

Autómatas Celulares Lineales con propiedades en la frontera

A. Cáceres González

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados -IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica/ Sección Computación
acaceres@alpha.cs.cinvestav.mx

Agosto 1997

Resumen

El presente reporte contiene un estudio acerca de las reglas de evolución de autómatas celulares lineales con la característica de que cambiando el estado de una célula en un extremo de la vecindad (en la segunda sección del reporte se encontrará una definición de vecindad), cambia el resultado de la regla de evolución para la célula en transición. El estudio en la primera parte está centrado sólo en las reglas de evolución biestables en una vecindad de 3 células. Se extenderán los resultados obtenidos a autómatas celulares lineales cuyas reglas permiten un conjunto de más de dos estados.

Contenido

1	Introducción	3
2	Generalidades	4
3	La gráfica de la función global y su matriz básica	6
4	Cálculo de preimágenes a partir de la matriz básica	11
5	Diagramas de Bruijn	13
6	Diagramas de subconjuntos	20
7	Extensión a AC lineales de k mayor o igual a 2 estados	22

8 Conclusiones y perspectivas	27
9 Agradecimientos	28

1 Introducción

Los autómatas celulares son un área de estudio dentro del área de la ciencia abstracta de la computación, y se empezaron a estudiar a mediados el siglo XX, cuando John von Neumann propuso “The theory of self-Reproducing Automata”, que no fue publicada sino hasta después de su muerte, cuando en 1957 A.W. Burks los rescató y publicó en 1966 [1], la segunda parte de “The theory of self-Reproducing Automata” está basada en un manuscrito de von Neumann que tituló :“The Theory of Automata: Construction, Reproduction, Homogeneity”.

Lo que von Neumann deseaba, era mostrar que con 29 estados podía construir una máquina que pudiera construir cualquier máquina incluyendo a ella misma. Von Neumann no terminó su proyecto, tal vez porque abandonó la idea original y empezó con otro modelo [2]. Unos diez años más tarde, en 1964-1965 E.F. Codd trabajó con una variante que requería solamente 8 estados por célula. Entre las personas que trabajaron con autómatas celulares podemos mencionar a Stanislaw M. Ulam, Eduard F. Moore, Claude Shanon y otros [3].

En los años 60's, John Conway ideó un juego con una configuración de autómata celular (AC) más sencilla y que denominó “Life” y fué ampliamente conocido cuando se publicó en la sección de juegos matemáticos de la revista Scientific American en octubre de 1970 [4].

Otros personajes que estudiaron los autómatas celulares en esta era fueron Robert T. Wainwright, quien mantenía una comunicación por carta con Martin Gardner [3], John Conway y otros.

A principios de los 80's ya había gran interés en el estudio formal de los autómatas celulares por parte de científicos profesionales debido a las investigaciones que Steven Wolfram publicó en 1983[5]. Wolfram se ocupó de estudiar los autómatas celulares lineales (de 1-D), proporcionando resultados acerca de las propiedades que tienen con el fin de clasificarlos de acuerdo a su comportamiento [6].

Desde principios de los 80's, en la Universidad Autónoma de Puebla, México, se han dedicado al estudio de los autómatas celulares generando multiples herramientas y programas de computadora para el estudio de los autómatas celulares, como los diagramas de Bruijn, los diagramas de subconjuntos y los diagramas de parejas [7]. Han creado una serie de programas de computadora llamados NXLCAU, que estudian los autómatas celulares lineales con vecindad de 2,3,4,5 células y hasta 9 estados en el caso de vecindad de 2 células.

2 Generalidades

Un AC lineal es un sistema dinámico que evoluciona en tiempo y espacio discretos. El espacio de acción del AC lineal es un arreglo lineal, en donde cada casilla se llama célula y el valor de cada célula se toma de un conjunto finito \mathbf{E} de valores llamados estados y \mathbf{k} es la cantidad de elementos que pertenecen al conjunto \mathbf{E} .

El conjunto de todas las células en el arreglo forman el estado global del AC, también es llamada la configuración espacial y denotaremos con la letra \mathbf{G} al conjunto de las configuraciones globales de un AC.

Ahora, dada una configuración global

$$c^t \in G \quad (1)$$

en el tiempo \mathbf{t} , una regla de evolución genera una nueva configuración

$$c^{t+1} \in G \quad (2)$$

asignando estados a todas las células de manera síncrona en base a los estados de una secuencia finita de células contiguas llamada vecindad en la configuración \mathbf{c}^t .

Llamamos longitud de la vecindad al número de células que están implicadas en la asignación del valor de la célula central en la siguiente generación. La longitud de la vecindad está dada por $\mathbf{n}=2\mathbf{r}+1$, donde \mathbf{r} es la cantidad de células a la derecha (o a la izquierda) de la célula en transición.

El arreglo en el cual el AC lineal está definido, puede ser un conjunto de \mathbf{m} celdas colocadas en forma de anillo, es decir que después de la última celda \mathbf{x}_m , sigue la primera

$$x_{m+1} = x_1, \quad (3)$$

donde

$$x_i \in E; \quad (4)$$

o bien como un arreglo semi infinito por la derecha o infinito por ambos lados. Si es el primer caso, denotaremos el conjunto de celdas dispuestas en forma de anillo por \mathbf{G}_m , si es infinito por la derecha \mathbf{G}^+ , si es infinito por la izquierda \mathbf{G}^- y si es infinito por ambos lados \mathbf{G} simplemente.

Hay aún otra forma de tratar los autómatas celulares lineales, y es considerar un espacio finito por ambos lados de \mathbf{n} células \mathbf{G}_m , pero en vez de tratarse de un anillo, es tratarlo de manera lineal, donde la última célula no es vecina de la primera. En este

caso en cada evolución de AC lineal el espacio de configuraciones globales se reduce.

