Centro de investigación y estudios avanzados del IPN
Departamento de Computación

Protocolo de tesis

Elección de estrategias ganadoras en el juego de *Base Ball* aplicando Equilibrio de Nash

Arturo Yee Rendón

Director: Dr. José Matías Alvarado Mentado

Noviembre de 2009

Resumen

El Equilibrio de Nash es un concepto central en la Teoría de Juegos, siendo la base de diversos trabajos recientes para la toma de decisiones. En esta tesis se aplica en juegos de múltiples jugadores; en particular para identificar estrategias ganadoras en el juego de *Base Ball*, tanto cuando el equipo juega a la ofensiva como a la defensiva. El objetivo es identificar las situaciones y condiciones durante el desarrollo de un juego, tal que resulte conveniente aplicar el modelo de Equilibrio de Nash para fortalecer las estrategias ganadoras del equipo. En juegos de múltiples jugadores el análisis de estrategias es de alto grado de complejidad, razón por la cual se hace relevante computarizar eficientemente el Equilibrio de Nash para realizar tales análisis de estrategias en este tipo de juegos.

Palabras clave: Equilibrio de Nash, Estrategias, Teoría de Juegos, Toma de Decisiones, juegos de múltiples jugadores.

1. Datos Generales

1.1. Título de proyecto

Elección de estrategias ganadoras en el juego de *Base Ball* aplicando Equilibrio de Nash

1.2. Datos del alumno

Nombre:	Arturo Yee Rendón
Matrícula:	081270006
Dirección:	Calle Cayena No. 18, Col. San Pedro Zacatenco, México, D.F. 07360
Teléfono (casa):	(52) (55) 5019 1468 (52) (55) 5754 4044
Teléfono (lugar de trabajo):	(52) (55) 5747 3758
Dirección electrónica:	ayee@computacion.cs.cinvestav.mx

1.3. Institución

Nombre:	CINVESTAV-IPN

Departamento:	Depto. de Computación.
Dirección:	Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, México, D. F. 07300.
Teléfono:	(52) (55) 5747 3758

1.4. Beca de tesis

Institución otorgante:	CONACYT
Tipo de beca:	Maestría
Vigencia:	Agosto 2008 - Agosto2010

1.5. Datos del asesor

Nombre:	Dr. José Matías Alvarado Mentado
Dirección:	Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508, Col. San Pedro Zacatenco, México, D. F. 07300.
Teléfono (oficina):	(52) (55) 5747 3757
Institución:	CINVESTAV-IPN
Departamento adscripción:	Depto. de Computación
Grado académico:	Doctor en Inteligencia Artificial

2. Descripción del proyecto

2.1. Antecedentes

A continuación se dan las definiciones de conceptos que son fundamentales en el sustento formal y en el desarrollo de la tesis que se propone.

Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos es un área de la matemática aplicada que utiliza modelos matemáticos para estudiar las interacciones en las estructuras formalizadas de incentivos (los llamados juegos), para llevar a cabo procesos de decisión [23, 24, 25].

Inicialmente la Teoría de Juegos tuvo sus principales aplicaciones en economía, pero actualmente es aplicada a un gran número de áreas, tales como informática, política, biología y filosofía, entre otras. La Teoría de Juegos experimento un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir de los trabajos de John von Neumann y Oskar Morgenstern [26], antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación en estrategias militares.

Toma de Decisiones

La Toma de Decisiones es una ciencia aplicada que ha adquirido notable importancia y ha sido el tema básico de la Investigación Operativa [28]. Desde hace algunos años se han incorporado las técnicas de la Inteligencia Artificial en su análisis. Conlleva el análisis formal, la simulación computacional de comportamiento de los individuos en los juegos; la documentación es a partir de estadísticas y datos verificables, y los resultados experimentales se documentan de la misma forma para sustentar las conclusiones. La toma de decisiones es el proceso de seleccionar un curso de acción entre diferentes alternativas; es la medula de la planeación [27].

Equilibrio de Nash

El Equilibrio de Nash es un concepto ampliamente utilizado en la Teoría de Juegos, para encontrar perfiles que sean solución a juegos no cooperativos, tomando en cuenta que los perfiles deben ser la mejor respuesta de cada jugador condicionadas con las estrategias de los demás jugadores.

Estrategias

Las estrategias son aquellos conjuntos de acciones, que son tomadas con el objetivo de obtener algún beneficio [19, 20, 21]. Para un jugador se define como el conjunto de reglas que determinan sus acciones para todas las situaciones que se presenten en el juego.

Juegos de múltiples jugadores.

Los juegos de múltiples jugadores son aquellos tipos de juegos en donde hay dos o más jugadores, cada jugador tiene su conjunto de estrategias que determinan la forma de actuar durante el juego

Juegos de suma cero.

Suma cero describe una situación en la que la ganancia o pérdida de un participante se equilibra con exactitud con las pérdidas o ganancias de los otros participantes. En otras palabras, se dice que un juego es un juego de suma cero si la suma de las recompensas es cero. En los juegos de suma cero las metas que persiguen los jugadores son totalmente opuestas.

2.2 El modelo de Equilibrio de Nash en la Teoría de Juegos

Si la Teoría de Juegos ofrece una única solución a un determinado problema, esta solución debe ser un Equilibrio de Nash. El suponer que la Teoría de Juegos hace una única predicción sobre las estrategias elegidas, y suponiendo que la predicción sea correcta, es necesario que cada jugador involucrado en un juego elija la estrategia predicha por la teoría, la cual debe ser la mejor respuesta de cada jugador a las estrategias establecidas por los otros jugadores. Tal predicción puede denominarse *estratégicamente estable ó self-enforcing,* puesto que ningún jugador va a querer desviarse de la estrategia establecida para él, llamaremos a tal predicción Equilibrio de Nash [2].

En la vida real, en la práctica, cada jugador está incentivado individualmente para defraudar al otro, incluso tras prometerle colaborar. En Teoría de Juegos se supone que cada jugador, de modo independiente, trata de aumentar al máximo su propia ventaja sin importarle el resultado del otro jugador. Éste es el punto clave del dilema. Las técnicas de análisis de la Teoría de Juegos estándar, lleva a cada jugador a escoger traicionar al otro, pero curiosamente ambos jugadores obtendrían un resultado mejor si colaboran. A continuación se dan ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1: *El dilema del prisionero* en su enunciación clásica describe la situación en que la policía arresta a dos sospechosos sin pruebas suficientes para inculparlos de un delito. Tras separarlos se visita a cada uno y se les ofrece el mismo trato: Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante seis meses por un cargo menor. Lo anterior puede resumirse como se hace en la Tabla 1:

	Prisionero # 2		
Prisionero #1		**Callar**	**Confesar**
	Callar	6 meses ambos	El prisionero # 2 es liberado, el prisionero # 1 recibe 10 años
	confesar	El prisionero # 1 es liberado, el prisionero # 2 recibe 10 años	6 años ambos

Tabla 1. Actuación de los prisioneros

Para el dilema del prisionero, y siguiendo la definición, vamos a encontrar el Equilibrio de Nash. Para ello se debe enumerar todos los perfiles de estrategias posibles y ver si fijada una estrategia del perfil para un jugador, las otras estrategias maximizan los pagos del otro jugador

	Prisionero # 2		
		Callar	**Confesar**
Prisionero #1	**Callar**	4, 4	0,5
	confesar	5, 0	1 ,1

Tabla 2. Rentabilidad del *dilema del prisionero*

El dilema de prisionero presenta cuatro perfiles. Un perfil es un conjunto de estrategias para cada jugador que especifica completamente todas las acciones en un juego, como posibles soluciones de Equilibrio de Nash del juego: *(callar, callar), (callar, confesar), (confesar, callar) y (confesar, confesar).* Comenzaremos analizando el perfil *(callar, callar)* y supongamos que es un Equilibrio de Nash. Si el prisionero # 1 prevé que el prisionero # 2 jugará *callar*. ¿Le convendría al prisionero # 1 seguir pensando en jugar *callar?* La respuesta es no. Debido a que fijada la estrategia callar del prisionero # 2, el prisionero # 1 preferirá desviarse de la estrategia indicada para él en el perfil propuesto como solución puesto que con la estrategia *confesar* obtiene un pago superior u_1 (*confesar, callar)* =5 > 4= u_1 *(callar, callar).* Este argumento también es aplicable al prisionero # 2 (por simetría del juego), llegando a la conclusión que el perfil (*callar, callar)* no es un Equilibrio de Nash debido a que cualquier prisionero, puede desviar su estrategia y obtener un mayor beneficio.

