

Comportamiento colectivo no trivial en sistemas dinámicos caóticos

Genaro Juárez Martínez

Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Computación

Resumen

Un sistema dinámico es un fenómeno que cambia con el tiempo y lo podemos modelar de alguna forma matemática. Hugues Chaté y Paul Manneville han investigado que los sistemas dinámicos caóticos muestran por lo general *comportamientos colectivos no triviales*; especialmente en cantidades promedio que evolucionan a través del tiempo hasta un límite en el tamaño y tiempo, a pesar del caos local dentro de su espacio. El estudio se efectuó para autómatas celulares de tres, cuatro, cinco y seis dimensiones sobre lattices de gran tamaño para poder observar este fenómeno. Con lo que se trata de determinar este comportamiento a través de los modelos de autómatas celulares, auxiliado por las herramientas gráficas tal como el diagrama de iteraciones, el diagrama de evoluciones y *mean field*; donde podemos observar el comportamiento de los puntos fijos estables y no estables. Finalmente podremos determinar la periodicidad o quasiperiodicidad de las regla totalísticas en estudio.

1. Preliminares

Una problemática dentro de los autómatas celulares en una dimensión, es obtener una buena representación y determinación de las cuatro clases de Wolfram [7], donde a primera instancia sabemos que en el diagrama de evoluciones, para cualquier configuración inicial aleatoria y un tamaño de anillo mayor igual a dos, podemos calcular todas sus evoluciones subsiguientes de cualquiera de las cuatro clases; hasta entrar a un ciclo atractor [3].

Si hacemos un análisis específico sobre la clase III (comportamientos caóticos), podremos observar que tendremos un desorden de caracter local como global dentro del sistema (Figura 1), pero en un límite dado este sistema entrará en un ciclo atractor no importando el tamaño del anillo. Aunque lógicamente si el tamaño del anillo es trescientos; entrar al ciclo atractor nos va a llevar una considerable cantidad de tiempo.

La forma en como se manifiesta el caos en los sistemas dinámicos a través de interacciones locales son por lo general de forma *extensiva*, es decir el estudio se puede realizar en sistemas tanto de forma local como global para diferentes



Fig. 1. Clase III y IV de Wolfram

parámetros. La cantidad de caos dentro del sistema es medido por la cantidad de números positivos dado por los exponentes de Lyapunov que son proporcionales al tamaño del sistema. Donde el número de Lyapunov mide la sensibilidad respecto a las condiciones iniciales. Y este número es obtenido através de la siguiente ecuación (donde f es una función):

$$\lambda(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df^i(x)}{dx} \right|. \quad (1)$$

(1) Si $\lambda(f) = 0$, entonces no depende de la condición inicial representada por x .

(2) Si $\lambda(f) > 0$, entonces es sensible con respecto a las condiciones iniciales.



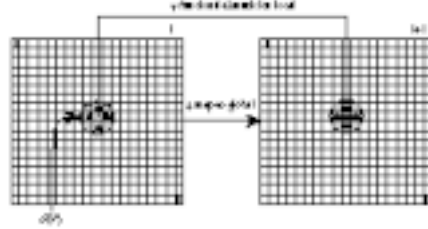
Fig. 2. Ciclo atractor

(3) Si $\lambda(f) < 0$, entonces tiene comportamientos atractores.

Si tratamos de reconstruir los atractores a través de las series de tiempo, éstas no proporcionan información útil ya que el cálculo es limitado, poco preciso y particular para una condición inicial dada, con lo que no podemos generalizar el análisis de una manera global y general.

La primera intuición que tuvieron sobre los comportamientos colectivos no triviales, fué cuando observaron un cierto equilibrio dentro de los sistemas caóticos, así como sus contrapartes estocásticas en cantidades promedio y éstas evolucionaban en el tiempo de forma uniforme, aparte de mostrar ciertas fluctuaciones estadísticas que desaparecían en un límite dado. Esto sería contradictorio recientemente por el descubrimiento de comportamientos colectivos no triviales, donde el comportamiento de ciertas reglas totalísticas en lattices enormes muestran una evolución temporal bien definida y bastante regular a pesar de la presencia del desorden local en el espacio y tiempo.