Una función global \mathbf{X} transforma una configuración global en otra aplicando una regla de transición local \mathbf{f}_X (que asigna un estado a una célula en base a los estados de las células en una vecindad alrededor de la célula en transición), la función global \mathbf{X} está definida como una transformación del mismo arreglo unidimensional

$$X : G \rightarrow G, \quad (5)$$

y la función de transición o regla de evolución local

$$f_X : E^n \rightarrow E. \quad (6)$$

Podemos indicar con \mathbf{f} también a la regla de evolución local \mathbf{f}_X queriendo decir con esto que a la secuencia \mathbf{s} afectada por \mathbf{X} se le aplica la regla de evolución \mathbf{f}_X a cada vecindad que se pueda formar.

Las reglas de evolución para AC lineales de 2 estados que cumplen

$$1 - x_i^{t+1} = f(1 - x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, x_{i+r}^t) \quad (7)$$

y todos los estados están representados en la imagen de la función, tienen propiedades determinantes por la izquierda. Y tienen propiedades determinantes por la derecha las reglas de evolución que cumplen con:

$$1 - x_i^{t+1} = f(x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, 1 - x_{i+r}^t) \quad (8)$$

Y también todos los estados están representados en la imagen de la regla de evolución. Definiendo la función de manera explícita, tenemos la tabla 1 para un AC lineal (2,1) con propiedades de izquierda, y la tabla 2 para un AC lineal (2,1) con propiedades de derecha.

Regla de evolución para AC con propiedades de izquierda:

$f(000) = k_1$	$f(100) = 1 - k_1$	(9)
$f(001) = k_2$	$f(101) = 1 - k_2$	
$f(010) = k_3$	$f(110) = 1 - k_3$	
$f(011) = k_4$	$f(111) = 1 - k_4$	

Regla de evolución para AC con propiedades de derecha:

$f(000) = k_1$	$f(001) = 1 - k_1$	(10)
$f(010) = k_2$	$f(011) = 1 - k_2$	
$f(100) = k_3$	$f(101) = 1 - k_3$	
$f(110) = k_4$	$f(111) = 1 - k_4$	

3 La gráfica de la función global y su matriz básica

Sea (k,r) un AC con longitud de vecindad $n=2r+1$ y un conjunto de k estados. La gráfica de la función f denotada por

$$Gr_{n-1}(f) \quad (11)$$

El conjunto de vértices está formado por todas las secuencias binarias

$$v_i = i_0 \cdots i_{n-2}. \quad (12)$$

Las aristas son líneas dirigidas de un vértice i a otro vértice j . Existe una arista dirigida $\mathbf{e}-(ij)$ saliendo del vértice i y conectando con el vértice j si existe una secuencia

$$s_1 \cdots s_{n-1} \quad (13)$$

tal que

$$f(i_0 \cdots i_{n-2} s_1 \cdots s_{n-1}) = j_0 \cdots j_{n-2} \quad (14)$$

para AC lineales con propiedades de izquierda, para AC lineales con propiedades de derecha, tenemos de manera similar:

$$f(s_1 \cdots s_{n-1} i_0 \cdots i_{n-2}) = j_0 \cdots j_{n-2} \quad (15)$$

En esta gráfica se permiten aristas repetidas y ciclos de longitud 1. Las aristas de la gráfica pueden estar etiquetadas con la secuencia de dígitos que cumplen la condición antes mencionada.

La matriz de adyacencia de esta gráfica, está denotada por

$$Ad_{n-1}(f) \quad (16)$$

y se llama también la matriz básica de f . Si todas las entradas $\mathbf{a}-(ij)$ de la matriz básica de la función tienen valor 1, entonces la gráfica de la función es una gráfica completamente conectada, y quiere decir que podemos alcanzar cualquier vértice desde cualquier vértice en una generación.

Teorema 1 Si f es una regla de evolución como la definida como en (1) o en (2) para un AC $(2,1)$.

$$Gr_2(X) \quad (17)$$

tiene

$$v_{out} = 4 \quad (18)$$

y

$$v_{in} = 4 \quad (19)$$

en cada vértice.

$$v_{out} \quad (20)$$

es la valencia de salida de cada nodo y

$$v_{in} \quad (21)$$

la valencia de entrada en cada nodo.

Demostración.- Si estamos hablando de un AC (2,1) y su regla de evolución es como la que se muestra en la tabla 1 observamos que los nodos de la gráfica de la función

$$Gr_2(f) \quad (22)$$

tienen 2 dígitos binarios, los cuales son 00, 01, 10 y 11. Sea

$$x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2 \quad (23)$$

cualquier secuencia de este tipo;

$$x_1x_2 \quad (24)$$

representa la secuencia que etiqueta al nodo i de salida de una arista $e_{-(ij)}$,

$$z_1z_2 \quad (25)$$

representa la secuencia de dígitos binarios que etiqueta al nodo de llegada de la arista $e_{-(ij)}$. Entonces para que exista una arista del nodo

$$x_1x_2 \quad (26)$$

al nodo

$$z_1z_2 \quad (27)$$

debemos encontrar una secuencia

$$y_1y_2 \quad (28)$$

tal que

$$f(x_1x_2y_1y_2) = z_1z_2 \quad (29)$$

aplicando la regla de evolución a cada vecindad. Con este tipo de secuencias

$$x_1x_2y_1y_2 \quad (30)$$

podemos tener hasta 16 diferentes, y todas ellas definen una secuencia de 2 dígitos, porque la regla de evolución considera todos los casos.

Ahora tenemos 16 ligas en la gráfica. Podemos dividir el problema en dos casos primero demostraremos que la valencia de salida de cada nodo es 4. Después demostraremos que la valencia de entrada a cada nodo es 4:

Caso 1 La valencia de salida de cada nodo. En este caso, estamos averiguando cuantas configuraciones cumplen con

$$f(c_1c_2y_1y_2) = z_1z_2; \quad (31)$$

donde

$$c_1c_2 \quad (32)$$

representan cualquier configuración de dos dígitos binarios que permanece constante. Para generar a **z_1** hay solamente 2 posibilidades de lograrlo ya que **c_1** y **c_2** permanecen sin cambio. Para formar a **z_2** hay 4 maneras ya que **c_2** permanece sin cambio en la configuración

$$c_2y_1y_2. \quad (33)$$

Como

$$c_2y_1 \quad (34)$$

es una configuración común en las configuraciones para formar

$$z_1z_2, \quad (35)$$

y dado que

$$c_1c_2 \quad (36)$$

es fijo solamente se pueden formar

$$z_1z_2 \quad (37)$$

a partir de 4 configuraciones. Esta es la valencia de salida de cada nodo.