Supongamos que se propone como solución de Equilibrio de Nash el perfil *(confesar, callar*). En este caso, si el prisionero # 2 supiera que el prisionero # 1 iba a jugar confesar, a él le convendría jugar la estrategia confesar pues con ello maximiza su utilidad en este caso particular u_2 *(confesar, confesar*)= 1 > 0= u_2 *(confesar, callar).* Por tanto, el perfil *(confesar, callar)* tampoco es un Equilibrio de Nash.

El caso *(callar, confesar)* es análogo al anterior intercambiando la posición de los prisioneros. Finalmente, no queda el caso *(confesar, confesar).* Este si es un perfil de Equilibrio de Nash, ya que ningún de los prisioneros tiene el incentivo para desviarse de un modo unilateral de la estrategia que se propone. Si alguno de los prisioneros decidiera seguir la estrategia *callar* en solitario, perdería utilidad en relación al perfil *(confesar, confesar),* puesto que u_1 (*callar, confesara*)= 0 < 1= u_1 (*confesar, confesar*) y u_2 (*confesar, callar*)= 0 < 1= u_2 (*confesar, confesar*).

La siguiente tabla muestra las desviaciones deseadas:

	Prisionero # 2		
		Callar	**Confesar**
Prisionero #1	**Callar**	4, 4 →	0,5
	confesar	↓ 5, 0 →	↓ 1 ,1

Tabla 3. Desviaciones del *dilema del prisionero*

Se puede observar y con el análisis anterior, se deduce que el perfil (*confesar, confesar*) es un perfil de Equilibrio de Nash, debido a que fijado este perfil, ningún prisionero tiene el incentivo de desviarse de su estrategia.

En el siguiente ejemplo ser muestra que en un juego pueden tener múltiples soluciones que sean Equilibrio de Nash.

Ejemplo 2: *La batalla de sexos:* En la exposición tradicional del juego, un hombre y una mujer están tratando de decidir que harán esta noche; este análisis no toma en cuenta el sexo de los participantes. En lugares de trabajo separados, Pat y Chris deben elegir entre ir a la ópera o a un combate de boxeo. Ambos preferirían pasar la noche juntos, pero Pat preferiría pasar la noche juntos en el boxeo, mientras que Chris preferiría estar juntos en la ópera, tal como se representa en la matriz siguiente:

		Pat	
Chris		**Ópera**	**Boxeo**
	Ópera	2, 1	0, 0
	Boxeo	0, 0	1, 2

Tabla 4. Guerra de sexos

Ambos, *(ópera, ópera) y (boxeo, boxeo)* son Equilibrios de Nash.

Se ha argumentado antes que se si la Teoría de Juegos ofrece una única solución a un juego, ésta debe de ser un Equilibrio de Nash. Este argumento ignora la posibilidad de juegos en los cuales la Teoría de Juegos no ofrece una solución única. También se ha argumentado que si se llega a un acuerdo sobre cómo comportarse en un juego, las estrategias establecidas en el acuerdo deben ser un Equilibrio de Nash, pero este argumento, al igual que el anterior, ignora la posibilidad de juego para los cuales no se alcance un acuerdo. En algunos juegos con múltiples Equilibrio de Nash sobresale un equilibrio como la solución más atractiva del juego. Así, la existencia de múltiples Equilibrio de Nash no es un problema en sí mismo. Sin embargo, en la batalla de sexos, *(ópera, ópera)* y *(boxeo, boxeo)* parece igualmente atractivos, lo que indica que pueden existir juego para los cuales la Teoría de Juegos no ofrece un solución única y en los que no se llegaran a ningún acuerdo. En tales juegos el Equilibrio de Nash pierde gran parte de su atractivo como predicción del juego.

2.3. Juegos de múltiples jugadores en equipo

En un juego puede existir dos o más jugadores. Un *juego* puede definirse como un curso de eventos, el cual consiste de una sucesión de acciones por parte de los jugadores. Para que el juego sea susceptible de análisis matemático, también debe tenerse un sistema de reglas establecidas sin ambigüedad, así como el resultado del juego.

Los juegos de múltiples jugadores se caracterizan porque son jugadores por *n* jugadores en donde pueden existir conflictos entre los participantes del juego.

El Domino es un juego de mesa, jugado por cuatro jugadores, comúnmente en parejas; cada pareja juega de manera cooperativa ayudándose entre ambos a formar un buen juego, suponiendo las fichas que el compañero pudiera tener, en base a las acciones que haya tomado. El objetivo del juego es alcanzar una determinada puntuación previamente fijada, jugando para ello en rondas. La pareja que gana una ronda, suma los puntos de las fichas de sus adversarios. La primera pareja que alcanza la puntuación fijada al principio de la partida, gana.

Fútbol americano es jugado por equipos, de once jugadores a la ofensiva y once a la defensiva. El equipo atacante intenta llevar el balón hacia la zona de anotación rival y así anotar puntos. La defensa tiene que evitar que esto ocurra y tratar de impedir el avance del equipo rival hacia la zona de anotación. Al finalizar cuatro tiempos de quince minutos, el equipo con mayor puntaje es el ganador. Este tipo de juego es de coordinación en donde los jugadores escogen las estrategias por un proceso de toma de decisiones consensuadas, lo jugadores toman un comportamiento cooperativo, pues el juego es una competición entre coaliciones de jugadores más que entre jugadores individuales.

El juego de *Base Ball* es **un juego de equipo de múltiples jugadores**, en donde la principal herramienta para su éxito, es encontrar las estrategias más adecuadas que conlleven a ganar el encuentro. El juego de *base ball* se caracteriza por ser un juego dual, es decir, cooperativo y no cooperativo. Esto debido a que los integrantes del equipo están incentivados a comportarse de manera individual, pero a su vez deben de cooperar a beneficio del equipo. En la tesis que se propone, el caso de estudio es el juego de *Base Ball* debido a que brindan las situaciones ideales para definir diversas estrategias, que pueden ser simuladas de manera eficiente a través de un programa de cómputo, a fin, de observar, estudiar y comprender el comportamiento del equipo bajo esas estrategias.

A continuación se describen algunos juegos de múltiples jugadores que **no son jugados en equipo:** El juego de *póker* es un juego de cartas jugado por 8, 9 o hasta 10 jugadores por mesa. El jugador con la jugada de mayor valor gana. También es posible ganar si el resto jugadores se retiran de la jugada. Actualmente uno de los simuladores de *póker* más populares es el *World Class Poker With TJ Cloutier*. El juego *backgammon* es un juego de tablero jugado por dos jugadores en rondas o partidas, es sencillo con profundos elementos estratégicos. El objetivo del juego consiste en liberar las fichas antes que el oponente. En 1995 G. Tesauro diseño *TD-Gammon.* Este programa tiene un aprendizaje exitoso mientras juega, ya que va aprendiendo las estrategias durante el juego. *TD-Gammon* emplea el método de diferencia temporal para entrenar una red neuronal.

2.4. Caso de estudio: Juego de *Base Ball*

Existen análisis del Equilibrio de Nash en la literatura especializada, para encontrar un equilibrio óptimo en las estrategias, para la toma de decisiones en Teoría de Juegos. Los diferentes trabajos han mostrado resultados importantes para encontrar perfil(es) de estrategias. Puesto que la toma de decisiones es un problema importante, nuestro trabajo se enfocará al modelado del Equilibrio de Nash en el juego de *Base Ball*.

