Modelación de flujo de tránsito de autos utilizando autómatas celulares

René Rodríguez Zamora[1]
renerz@correo.unam.mx
rrodriguez_99@yahoo.com

Director de tesis: Dr. Harold V. McIntosh
http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh
DepartamentoDepartamento
de Aplicación de Microcomputadoras,
Instituto de Ciencias,
Universidad Autónoma de Puebla.

Codirector de tesis: Dr. Sergio V. Chapa Vergara[1]
schapa@cs.cinvestav.mx
[1]CINVESTAV-I.P.N.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección de Computación

Septiembre del 2002.

A Jesús, por concederme este deseo.

Resumen

El tránsito de automóviles en ciudades y carreteras es un problema que cada día tiene mayor importancia y requiere de estudios profundos que puedan ser puestos dentro del contexto de sistemas complejos. Para el análisis del flujo de tránsito de autos, se han creado diversos modelos basados en teorías relacionadas con matemáticas y física (*Car-Following*, Autómatas Celulares, Dinámica de Fluidos, Teoría de Colas, Teoría Cinética de Gases). Estos modelos han sido simulados en computadora para poder predecir comportamientos bajo diferentes escenarios. En la actualidad las simulaciones se realizan tomando como dichos escenarios diversas ciudades del mundo.

El objetivo de esta tesis es presentar un análisis del problema del flujo de tránsito de autos utilizando herramientas de teoría de gráficas en autómatas celulares. Las herramientas de teoría de gráficas utilizadas en esta tesis son los diagramas de Bruijn, de subconjuntos y de ciclos. Para incorporar dichas herramientas al análisis se estableció como punto de partida la regla de AC(2,1) 184 por ser el modelo que simula flujo de tránsito de autos con la dinámica más sencilla. Posteriormente, se tomó como base el modelo creado por Kai Nagel, el cual es representado por un autómata celular que reproduce el flujo de tránsito de autos en una dimensión y en una dirección. Se propone un método para poder utilizar los diagramas de Bruijn, de subconjuntos y de ciclos debido a que el modelo original de Nagel no permite de manera directa la utilización de dichos diagramas. El método consiste en la indentificación de reglas o autómatas celulares basados en la notación de Wolfram. Estas reglas deben tener un comportamiento equivalente al modelo de Nagel. La primer regla que se presenta es la 43, la cual es representada por un autómata celular de orden (2,1). Se encontró que esta regla no incluye todas las configuraciones de autos que se pueden presentar en la carretera en el caso de que la velocidad máxima que pueden alcanzar éstos sea > 1. Posteriormente, se presenta una regla representada por un autómata celular de orden (4,2), la cual sí incluye todas las configuraciones posibles cuando el modelo contempla dos velocidades. A este autómata celular se le denominó LCATRAFFICFLOWVMAX2.

LCATRAFFICFLOWVMAX2 tiene un comportamiento equivalente al modelo de Nagel cuando la velocidad máxima que pueden alcanzar los autos es igual a 2, con la diferencia que nuestro modelo es completamente determinístico. La ventaja que tiene LCATRAFFICFLOWVMAX2 es que se puede predecir o analizar su comportamiento aún antes de llevar a cabo una simulación en computadora. Esto es posible utilizando las herramientas de teoría de gráficas antes citadas.

El utilizar herramientas gráficas nos permite realizar un estudio amplio de LCATRAFFICFLOWVMAX2 de manera confiable y funcional sin tener por necesidad que contar con un gran equipo de potentes computadoras para llevar a cabo simulaciones.

De tal forma, en este documento se describen algunos modelos y se explican los conceptos básicos de la teoría de flujo de tránsito de autos. También se hace una descripción general de los conceptos referentes a la teoría de autómata celular. Se presenta el estudio realizado de las reglas de AC(2,1) 184, 43, y de la regla de AC(4,2) LCATRAFFICFLOWVMAX2. Por último, se muestra un programa realizado en el manejador de base de datos PROGRESS que ilustra el comportamiento de nuestro modelo LCATRAFFICFLOWVMAX2.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis tiene como objetivo utilizar herramientas de teoría de gráficas en autómatas celulares para analizar flujo de tránsito de automóviles en una dimensión y en una dirección. Este tipo de estudio no se ha realizado previamente, así que la finalidad de este trabajo es aportar elementos para establecer una mecánica de análisis utilizando teoría de gráficas. Dicha mecánica debe ser tanto complementaria para el estudio de los modelos ya existentes como fundamental para el surgimiento de nuevos modelos que reproduzcan el fenómeno del tránsito de autos en carreteras.

En este capítulo se exponen algunos antecedentes históricos del sistema TRANSIMS. Se presenta un planteamiento acerca de cúal es y cómo se aborda la problemática referente a esta tesis. Por último, se hace una descripción general de la estructura de este documento.

1.1 Antecedentes

Desde que el industrial norteamericano Henry Ford puso en marcha la primer fábrica que construyó automóviles en serie, la popularidad de éstos fue creciendo de tal forma que ha generado problemas escenciales como: contaminación ambiental y tránsito. La cantidad del parque vehicular producido actualmente, junto con el incremento de los habitantes y la infraestructura en pavimentación ha dado como consecuencia que el flujo de tránsito de autos se convierta en un problema bastante complejo.

El interés en el tema del flujo de tránsito de autos se ha incrementado con el paso de los años. En diciembre de 1959, se realizó el *Primer Simposium sobre la Teoría de Flujo de Tránsito* en los laboratorios de investigación de la corporación General Motors, en Warren, Michigan [36]. En este simposium se presentaron los resultados de diversos estudios relacionados con la problemática del tránsito de autos. Aquí hay que señalar que los análisis realizados se llevaron a cabo en base a observaciones y experiencias en su mayoría desde un punto de vista empírico.

La teoría de flujo de tránsito busca describir de manera matemática las interacciones entre automóviles que viajan a través de una carretera. Para hacerlo, es necesario tomar en consideración una serie de variables y parámetros que determinan la reacción del conductor y de su automóvil ante una determinada situación.

Las principales variables a considerar son la *concentración o densidad*, que tiene que ver con el número de autos en un espacio determinado de la carretera en un tiempo dado, el *flujo*, que tiene que ver con la forma en que se desplazan los autos a través de la carretera en un cierto número de pasos de tiempo, y por último, la *velocidad*, que tiene que ver con la rapidez con la que se desplazan los autos en la carretera.