Caso 2 La valencia de entrada a cada nodo. Podemos replantear el problema preguntando cuantas configuraciones resuelven

$$f(x_1x_2y_1y_2) = c_1c_2, \quad (38)$$

Para generar **c_1** hay 8 configuraciones posibles de

$$x_1x_2y_1 \quad (39)$$

y para formar **c_2** también hay 8 configuraciones de

$$x_2y_1y_2. \quad (40)$$

Pero dado que la regla de evolución cumple con (1) y tienen la forma de la tabla 1, entonces solamente hay 4 configuraciones para **c-1** y 4 para **c-2**. Ahora,

$$x_2y_1 \tag{41}$$

son una secuencia que es común a las 8 configuraciones que forman

$$c_1c_2, \tag{42}$$

y solamente hay 4 combinaciones de

$$x_2y_1 \tag{43}$$

para formarlas, por lo que hay 4 secuencias

$$x_1x_2y_1y_2 \tag{44}$$

que bajo la función global **X** generan la secuencia

$$c_1c_2; \tag{45}$$

la cual es la valencia de salida. **q.e.d.**

Observaciones.- Si **f** es una regla de evolución como la definida como en (1) o en (2) para un AC (2,1).

$$Ad_2(F) \tag{46}$$

tiene las siguientes características:

a) La suma de las entradas de cualquier renglón o columna es igual a 4; que es la valencia de cada nodo.

b) Para cada entrada **a-(ij)** de

$$Ad_2(f); \tag{47}$$

a-(ij) = a-(gh), donde

$$g = (i + 2) \text{ mod } 4, \tag{48}$$

y

$$h = (j + 2) \text{ mod } 4 \tag{49}$$

cuando la regla de evolución es del tipo (7).

Nota Cuando i o j son igual a 2, entonces g y h son igual a 0, pero como 4 está en la misma clase de equivalencia de 0, entonces podemos decir que $4 \text{ mod } 4 = 0$. Esto es con el fin de que el índice concuerde con la manera tradicional de etiquetar las filas y las

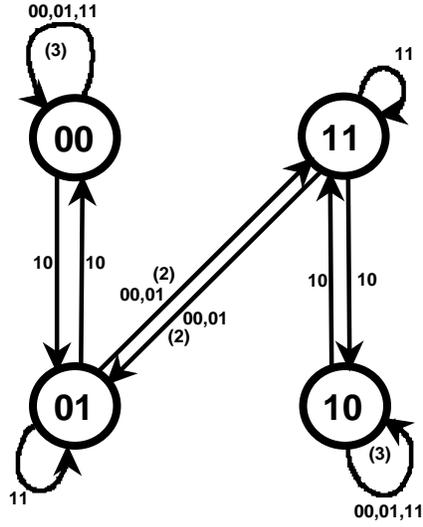


Figura 1: Gráfica de la función global $\text{Gr}_2(f)$ del AC lineal (2,1) Regla 180

columnas en una matriz.

Ejemplo Sea f el AC (2,1) Regla de evolución 180 de acuerdo al criterio de Wolfram [5].

$f(000) = 0$	$f(100) = 1$	(50)
$f(001) = 0$	$f(101) = 1$	
$f(010) = 1$	$f(110) = 0$	
$f(011) = 0$	$f(111) = 1$	

Configuraciones de 4 dígitos y su resultado bajo X

$f(0000) = 00$	$f(0100) = 11$	$f(1000) = 10$	$f(1100) = 01$	(51)
$f(0001) = 00$	$f(0101) = 11$	$f(1001) = 10$	$f(1101) = 01$	
$f(0010) = 01$	$f(0110) = 00$	$f(1010) = 11$	$f(1110) = 10$	
$f(0011) = 00$	$f(0111) = 01$	$f(1011) = 10$	$f(1111) = 11$	

$$\begin{array}{cccc}
& 00 & 01 & 10 & 11 \\
00 & \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
01 & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\
10 & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \\
11 & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)
\end{array} \tag{52}$$

Matriz básica **Ad-2(f)**, AC lineal(2,1) Regla 180.

La gráfica **Gr-2(f)** de la función es la que se muestra en la figura 1.

Esta gráfica y esta matriz nos pueden servir para saber cuándo una regla de evolución tiene o no Jardín de Edén (JE), es decir, determinar para una regla de evolución **f** el subconjunto

$$GE(f) \subset G \tag{53}$$

con todas las configuraciones que no tienen preimagen. Definimos **GE(f)** como

$$GE(f) = \{c \in G \mid f(d) = c\} \text{ no tiene solución.} \tag{54}$$

En el siguiente apartado, estudiaremos una manera de encontrar una preimagen de una secuencia de estados. Y podremos encontrar todas las posibles configuraciones que son preimagen de una secuencia dada y así determinar si es o no un JE.

4 Cálculo de preimágenes a partir de la matriz básica

Supongamos que tenemos una secuencia de **m** dígitos y queremos encontrar otra secuencia que sea preimagen de la primera, es decir encontrar un ancestro para la secuencia dada. Esto se puede hacer observando las etiquetas de los renglones en

$$Ad_2[f] \tag{55}$$

ya que estas etiquetas representan los dos primeros dígitos de cada secuencia. Las etiquetas en las columnas representan una secuencia de dígitos que es generada.