Es interesante observar, analizar y comprender las situaciones antes de tomar una decisión, el juego de *Base Ball* brindan las situaciones ideales para definir diversas estrategias, que nos conlleven a sacar el mayor beneficio, en este caso ganar el partido.

El juego de *Base Ball*, es considerado uno de los juegos de equipo más popular alrededor del mundo, esto es debido a las diversas estrategias que emplean cada equipo para lograr ganar, las estrategias son tomadas durante el partido, observando todos los momentos del juego así como la situación actual del equipo. El poco estudio que se cuenta del juego de *base ball*, nos hace notar que es un campo nuevo de estudio, no solo porque es un deporte muy popular, si no por la forma en la cual las estrategias son determinadas dependiendo de la situación del partido, la toma de decisiones en juegos de equipos como los de esta índole son decisivos para lo resultados que se obtengan.

El *Base Ball*: es un deporte de conjunto, jugado entre dos equipos de 9 jugadores cada uno. Es considerado un juego estratégico esto debido a que se consideran como principal elemento en la toma de decisiones, un conjunto de estrategias, para ganar el juego [17,18].

Jugadas de sacrificio: [17, 22]. Las jugadas de sacrificio en el *base ball*, como parte de una estrategia ganadora. Características:

- Estrategia "conservadora" para ganar gradualmente.
- Estrategia para aumentar la probabilidad de éxito del equipo
- Las realiza, típicamente, jugadores con baja calificación
- Representa aparentemente pérdida para el equipo "mínimo local" pero
- conlleva, un "máximo global", es decir el éxito del equipo al final del juego en disputa.

3. Planteamiento del problema

¿Como modelar el Equilibrio de Nash en el juego de *base ball*?

Particularmente:

- Al interior del equipo, a la defensiva.
- Al interior del equipo, a la ofensiva.

En la figura 1, se muestra el *base ball* como un juego de múltiples jugadores, en donde, se aplica el Equilibrio de Nash para determinar las estrategias ganadoras que deban de ser utilizadas durante el encuentro. Cómo se mostrará en el Caso de Estudio de la tesis, el modelado del Equilibrio de Nash en el juego de *base ball*, es de gran relevancia para la toma de decisiones, durante el partido.

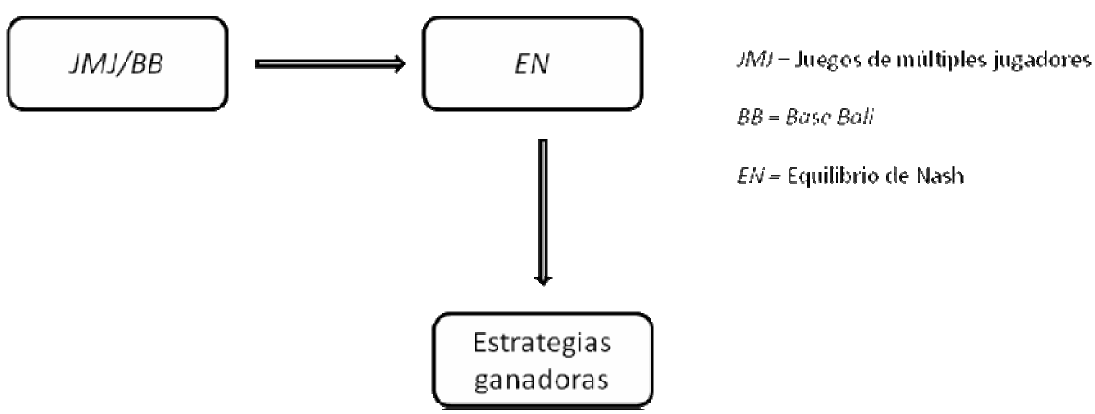


Figura 1. Diagrama del planteamiento del problema

4. Objetivos generales y específicos del proyecto

General

Identificar las situaciones y condiciones durante el desarrollo de un juego de *base ball*, tal que para el éxito en el juego, resulte conveniente aplicar el modelo de Equilibrio de Nash en la estrategia del equipo, cuando juega a la ofensiva así como cuando juega a la defensiva.

Particulares

- Diseñar e implementar un programa de cómputo para simular el Equilibrio de Nash durante un juego de *base ball*.
- Establecer un conjunto de estrategias, que conlleven a obtener el mayor beneficio dentro de un partido de *base ball*, conforme el Equilibrio de Nash.
- Realizar simulaciones de partidos de *base ball*, a fin de aplicar las estrategias más convenientes para ganar un partido, conforme el Equilibrio de Nash.

En la figura 2, se muestra que S_{ji}^{i} son las estrategias del jugador ***i***, donde $1 \geq i \leq 9$ (9 es el número de jugadores de un equipo de *base ball*). El conjunto de estrategias de cada jugador debe ser la mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores, a fin de encontrar un perfil que satisfaga el concepto de Equilibrio de Nash.

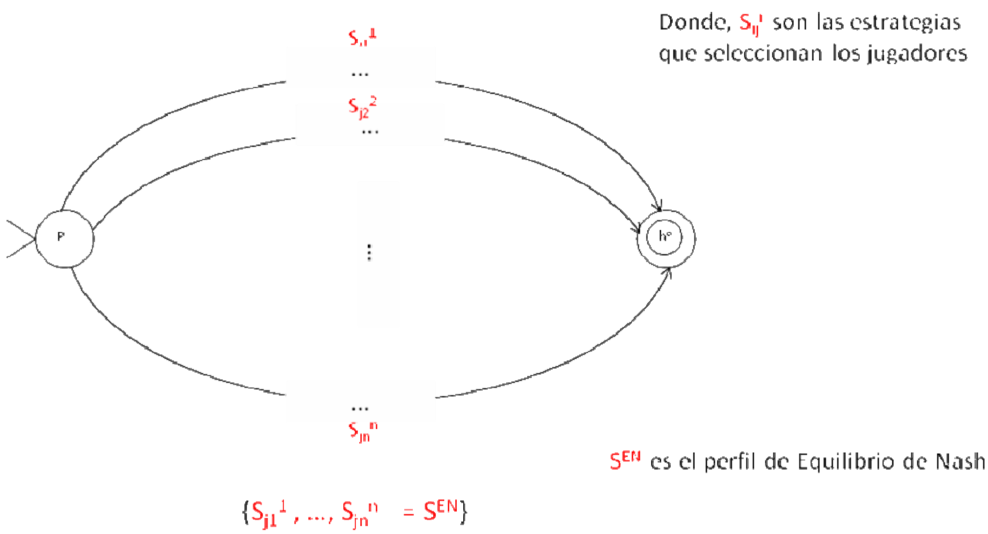


Figura 2. Diagrama de objetivos

5. Metodología

A continuación se enuncian los pasos de la metodología a utilizar para desarrollar del trabajo de tesis.

- Análisis de los conceptos de Equilibrio de Nash, y estrategias en Teoría de Juegos.
- Desarrollo formal para incorporar el Equilibrio de Nash en las estrategias de los equipos.
- Modelo formal del Equilibrio de Nash, dentro de un juego de *Base Ball.*
- Incorporación del Equilibrio de Nash, al simulador de jugadas de *Base Ball.*
- Realizar simulaciones de partidos de *Base Ball.*
- Diseño y desarrollo de pruebas.
- Obtener estadísticas, resultados y conclusiones de las simulaciones.
- Análisis comparativo de resultados
- Aplicabilidad.

Enseguida se presenta el desarrollo formal de los conceptos básicos de la tesis.

5.1. Equilibrio de Nash

Definición. En el juego en forma normal de **n** jugadores, $G=\{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, las estrategias $s_1^*, \ldots, S_n^*$, forman un Equilibrio de Nash s_i, para cada jugador ***i***, s_i^* es la mejor respuesta del jugador i (o al menos una de ellas) a las estrategias de los otros **n**-1 jugadores, $(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$.