Cabe señalar que estos descubrimientos se lograron obtener conforme el autómata celular aumentaba su tamaño de dimensión y las lattices donde se efectuaban estos cálculos son considerablemente grandes (hasta con un valor de $N = 35^5$). En la siguiente sección describiremos con detalle la forma como obtuvieron y visualizan el comportamiento colectivo no trivial.

Fig. 3. Lattices de tamaño N

2. Autómata celular

La evolución de los autómatas celulares nos dan características básicas del comportamiento que tiene determinada regla a través del tiempo. Sea d la dimensión del autómata celular, i el sitio que ocupa cada célula dentro de la lattice, t el tiempo, \mathcal{N} el número de vecinos, \mathcal{V} la vecindad isotrópica (es decir, existen igual número de vecinos simétricos) y c^t la concentración instantánea de 1's dentro de la lattice.

Tenemos una lattice y una vecindad de tamaño \mathcal{N} , para un autómata binario, es decir, dos estados "0" y "1".

Definimos una regla totalística para un autómata celular de orden $(K, 1)$ como:

$$\varphi(a, b, c) = \mathcal{T}(a + b + c)$$

donde la suma de los estados de una vecindad dada, debe tener un valor entero que representa todas las combinaciones posibles (vecindades equivalentes) que tengan ese mismo valor.

Tales reglas están definidas por un conjunto S de $\mathcal{N}+1$ posibles transiciones de la regla totalística tal que $\{p_s; S = 0, \dots, \mathcal{N}\}$, donde $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ nos determinará todas aquellas vecindades que mapean en uno, especificadas por el conjunto S . Por lo que definimos:

$$p_s = \Pr\{X_i^{t+1} = 1 \mid \mathcal{S}(\mathcal{V}_i^t) = S\}$$

donde X_i^{t+1} es el estado en el sitio i en el tiempo t y \mathcal{V}_i^t la configuración de la vecindad en el sitio i y el tiempo t para toda $X_i^t \in \{0, 1\}$.

La mayoría de las reglas en estudio son totalísticas pues el número total de vecindades a

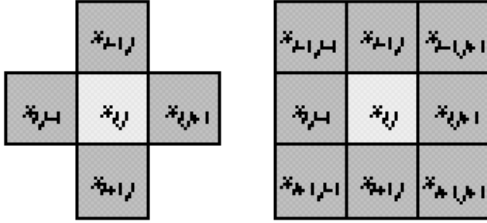


Fig. 4. Vecindades en dos dimensiones

análisis es considerablemente grande. Se define un estado absorbente dado por: $p_0 = p_N = 0$. La última restricción considera sólo las reglas del conjunto definidas por la sucesión $\{p_s\}$, determinada por el intervalo ($0 < S_{min} \leq S_{max} < N$) tal que:

$$p_s = \begin{cases} 1 & \text{si } S_{min} \leq S \leq S_{max} \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

donde el intervalo determina las vecindades que mapean al estado uno y las vecindades restantes al estado cero.

$$\text{AC}(2,4) \text{ regla 61: } \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Esta restricción es parecida a la estructura que maneja *Life* [2]. Si una vecindad tiene poca población ($S(\mathcal{V}) < S_{min}$) su célula central muere, esto es el estado absorbente. Si hay una sobrepoblación si ($S(\mathcal{V}) > S_{max}$) ocurre lo mismo. Una célula sobrevive si posee una densidad apropiada.

Estos mapeos son realizados sobre las vecindades de John von Neumann [1] y Edward F. Moore [9] como se muestra en la Figura 4, respectivamente.

Chaté-Manneville [4] hacen un análisis a través de la teoría de mean field, el mapa de retorno, series de tiempo, diagrama de evoluciones y el diagrama de bifurcaciones para poder explicar los comportamientos colectivos [5] y los comportamientos colectivos no triviales [6]. Cabe recalcar que el diagrama de bifurcaciones es muy útil para el modelo de lattices acopladas, donde la

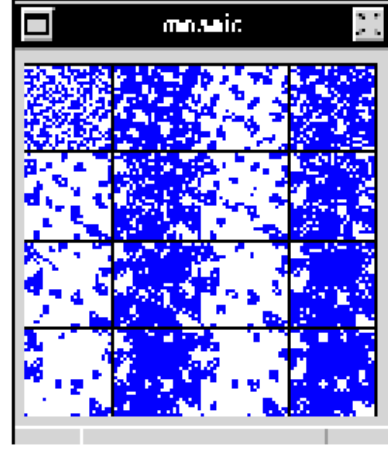


Fig. 5. Período dos, regla 61 AC(2,4)

regla de evolución no está determinada de forma determinística, más bien de forma probabilística. Aclaramos que en este reporte sólo se trata el modelo determinístico.