Los valores que asumen estas variables son determinados por ciertos parámetros. Por ejemplo, el parámetro llamado por los psicólogos **PIEV** (Percepción, Intelecto, Evaluación y Voluntad) determina la reacción del conductor ante una situación dada. Otros parámetros importantes son el valor máximo de aceleración que puede tener el automóvil y el ancho de la carretera, por citar algunos.

Demos C. Gazis [27] considera cuatro rangos cualitativos de intensidad de flujo de tránsito:

tránsito ligero, tránsito moderado, tránsito pesado y tránsito atascado[1]. Cuando el tránsito es ligero los autos viajan a las velocidades deseadas; cuando el tránsito es moderado los autos forman bloques o pelotones. Esto ocurre cuando autos rápidos son forzados a bajar la velocidad temporalmente cuando están atras de autos lentos; cuando hay tránsito pesado los pelotones llegan a ser muy largos y tienden a marchar juntos, formando largas filas en ciertas regiones a lo largo de la carretera; por último, cuando hay tránsito atascado los autos no pueden avanzar y tienen que esperar un cierto tiempo para poder hacerlo.

Con el fin de explicar el comportamiento del flujo del tránsito automovilístico se han tomado en cuenta áreas del conocimiento como matemáticas, física y computación; en las cuales se establecen diversas teorías: teoría cinética de gases, teoría de colas, teoría de dinámica de fluidos, etcétera. El objetivo es utilizar los principios generales de las teorías antes mencionadas con el fin de establecer modelos los cuales permitan describir el comportamiento del tránsito tomando en consideración diferentes escenarios. La creación de diferentes modelos tiene como finalidad encontrar mecanismos que permitan controlar en la mayor medida posible el flujo de tránsito de autos. Estos modelos conjugan elementos estocásticos y determinísticos y pueden dirigirse al comportamiento microscópico de un auto en particular siguiendo a otro o al comportamiento macroscópico de grupos considerables de autos sin especificar uno en particular. Un importante paso se dio cuando fue encontrada una consistencia entre el comportamiento microscópico y macroscópico, es decir, mediante experimentos microscópicos ha sido posible encontrar la forma de predecir el comportamiento macroscópico.

La conceptualización de modelos matemáticos-computacionales que permitan en la mayor medida posible predecir el comportamiento del tránsito de autos tiene como principal finalidad ayudar a una mejor planificación del transporte a través de un desarrollo adecuado de la infraestructura vial. La importancia de esto la podemos medir si tomamos en cuenta, por ejemplo, lo que dice Kai Nagel en su tesis doctoral [57], en ésta menciona que tan solo

[1] Jammed traffic.

en la parte oeste de Alemania la gente viaja 748.3 billones de kilómetros por año, esto es, más de 2 billones de kilómetros por día. Más aún, el 13.7% del Producto Nacional Bruto de Alemania es generado por el comercio, la transportación y las telecomunicaciones, mientras que en Estados Unidos el 14.8% es generado por transportación. En Alemania cerca del 10% del presupuesto federal es utilizado por el departamento de transportación. Así pues, la transportación es una parte fundamental de la economía de los países industrializados. En este contexto la ingeniería de tránsito es una área la cual trata este tipo de problemas, pero solo se pone en práctica en proyectos de los paises desarrollados.

En este sentido, se han creado proyectos como TRANSIMS (TRansportation ANalysis and SIMulation System) en Los Alamos National Laboratory [63], y su similar europeo EUROTOPP [77], los cuales utilizan ideas semejantes, es decir, se crean modelos que posteriormente se prueban mediante programas computacionales que recrean escenarios reales y posteriormente se analizan los resultados que se obtienen al finalizar las simulaciones. En el proyecto TRANSIMS han participado desde mediados de la década de los 1990's grupos interdisciplinarios de personas con la finalidad de integrar los diferentes aspectos que conciernen a un problema complejo como lo es el del flujo de tránsito de autos.

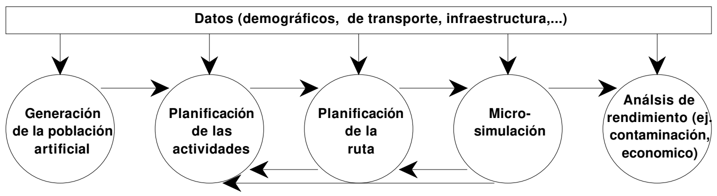

Figura 1.1: Módulos de una simulación basada en agentes que realiza TRANSIMS.

La idea fundamental bajo la cual se creó TRANSIMS es lograr que se reduzca el tiempo de viaje que utlizan las personas para realizar sus actividades cotidianas. Para hacer esto, TRANSIMS utiliza un tipo de simulación modular (ver Figura 1.1) basada en agentes, donde cada viajero es un agente, los agentes hacen planes acerca de lo que harán durante el día, estos pueden caminar, utilizar bicicletas, conducir autos o utilizar autobuses, por lo que TRANSIMS simula todos los aspectos relacionados con la toma de decisiones de los agentes individuales representados en una región metropolitana que tengan que ver con su transportación.

Como se puede observar en los módulos de la Figura 1.1, la simulación primero toma una serie de datos demográficos, de infraestructura, etc. y genera una población ficticia, posteriomente realiza una planeación de actividades y de rutas (ver Figura 1.2) que pueden seguir los agentes durante la simulación. Éste módulo establece un ciclo con los módulos tres y cuatro y funciona en base a la información derivada de las actividades de los agentes.

