

# Introducción a la Probabilidad

“Probability is too important to be left to the experts”  
R. Hamming

# Libros de Texto

1. The Art of Probability for Scientists and Engineers, Richard W. Hamming , WestView Press, 1991
2. Introduction to Probability Theory, Lester L. Helms, Freeman and Company, 1996. ISBN: 0716730235

# Criterios de Evaluación

- 1 examen final (40)
- 1 tarea (60)
- quizzes (10)

.

# Definiciones básicas



¿Tratar de definir leyes para la probabilidad no representa una contradicción *per se*?

Las *leyes* evocan regularidad mientras que la *probabilidad* implica irregularidad. Veremos en este curso que aún en medio del aparente caos pueden encontrarse patrones de comportamiento en eventos probabilísticos

# La palabra “Probable”



En la vida cotidiana:

- Probabilidad de ganar un volado
- Probabilidad que nieve o llueva mañana
- Probabilidad de cometer un error, que alguien diga una mentira
- Probabilidad que alguna teoría científica sea correcta

En ingeniería:

- Mecánica cuántica
- Sistemas de comunicación

# Definición de probabilidad matemática



Sea  $A$  una colección de resultados que poseen un cierto atributo. Suponga que un experimento o juego es repetido  $N$  veces y que  $N(A)$  es el número de veces que el resultado  $A$  fue obtenido. La razón  $\frac{N(A)}{N} \rightarrow P(A)$ , para  $N$  suficientemente grande es conocido como la probabilidad de  $A$ .

# Definición de probabilidad matemática



- Dependiendo del contexto un valor adecuado para  $N$  podrá ser determinado.
- $P(A)$  es un número real positivo tal que  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- Existen muchos tipos de distribuciones probabilísticas como se verá más adelante en este curso.

# Preguntas probabilísticas simples/típicas



- ¿Cuál es la probabilidad que una mujer mexicana escogida al azar mida más de 1.90 metros?
- ¿Cuáles son las letras que aparecen más frecuentemente en los idiomas español, francés e inglés?
- ¿Cuál es el tiempo promedio de espera para que un cliente de Banamex acceda a uno de los cajeros humanos?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar la lotería?



# Combinaciones

¿De cuántas maneras pueden escogerse [sin reemplazo] un subconjunto de  $r$  objetos de una población total de  $n$  objetos?

Respuesta:

$$C(n, r) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

# Problemas de Poker: manos diferentes



En un mazo completo de baraja francesa [52 cartas],  
¿Cuántas manos diferentes pueden repartirse en el  
juego del poker?

# Problemas de Poker: manos diferentes



¿Cuántas manos diferentes pueden repartirse en el juego del poker?

Respuesta:

$$\binom{52}{5}$$

# Problema del Volado



Dos jugadores juegan  $2n$  volados, ¿Cuál es la probabilidad que terminen empatados, esto es, que el número de águilas sea igual al número de soles?

# Problema del Volado

El número total de posibles resultados es  $2^{2n}$ . Sea  $A$  el número de combinaciones para las cuales hay empate. Para contar el número de empates, seleccione  $n$  de las  $2n$  posiciones y márkuelas con “águila”, marque las restantes con “sol”. Lo anterior puede hacerse en  $\binom{2n}{n}$  formas diferentes. Por lo tanto:

$$P(A) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

# Problemas de Poker



¿Cuál es la probabilidad que un jugador de poker obtenga la escala mayor?

# Problemas de Poker



¿Cuál es la probabilidad que un jugador de poker obtenga la escala mayor?

Respuesta:

$$\frac{4}{\binom{52}{5}}$$

# Problemas de Poker



¿Cuál es la probabilidad que un jugador de poker tenga dos pares, i.e.  $\{x,x,y,y,z\}$ ?



# Problemas de Poker

¿Cuál es la probabilidad que un jugador de poker tenga dos pares, i.e.  $\{x,x,y,y,z\}$ ?

