Herramienta básica: test de orientación

Dolores Lara.

Geometría Computacional.

Departamento de Computación, Cinvestav

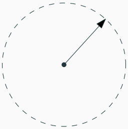
Introducción

Dirección

Entendemos por dirección a un vector $v \in S^{d-1}$, donde S^{d-1} es la esfera unitaria de dimensión $d-1$.

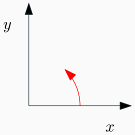
Dirección

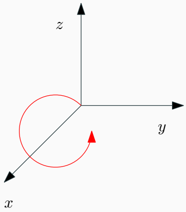
Entendemos por dirección a un vector $v \in S^{d-1}$, donde S^{d-1} es la esfera unitaria de dimensión $d-1$. Se describe usando sus coordenadas cartesianas $v = (x_1, \ldots, x_d)$, con $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} = 1$.



Orientación

En este curso, y en los libros de texto, supondremos que el plano y el espacio están orientados positivamente.

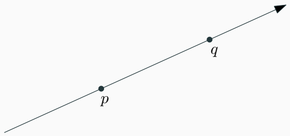




El test

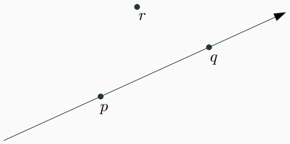
El problema

Dados tres puntos en el plano p, q y r decidir, de forma eficiente y robusta, si r está a la izquierda, a la derecha o sobre la recta orientada determinada por p, q.



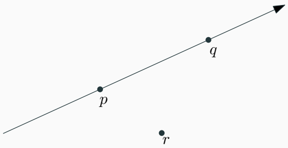
El problema

Dados tres puntos en el plano p, q y r decidir, de forma eficiente y robusta, si r está a la izquierda, a la derecha o sobre la recta orientada determinada por p, q.



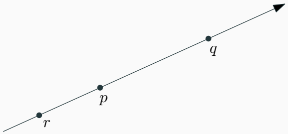
El problema

Dados tres puntos en el plano p, q y r decidir, de forma eficiente y robusta, si r está a la izquierda, a la derecha o sobre la recta orientada determinada por p, q.



El problema

Dados tres puntos en el plano p, q y r decidir, de forma eficiente y robusta, si r está a la izquierda, a la derecha o sobre la recta orientada determinada por p, q.



El problema

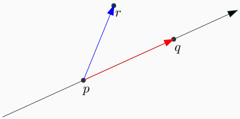
Dados tres puntos en el plano p, q y r decidir, de forma eficiente y robusta, si r está a la izquierda, a la derecha o sobre la recta orientada determinada por p, q.

Algoritmo

Consideremos los vectores $\color{red}{\vec{pq}}$ y $\color{blue}{\vec{pr}}$.

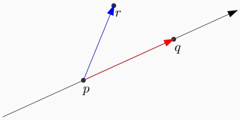
Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$.



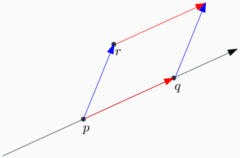
Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$. Del algebra lineal sabemos que si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores, entonces $|\vec{A} \times \vec{B}|$ es igual al área del paralelogramo con lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



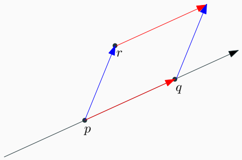
Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$. Del algebra lineal sabemos que si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores, entonces $|\vec{A} \times \vec{B}|$ es igual al área del paralelogramo con lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$. Del algebra lineal sabemos que si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores, entonces $|\vec{A} \times \vec{B}|$ es igual al área del paralelogramo con lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

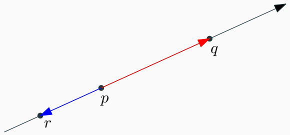


$$|\vec{pq} \times \vec{pr}| = \begin{vmatrix} p_x & q_x & r_x \\ p_y & q_y & r_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix}$$

$$= (q_x - p_x)(r_y - p_y) - (q_y - p_y)(r_x - p_x)$$

Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$.



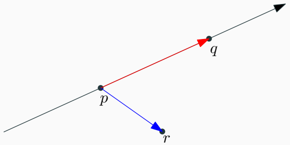
$$r \text{ está sobre la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} = 0$$

$$r \text{ está a la derecha de la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} < 0$$

$$r \text{ está a la izquierda de la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} > 0$$

Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$.



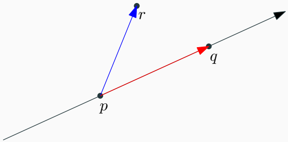
r está sobre la recta pq $\iff$ $\begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} = 0$

r está a la derecha de la recta pq $\iff$ $\begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} < 0$

r está a la izquierda de la recta pq $\iff$ $\begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} > 0$

Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$.



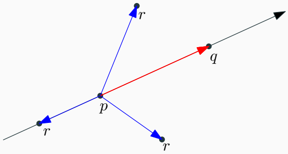
$$r \text{ está sobre la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} = 0$$

$$r \text{ está a la derecha de la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} < 0$$

$$r \text{ está a la izquierda de la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} > 0$$

Algoritmo

Consideremos los vectores $\vec{pq}$ y $\vec{pr}$.



$$r \text{ está sobre la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} = 0$$

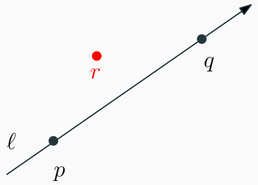
$$r \text{ está a la derecha de la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} < 0$$

$$r \text{ está a la izquierda de la recta } pq \iff \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} > 0$$

Algoritmos básicos

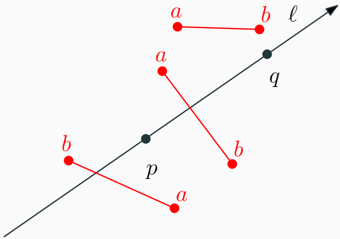
Posición relativa recta-punto

Problema:
Dada una recta dirigida ℓ y un punto r, determinar la posición relativa de r con respecto a ℓ.

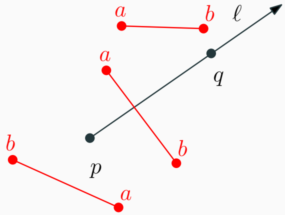


Intersección recta-segmento

Problema:
Dada una recta dirigida ℓ y un segmento, determinar si estos se intersectan o no.

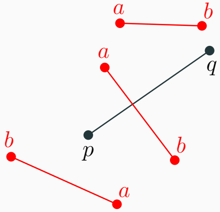


Problema:
Dado un rayo ℓ y un segmento, determinar si estos se intersectan o no.



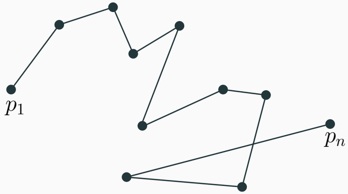
Intersección segmento-segmento

Problema:
Dados dos segmentos, determinar si estos se intersectan o no.

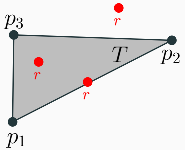


Giro

Problema:
Dada una cadena poligonal $p_1, p_2, \ldots, p_n$, generar una clasificación izquierda/derecha de sus giros.



Problema:
Dado un triángulo T con vértices p_1, p_2, p_3 y un punto r, determinar si r está en el interior o en el exterior de T.



Siguiente clase: Cierres convexos