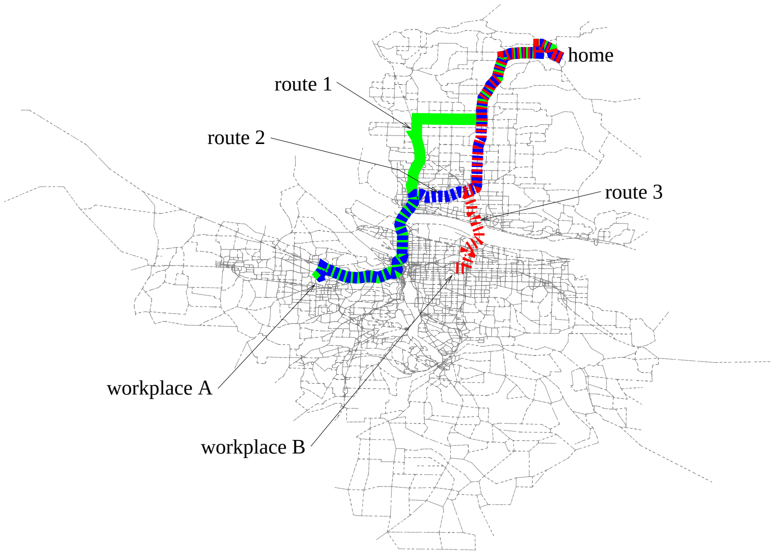

Figura 1.2: Ejemplo de la planeación de actividades y rutas que realiza TRANSIMS.

Para realizar simulaciones con TRANSIMS se han tomado como escenarios varias regiones pertenecientes a ciudades del mundo con una actividad importante como Los Angeles, Nueva York, Dallas, Portland, etc. (ver figura 1.3 (a) y 1.3 (b)).

Actualmente Nagel adapta TRANSIMS para realizar simulaciones y poder caracterizar el comportamiento del tránsito de la ciudad de Zurich, en Suiza, este proyecto lo está llevando a cabo en el Instituto Federal de Tecnología Suizo en Zurich, Suiza [74].

Es importante mencionar que TRANSIMS trabaja bajo un entorno de computadoras

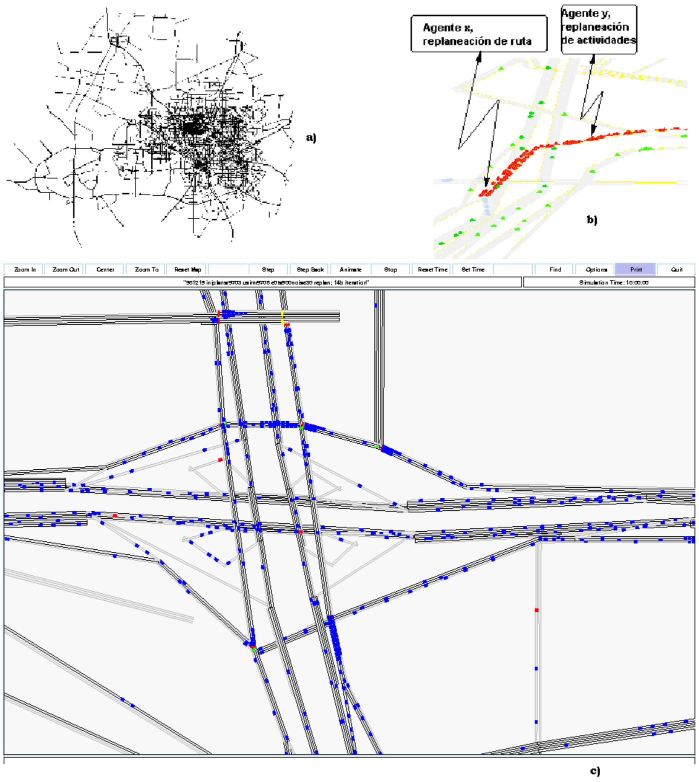

Figura 1.3: (a) Simulación TRANSIMS tomando como escenario el área Forth-Worth de Dallas, E.U. (b) Simulación TRANSIMS tomando como escenario la ciudad de Portland, E.U. (c) Pantalla típica de una simulación en TRANSIMS.

funcionando paralelamente, es decir, el tamaño de las simulaciones depende de la capacidad de las computadoras en las cuales se realizan los cálculos y de los algoritmos empleados para explotar al máximo el paralelismo.

La propuesta de TRANSIMS es bastante buena, sin embargo, habría que considerar varios factores que pueden influir en el rendimiento de un sistema que pretende ser completamente práctico y sumamente realista, como por ejemplo, el tamaño del problema, es decir, las regiones metropolitanas típicamente constan de millones de viajantes; ejecutar una simulación segundo a segundo de un problema de este tipo en un tiempo de computación razonable solamente es posible con el uso de técnicas computacionales y estadísticas avanzadas. Otro problema es el comportamiento humano, ya que hasta hoy se está lejos de comprender y más aún de predecir el comportamiento de las personas.

1.2 Planteamiento del problema

Como se mencionó en la sección anterior, los proyectos como TRANSIMS, los cuales desarrollan la investigación científica en el campo de la ingeniería de tránsito con el fin de planificar adecuadamente el transporte y, consecuentemente, mejorar la calidad de vida de las personas, principalmente se han llevado a cabo en paises desarrollados.

En caso contrario, en México se tiene poca referencia acerca de investigaciones que se hayan realizado para analizar el problema del flujo de tránsito de autos. Esto es preocupante si tomamos en cuenta, por ejemplo, que en el Distrito Fedetal se plantea la posibilidad de construir segundos pisos a dos de las carreteras más importantes de la ciudad, el jefe de gobierno menciona que la ingeniería civil está preparada para este tipo de construcciones, y para decidir si se construye o no, se propone la realización de un concenso entre los ciudadanos capitalinos. Es obvio que el objetivo de construir estos segundos pisos es el de reducir los atascamientos, reducir el tiempo de viaje de los automovilistas, disminuir la contaminación, etc., la interrogante sería si hay una investigación sobre el tránsito en estas carreteras que avale la decisición de construirles segundos pisos y no solamente depender del buen criterio de los ciudadanos para realizar una inversión tan fuerte.