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, \mathbf{s_i^*}, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, \mathbf{s_i}, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Para cada posible estrategia s_i, *en* S_i; esto es, si^* es una solución de

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Para relacionar esta definición con su fundamentación anterior, supongamos que la teoría de juegos ofrece las estrategias $(s_1', \ldots, s_n')$ como la solución al juego en forma normal $G=\{S_1, \ldots, Sn; u_1, \ldots, u_n\}$. Decir que $(s_1', \ldots, s_n')$ no constituyen un Equilibrio de Nash de *G* es equivalente a decir que existe algún jugador ***i*** tal que $\mathbf{s_i'}$ no es la mejor respuesta a $(s_1', \ldots, s_{i-1}', s_{i+1}', \ldots, s_n')$. Esto es, existe algún $\mathbf{s_i''}$ en $\mathbf{S_i}$ tal que:

$$u_i(s_1', \ldots, s_{i-1}', \mathbf{s_i'}, s_{i+1}', \ldots, s_n') < u_i(s_1', \ldots, s_{i-1}', \mathbf{s_i''}, s_{i+1}', \ldots, s_n').$$

Así, si la teoría ofrece estrategias $(s_1', \ldots, s_n')$ como la solución pero estas estrategias no constituyen un Equilibrio de Nash, al menos un jugador tendrá un incentivo para desviarse de la predicción de la teoría, con lo que la teoría quedara desmentida por el desarrollo concreto del juego. Otra fundamentación muy parecida del Equilibrio de Nash incorpora la idea de convenio: si surge un acuerdo sobre cómo comportarse en un determinado juego, las estrategias fijadas por el convenio debe formar un Equilibrio de Nash; si no, habrá al menos un jugador que no se regirá por el convenio [2].

En el juego $G=\{S1, \ldots, Sn; u1, \ldots, un\}$, decimos que el perfil de estrategias puras $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*)$ es *un Equilibrio de Nash si para cada jugador* ***i***, $u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, \mathbf{s_i^*}, s_{i+1}^*, \ldots, sn^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, \mathbf{s_i},$

s_i*_{+1},..., s_n). Para todo **s_i** de **S_i**. Es decir, para cada jugador **i, s_i*** es una solución del problema Max u_i (s_1*,..., s_i*_{-1}, s_i, s_i*_{+1},..., s_n*) donde s_i es la variable de decisión y pertenece a S_i. O dicho de otro modo para cada jugador **i**, s_i* es una respuesta óptima a $S*_{-i}$. donde $S*_{-i}$ son las estrategias óptimas del restos de los jugadores.*

De esta definición se deduce que un Equilibrio de Nash es un perfil de estrategias del que ningún jugador desearía desviarse unilateralmente, es decir, ningún se arrepiente de la decisión tomada, dadas las estrategias decididas por el resto de los jugadores. Un Equilibrio de Nash está formado por estrategias que son óptimas para cada jugador dado las estrategias del resto de los jugadores.

Esto no significa que en un Equilibrio de Nash cada jugador esté alcanzando el mejor resultado posible, sino el mejor resultado condicionado por el hecho de que los demás jugadores jueguen las estrategias indicadas para ellos en dicho perfil [3].

El Equilibrio de Nash es el concepto central más frecuentemente utilizado para el análisis de los juegos no cooperativos. Un Equilibrio de Nash induce una situación estratégicamente estable debido a los resultados perjudiciales que los participantes prevén por alguna desviación unilateral. Naturalmente, en la evolución de tales posibles desviaciones, cada jugador ha de tener en cuenta las estrategias del resto de los jugadores y, en particular, las acciones que estas estrategias inducirían en respuesta a cada una de sus propias acciones. Ha de tener en cuenta, en otras palabras, las amenazas incorporadas en las estrategias de sus oponentes para responder óptimamente a ellas [1].

Consideremos *(S, f)* como un juego de *n* jugadores donde S_i es el conjunto de estrategias del jugador *i*, $S = \{S_1 \times S_2 \ldots \times S_n\}$ es el conjunto de perfiles de estrategias y $f = (f_1(x),\ldots, f_n(x))$ es la función de rentabilidad. Consideremos x_{-i} es el perfil de estrategias de todos los jugadores a excepción del jugador *i*. Cuando cada jugador $i \in \{1,\ldots, n\}$ escoge una estrategias x_i resultante del conjunto de perfiles de estrategias $x = (x_1,\ldots, x_n)$ entonces el jugador *i* obtiene una rentabilidad dada por $f_i(x)$. Hay que ser notar que la rentabilidad depende en el perfil de estrategias escogida, i.e., en las estrategias escogidas por el jugador *i* tanto como en las estrategias escogidas por los demás jugadores. Un perfil de estrategia $x^* \in S$ es un Equilibrio de Nash si ninguna desviación unilateral en la estrategia de algún jugador es provechoso para él [8]:

$$\forall_i, x_i \in S_i, x_i \neq x_i^* : f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*)$$

La función de rentabilidad (*payoff*) recibe como parámetros un perfil de estrategias y retorna una cantidad numéricas que representan la motivación de los jugadores. En otras palabras, es el beneficio que se obtiene por cada perfil de estrategia posible en el juego.

Una manera de encontrar el Equilibrio de Nash para juegos de ***n*** jugadores es: obtener el conjunto de perfiles del juego, y analizar cada perfil para determinar si es un Equilibrio de Nash. Para cada perfil (***x***) del juego, se realizan los desvíos de las estrategias por cada jugador, cambiando la estrategia de cualesquier jugador y fijando las del resto. Los jugadores tienen una función de rentabilidad (*payoff*) la cual regresa el beneficio obtenido para algún perfil dado, si algún jugador obtiene mayor beneficio por alguna desviación de su estrategia, el perfil ***x*** es descartado por no ser un Equilibrio de Nash.

5.2 Autómatas de estado finito para el EN

Los autómatas de estado finito son modelos matemáticos que reciben cadenas como entradas, y al procesarlas, éstos determinan si esas cadenas pertenecen al lenguaje que el autómata reconoce. A continuación se mostrar algunos autómatas de estado finito, para el modelado del Equilibrio de Nash.

Para modelar las estrategias de los jugadores se deben de definir los siguientes aspectos:

- Sea s_x^i cualquier estrategia del jugador ***i***, tal que $s_x^i \in S^i$, donde S^i es el conjunto de estrategias del jugador ***i***
- Las estrategias del jugador ***i*** son compuestas por un conjunto de acciones, $s_x^i = \{a_{x1}^i, a_{x2}^i, \ldots, a_{xn}^i\}$, donde $a_{xj}^i \in \Sigma^i$.

El autómata que se muestra a continuación, modela el conjunto de estrategias del jugador ***i***, donde:

$\Sigma = \{a_{x1}, a_{x2}, \ldots, a_{xn}\}$, son los símbolos del alfabeto
E = $\{P, P^0, P^1, .., P^n, H^0, .., H^m\}$, es el conjunto de de estados
P = es el estado inicial
□ = E x $\Sigma \rightarrow$ E, es la función de transición
F = $\{H^0, .., H^m\}$, son el conjunto de estados terminales