3. Comportamiento colectivo

Dentro de la familia de reglas que presentan Chaté-Manneville en [5] podemos encontrar una clasificación muy detallada para los comportamientos tanto periódicos como quasiperiódicos.

3.1. Comportamientos periódicos

Estos comportamientos colectivos se identifican rápidamente de manera muy general en sus diagramas de evoluciones para diferentes concentraciones c^t iniciales.

Como podemos observar en la Figura 5, el diagrama de evoluciones para la regla totalística 61 muestra comportamientos periódicos de tamaño dos, en cuatro dimensiones empleando la vecindad de von Neumann. Este análisis lo podemos extender con el mapa de retorno y verificar que la existencia de los puntos fijos, es la que determina ésta periodicidad.

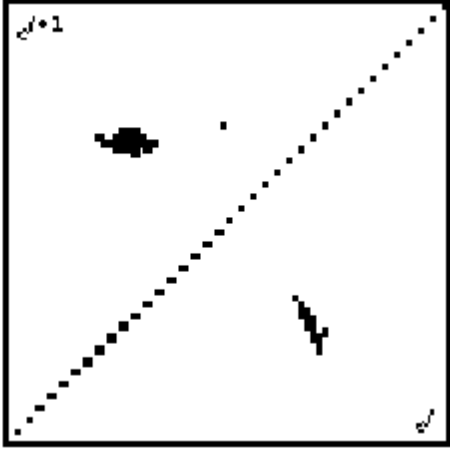


Fig. 6. Diagrama de retorno, regla 61

Podemos graficar un mapa de retorno, calculando las densidades c^t a través del tiempo donde,

$$c^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^t \quad (2)$$

y de esta manera podemos determinar la existencia de las acumulaciones de varios puntos en uno o varios puntos fijos. Donde las nubes que produce dicha gráfica, nos ilustran el número de períodos del autómata celular; fácilmente comprobable a través del diagrama de evoluciones.

En todos los casos estamos tomando diferentes valores de c^t , distribuidos uniformemente un 50% en toda la lattice. Aunque iniciemos con configuraciones aleatorias, el resultado es el mismo.

Finalmente obtenemos como resultado de la ecuación 2, la promedia por la cantidad de 1's que existen dentro de la lattice en el tiempo t . Iterando esta lattice en el tiempo $t+1, t+2, \dots$ y así sucesivamente para varias t 's, determinado por el valor que tome N . Y está acumulación de varios puntos, nos indican los puntos fijos de la función determinada por mean field.

Mean Field Theory nos indica la probabilidad

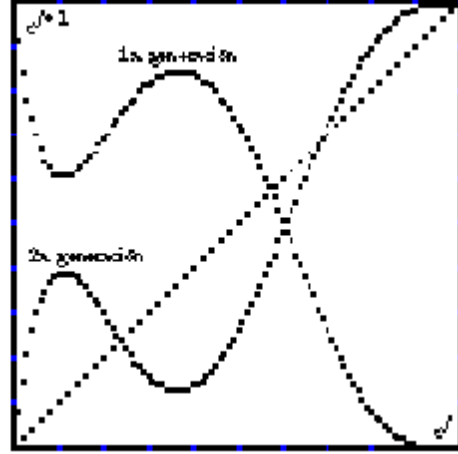


Fig. 7. Diagrama de mean field, regla 61

idad de obtener 1's en la siguiente generación, esta función podemos obtenerla graficando el polinomio derivado de la regla totalística. Ilustramos este procedimiento con la regla totalística 61, tenemos que las vecindades 3, 5 y 7 evolucionan en 1. De esta manera las vecindades determinan los coeficientes del polinomio, que calculamos con el triángulo de Pascal, y finalmente tenemos:

$$3p^4q^3 + 5p^2q^5 + 7^7 = 0$$

donde $q = 1 - p$, como podemos comprobar en la Figura 7.