Para este tipo de situaciones es importante contar con un sistema que, mediante la simulación apoye en la toma de decisiones, en este caso, para la correcta planificación del transporte. Si en México se contemplara la posibilidad de emprender un proyecto para estos fines se podrían tomar como base los sistemas ya existentes, en este caso TRANSIMS y EUROTOPP. El tomar como base los sistemas antes mencionados tiene ventajas importantes, como es el hecho de que ya existe todo un esquema definido acerca de la forma en la que se deben llevar a cabo las simulaciones experimentando con diferentes escenarios, los cuales podrían ser diversas ciudades de la República Mexicana. Sin embargo, también hay ciertas implicaciones que en un determinado momento se convierten en limitantes si tomamos en cuenta la situación económica de México. La primera de estas implicaciones es que hay que construir nuestro propio sistema, esto es, podemos tomar la metodología que se empleó para construir TRANSIMS, pero tenemos que adaptar el sistema a nuestro propio contexto, y para realizar esto, se tiene que llevar a cabo un análisis profundo de las características del sistema de transporte automovilístico en México, para saber a ciencia cierta cuales son sus problemas de fondo y, en esta medida, determinar los requerimientos de nuestro propio TRANSIMS. La anterior es una tarea complicada ya que para realizarla exitósamente es necesario conformar todo un grupo interdisciplinario de personas, tal y como se hizo cuando se construyó TRANSIMS, esto nos da una idea de la magnitud que tiene un proyecto de este tipo, y por ende, de lo costoso que puede resultar, por esta razón decimos que esta implicación se puede convertir en una limitante. Otra implicación, que quizas sea la más importante, es la que tiene que ver con la infraestructura, si como hemos mencionado anteriomente, tomamos como base TRANSIMS para desarrollar nuestro propio sistema, también tenemos que tener en cuenta que este sistema funciona en un entorno de computadoras sumamente sofisticadas, y también, sumamente costosas.

1.3 Propuesta de la tesis

En esta tesis no se proponen modelos completamente originales, ni se plantea la construcción de un sistema para análisis y simulación del sistema de transportación del tipo de TRANSIMS. Si como hemos visto en secciones anteriores, existe poca investigación en México referente a analizar la teoría y los modelos para flujo de tránsito, entonces lo que debemos hacer es comenzar a investigar en esta área del conocimiento con nuestra propia perspectiva, y quizas el mejor camino para llevar a cabo esta tarea sea irse a los principios básicos y a los modelos más sencillos para comprender lo mejor posible el problema que estamos abordando, y en esa medida, darle un tratamiento adecuado. En esta tesis lo que se hizo es precisamente irse a los principios, a las bases de la teoría de flujo de tránsito y a los modelos más sencillos, y a partir de ahí proponemos resultados que pueden servir de apoyo para futuros proyectos de investigación en México sobre flujo de tránsito de autos, para en un futuro, tener nuestro propio TRANSIMS.

La propuesta de esta tesis es utilizar herramientas de teoría de gráficas con el fin de analizar modelos para flujo de tránsito de autos basados en autómatas celulares que funcionan en una dimensión y en una dirección. El motivo por el cual se propone la utilización de diagramas de Bruijn, de subconjuntos y de ciclos, es el de poder llevar a cabo estudios extensos acerca del comportamiento del tipo de modelos para flujo de tránsito antes mencionados sin tener la limitante de que primero tengamos que simular el modelo en una computadora para después poder hacer el análisis del comportamiento de los mismos. Otra razón por la que se propone el utilizar ciertas herramientas de teoría de gráficas para estudiar modelos para flujo de tránsito, es que por medio de ésta teoría es posible describir la evolución de un autómata celular y relacionar sus propiedades locales con sus propiedades globales, esto coincide con que se menciona en la sección 1.1, en el sentido de que se dio un paso importante en el estudio de los modelos para flujo de tránsito de autos cuando fue encontrada una consistencia entre el comportamiento microscópico y el macroscópico.

Básicamente, en esta tesis se realizó un estudio de la teoría y de los modelos para flujo de tránsito en general. También se llevó a cabo un estudio de la regla de AC(2,1) 184 y sus "variantes". Y por último, se análizo el modelo de Kai Nagel y se encontró una regla o autómata celular de orden (4,2) con un comportamiento equivalente al de este modelo cuando se manejan dos velocidades. Al autómata celular se le denominó LCATRAFFICFLOWVMAX2. El objetivo de obtener reglas que tengan un comportamiento equivalente al del modelo original de Kai Nagel para flujo de tránsito de autos, es porque en las reglas equivalentes utilizamos la notación Wolfram, la cual sí nos permite utilizar las herramientas de teoría de gráficas ya mencionadas, caso contrario a lo que ocurre con el modelo original.

El analizar autómatas celulares que reproducen el comportamiento del flujo de tránsito de autos utilizando herramientes de teoría de gráficas tiene sus ventajas. Tal vez la más importante es que, como mencionamos anteriormente, podemos determinar el comportamiento del modelo aún antes de correr una simulación, es decir, podemos determinar el desplazamiento de los autos, su velocidad y flujo promedios, podemos saber cuales fueron las configuraciones que generaron un atascamiento, entre otras cosas. Esto es muy importante ya que en la metodología que actualmente se utiliza para caracterizar el comportamiento de los modelos para flujo de tránsito primero se define una carretera muy extensa mediante un arreglo de celdas, posteriormente se pone a funcionar la simulación del modelo, y una vez terminada la simulación entonces se detectan, se analizan y se caracterizan los fenomenos en base a los resultados que arroja dicha simulación. Para finalizar, es importante mencionar que no se pretende que la mecánica de análisis propuesta en esta tesis sustituya a las ya existentes, en todo caso, la idea es que la mecánica de análisis que proponemos pueda servir como complemento a las otraz formas de analizar el problema del flujo de tránsito de autos.

1.4 Descripción del documento

Este documento está dividido en seis capítulos. A continuación se describe brevemente de qué trata cada uno de ellos.

- Capítulo 1. Introducción. En este capítulo se exponen algunos antecedentes históricos del sistema TRANSIMS y se presenta un planteamiento acerca de cúal es y cómo se aborda la problemática referente a esta tesis.

- Capítulo 2. Modelos para flujo de tránsito. En este capítulo se describen varios modelos con diferentes características de acuerdo al enfoque que manejan. Estos modelos están basados en diferentes teorías como son: teoría de colas, de dinámica de fluidos, cinética de gases, *car-following* y de autómata celular.

- Capítulo 3. Teoría de autómata celular. Se presenta un panorama general de la teoría de autómata celular, desde su historia y la estructura, hasta la forma en que se analizan los autómatas celulares en una dimensión.

- Capítulo 4. Analizando la regla de AC(2,1) 184. Se presentan modelos para flujo de tránsito en una dimensión que aparentemente son variantes de la regla de AC(2,1) 184. Se analiza la regla de AC(2,1) 184. Se presentan los resultados y una discusión final.