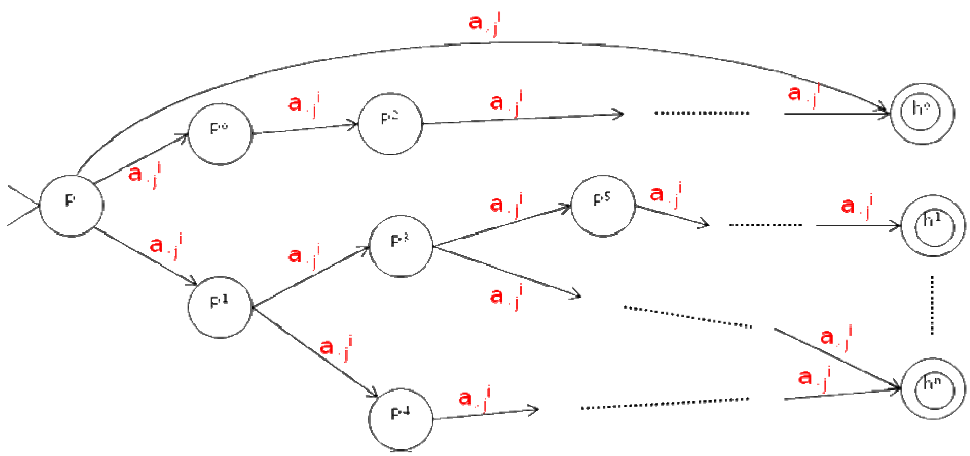


Figura 3. Autómata para las estrategias de cada jugador *i*

Para el modelado del Equilibrio de Nash, se deben de tomar en cuenta el conjunto de estrategias de todos los participantes, para así, determinar todos aquellos perfiles que forman parte del Equilibrio de Nash. El autómata es el siguiente:

Donde,
$\Sigma = \{a_{x1}, a_{x2}, \ldots, a_{xn}, \in, \Theta\}$, son los símbolos del alfabeto
E = $\{P, P^0, P^1, .., P^n, H\}$, es el conjunto de de estados
P = es el estado inicial
□ = E x $\Sigma \rightarrow$ E, es la función de transición

F = {H}, es el estado terminales

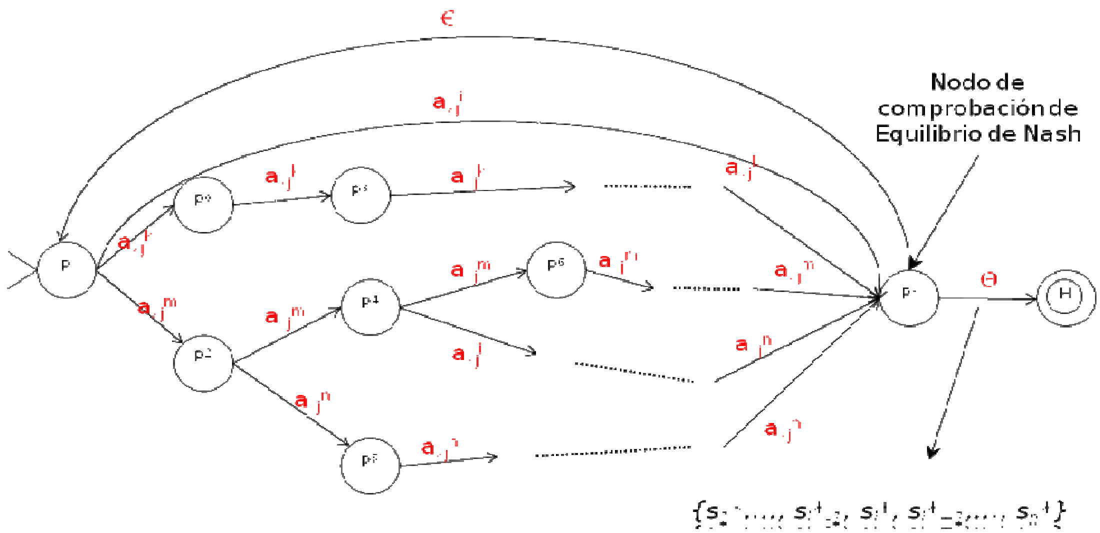


Figura 4. Autómata del Equilibrio de Nash

5.3 Autómata de estado finito para el juego de *Base Ball*

El lenguaje libre de contexto para el juego de *base ball* esta formado por los siguientes elementos:

- *V* es el alfabeto
- $\sum$ (el conjunto de terminales) es un subconjunto de *V*
- *R* (el conjunto de reglas) es un conjunto finito de $(V - \sum) \times V^*$
- *S* (el símbolo inicial) es un elemento de $V - \sum$
- Los miembros de $V - \sum$ son llamados *no terminales*.

En la tabla 5. Se muestra el conjunto de elementos terminales.

a1 ^{i}: movimiento a base 1
a2 ^{i}: movimiento a base 2
a3 ^{i}: movimiento a base 3
a4 ^{i}: movimiento a home
b ^{i}: bola
bg ^{i}: base por golpe
bp ^{i}: base por bolas
bo ^{i}: bolk
ca ^{i}: carrera
ce: cambio de equipo
d ^{i}: doble
dp ^{i}: doble play
f ^{i}: foul
h ^{i}: homerun

hi ^{i}: hit (imparable)
o ^{i} : out
p ^{i}: ponchado
r ^{i}: robo de base
s ^{i}: strike
t ^{i}: triple
tb ^{i}: toque de bola
tp ^{i}: triple play
w ^{i}: wild piche

Tabla 5. ∑ = Símbolos Terminales

En la tabla 6. Se muestra el conjunto de elementos no terminales.

B: bateo por primera vez
B': batear con un strike
B'': batear con dos strike
C: corredor
M: movimiento inseguro a base
MS: movimiento seguro a base
M': movimiento a primera base
M'': movimiento a segunda base
M''': movimiento a tercera base
M'''': movimiento a home
O: outs
O': primer out
O'': segundo out
P: pitcheo

Tabla 6. (V - ∑) = Símbolos No Terminales

En la tabla 7. Se muestra el conjunto reglas gramaticales.

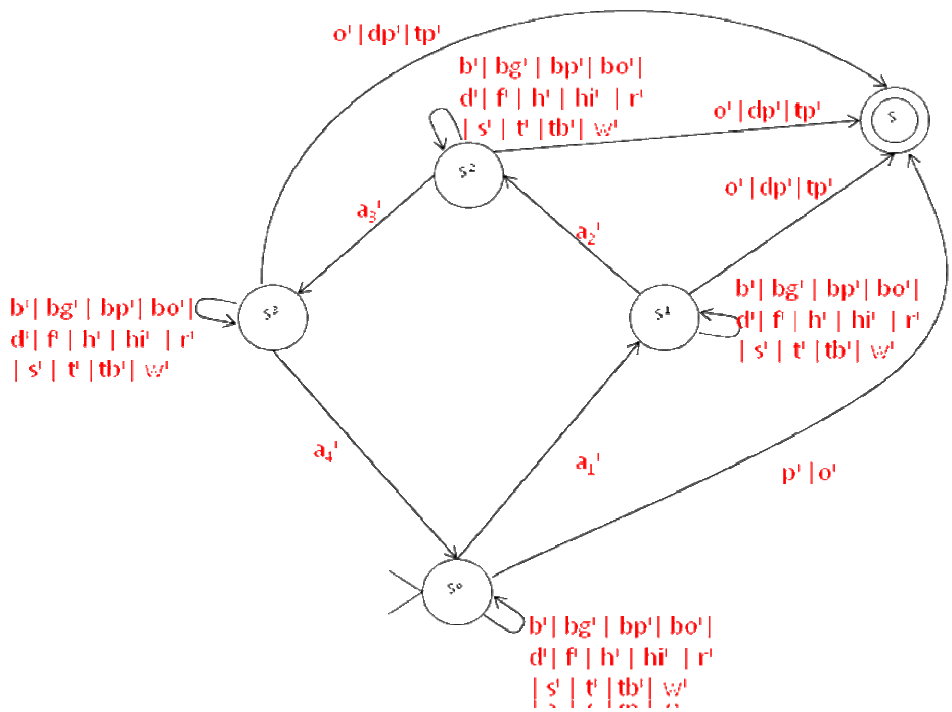
B→ s ^{i} B'	Un bateo genera un strike y volver a batear con un strike
B→ tb ^{i} MS	Un bateo genera un toque de bolas y un movimiento inseguro
B'→ s ^{i} B''	batear con un strike puede generar un una foul y volver a batear con dos strike
B'→ f ^{i} B''	batear con un strike puede generar un foul y volver a batear con dos strike
B''→ p ^{i}	batear con dos strike puede generar un ponche
B''→ f ^{i} B''	batear con dos strike puede generar un foul y volver a batear con dos strike
B→ f ^{i} B'	Un bateo puede generar foul y volver a batear con un strike
B→ h ^{i} MS	Un bateo puede generar un home run y el movimiento home run
B→ hi i MS	Un bateo puede generar un hit y un movimiento seguro
C→ r ^{i}	corredor puede generar un robo de bases
C→ M	corredor genera un movimiento inseguro
M→ (a1 ^{i} |a2 ^{i} |a3 ^{i} |a4 ^{i})	Un movimiento inseguro genera un

