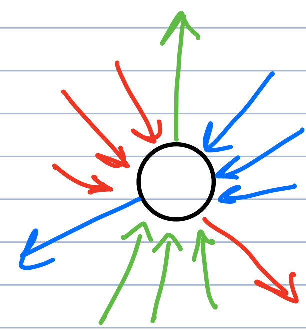
• if it has incoming edges all of the incoming red edges are between the blue and green outgoing edges

(1) in every face there is a corner of each color and the colors appear in the order: ~~r, g, b~~ r, b, g counterclockwise

(2) at the vertices there is always a wedge of red corners followed in counterclockwise order by a wedge of green followed by a wedge of blue vertices

all of the green are between the blue and red outgoing edges

all of the blue incoming edges are between the green and red outgoing edges



every vertex in the interior is adyacent to at least one corner of each color

outer vertices all vertices are the same color