- Capítulo 5. Analizando el AC de Kai Nagel en una dimensión. Se describe el modelo de Kai Nagel para flujo de tránsito el cual es representado por un autómata celular uni-dimensional. Se plantea una regla que reproduce el comportamiento del modelo de Kai Nagel para flujo de tránsito incluyendo dos velocidades a la cual denominamos LCATRAFFICFLOWVMAX2. Se presentan los resultados y una discusión final.

- Capítulo 6. Conclusiones. Se presentan las conclusiones finales, los resultados obtenidos y los trabajos futuros.

Capítulo 2

Modelos para flujo de tránsito

Definimos un modelo como el cuerpo de información relativa a un sistema recabado para fines de estudiarlo [28]. Ya que el propósito del estudio determina la naturaleza de la información que se reúne, no hay un modelo único para un sistema.

En este captítulo describimos diversos modelos los cuales se basan en teorias con enfoque macroscópico (teoría cinética de gases y diná-mica de fluidos), y/o enfoque microscópico (teoría de colas, *car-following* y de autómata celular). Estos modelos se utilizan para analizar diferentes aspectos del problema del flujo de tránsito.

2.1 Basados en la teoría cinética de gases

En la teoría cinética, el tránsito se estudia como un gas donde las partículas que lo componen interactúan unas con otras y cada partícula representa un automóvil. Existen diferentes modelos como el de Prigogine y el de Paveri-Fontana para flujo de tránsito que han sido desarrollados tomando como base la teoría cinética de gases. En esta teoría el flujo de tránsito puede ser entendido al estudiar la función de distribución $f(x, v, t)$ que describe el número de autos en el intervalo de la carretera $(x, x + dx)$ con una velocidad

$(v, v + dv)$ para un tiempo dado t. Esta función también se puede expresar en términos de dos variables fundamentales: *concentración* y *flujo*. Un buen entendimiento de la relación de concentración y flujo es la base para describir el tránsito. La curva flujo-concentración se denomina el *diagrama fundamental* de tránsito en una carretera o la *ecuación de estado* de la teoría de tránsito (ver figura 2.1). En bajas densidades, el flujo se incrementa linealmente junto con la concentración. Los autos se mueven de manera independiente en el tránsito diluido con pequeñas fluctuaciones alrededor de una velocidad media. Con el incremento en la concentración los autos se van estorbando unos a otros cada vez más, lo cual lleva a la reducción del promedio de velocidad. Los efectos de que los autos se estén estorbando se hacen dominantes en altas concentraciones. En una *densidad crítica*, el flujo exhibe un máximo, de tal manera que un incremento en la densidad resulta en un decremento del avance total, y finalmente en una completa fase de congestión donde no hay auto que pueda moverse y el flujo es cero.

Por otro lado, la *varianza* en las velocidades de los autos también propicia la formación de congestionamientos o atascamientos de tránsito. Los atascamientos de tránsito son fases localmente congestionadas en las cuales los autos viajan a baja velocidad o están detenidos. Entre los atascamientos uno encuentra autos en bajas concentraciones viajando a altas velocidades. Esas fases congestionadas son configuraciones bastante estables con su propia dinámica. Los autos conduciendo dentro de atascamientos se estabilizan y los autos saliendo desde el frente reducen la longitud del atascamiento. Desde este punto de vista, los atascamientos se mueven lentamente en la dirección opuesta a la de los autos. Su velocidad se puede estimar con un modelo muy simple donde uno asume que hay una velocidad pequeña constante v_1 y una densidad ρ_1[1] en el atascamiento, y una velocidad alta v_2 y baja densidad ρ_2 fuera de él. Si los autos aceleran y disminuyen su velocidad en el acto, el atascamiento se mueve con una velocidad $v_{jam} = -(v_2 - v_1)\rho_1/\rho_2 + v_1$.

Puesto que el radio de densidad es pequeño, los atascamientos se mueven lentamente.

[1]En la literatura sobre flujo de tránsito en ocasiones se utiliza k en vez de ρ.

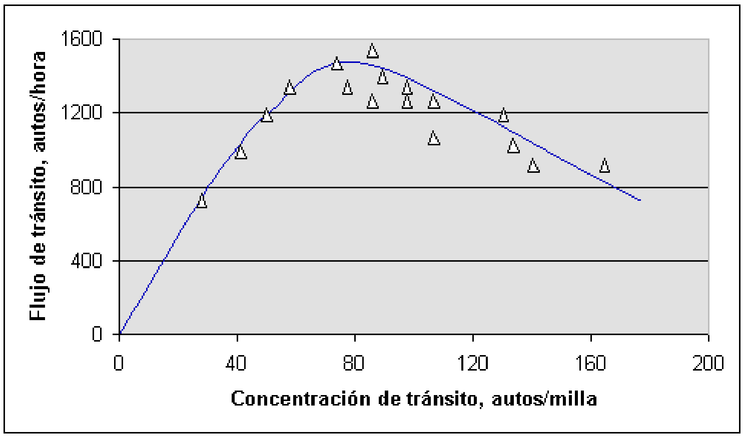

Figura 2.1: Diagrama fundamental de flujo de tránsito.

2.2 Basados en la teoría de dinámica de fluídos

Uno de los campos de la física más complicados de estudiar son los fluidos, el comportamiento de gases y líquidos en movimiento. Comprender, por ejemplo, los flujos de aire turbulento o los remolinos que se forman cuando el agua discurre por una tubería o la sangre por una arteria son de suma importancia, tanto para la ingeniería como para la medicina.

Las ecuaciones que rigen la dinámica de fluidos son las conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, producto del francés constructor de puentes Claude-Louis Navier y del matemático irlandés George Stokes. El primero en obtener estas ecuaciones fue el francés en una época (1822) en que no se comprendía muy bien cuál era la física de la situación que estaba matematizando. De hecho, lo único que hizo fue modificar unas ecuaciones ya existentes y obtenidas por el famoso matemático Euler, de modo que incluyesen las fuerzas existentes entre las moléculas del fluido. Aproximadamente 20 años después, Stokes justificó las ecuaciones del ingeniero francés deduciéndolas adecuadamente. A pesar de que las ecuaciones de Navier-Stokes son sólo una aproximación del comportamiento real de los fluidos, se utilizan para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con éstos; el problema es que si uno estudia el movimiento de un fluido con estas ecuaciones, es incapaz de prever si ese movimiento se va a mantener siempre o se va a complicar.