Producimos un mapa iterativo f dada una concentración de 1's, dentro de la lattice y calculamos la probabilidad de obtener unos en la siguiente generación, entonces tenemos:

$$c^t = \Pr\{X_i^t = 1\} = 1 - \Pr\{X_i^t = 0\} \quad (3)$$

si las reglas son totalísticas,

$$\Pr\{X_i^{t+1} = 1\} = \sum_{S=0}^N p_s \Pr\{\mathcal{S}(\mathcal{V}_i^t) = S\}. \quad (4)$$

Con la aproximación del campo medio, la probabilidad para una vecindad \mathcal{V} de tener exactamente S unos, es representado como una binomial:

$$\Pr\{S(\mathcal{V}^t) = S\} = b(S; \mathcal{N}, c^t) \equiv \binom{\mathcal{N}}{S} (c^t)^S (1 - c^t)^{\mathcal{N} - S} \quad (5)$$

finalmente tenemos que las reglas que tienen la misma \mathcal{N} , S_{min} y S_{max} tienen la misma aproximación y su mapeo es determinado como:

$$c^{t+1} = f_{S_{min}-S_{max}}^{\mathcal{N}}(c^t) = \sum_{S=S_{min}}^{S_{max}} p_s b(S; \mathcal{N}, c^t). \quad (6)$$

Por ejemplo si tenemos un autómata celular (2,3), $d = 3$, $\{p_s; S = 0, \dots, 6\}$ y definimos una regla totalística 60 (\mathcal{R}_{2-5}^{3V-N} notación de Chaté-Manneville) donde el intervalo $2(S_{min})-5(S_{max})$, nos indica que las vecindades p_2 , p_3 , p_4 y p_5 mapean a uno y las cuatro vecindades restantes mapean a cero. Y damos una densidad inicial $c^0 = 0.5$, entonces tenemos en la siguiente generación:

$$\begin{aligned} c^1 &= \sum_{s=2}^5 p_s \binom{\mathcal{N}}{S} (c^t)^S (1 - c^t)^{\mathcal{N} - S} \\ &= (2) \binom{6}{2} (0.5)^2 (1 - 0.5)^{6-2} \\ &\quad + (3) \binom{6}{3} (0.5)^3 (1 - 0.5)^{6-3} \\ &\quad + (4) \binom{6}{4} (0.5)^4 (1 - 0.5)^{6-4} \\ &\quad + (5) \binom{6}{5} (0.5)^5 (1 - 0.5)^{6-5}. \end{aligned}$$

y así a través del tiempo. Podemos notar que conforme aumenta la dimensión del autómata celular en estudio, el grado del polinomio crece drásticamente por el número de vecindades que se generan. Siendo un buen problema tratar de resolver polinomios de grado 11 o más.

Dados estos resultados, podemos notar que la aproximación que realizamos a través de mean field es muy buena, a lo contrario que afirman Chaté-Manneville. Esto ha sido comprobado con los descubrimientos de Hemmingsson [8], encontrando comportamientos colectivos en autómatas de menor dimensión.

Presentamos una pequeña lista de autómatas celulares con comportamientos periódicos de orden $k = 2$, $r = 3$ y $r = 4$ en la Tabla 1.

Regla	Periodo	AC	d
189	P2	(2, 4)	4
158	P2	(2, 3)	3
149	P2	(2, 3)	3
133	P2	(2, 4)	4
129	P3	(2, 4)	4
127	P2	(2, 4)	4
125	P2	(2, 4)	4
92	P2	(2, 4)	4
78	P2	(2, 4)	4
61	P2	(2, 4)	3
33	P3	(2, 4)	4
23	P2	(2, 4)	4

Table 1
Autómatas periódicos

3.2. Comportamientos quasiperiódicos

El comportamiento quasiperiódico es un comportamiento periódico que no está bien definido. Dado este comportamiento, podemos notar rápidamente en el diagrama de retorno que los puntos fijos no están bien definidos, pues todos los puntos de acumulación oscilan entre los puntos fijos.

La Figura 8 muestra comportamientos quasiperiódicos de longitud 3, para el autómata celular (2,3) regla 33 y $d = 3$ dimensiones.

