Solución al sistema de ecuaciones para splines cúbicos naturales en curvas cerradas

Dr. Luis Gerardp de la Fraga

5 de noviembre de 2009

La ecuación resultante es de la forma (un ejemplo para trazar un spline cúbico natural cerrado con cinco puntos):

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 \\ c_5 & 0 & 0 & a_5 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

que puede reescribirse en forma simplificada como:

$$M\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{1}$$

y esta matriz M no es exactamente tridiagonal, pero puede convertirse a una matriz tridiagonal y resolverse con la fórmula de Sherman-Morrison.

La ec. (1) se reescribe como:

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{2}$$

donde A es una matriz tridiagonal, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son los vectores:

$$\mathbf{u}^T = [-b_1, 0, 0, 0, c_5] \tag{3}$$

$$\mathbf{v}^T = [1, 0, 0, 0, a_1/(-b_1)] \tag{4}$$

A puede calcularse fácilmente usando las relaciones (1) y (2):

$$A = M - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$$

que hace al elemento:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2b_i \\ a_{1n} &= 0 \\ a_{n1} &= 0 \\ a_{nn} &= b_n + \frac{c_n a_1}{b_1} \end{aligned}$$

y todos los demás elementos de la matriz A son iguales a los correspondientes elementos de M.

Y para resolver (2) se resuelven los dos sistemas

$$A\mathbf{y} = \mathbf{d} \tag{5}$$

$$A\mathbf{q} = \mathbf{u} \tag{6}$$

Finalmente $\mathbf{x}$ de obtiene como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \frac{(\mathbf{v}^T\mathbf{y})\mathbf{q}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{q}}$$

El producto $\mathbf{v}^T\mathbf{y}$ es un escalar al igual que $\mathbf{v}^T\mathbf{q}$.

Como la mayoría de los elementos de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ceros, las multiplicaciones anteriores es mejor realizalas explícitamente como:
$\mathbf{v}^T\mathbf{y} = y_1 - \frac{y_n a_1}{b_1}$, y
$\mathbf{v}^T\mathbf{q} = q_1 - \frac{q_n a_1}{b_1}$.