Los modelos basados en la teoría de dinámica de fluídos han sido desarrollados desde los 1950's y se han utilizado en la ciencia de tránsito con un éxito considerable. Cuando es visto desde una gran distancia, por ejemplo, desde un avión, el tránsito pesado aparece como el torrente de un fluido. Por lo tanto, un estudio con enfoque *macroscópico* sobre el flujo de tránsito de autos se puede desarrollar en analogía con la teoría hidrodinámica de fluidos tratando al tránsito como un fluido uni-dimensional de izquierda a derecha.

Sean $\rho(x,t)$ y $J(x,t)$ la densidad y el flujo en una posición arbitraria x en un instante arbitrario de tiempo t. La ecuación de continuidad que relaciona a la densidad y el flujo del tránsito vehicular como un fluido en una carretera donde no hay ningun tipo de intersección es:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = 0. \tag{2.1}$$

Sin embargo, la ecuación 2.1 no se puede resolver debido a que existen dos funciones desconocidas: $\rho(x,t)$ y $J(x,t)$. En uno de los primeros modelos para flujo de tránsito, Lighthill y Whitham asumen que la función $J(x,t)$ es determinada por la función $\rho(x,t)$, es decir, $J(x,t) = J(c(x,t))$. Insertando esto en la ecuación de continuidad 2.1 se obtiene la ecuación denominada Lighthill-Whitham

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + vg\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$

donde $vg(\rho) = \frac{dJ(c)}{dc}$.

En los modelos basados en la teoría de dinámica de fluidos también se contempla la posibilidad de que surgan atascamientos mediante la incorporación de variables que representan elementos tales como *presión del gas vehicular* y *viscosidad*. También se incorpora la *varianza* de las velocidades como una variable adicional dependiente del espacio y del tiempo, haciendo una analogía con las ecuaciónes de Navier-Stokes para fluidos. Con esto se observa un comportamiento más realista de los atascamientos que se desarrollan.

Al igual que en la teoría cinética, existe un diagrama fundamental que indica de que manera se comporta el flujo bajo diferentes concentraciones o densidades.

2.3 Basados en la teoría *car-following*

La teoría *car-following* asume una relación lineal entre la (re)acción y el estímulo:

$$\text{acción} = \text{sensibilidad} \cdot \text{estímulo}.$$

El estímulo podría, por ejemplo, ser la distancia hacia el auto de adelante, o la diferencia de las velocidades. Una de las primeras propuestas fue

$$v_i(t+\tau)\alpha\Delta x_i(t), \tag{2.3}$$

donde v_i es la velocidad del *i-ésimo* auto en una cadena, τ es el tiempo necesario para la adaptación (este tiempo es más grande que el tiempo de reacción), y Δx es la distancia hacia el siguiente auto adelante. La mayoría de las teorías tratan a los vehículos como puntos. Especialmente en épocas recientes, esta aproximación a brindado nuevos resultados.

Derivando la ecuación 2.3 con respecto al tiempo nos da

$$a_i(t+\tau)\alpha\Delta v_i(t) \ ,$$

donde a es la aceleración de i y Δv es la diferencia de velocidad con respecto al siguiente auto de adelante. Una generalización tomando en cuenta que la sensibilidad depende de la distancia y de la velocidad es

$$a_i(t+\tau) = c_1 \cdot \frac{[v_i(t)]^m}{[\Delta x_i(t)]^l} \cdot \Delta v_i(t), \tag{2.4}$$

donde l y m son números enteros. Esta ecuación ha sido analizada en gran detalle en los 1960's, por ejemplo con respecto a su estabilidad para un *car-following* sencillo o para una cadena infinitamente larga de autos. Uno puede derivar las relaciones velocidad-densidad y por consiguiente flujo-densidad desde la ecuación 2.4.

En cualquier caso, la ecuación 2.4 es problemática para la estimación numérica. Cuando Δv es cero, la ecuación permite una distancia arbitrariamente pequeña hacia el auto de adelante a la vez que permite una velocidad muy alta. En la teoría, esto nunca pasa en tanto que uno empiece desde condiciones iniciales realistas, pero debido a la imprecisión númerica de las simulaciones tales situaciones pueden ocurrir.

Un modelo basado en la teoría *car-following* es el modelo de velocidad óptima (OVM). La ecuación de aceleración del modelo de velocidad óptima es:

$$\dot{v} = \alpha \cdot (V(\Delta x) - v), \tag{2.5}$$

donde $V(\Delta x)$ es una función cuyas características son $V(\Delta x) \to v_{max}$ si $\Delta x \to \infty$ y $V(\Delta x) = 0$ a cierta distancia de Δx. Este modelo ha sido analizado en gran detalle en [2]. Para pequeñas densidades solamente existe una solución homogénea, donde todos los autos se conducen con la misma velocidad. En una cierta densidad ρ_{l1}, esta solución homogénea se hace linealmente inestable y es cambiada por una solución donde el sistema tiene varios atascamientos que son separados por regiones de libre flujo. La densidad ρ_{out} de tales atascamientos es más pequeña que ρ_{l1}, y por esta razón una alteración bastante grande puede mover la intensidad del tránsito desde un régimen de tránsito ligero a un régimen de tránsito pesado para densidades abajo de ρ_{l1} (pero más grandes que ρ_{out}).

Este modelo es estructuralmente estable, en el sentido de que pequeños cambios en la ecuación del modelo no cambian su comportamiento general. Por ejemplo, la introducción explícita de tiempo de retardo en la ecuación 2.5 da

$$\dot{v}(t) = \alpha[V(\Delta x(t-\tau)) - v(t)]. \tag{2.6}$$

Aunque el retardo cambia el esquema *microscópico* en el sentido de que cambia el punto fijo estable en $v = V(\Delta x)$ para un cierto rango de velocidades, el comportamiento *macroscópico* del modelo no cambia mucho, como se ha indicado por simulaciones numéricas. En general, este modelo tiene la desventaja de que no es completamente libre de choques, un problema que se agrava cuando se utiliza tiempo de retardo y este despliega aceleraciones muy grandes.

Otro enfoque *car-following* se basa en observaciones psicológicas y fisiológicas. Wiedemann [47] repasa este tipo de observaciones antes de describir una simulación microscópica del modelo *car-following*.