Podemos ver perfectamente en el diagrama de transiciones, como los puntos de acumulación a través del tiempo oscilan alrededor de un triángulo limitado por tres puntos fijos en sus extremos. En el diagrama de evoluciones podemos verificar estos resultados, la evolución de toda la lattice a través del tiempo es claramente quasiperiódica.

Finalmente calculamos mean field para la primera y la segunda iteración, está última es una reflexión de la primera curva, podemos verificar que la curva se intersecta en tres puntos con la segunda generación. Si calculamos las siguientes probabilidades para la tercera generación y la cuarta generación, podemos verificar que la curva de probabilidad para la cuarta generación es muy parecida a la curva de probabilidad de la primera generación. Por lo que mean field aproxima de manera muy cercana y precisa el comportamiento del autómata celular a través del tiempo.

Presentamos varios ejemplos ilustrativos de comportamientos periódicos y quasiperiódicos para varios autómatas del tipo (2,3) y (2,4).

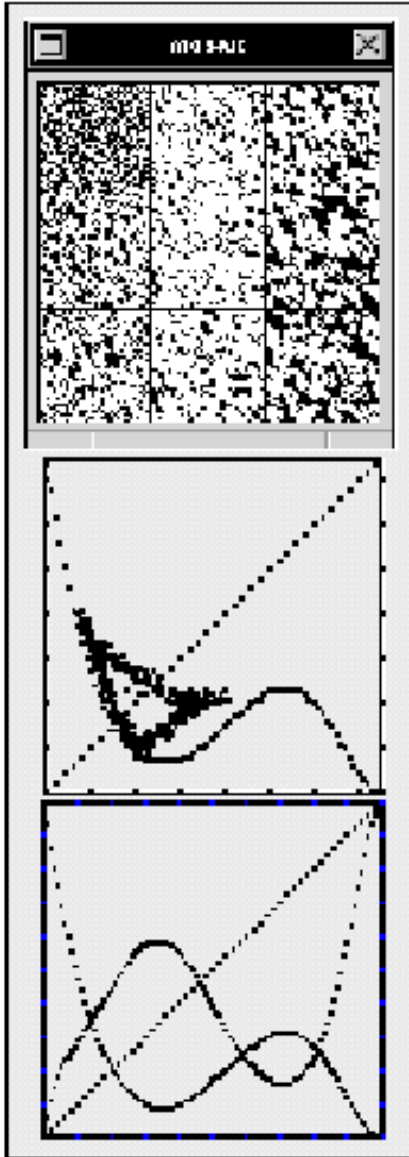
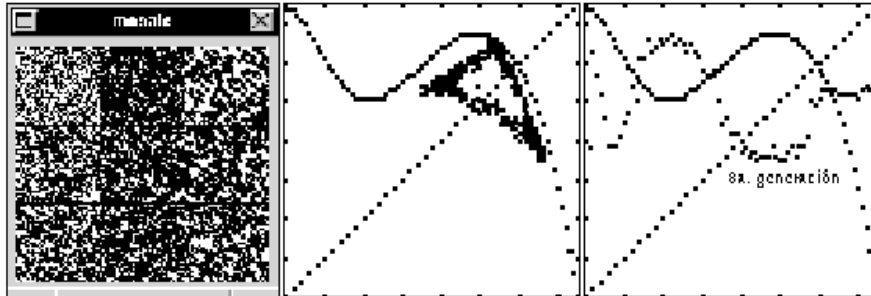
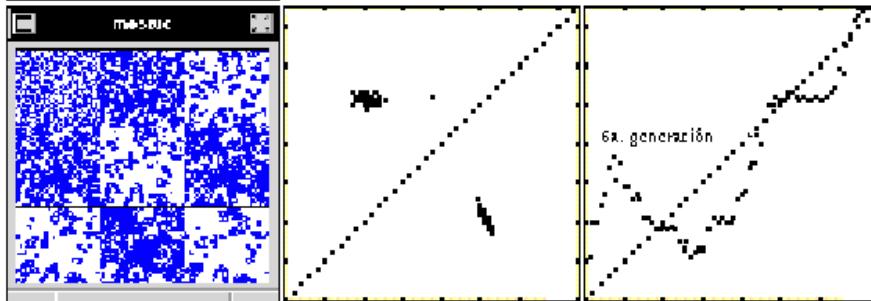