Respuesta:

$$P(A) = \frac{\binom{13}{2} \cdot 11 \cdot 4 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

# Problema de la no información



¿Si una persona escoge una carta de un mazo de 50 cartas, ¿Cuál es la probabilidad que al escoger una segunda carta, ésta resulte ser el as de espadas?

# Problema de la no información



¿Si una persona escoge una carta de un mazo de 50 cartas, ¿Cuál es la probabilidad que al escoger una segunda carta, ésta resulte ser el as de espadas?

Respuesta:

$$1/52 \cdot 0 + 51/52 \cdot 1/51 = 1/52$$

# Problema de los dos hijos



Se sabe que una familia tiene 2 hijos. Usted observa uno y es un varón, ¿Cuál es la probabilidad que el otro hijo también sea un varón?

Posibilidades: (V, V), (V, N), (N, V), (N, N)

# Problema de los prisioneros



Hay 5 sombreros, tres son rojos y dos son negros. Se procede a vendar a tres prisioneros, de los cuales C es ciego, T es tuerto y N puede ver con sus dos ojos. A cada preso se le coloca un sombrero en la cabeza. Los carceleros le quitan la venda a N y le permiten mirar los sombreros de sus compañeros sin que él pueda ver el suyo. A continuación se le pide a N que diga el color de su sombrero, si adivina lo liberan, si se equivoca le espera el peor de los tormentos. Tras mucho cavilar, N decide quedarse callado en obstinado silencio. Sin ningún miramiento, los carceleros lo regresan a su inmunda celda.

# Problema de los prisioneros



Se repite el procedimiento para T, quien tras observar el sombrero de C y reflexionar por una eternidad que dura minutos decide al igual que N no arriesgarse y callar. T es regresado a su celda. Finalmente los carceleros le preguntan con desdén a C por el color de su sombrero, sin siquiera molestarse en quitarle la venda [de cualquier manera está ciego, se dicen]. Para sorpresa de todos C declara correctamente que el color de su sombrero es rojo.

**Pregunta: ¿Cuál fue la distribución original de los sombreros?**

# Problema de los prisioneros



N	T	C	Distribución
R	R	R	
R	R	N	
R	N	R	
R	N	N	
N	R	R	
N	R	N	
N	N	R	
N	N	N	

# Paradoja del Cumpleaños

¿Cuántas personas es necesario reunir en un salón de clases para que la probabilidad que por lo menos dos de ellas compartan la misma fecha del cumpleaños sea del 50%?

**Suposiciones:** No hay años bisiestos, los cumpleaños están homogéneamente distribuidos, no hay cumpleaños condicionales [i.e. no hay gemelos o trillizos, etc.]

**Respuesta:** Calcule la probabilidad que todas las fechas de los cumpleaños sean distintas.



# Paradoja del Cumpleaños



La primera persona puede escoger de entre 365 días, así que la segunda persona tiene una probabilidad de  $(1-1/365)$  de tener una fecha de cumpleaños diferente. La tercera persona tiene dos días menos para escoger, así que tiene una probabilidad de  $(1-2/365)$  que su cumpleaños difiera de los otros dos. Por tanto, la probabilidad que las 3 personas tengan todos cumpleaños diferentes es de  $1 \cdot (1-1/365) \cdot (1-2/365)$ .

# Paradoja del Cumpleaños

- Por tanto, la posibilidad que 23 personas no tengan un cumpleaños repetido es:

$$(1-1/365) (1-2/365) \dots (1-22/365) = 0.493.$$

Por lo que la probabilidad que al menos dos personas tengan un cumpleaños repetido es  $1 - 0.493 = 0.507$ .

- Si hay 30 personas la probabilidad crece al 70%.
- De manera más abstracta, suponga que se tienen  $n$  objetos, con  $n$  grande. Suponga que  $r$  personas escogen un objeto cada una [con reemplazo]. Si  $r \approx 1.777\sqrt{n}$ , entonces existe una probabilidad de 50% que al menos dos personas escojan el mismo objeto.