Wiedemann considera varios aspectos, uno de ellos es que la resolución angular del ojo humano es limitada. Aún cuando un humano puede detectar a un auto que está acercándose, este puede estimar su velocidad solamente cuando el auto se hace notablemente grande en su campo de visión, por ejemplo, cuando el ángulo entre las partes izquierda y derecha del auto se incrementan. Utilizando argumentos geométricos, uno puede darse cuenta que este umbral de observabilidad es proporcional a la diferencia de velocidad, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

$$\text{umbral } \alpha \frac{\Delta v}{\Delta x^2}. \tag{2.7}$$

Note que esto es similar a la ecuación 2.4 del modelo matemático *car-following* con $l = 2$ y $m = 0$.

De esta manera, después de cruzar el umbral, la disminución de la velocidad o el frenado se ajusta con la meta de alcanzar la velocidad del auto de enfrente junto con un cierto espacio deseado. Medidas consistentes con el argumento fisiológico indican que el umbral de reacción es independiente de ciertas velocidades. De esta manera, en algunas ocasiones el frenar de emergencia puede ser necesario.

Además, la reacción humana para frenar usualmente no es muy precisa, lo que introduce un elemento altamente estocástico en el modelo *car following*.

Resultados más precisos podrían obtenerse utilizando la psicología ecológica. La psicología ecológica trata de encontrar principios generales de cómo los organismos, incluyendo humanos, interactúan con su ambiente. Las percepciones visuales ligan al perceptor con su ambiente vía un campo de flujo óptico, el cual provee la información visual relevante de una determinada acción.

En el contexto *car-following*, el concepto "tiempo de contacto" es relevante. El tiempo de contacto ha probado ser un descriptor que informa al perceptor acerca del movimiento necesario dada una meta. Esta meta podría ser, por ejemplo, arribar tranquilamente a una posición *car- following* deseada.

2.4 Basados en la teoría de colas

La teoría de colas en su forma más simple asume que un servicio es proporcionado con una cierta velocidad, y que las solicitudes a ese servicio llegan usualmente a diferentes velocidades. El tiempo entre el arribo del elemento n y el elemento $n-1$ de una cola se llama el tiempo de interarribo del elemento n, y la longitud de tiempo en la cual el elemento n de la cola permanecerá en servicio, su tiempo de servicio.

Supongamos que el índice (velocidad) de arribos es λ y el índice de salidas desde una cola no vacía es μ; entonces el promedio de la distribución de interarribos es $1/\lambda$ y el promedio de la distribución de tiempo de servicio es $1/\mu$. El índice de esas cantidades $\lambda/\mu = \rho$ es llamado la *intensidad de tránsito* de la cola.

Cuando la velocidad a la que llegan las solicitudes es más alta que la velocidad de servicio, se formará una cola de solicitudes. La velocidad de servicio aquí es generada para un tránsito ligero y la formación de una cola se da cuando el tránsito que puede potencialmente llegar hacia el tránsito ligero es más grande que el tránsito que puede ir a través del tránsito ligero.

Las ligas compuestas de colas pueden ser conectadas para reflejar redes de transportación. La velocidad de cada liga/cola podría entonces corresponder a la capacidad de esa liga.

La introdución de colas con almacenamiento infinito no permite la creación de congestionamientos. Los congestionamientos son causados por ligas que se llenan, lo cual pasa cuando la demanda es más alta que la capacidad, por ejemplo, mas autos entran a la liga que los que pueden salir. Ligas llenas no aceptan cualquier otro auto que necesite entrar a la liga llena. En esta forma, una sola liga donde la demanda excede la capacidad puede causar una congestión que se extienda a través de una red.

En 1997, Gawron [88] introdujo un modelo similar a los modelos tradicionales para flujo de tránsito de autos basados en la teoría de colas, con la diferencia de que este incluye la modelación de derramamientos. El número de autos que dejan una liga es constreñido por la capacidad de la liga y por el número de autos los cuales pueden acomodarse en las ligas destino. Si la liga destino de un auto está llena, este permanecerá donde está.

Cada vez que un auto entre a una liga, se calcula un tiempo de viaje esperado. Una primera versión de este modelo propone calcular el tiempo de viaje desde la longitud y el estado actual de la liga. El diagrama fundamental propone una velocidad deseada de acuerdo a la densidad actual. Una versión más reciente solamente considera la velocidad de libre flujo para calcular el tiempo de viaje.

2.5 Basados en autómatas celulares

Los modelos que utilizan autómatas celulares para modelar flujo de tránsito de autos han despertado gran interés en años recientes. Comparado con los primeros intentos por modelar flujo de tránsito, los modelos basados en autómatas celulares tienen la ventaja de poder utilizarse eficientemente en la simulación por computadora debido al tipo de dinámica que manejan.

La idea básica de los modelos para flujo de tránsito basados en autómatas celulares es considerar un conjunto de celdas adyacentes las cuales representan la carretera a lo largo de la cual un auto puede moverse. La regla de movimiento dice que un auto se desplazará n celdas siempre y cuando estas no estén ocupadas por otro auto; si este es el caso, entonces el desplazamiento no ocurrirá.

Se han desarrollado modelos para flujo de tránsito de autos basados en autómatas celulares en una y dos dimensiones. Dentro de los modelos que trabajan en una dimensión, el que muestra la dinámica más simple es el que se basa en la regla 184 de Wolfram [101], la cual representa un automata celular (2,1). En este modelo los autos únicamente pueden desplazarse una celda hacia su derecha, es decir, no se contemplan diferentes velocidades como parámetro que determine el número de celdas que un auto puede avanzar (este modelo será descrito con más detalle en el capítulo 4).

Existen modelos los cuales se han presentado como variantes de la regla 184, como el modelo de Fukui-Ishibashi [25] y el modelo Fukś-Boccara [24] en los cuales se contempla que los autos pueden avanzar más de un sitio en un paso de tiempo sin aumentar sus velocidades.

En 1994, Nagel propuso en [57] un modelo que también trabaja en una dimensión, aunque en este si se toma en consideración un rango de velocidades para los automóviles. El modelo consta de cuatro pasos los cuales se aplican simultáneamente para todos los vehículos. El primer paso es para aceleración, el segundo paso es para disminución de velocidad, el tercer paso introduce un elemento estocástico que se refleja en la disminución de la velocidad de los autos. En esta tesis se omite el elemento estocástico debido a que el análisis tiene un enfoque completamente determinista. Y el cuarto y último paso es para el movimiento de los autos (este modelo será descrito con más detalle en el capítulo 5).