En la matriz básica, cada entrada indica cuantas maneras hay de formar una secuencia. En otras palabras, si

$$i_0 \dots i_{n-2} \tag{56}$$

es la etiqueta de un renglón,

$$j_0 \dots j_{n-2} \tag{57}$$

es la etiqueta de una columna en

$$Ad_{n-1}[f]; \tag{58}$$

y además $\mathbf{a}_{(ij)}$ es la entrada correspondiente a ese renglón y a esa columna, entonces hay $\mathbf{a}_{(ij)}$ maneras de formar una secuencia tal que los primeros dígitos sean

$$i_0 \dots i_{n-2} \tag{59}$$

y que aplicando la regla de evolución, se genere la secuencia

$$j_0 \dots j_{n-2}. \tag{60}$$

Revisemos el siguiente método para generar una preimagen de una secuencia de \mathbf{n} dígitos en \mathbf{G} mediante un ejemplo:

Veamos el AC lineal (2,1) regla 60, la regla de evolución es la que se muestra en la tabla siguiente. La matriz básica también se muestra a continuación.

$f(000) = 0$	$f(100) = 1$	(61)
$f(001) = 0$	$f(101) = 1$	
$f(010) = 1$	$f(110) = 0$	
$f(011) = 1$	$f(111) = 0$	

	00	01	10	11		
00	(2	2	0	0	(62)
01		0	0	2	2	
10		0	0	2	2	
11		2	2	0	0	

Matriz básica $Ad_{-2}(X)$, AC lineal(2,1) Regla 60.

Para empezar, debemos tener una secuencia de \mathbf{n} dígitos de la cual deseamos conocer un ancestro. Sea 1001010101011 esta secuencia.

En primer lugar tomamos la primera pareja de dígitos:10 y observando en la matriz básica las etiquetas de las columnas, nos fijamos en la columna marcada con esta secuencia “10”. Enseguida revisamos las entradas en esa columna de los renglones que son diferentes que 0. Las etiquetas de esos renglones nos indican los primeros dígitos en la secuencia que producen “10”. Hay dos maneras diferentes de construir una secuencia

$$s = i_0 \dots i_{n-2} s_1 \dots s_{n-1} \quad (63)$$

$$s = i_0 i_1 s_1 s_2 \quad (64)$$

para el ejemplo tal que $\mathbf{f}(\mathbf{s})=\mathbf{10}$.

Arbitrariamente escojamos una de ellas. Y empecemos a construir el ancestro con los dígitos de más a la derecha que generan un 1:“01”. Ahora tomemos la pareja siguiente, 00. Para generar el primer 0 de la pareja es necesario empezar con un 00 o bien con un 11, pero el segundo dígito de la primera pareja encontrada (01) debe coincidir con el primero de la pareja buscada, entonces eso determina la siguiente pareja, la 11 construyendo así el ancestro “011” para la siguiente pareja 01 una secuencia generadora que empieza con el dígito 1 es 11, entonces “0111” es el siguiente paso en la generación del ancestro para la cadena dada. Continuando de esta manera, obtenemos la secuencia: 011100110011010 que es un ancestro para la cadena 1001010101011.

5 Diagramas de Bruijn

Para un AC lineal (k,r) donde $\mathbf{n}=2\mathbf{r}+1$, el diagrama de Bruijn es una gráfica dirigida y etiquetada, con $2^{\mathbf{n}}-1$ vértices y $2^{\mathbf{n}}$ aristas. Los vértices se etiquetan con los dígitos binarios de los enteros desde 0 hasta

$$2^{n-1} - 1. \quad (65)$$

Un vértice está dirigido desde el vértice

$$i = i_0 \dots i_{n-2} \quad (66)$$

al vértice

$$j = j_0 \dots j_{n-2} \quad (67)$$

si y sólo si

$$j_s = i_{s+1} \forall s \quad (68)$$

tal que

$$0 \leq s \leq k - 3 \quad (69)$$

Lo que quiere decir que las secuencias de caracteres que definen los vértices i y j se traslapan en los dígitos s , y éste hecho lo denotaremos como

$$i \bowtie j. \tag{70}$$

Cuando existe esta arista, se etiqueta con el resultado de aplicar la regla de evolución a

$$i \bowtie j \tag{71}$$

como se muestra en la figura 2.

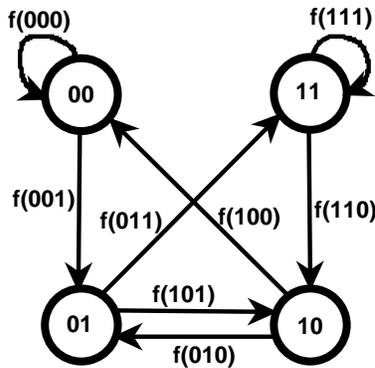


Figura 2: *Diagrama de Bruijn genérico para AC lineales (2,1)*

Una aplicación inmediata para éste tipo de diagramas, es dada una secuencia de dígitos, encontrar otra secuencia que es preimagen de la primera.

Si

$$s_1 \dots s_m \tag{72}$$

es una secuencia binaria de m dígitos, se puede encontrar un ancestro para esta secuencia buscando todos los caminos de longitud m que se pueden encontrar a través de las aristas etiquetadas con

$$s_1 \dots s_m, \tag{73}$$

y construyendo las secuencias que se generan por el traslape de los $n-1$ vértices. Si no se puede hallar un camino, entonces esa secuencia no tiene preimagen y constituye un “jardín de edén”. Los diagramas de Bruijn nos indican todos los posibles ancestros para una cadena de longitud n .

Para mostrar lo anterior, sea $\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{t}} = 1001010101011$ la secuencia de dígitos de la cual deseamos conocer un ancestro, sea

$$s^{t-1} \tag{74}$$

la cadena buscada y

$$f : E^3 \rightarrow E \tag{75}$$

la regla de evolución clasificada con 60 bajo el criterio de Wolfram (siguiendo con la regla expuesta en el ejemplo anterior).