	movimiento de base
M→ ca ^{i}	Un movimiento inseguro puede generar una carrera
M→ o ^{i}	Un movimiento inseguro genera una un out
MS→ (a1 ^{i} |a2 ^{i} |a3 ^{i} |a4 ^{i})	Un movimiento seguro genera un movimiento de base
MS→ ca ^{i}	Un movimiento seguro genera una carrera
M'→ a1 ^{i} M''	movimiento de primera base genera movimiento y movimiento a segunda base
M''→ a2 ^{i} M'''	movimiento de segunda base genera movimiento y movimiento a tercera base
M'''→ a3 ^{i} M''''	movimiento de tercera base genera movimiento y movimiento a home
M''''→ ca ^{i}	movimiento de home genera carrera
O→ o ^{i} O'	Un outs genera un out y un primer out
O→ o ^{i} B	Un outs genera un out y un bateo
O→ ce ^{i} P	Un out genera cambio de equipo y el pitcheo
O'→ o ^{i}	El primer out genera un out
O'→ o ^{i} O''	El primer out genera un out y un segundo out
O'→ B	El primer out genera un bateo
O''→ ce	El segundo out genera puede generar un cambio de juego
O''→ B	El segundo out puede generar ir a batear
P→ b ^{i} P	Un pitcheo puede generar una bola, y volver a pichear
P→ bp ^{i} MS	Un pitcheo puede generar un base por bolas y hacer un movimiento
P→ w ^{i} M	Un pitcheo puede generar un wild pitch
P→ bg ^{i}	Un pitcheo puede generar base por golpe
P→ w M	Un pitcheo puede generar un error de pitcheo
P→ bo ^{i} MS	Un pitcheo puede generar un bok y un movimiento seguro

Tabla 7. R = Reglas gramaticales

El autómata de pila, se modela conforme al campo de juego, esto quiere decir que las bases (1er, 2da, 3era, Home, base especial) son los estados del autómata, las transiciones entre los estados están dados por los movimientos que un jugador pueda realizar. En la figura 5, Se muestra el autómata para el juego de *base ball*.

- E = { s^0, s^1, s^2, s^3, s }, es el conjunto de de estados
- s^0= es el estado inicial
- □ = E x ∑ → E, es la función de transición
- F = { s^0}, son el conjunto de estados terminales



5. Autómata de *Base Ball*= ({s0, s1, s2, s3, s}, s0, ∑, □, s)

6. Cronograma de actividades (plan de trabajo)

Actividades	Tiempo
Revisión de la literatura especializada y antecedentes. Desarrollo del protocolo de tesis.	Septiembre y Octubre 2009
Realizar propuesta formal e implementación del *EN*.	Noviembre 2009
Modelar el *EN* dentro de un juego de *BB.*	Diciembre 2009
Incorporación del *EN*, al simulador de jugadas de *BB.*	Enero 2010
Realizar simulaciones de partidos de *BB.*	Febrero 2010
Obtener estadísticas, resultados y conclusiones de las simulaciones.	Marzo y Abril 2010
Extrapolar las conclusiones a otros ámbitos.	Abril y Mayo 2010
Escribir la tesis.	Enero - Agosto. 2010
Defensa de tesis.	Septiembre 2010

7. Infraestructura

Se ocupará una computadora personal, para el desarrollo del simulador, para realizar simulaciones, estadísticas, así como, para el escrito de la tesis.

8. Estado del arte

8.1. Equilibrio de Nash

El Equilibrio de Nash como condición necesaria (y algún caso también suficiente) para que un perfil de estrategias sea la solución de un juego, es decir, una predicción valida sobre el comportamiento de jugadores racionales [3]. A pesar de que el Equilibrio de Nash es discutible el concepto más importante en la Teoría de Juegos, notablemente ha sido poco estudiado el problema de computarizar el Equilibrio de Nash en un juego de forma normal.

Se conoce que cualquier juego de forma normal garantiza tener al menos un Equilibrio de Nash [10]. Un juego en forma normal esta definido como $G= \{S_1,\ldots, S_n; u_1,\ldots, u_n\}$, donde:

- ***n*** es el numero de jugadores (1,…, n).
- $(S_1,\ldots, S_n)$ es el conjunto de estrategias de cada jugador.
- $(u_1,\ldots, u_n)$ son las funciones de beneficio (*payoff*) de cada jugador.

El algoritmo más comúnmente utilizado para encontrar el Equilibrio de Nash en juegos de dos jugadores, es el algoritmo de Lemke-Howson [11], el cual es un caso especial del método de Lemke [12] para resolver problemas de complementariedad lineal. El algoritmo de Lemke-Howson es un algoritmo de *pivoting* complementario. En donde una selección arbitraría de alguna acción para el primer jugador es determina por el primer pivote, después, cada sucesivo pivote es determinado únicamente por el estado actual del algoritmo, hasta que el equilibrio es encontrado. Así, cada acción para el primer jugador puede ser pensada, de como definir una ruta del punto de inicio al Equilibrio de Nash. En la implementación de Lemke-Howson en Gambit [13], la primera acción del primer jugador es seleccionada.

Para juegos de ***n*** jugadores, hasta hace poco tiempo, la *subdivisión simplicial* [14] y sus variantes, eran el estado del arte. Este método aproxima a un punto fijo de una función la cual es definida en un simplotope (es un producto de elementos o figuras contenida dentro de un espacio euclidiano de un número especificado). La aproximación es alcanzada triangulando el simplotope con un acoplamiento de granularidad dada. Y atravesando la triangulación a lo largo de una trayectoria fija.

Más recientemente, Govindan y Wilson en 2003 introdujeron una continuación de la *subdivisión simplicial* para el Equilibrio de Nash en un juego de ***n*** jugadores. El trabajo fue, primero perturbando un juego que tuviera un equilibrio conocido, y entonces remontando la solución al juego original como la magnitud de las perturbaciones alcanzadas a cero. La estructura del teorema de Kohlberg y Mertens en 1986, garantiza que es posible trazar el juego y una solución simultáneamente. Este método fue implementado por Blum, quien también extendió para resolver juegos de gráficas y diagramas de influencia de multi-agentes [15].

El método propuesto por Ryan Porter [16] esta inspirado fuertemente en el procedimiento descrito por Dickhaut y Kaplan en 1991, para encontrar todos los Equilibrios de Nash. El programa enumera todos los posibles pares de soporte para juegos de dos jugadores. Para cada par de soportes, se comprueba si existe un Equilibrio de Nash consistente con ese par. Un método de enumeración similar fue sugerido por Mangasarian en 1964, basado en enumeración de vértices de un *polytope*.

Con el incremento de confianza en la Teoría de Juegos como una fundación para subastas y comercio electrónico, algoritmos eficientes para computarizar el equilibrio de juegos de múltiples jugadores, son de gran interés práctico y teórico. La complejidad computacional para encontrar el Equilibrio de Nash para juegos de bimatriz es un problema abierto. En el artículo de Michael L. Littman [5] trata un problema estrechamente relacionado con el de encontrar el Equilibrio de Nash en juegos de bimatriz de rentabilidad promedio, y presenta un algoritmo de tiempo polinómico. El método se basa en el teorema de *folk* de Teoría del Juego y muestra cómo un conjunto de estrategias de estado finito se puede encontrar de manera eficiente.