Fig. 8. AC(2,3), regla 33, $d = 3$

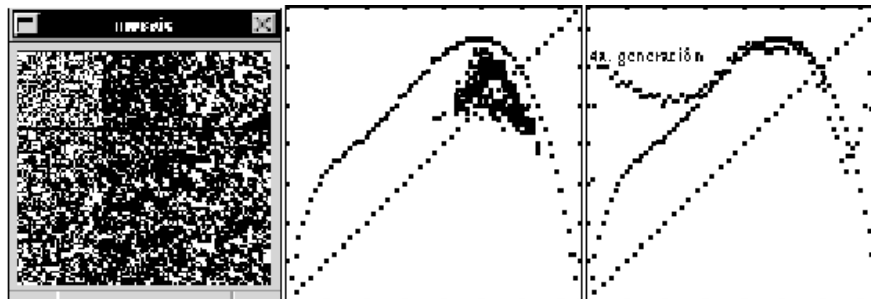
Regla 123
AC(2,3)
QP3
3d



Regla 61
AC(2,4)
P2
4d



Regla 122
AC(2,3)
QP3
3d



Regla 193
AC(2,4)
QP3
4d



Regla	Periodo	AC	d
161	QP3	(2, 4)	4
193	QP3	(2, 4)	4
97	QP3	(2, 3)	3
33	QP3	(2, 3)	3
122	QP3	(2, 3)	3
39	QP2	(2, 3)	3
69	QP2	(2, 3)	3
193	QP3	(2, 4)	4

Table 2
Autómatas periódicos y quasiperiódicos

4. Comportamiento no trivial

Chaté y Manneville en [4] han determinado que el comportamiento colectivo no trivial presenta por lo general las siguientes características:

- (1) El comportamiento colectivo no trivial es alcanzado desde casi todas las condiciones iniciales. Es decir, presenta comportamientos atractores en un límite dado.
- (2) El efecto colectivo se preserva a pesar de pequeñas variaciones en la regla de evolución o cualquier otro tipo de ruido estadístico.
- (3) Existe una sincronización de los sistemas en un límite dado, aunque estos se estén desarrollando de manera independiente y paralela.
- (4) El comportamiento colectivo no trivial tiene un mejor ajuste conforme aumentamos la dimensión del autómata celular, así como el tamaño de la lattice.

Ellos encontraron este comportamiento en autómatas celulares con $d = 4$ y más frecuentemente en autómatas con $d = 5$ y $d = 6$. Desarrollando un análisis a través de la teoría del campo medio.

Esto implica que para una densidad inicial c^t , calculamos todas las probabilidades de obtener unos en la siguiente generación. Si el comportamiento colectivo es no trivial, se debe a que tenemos diferentes densidades para varias c^t .

Referencias

- [1] John von Neumann, *Theory of Self-reproducing Automata* (edited and completed by A. W. Burks), University of Illinois Press, 1966.
- [2] Martin Gardner, *Mathematical Games - The fantastic combinations of John H. Conway's new solitaire game Life*, Scientific American, October 1969.
- [3] Andrew Wuensche and Mike Lesser, *The Global Dynamics of Cellular Automata*, Santa Fe Institute in the Sciences of Complexity, 1992.
- [4] H. Chaté, A. Lemaître, Ph. Marcq, P. Manneville, *Non-trivial collective behavior in extensively-chaotic dynamical systems: an update*, Physica A 224 pp 447-457, 1996.
- [5] Hugues Chaté and Paul Manneville, *Collective Behaviors in Spatially Extended Systems with Local Interactions and Synchronous Updating*, Progress of Theoretical Physics 87 pp 1-60, 1991.
- [6] Anael Lemaître, Hugues Chaté and Paul Manneville, *Cluster Expansion for Collective Behavior in Discrete-Space Dynamical Systems*, The American Physical Society pp 486-489, 1996.
- [7] Stephen Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Press, Singapore, 1986.
- [8] J. Hemmingsson. *A totalistic 3D cellular automata with quasiperiodic behavior* Physica A, 183, 1992, pp 255-261.
- [9] Edward F. Moore, *Mathematics in the Biological Sciences*, Scientific American, September 1964.