Recordemos que en este diagrama, dos nodos que son conectados por una arista forman una secuencia y la etiqueta de la arista es el dígito que se genera, de esta manera para generar el primer dígito de la secuencia inicial \mathbf{s} hay 4 posibilidades:

1. $- 010 \rightarrow 1(\text{elnodo}01\text{conecta}conel10)$
 2. $- 101 \rightarrow 1(\text{elnodo}10\text{conecta}conel01)$
 3. $- 100 \rightarrow 1(\text{elnodo}10\text{conecta}conel00)$
 4. $- 011 \rightarrow 1(\text{elnodo}01\text{conecta}conel11)$
- (76)

Para generar el segundo dígito en $\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{t}}$ que es un 0, de cualquier camino escogido anteriormente debemos seguir por una arista que esté etiquetada con 0. Esto elimina las posibilidades 1 y 2 ya que con estas no podemos seguir por una arista que esté etiquetada con un 0. Así que hasta ahora hemos generado 2 cadenas que son candidato para ser ancestro de $\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{t}}$, la 100 y la 011, que llamaremos \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente. Siguiendo por una arista etiquetada con 0 agregamos a la cadena $\hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{t}}-1)$ un 0 en el caso de \mathbf{a} y un 1 en el caso de \mathbf{b} , quedando formadas 1000 y 0111 respectivamente, Observamos que los nodos visitados son para el caso \mathbf{a} :

01. $- 10 \rightarrow 00 \triangleright 1$
 02. $- 00 \rightarrow 00 \triangleright 0$
 03. $- 00 \rightarrow 01 \triangleright 0$
 04. $- 01 \rightarrow 11 \triangleright 1$
 05. $- 11 \rightarrow 10 \triangleright 0$
 06. $- 10 \rightarrow 00 \triangleright 1$
 07. $- 00 \rightarrow 01 \triangleright 0$
 08. $- 01 \rightarrow 11 \triangleright 1$
 09. $- 11 \rightarrow 10 \triangleright 0$
 10. $- 10 \rightarrow 01 \triangleright 1$
 11. $- 01 \rightarrow 10 \triangleright 1$
- (77)

En el paso 1 se genera la cadena 100, en el paso 2 la cadena 000 pero los 2 primeros 0's de esta cadena corresponden al traslape de las vecindades generadas en el paso 1 y

el paso 2, así es de que sólo se agrega un dígito en cada paso, formando la cadena 1000; continuando hasta el paso 10 cuando se genera la cadena

$$s^{t-1} = 100011001101. \quad (78)$$

El paso 11 también puede ser

$$01 \rightarrow 11, \quad (79)$$

de manera que

$$s^{t-1} \quad (80)$$

en el caso **a** puede ser **a**= 100011001100101 o bien **a** = 100011001100100. Para el caso **b** se procede de la misma manera, y los ancestros son **b** = 011100110011010 o bien **b** = 011100110011011. En los AC con propiedades en la frontera tanto en la izquierda como en la derecha, se observan algunas características interesantes enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 2 En los AC(2,1) de izquierda con regla de evolución **f** definida como en (7), si

$$e \in E \quad (81)$$

entonces a cada uno de los nodos del diagrama de Bruijn **B** , le llegan dos aristas una está etiquetada con **e** y la otra está etiquetada con **1-e** . En los AC(2,1) de derecha con regla de evolución **f** definida como en (8), de cada uno de los nodos del diagrama de Bruijn **B** , salen 2 aristas una etiquetada con **e** y la otra etiquetada con **1-e** .

Demostración.- Si

$$f(X) = x_i \quad (82)$$

es como en (7), entonces

$$x_{i+2^{n-1}} = 1 - x_i \text{ donde } 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 1; \quad (83)$$

n=2r+1 . Pero cada vértice

$$i_0 \dots i_{n-2} \quad (84)$$

en **B** recibe aristas de aquellos vértices etiquetados con

$$0i_0 \dots i_{n-3} \quad (85)$$

y

$$1i_0 \dots i_{n-3} \quad (86)$$

traslapándose para formar las vecindades

$$0i_0 \dots i_{n-2} \quad (87)$$

y

$$1i_0 \dots i_{n-2} \quad (88)$$

que producen símbolos diferentes bajo la regla de evolución \mathbf{f} .

De manera similar, si

$$f(X) = x_i \quad (89)$$

es como se definió en (8), entonces

$$x_{2i+1} = 1 - x_{2i} \quad (90)$$

cuando

$$0 \leq i \leq 2^{k-1} - 1. \quad (91)$$

De cada vértice

$$i_0 \dots i_{n-2} \quad (92)$$

salen aristas a vértices etiquetados con

$$i_1 \dots 1_{n-2}0 \quad (93)$$

y

$$i_1 \dots 1_{n-2}1 \quad (94)$$

traslapándose para formar las vecindades

$$i_0 \dots 1_{n-2}0 \quad (95)$$

y

$$i_1 \dots 1_{n-2}1 \quad (96)$$

y por la definición de la función, estas vecindades generan símbolos diferentes **q.e.d.** Ver figura 4.

Los diagramas de Bruijn para AC (\mathbf{k}, \mathbf{r}) tienen asociadas \mathbf{k} matrices. En el caso (2,1) estas matrices se llaman matrices A y matriz B denotadas por **B0** y **B1**. En esta matriz, las filas y las columnas están etiquetadas con los símbolos de los nodos del diagrama de Bruijn y si \mathbf{i} y \mathbf{j} son nodos en el diagrama de Bruijn, entonces las entradas en la matriz serán un 1 si el nodo \mathbf{i} se traslapa con el nodo \mathbf{j} y además

$$f(i \bowtie j) = 1; \quad (97)$$

formando así la matriz de Bruijn A.

La matriz de Bruijn \mathbf{B} se forma de manera similar, las entradas en la matriz \mathbf{B} serán un 1 si el nodo \mathbf{i} se traslapa con el nodo \mathbf{j} y además

$$f(i \bowtie j) = 0; \quad (98)$$

formando de esta manera la matriz de Bruijn \mathbf{B} .