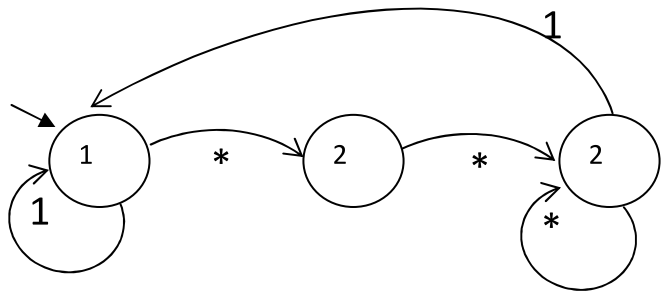
Un juego de repetición bimatriz es jugado por dos jugadores, en donde cada jugador tiene su propio conjunto de acciones de tamaño *n*. El juego es por rondas, con dos jugadores tomando decisiones de manera simultánea en cada ronda. Si un jugador *1* escoge la acción $1 <= i^1 <= n^1$ y el jugador *2* escoge $1 <= i^2 <= n^2$, ellos reciben una rentabilidad de $P^1\ i^1 i^2$ y $P^2\ i^2\ i^1$ respectivamente. En juegos de repetición, los jugadores seleccionan sus acciones, posiblemente de manera estocástica, vía una estrategia del historial de sus interacciones. El objetivo de cada jugador en juegos de repetición es adoptar una estrategia que maximice su media de rentabilidad esperada. Un par de estrategias es un Equilibrio de Nash si para cada estrategia es optimizada con respecto a los demás, ningún jugador puede mejorar su rentabilidad promedio, cambiando de manera unilateral sus estrategia.

El artículo de Michael L. Littman [5] considera el problema siguiente, dado un juego especificado por las matrices de rentabilidad $P^1\ P^2$, debe de retorna un par de estrategias que constituyan un Equilibrio de Nash para un juego de repetición bimatriz de rentabilidad promedio. Para especificar el problema del equilibrio computacional, se debe concretar acerca de la representación de entrada y salida. La representación de entrada esta relativamente daba por $(p, q) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, la función P^p es una matriz de n^p X n^q, por lo tanto el tiempo computacional del algoritmo debe de ser polinomial. La salida de un equilibrio computacional es un par de estrategias.

Es bien conocido que los juegos de bimatriz tienen al menos un Equilibrio de Nash. Sin embargo, las estrategias de un juegos de repetición pueden ser infinitamente grande, entonces es necesario usar una representación finita para las estrategias cuando se computariza el Equilibrio de Nash. En este artículo, se consideran dos formas de representación de las estrategias, una por las *maquinas de estado finito y counting-node extensión* en la cual las acciones pueden ser repetidas un número de veces especifico. Ambos representan estrategias de estado finito, pero *counting-node extensión* puede dar lugar a representaciones más pequeñas de forma exponencial.

Una maquina de estado finito de estrategias para el jugador *p* en contra de un oponente *q* esta etiquetado mediante un grafo directo. Un nodo del grafo esta diseñado para ser nodo de partida. Cada nodo del grafo esta etiquetado con la probabilidad de distribución sobre cada acción tomada por *p*. Los arcos salientes son etiquetados por las acciones de *q*. No hay dos arcos en un simple nodo que comparta la misma etiqueta; en particular las transiciones no están influenciadas por las propias acciones de los jugadores. Un arco de salida para cada nodo es etiquetado con * para diseñar un arco por defecto, tomados si alguna de las acciones del jugador *q* no concuerda con alguna de las otras etiquetas. El tamaño de la maquina de estado finito de las estrategias, esta dada por la suma de los nodos y los arcos del grafo.

La siguiente figura muestra un ejemplo de una maquina de estado finito de estrategias para un juego (2 x 2) acciones:



El jugador *p* comienza en el nodo de la izquierda y selecciona la acción 1. Entonces si el oponente *q* selecciona la acción 1, *p* retorna al nodo de la izquierda para continuar escoge la acción 1. Sin embargo, en cualquier otra acción escogida por *q*, una transición es realizada para el nodo del medio, donde la acción 2 es escogida. Siguiendo esto, cualquier opción de *q* resulta en una transición para el nodo de más a la derecha, en la cual la acción 2 continúa a ser escogida hasta que *q* escoge la acción 1. En este punto, *p* retorna al nodo izquierdo otra vez.

La estrategia expresada en la figura anterior es la de dilema del prisionero; si la acción 1 es cooperativa y la acción 2 es un defecto. El jugador decepciona dos veces en respuesta a la decepción, pero de otra manera copera. Mientras la maquina de estados finitos proveen un simple y gran lenguaje para expresar estrategias, algunas estrategias básicas llegan a ser engorrosa para ser escritas en la maquina de estados finitos.

Aunque existen procesos de aprendizaje para los que la distribución empírica de juego se acerca al Equilibrio de Nash, es una cuestión abierta si los propios jugadores pueden aprender a jugar las estrategias de equilibrio, sin asumir que tienen un conocimiento previo de las estrategias de sus oponentes y / o rentabilidad. En el artículo de Dean P. Foster [6] se exponen clases de hipótesis estadísticas de procedimientos de prueba para resolver el siguiente problema. Considere un partido de fase finito G, que se repite infinitas veces en cada momento, los jugadores tienen hipótesis acerca de las estrategias de sus oponentes. Ellos suelen probar sus hipótesis en contra de las recientes acciones de los oponentes, cuando una hipótesis falla la prueba, se adopta una nueva. El juego es casi racional en el sentido de que en cada momento las estrategias de los jugadores son mejores respuestas a sus creencias. Se demuestran que al menos 1-Є del tiempo *t* estas estrategias constituyen la prueba de hipótesis un equilibrio del juego repetido de *t*, de hecho las estrategias que están cerca de ser un sub juego perfecto para largos períodos de tiempo. Además a todos los jugadores para que la predicción importe, es decir, donde las mejores respuestas dependen del comportamiento de los oponentes.

En el artículo de Takashi Maeda [7], se consideran juegos de matrices difusas, es decir, juegos de dos personas de suma cero con rentabilidad difusa. Basado en el orden máximo difuso, para estos juegos, se definen tres tipos de conceptos de estrategias de equilibrio *minimax*. En primer lugar, se demuestra que estas estrategias de equilibrio se caracterizan como las estrategias de Equilibrio de Nash de una familia de juegos de matrices bi-paramétrica con funciones de rentabilidad *crisp* (*crisp payoffs)*. En segundo lugar, se investigan las propiedades de los valores de los juegos de matrices difusas por medio de medidas de posibilidad y necesidad. Además, se muestra un ejemplo numérico para ilustrar la utilidad de este enfoque.

8.2. Simulador del juego de *Base Ball*

En un trabajo previo realizado, se analizo el juego de *base ball* para la toma de decisiones. Después de un análisis exhaustivo se identifico las jugadas básicas que se realizan en el *base ball*, ordenándolas y ponderándolas en base a su frecuencia de ocurrencia. A partir de ese análisis se desarrollo el lenguaje formal, Libre de Contexto, para describir el juego de *base ball,* cuya piedra angular para formular el lenguaje es la gramática libre de contexto; el lenguaje es reconocido por el correspondiente autómata de pila determinista. Así el juego de *base ball* es modelado, formalmente, mediante una máquina de estados finito (Autómata de *Turing*).

La gramática libre de contexto, contiene los elementos terminales y no terminales así como las reglas que definen los movimientos correctos que se construyen a partir de los elementos (terminales y no terminales), en esta sección del trabajo, el análisis fue complejo, esto debido a que se evito que en las reglas no produjeran ciclos, y a su vez que las jugadas compuestas fueran correctas.

El autómata de pila, se modela conforme al campo de juego, esto quiere decir que las bases (1er, 2da, 3era, Home, base especial) son los estados del autómata, las transiciones entre los estados están dados por los movimientos que un jugador pueda realizar. Una vez, definido la gramática libre de contexto y el autómata de pila, se procedió a programarlo en el lenguaje de C ansi. Se realizaron diferentes ejercicios, comprobando que todo estuviera correcto.