La suma de las \mathbf{k} matrices (una para cada estado) genera la matriz topológica \mathbf{B} del diagrama de Bruijn. La cual podemos definir de la siguiente manera:

$$[b_{i,j}] = \begin{cases} 1, \text{cuando } f(i \bowtie j) = 1 \\ 0, \text{cuando } f(i \bowtie j) = 0 \\ \bullet, \text{en otro caso} \end{cases} \quad (99)$$

$$\begin{array}{cccc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \begin{array}{l} 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \end{array} \quad (100)$$

Matriz topológica de un $AC(2,1)$

Teorema 3 Si los elementos en las columnas de la matriz topológica definen una permutación de los estados y las entradas

$$b_i, j = (k - 1) - b_{i, (k-1)-j}, \quad (101)$$

donde

$$b_i, j \quad (102)$$

es un elemento de \mathbf{B} ; entonces la regla de evolución tiene propiedades de izquierda.

Demostración.-Supongamos que los elementos de cualquier columna en la matriz no son una permutación de los estados, lo cual significa que hay más de un renglón que en esa columna tiene la misma entrada. Supongamos ahora que la segunda condición tampoco se cumple, eso significa que la vecindad

$$xj_1 \dots j_{n-1} \quad (103)$$

puede tener el mismo mapeo en la función que la vecindad

$$((k-1) - x)j_1 \dots j_{n-1} \quad (104)$$

lo que contradice el enunciado. **q.e.d.**

Teorema 4 Si los elementos en las filas de la matriz topológica definen una permutación de los estados y

$$b_i, j = (k-1) - b_{(k-1)-i,j}, \quad (105)$$

donde

$$b_i, j \quad (106)$$

es un elemento de \mathbf{B} ; entonces la regla de evolución tiene propiedades de derecha.

Demostración.-Supongamos que los elementos de cualquier fila en la matriz no son una permutación de los estados, lo cual significa que hay más de una columna que en ese renglón tiene la misma entrada. Supongamos ahora que la segunda condición tampoco se cumple, eso significa que la vecindad

$$j_0 \dots j_{n-2}x \quad (107)$$

puede tener el mismo mapeo en la función que la vecindad

$$(j_0 \dots j_{n-2}(k-1) - x) \quad (108)$$

lo que de nuevo contradice el enunciado. **q.e.d.**

Teorema 5 El número de ancestros [10] de una secuencia

$$s_1 \dots s_n \quad (109)$$

bajo un AC (k,r) está dado por la suma de los elementos en el producto:

$$\prod_{i=1}^n B_{s_i}(X) \quad (110)$$

En el caso de que el producto de (110) es igual a la matriz \mathbf{O} la secuencia

$$s_1 \dots s_n \quad (111)$$

no tiene ancestros en la regla \mathbf{f} .

6 Diagramas de subconjuntos

Otra herramienta muy útil para el estudio de los AC es el diagrama de subconjuntos, que está estrechamente relacionado con el diagrama de Bruijn [8]. El diagrama de subconjuntos también es una gráfica dirigida, en la cual los vértices están etiquetados con los elementos de

$$\mathcal{P}(S), \quad (112)$$

donde \mathbf{S} es el conjunto de secuencias

$$s_0 \dots s_{n-2} \quad (113)$$

que etiquetan los vértices en el diagrama de Bruijn.

Las aristas en el diagrama de subconjuntos se colocan de acuerdo al siguiente criterio a partir del diagrama de Bruijn, cuando el conjunto de estados tiene 2 elementos:

1.- Habiendo definido el conjunto potencia

$$\mathcal{P}(S), \quad (114)$$

tomemos \mathbf{S} como el vértice inicial.

2.- Ahora, sea $\mathbf{S_0}$ el subconjunto de \mathbf{S} cuyos elementos pueden ser alcanzados desde cualquier elemento de \mathbf{S} siguiendo una arista etiquetada con 0, y sea $\mathbf{S_1}$ el subconjunto de \mathbf{S} cuyos elementos pueden ser alcanzados desde cualquier elemento de \mathbf{S} siguiendo una arista etiquetada con 1. Tomemos a $\mathbf{S_0}$ y $\mathbf{S_1}$ como siguiente nivel en el diagrama dibujando una arista etiquetada con 0 desde \mathbf{S} a $\mathbf{S_0}$ y otra arista etiquetada con 1 desde \mathbf{S} hasta $\mathbf{S_1}$.

3.- Sea

$$S_{00} \quad (115)$$

el subconjunto de vértices que pueden ser alcanzados a partir de $\mathbf{S_0}$ mediante una arista etiquetada con 0 en el diagrama de Bruijn, y

$$S_{01} \quad (116)$$

el subconjunto de vértices que pueden ser alcanzados siguiendo una arista etiquetada con 1 desde $\mathbf{S_0}$. Agreguemos estos subconjuntos a los vértices del diagrama de subconjuntos uniéndolos con una arista dirigida y etiquetada con 1 a los vértices $\mathbf{S_0}$ a

$$S_{01}. \quad (117)$$

De la misma manera unimos los vértices de \mathbf{S}_1 a

$$S_{10} \text{ y } S_{11} \tag{118}$$

con una arista etiquetada con 1.

4.- Continuemos de esta manera, ahora tomando

$$S_{00}, S_{01}, S_{10} \text{ y } S_{11} \tag{119}$$

como subconjuntos iniciales. Continuemos hasta que ya no se generen nuevos subconjuntos.

5.- Si siguiendo una arista etiquetada con un símbolo \mathbf{k} que sale de cualquier subconjunto generado en éste proceso no se llega a ningún otro subconjunto, entonces esa arista se dirige al conjunto vacío

$$\emptyset \tag{120}$$

etiquetándola con \mathbf{k} .

Una manera de nombrar a los subconjuntos es auxiliándonos de su representación en base \mathbf{k} . Así el conjunto vacío tiene el número 0 y el conjunto completo tiene el número 15 como lo ilustra la siguiente tabla para AC (2,1):

Los subconjuntos se nombran por su equivalente decimal:

<i>Nivel0</i>	\emptyset	<i>losquetienen0elementos</i>	(121)
<i>Nivel1</i>	1000, 0100, 0010, 0001	<i>losquetienen1elemento</i>	
<i>Nivel2</i>	1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011	<i>losquetienen2elementos</i>	
<i>Nivel3</i>	1110, 1101, 1011, 0111	<i>losquetienen3elementos</i>	
<i>Nivel4</i>	1111	<i>elconjuntocompleto</i>	

Teorema 6 Los AC lineales (2,1) con propiedades en la frontera izquierda y en la frontera derecha no tienen configuraciones jardines de edén.

Demostración.- Si $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ es un AC como se definió en (7) entonces observando el diagrama de subconjuntos, del conjunto completo salen flechas que son autociclos, esto es porque de acuerdo al diagrama de Bruijn, hay exactamente la mitad de flechas representando un estado, y la mitad de flechas que representan al otro estado. Dado que más de 2 flechas del mismo estado no pueden llegar al mismo vértice (teorema anterior), concluimos que llegan flechas de todos los estados a todos los vértices.

Ahora, si $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ es como se definió en (8) de todos los vértices en el diagrama de Bruijn salen flechas que representan distintos estados por lo que los vértices

$$x_0 \dots x_{n-2} \tag{122}$$

se unen por la derecha a otros vértices

$$x_1 \dots x_{n-1} 0 \quad (123)$$

y

$$x_1 \dots x_{n-1} 1 \quad (124)$$

y las vecindades

$$x_0 \dots x_{n-2} 0 \quad (125)$$

y

$$x_0 \dots x_{n-2} 1 \quad (126)$$

tienen diferentes mapeos en la función.

Puesto que no hay algún camino de cualquier longitud que conecte el conjunto completo con el conjunto vacío, no existe configuración global alguna que sea jardín de edén **q.e.d.**

7 Extensión a AC lineales de k mayor o igual a 2 estados

Un AC lineal de k estados está definido de igual manera que un AC lineal de 2 estados, el par ordenado (k, r) indica un AC lineal de

$$k \geq 2 \quad (127)$$

y un radio de vecindad $n=2r+1$;

$$r = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (128)$$

Cuando

$$r = \frac{2i+1}{2} \quad (129)$$

con $i = 0, 1, \dots$ se ajusta el valor de una célula entera a la izquierda o a la derecha seleccionada arbitrariamente, por razones de simetría la célula nueva se coloca debajo de la vecindad al centro de esta.

Las funciones que tienen propiedades de izquierda y de derecha como se definieron en (1) y (2) en el caso general se definen de la siguiente manera:

$$(k-1) - x_i^{t+1} = f((k-1) - x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, x_{i+r}^t) \quad (130)$$

y

$$(k-1) - x_i^{t+1} = f(x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, (k-1) - x_{i+r}^t) \quad (131)$$

De manera similar a las definiciones (7) y (8) las reglas que tienen propiedades de izquierda y de derecha tienen el mismo número de estados iguales.

Usando una definición de lógica multivaluada, en particular la negación de Lukasiewicz [9]. Otro resultado de lógica multivaluada es considerar la negación de una variable como $\mathbf{neg}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 1 \pmod{\mathbf{k}}$ [9] que se conoce como negación cíclica. Con lo que la definición de AC con propiedades en la frontera se expresa como

$$\mathbf{neg}(x_i^{t+1}) = f(\mathbf{neg}(x_{i-r}^t), \dots, x_i^t, \dots, x_{i+r}^t) \quad (132)$$

y

$$\mathbf{neg}(x_i^{t+1}) = f(x_{i-r}^t, \dots, x_i^t, \dots, \mathbf{neg}(x_{i+r}^t)) \quad (133)$$

En lo que resta del artículo, usaremos la primera definición, y tomaremos como ejemplo el AC $(4, \mathbf{h})$. El valor \mathbf{h} es una constante que significa 1/2, dicho sea de paso, \mathbf{t} es otra constante que significa 3/2.

En los $(4, \mathbf{h})$ tenemos $(2\mathbf{h}+1)\hat{4} = 2\hat{4} = 16$ posibles configuraciones locales diferentes, y $16\hat{4} = 65536$ reglas de evolución diferentes, como se puede observar, el número de reglas crece de manera exponencial cuando crece el número de estados. Lo que constituye un problema para etiquetar las reglas y es una razón para que en el estudio de los AC el número de estados y el radio de la configuración local típicamente sea pequeño.

Cada una de las 16 configuraciones locales puede tomar 1 de 4 estados, los cuales están nombrados de 0 a 3. Agrupamos las vecindades en conjuntos de 2 y nombramos con 0,1, ...,F a cada una de las combinaciones, que en base 4 tienen 2 dígitos los cuales corresponden al estado que genera cada una de las 2 vecindades en el grupo. De manera que la clave 1BD8721B representa la regla de evolución que se muestra en la tabla siguiente.

00 → 3	01 → 2	02 → 1	03 → 0
10 → 2	11 → 0	12 → 3	13 → 1
20 → 0	21 → 2	22 → 1	23 → 3
30 → 3	31 → 2	32 → 1	33 → 0

(134)

AC(4, h) Regla 1BD8721B

Ahora vamos a generalizar los resultados obtenidos en los teoremas 3 y 4, pero antes vamos a generalizar la definición de la matriz topológica para un AC lineal de \mathbf{k} estados y vecindad $\mathbf{n=2r+1}$.