En base a las observaciones acerca de cómo suministrar las cadenas al autómata, se opto por desarrollar un generador de jugadas aleatorias del *base ball*, para hacer mas fácil la simulación de todo un partido de *base ball*.

El generador de jugadas aleatorio, no solo genera jugadas al azar; produce jugadas validas del *base ball*, y a su vez las produce en base a su frecuencia de ocurrencia. Una forma de validar, que esta todo correcto, fue suministrar las cadenas producidas al autómata de pila y comprobar que esas cadenas fueran reconocidas por el autómata.

Una vez, teniendo todo funcionando y obteniendo estadísticas de cada jugador (ranking), los costos de las jugadas por cada equipo, los marcadores, etc. Lo siguiente era como aplicar estrategias para que el equipo a la ofensiva obtuviera el mayor beneficio para ganar.

Las jugadas de sacrificio son jugadas tales, comparadas con respecto a otras y en ciertas circunstancias, aumentan las probabilidades de éxito en el juego. Las jugadas de sacrificio son las estrategias que se tomaron para analizar los resultados al aplicarlas. El objetivo de utilizarlas es:

I. De manera gradual, poco a poco, garantizar ganar el juego.
II. Asegurar posiciones intermedias, las cuales a lo largo y/o en conjuntos garantizar acumular puntos a favor.
III. Vistas localmente parecen perdidas, pero en conjunto al equipo le favorecen.

Los ejercicios propuestos fueron la clave para las observaciones, al aplicar las jugadas de sacrificio durante el partido, esencialmente en dos factores importantes: **momentos** y **circunstancias** del encuentro. No siempre aplicar las jugadas de sacrificio se obtiene buenos resultados, todo esta altamente proporcional a dos factores mencionados.

A que se refiere con las circunstancias:

- El equipo va ganando escasamente.
- El equipo va ganando ampliamente.
- El equipo va perdiendo con margen escaso.
- El equipo va perdiendo con margen amplio.
- Siempre (sin tomar en cuenta el marcador).

A que se refiere con los momentos del partido:

- En las primeras entradas (1er – 3era)
- En las entradas intermedias (4ta – 6ta)
- En las entradas finales (7ma – 9na)
- Algunas combinaciones de las 3 anteriores.

Se obtuvieron resultados importantes, de cuando aplicar jugadas de sacrificio. Ya que estas pueden beneficiar o perjudicar al equipo dependiendo de los dos factores importantes (circunstancias y momentos).

9. Contribuciones o resultados esperados

Se espera entrega:

- Modelado del Equilibrio de Nash.
- Simulador del Equilibrio de Nash.
- Un simulador del juego de *Base Ball*.
- Integración del Equilibrio de Nash para identificar o definir estrategias ganadoras en el juego de *Base Ball.*
- Tesis Impresa.

Referencias

[1] Fernando Vega Redondo. *Economía y Juegos*, 1era Edición, Antoni Bosh, España, 2000.

[2] Robert Gibbons, Paloma Calvo and Xavier Vilá. *Un primer curso de teoría de juegos*, 1era. Edición, Antoni Bosh, España, 2003.

[3] Joaquín Pérez, José Luis Jimeno and Emilio Cerdá. *Teoría de Juegos*, 1era. Edición, Pretice Hall, España, 2003.

[4] La enciclopedia libre Wikipedia. *Equilibrio de Nash*, http://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrio_de_Nash, consulta: 12 de septiembre 2009.

[5] Michael L. Littman, Peter Stone. *A Polynomial time Nash Equilibrium Algorithm for Repeated Games*, Decision Support System, vol: 39, 2005.

[6] Dean P. Foster, Peyton Young. *Learning, hypothesis testing, and Nash equilibrium*, Games and Economic Behavior, vol: 45, 2003.

[7] Takashi Maeda. *On characterization of equilibrium strategy of two-person zero-sum games with fuzzy payoffs*, Fuzzy Sets and Systems, vol: 139, 2003.

[8] ReferenceAnswers**.** *Equilibrio de Nash*, http: //www.answers.com/topic/nash-equilibrium, consulta: 12 de septiembre 2009.

[9] Krishnendu Chatterjee, Rupak Majumdar y Marcin Jurdzinski. *On Nash Equilibria in Stochastic Games*, Computer Science Logic, Proceedings, vol: 3210, 2004.

[10] Nash, J. *Equilibrium points in n-person games*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36, 48–49, 1950.

[11] Lemke, C., Howson, J. *Equilibrium points of bimatrix games*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 12, 413–423, 1964.

[12] Lemke, C. *Bimatrix equilibrium points and mathematical programming*. Management Science 11, 681–689, 1965.

[13] McKelvey, R., McLennan, A., Turocy, T. Gambit: Software tools for game theory. Available at http://econweb.tamu.edu/gambit/. 2004.

[14] Van der Laan, G., Talman, A., van der Heyden, L. *Simplicial variable dimension algorithms for solving the nonlinear complementarity problem on a product of unit simplices using a general labelling*. Mathematics of Operations Research. 1987

[15] Koller, D., Milch, B. *Multi-agent influence diagrams for representing and solving game*. In: Proceedings of the 17th International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2001

[16] Ryan Porter, Eugene Nudelman, and Yoav Shoham. *Simple Search Methods for Finding Nash Equilibrium.* Computer Science Department Stanford University Stanford, 2004.

[17] La enciclopedia libre Wikipedia. *Baseball*, 2009, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title= Baseball& oldid=314066496 [consulta: 13 de septiembre 2009].

[18] Jaime Cervantes Pérez. *¿Qué es el Béisbol?,* http://www.jaimecervantes.netfirms.com/ que%20es%20el%20beisbol%20I.htm [consulta: 11 de septiembre 2009].

[19] La enciclopedia libre Wikipedia. Estrategias, 2009, http://es.wikipedia.org/w/index.php?title= Estrategia&oldid=29511016 [consulta: 14 de septiembre 2009].

[20] H. Mintzberg and J.B. Quinn. El Proceso Estratégico, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1993.

[21] Monografías. *Estrategias de aprendizaje*, http://www.monografias.com/trabajos14/ decisiones-aprendizaje/decisiones-aprendizaje.shtml, [consulta: 15 de septiembre 2009].

[22] La enciclopedia libre Wikipedia. *Glosario de base ball*, http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo: Glosario_de_béisbol [consulta: 13 de septiembre 2009].

[23]La enciclopedia libre Wikipedia. *Teoría de juegos*, 2009, http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teor%C3%ADa_de_juegos&oldid=29628754 [consulta: 15 de septiembre 2009].

[24] Monografías. *Teoría de juegos*, http://www.monografias.com/trabajos18/teoria-de-juegos/teoria-de-juegos.shtml, [consulta: 12 de septiembre 2009].

[25] Fundación Universitaria Andaluza. "Inca Garcilaso", *Teoría de juegos*, http://www.eumed .net/cursecon/juegos/, [consulta: 13 de septiembre 2009].

[26] J. von Neumann and O. Morgenstern. "Theory of Game and Economic Behavior". Princenton, Nueva Jersey: Princenton University Press, (1944).

[27] Monografías, *Toma de decisiones*, http://www.monografias.com/trabajos12/decis/ decis.shtml, [consulta: 15 de septiembre 2009].

[28] Deissy Alexandra Rubio Hernández, *Toma de decisiones,* http://www.tuobra.unam.mx/ obrasPDF/publicadas/040924180447.html [consulta: 16 de septiembre 2009].

Fecha de inicio	Fecha de terminación
Septiembre de 2009	Septiembre de 2010

Firma del alumno: ______________________________

Comité de aprobación del protocolo de tesis

Dr. José Matías Alvarado Mentado: ______________________________

Dr. Sergio Víctor Chapa Vergara: ______________________________

Dr. Adriano de Luca Pennacchia: ______________________________