Si

$$i = i_0 \dots i_{n-2} \quad (135)$$

y

$$j = j_0 \dots j_{n-2} \quad (136)$$

son secuencias de $\mathbf{n-1}$ dígitos, donde

$$i_i, j_j \in Z_k, \quad (137)$$

la matriz topológica \mathbf{B} del AC Lineal de \mathbf{k} estados y una vecindad \mathbf{n} se define como:

$$[b_{i,j}] = \begin{cases} k_i, \text{ cuando } f(i \otimes j) = k_l \\ \text{donde } 0 \leq l \leq k-1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (138)$$

De esta manera, la clave 1BD8721B que representa la regla de evolución que se mostró anteriormente queda expresada en forma de matriz topológica de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & & \end{array} \quad (139)$$

Matriz topológica del AC (4,h) Regla 1BD8721B

Teorema 7 Si en la matriz topológica de una regla de evolución de un AC($\mathbf{k,r}$), los elementos en los renglones son una permutación de los elementos en el conjunto de estados y las entradas

$$b_{i,j} = b_{(k-1)-i,j}, \quad (140)$$

donde

$$i, j \in Z_k \quad (141)$$

entonces la regla de evolución tiene propiedades de izquierda.

Demostración.- La matriz topológica es una matriz cuadrada de orden \mathbf{k} el hecho de que las entradas en cada renglón de cada columna sean una permutación del conjunto de estados, hace que en cada renglón exista un elemento distinto a los demás. Si en más de un renglón se encuentra la misma entrada, no se cumple la condición de la función definida en (130). **q.e.d.**

Teorema 8 Si en la matriz topológica de una regla de evolución de un $AC(k,r)$, los elementos en las columnas son una permutación de los elementos en el conjunto de estados y las entradas

$$b_{i,j} = b_{i,(k-1)-j} \quad (142)$$

donde

$$i, j \in Z_k, \quad (143)$$

entonces la regla de evolución tiene propiedades de derecha.

Demostración.- De manera similar, la matriz topológica es una matriz cuadrada de orden k el hecho de que las entradas en cada columna de cada renglón sean una permutación del conjunto de estados, hace que en cada columna exista un elemento distinto a los demás. Si en más de una columna se encuentra la misma entrada, no se cumple la condición de la función definida en (131). **q.e.d.**

Teorema 9 Si una regla de evolución de un $AC(k,r)$ tiene propiedades de izquierda, entonces en el diagrama de subconjuntos las flechas que llegan al conjunto vacío son autociclos.

Demostración.- A partir del teorema 7 en la matriz topológica están representados todos los estados en cada renglón, lo que significa que las vecindades que empiezan con la secuencia

$$i_0 \dots i_{n-2} \quad (144)$$

y terminan con cualquier secuencia que es etiqueta de cada columna, tiene una representación completa del espacio de estados definido por el autómata, por lo que significa para una célula específica con estado

$$e_i \in E \exists \quad (145)$$

una vecindad de tamaño $2r+1$ que la genera. **q.e.d.**

Teorema 10 Si una regla de evolución de un $AC(k,r)$ tiene propiedades de derecha, entonces en el diagrama de subconjuntos las flechas que salen del conjunto completo son autociclos.

Demostración.- De manera similar al teorema anterior, a partir del teorema 8 en la matriz topológica están representados todos los estados en cada columna, lo que significa que las vecindades que terminan con la secuencia

$$j_0 \dots j_{n-2} \quad (146)$$

y empiezan con cualquier secuencia que son etiqueta de cada renglón, tiene una representación completa del espacio de estados definido por el autómata, por lo que quiere decir que para una célula específica con estado

$$e_i \in E \exists \quad (147)$$

una vecindad de tamaño $2r+1$ que la genera. **q.e.d.**

El significado de los dos teoremas anteriores, el teorema 9 y el teorema 10 es que no hay alguna secuencia de dígitos en el diagrama de subconjuntos tal que a través de las aristas que conectan cada uno de los elementos en la secuencia, se pueda llegar del conjunto completo al conjunto vacío, lo que nos hace concluir que en éste tipo de autómatas no hay configuraciones globales que sean jardines de edén.

Al final del artículo se encontrarán ejemplos de algunas reglas de evolución correspondientes a los AC con 4 estados y un radio de vecindad $1/2$.

8 Conclusiones y perspectivas

Los autómatas celulares han sido tema de investigación por más de 40 años y aún no se sabe todo sobre ellos, una de las razones es porque son más complejos a medida que el número de estados crece, también a medida que el radio de vecindad se extiende y se extienden las investigaciones a dimensiones mayores que 1. Este tipo de autómatas celulares, son especialmente útiles en el campo de criptología, en la generación de números aleatorios, y otras. Unas posibles extensiones a este trabajo son mostrar la multiplicidad uniforme, los índices de Welch, extender el estudio a autómatas celulares de dimensión 2 y tratar de generalizar los resultados.

9 Agradecimientos

Agradezco la atinada asesoría del Dr. Harold V. McIntosh, a las autoridades administrativas del Departamento de Aplicación de Microcomputadoras de la Universidad Autónoma de Puebla por facilitar el equipo y los recursos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Referencias bibliográficas

- [1] John von Neumann, “The theory of self-Reproducing Automata” , compilado y editado por W. A. Burks, University of Illinois press, 1966.
- [2] Arthur W. Burks, editor, “Essays on Cellular Automata”, University of Illinois press, 1970
- [3] Harold V. McIntosh, “Linear Cellular Automata”, Universidad Autónoma de Puebla, México 1987 y revisado en 1990.
- [4] Martin Gardner, “Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway’s new
- [5] Stephen Wolfram, “Statistical Mechanics of Cellular Automata”, Reviews of Modern
- [6] Stephen Wolfram, “Universality and Complexity in Cellular Automata ”, Physica D,
- [7] Harold V. McIntosh “Linear Cellular Automata via de Bruijn Diagrams”, Physica D 999
- [8] Harold V. McIntosh “Reversible Cellular Automata”, Physica D 999 (1996) ,pp. 100-130, North-Holland Amsterdam.
- [9] José Ruiz Shulcloper, Eduardo Alba Cabrera, Manuel Lazo Cortés, “Lógica Matemática (Versión preliminar)” Centro de Investigación y de Estudios Avanzados - IPN, México 1994.
- [10] Burton H. Voorhees, “Computational analysis of one-dimensional cellular automata”, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A Vol. 15, USA 1996.