En la figura 2.2 se muestra una simulación del modelo propuesto por Nagel en la cual es posible cambiar varios parámetros como la densidad global y la velocidad máxima.

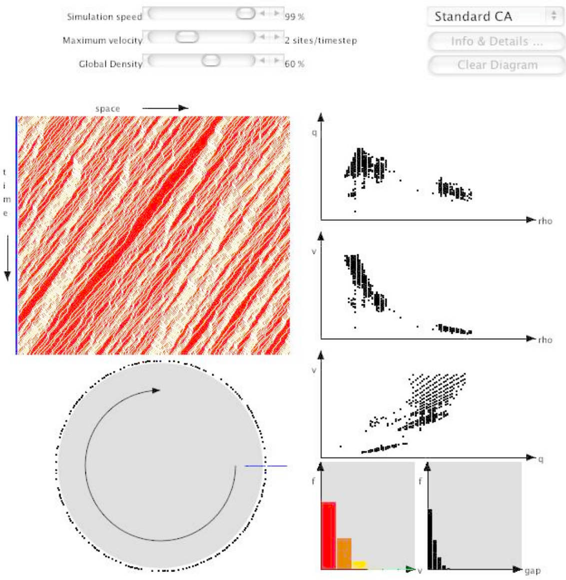

Figura 2.2: Simulación disponible en [76]

Existe también el modelo para flujo de tránsito uni-direccional de dos carriles el cual consta de dos modelos paralelos de un solo carril, con la variante de que los autos pueden cruzar de un carril a otro y para hacerlo deben tomar en consideración los sitios vacíos al frente tanto de su carril como del carril opuesto.

Simon y Gutowitz propusieron en [89] un modelo bi-direccional de dos carriles (ver figura 2.3), donde el paso de un carril a otro puede estar permitido en ambas direcciones, en una u otra, o en ninguna.

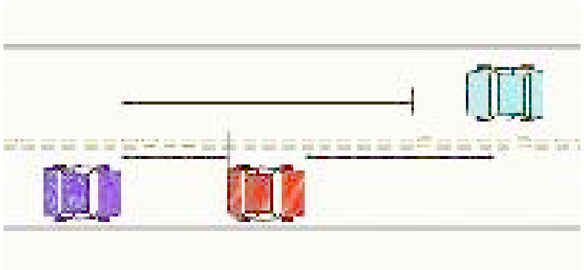

Figura 2.3: Modelo bi-direccional para flujo de tránsito.

Un algoritmo que controle el paso de automoviles de un carril a otro debe tomar en cuenta un cierto número de circunstancias. Por ejemplo, un auto debe mantener una velocidad constante mientras esta cruzando de carril o si el auto que va a cruzar detecta a otro auto acercándose detrás de él por el carril contrario debe regresar inmediatamente a su carril.

Hay tres tipos de atascamientos que pueden aparecer en una carretera de dos carriles bi-direccional. El primero y el más común es debido a una circulación muy lenta porque los autos se detienen constantemente. El segundo se tiene cuando un conductor audaz tratar de cruzar al otro carril aunque no haya espacio para regresar al suyo, aunque esto raramente pasa. Y finalmente, un atascamiento puede ocurrir cuando un par de conductores adyacentes, uno en cada carril simultáneamente tratan de pasar. Este atascamiento paraliza el tránsito por completo debido a que los vehículos en este modelo no pueden conducir en reversa.

Por último, en los modelos para flujo de tránsito en dos dimensiones se pone un especial interés en controlar el flujo de los autos en los cruces de las carreteras que conforman una red. Se utilizan banderas locales para decidir el movimiento de los autos que están dentro o cerca de un cruce (ver figura 2.4).

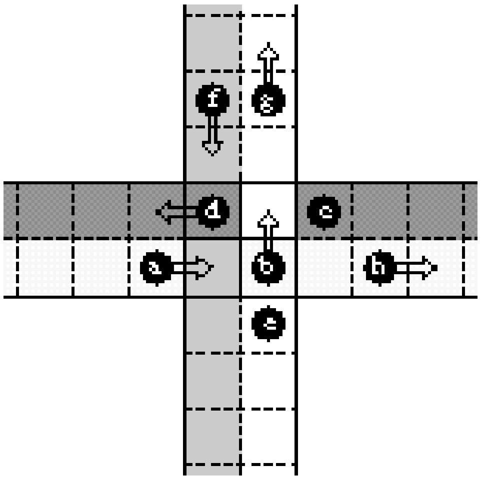

Figura 2.4: Ejemplo de una configuración cerca de un cruce. Las cuatro celdas centrales representan una rotación la cual está desplazándose en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Los diferentes tonos de color gris junto con el color blanco indican las diferentes direcciones que siguen los carriles de tránsito indicadas por las flechas. Los puntos etiquetados con letras son los autos, que pueden moverse hacia la dirección indicada por la flecha. Los autos sin una flecha no tienen permitido moverse.

2.6 Comentarios

Los modelos para flujo de tránsito basados en las teorías cinética, de dinámica de fluidos y *car-following*) siguen despertando el interés tanto de los físicos como de los ingenieros de tránsito. El problema con estos enfoques es llevarlos a una aplicación práctica, lo que se vuelve complicado debido a que manejan espacio y tiempo continuos, por lo que para llevar a cabo una simulación en computadora de alguna manera se tienen que discretizar. Por esta razón, los modelos para flujo de tránsito basados en autómatas celulares han sido motivo de análisis y experimentación para varios casos de estudio particulares (como en [56]) ya que manejan tanto espacio como tiempo discretos. La forma típica de observar el comportamiento de un autómata celular es a través de un diagrama de espacio-tiempo, donde el espacio es representado en el eje X y el tiempo es representado en el eje Y. Sin embargo, tomar solamente como muestra para el análisis este diagrama puede arrojar resultados demasiado generales. Quizás en el modelo de Gutowitz como en otros modelos se podría utilizar su teoría de estructura local para llevar a cabo un análisis mas formal aunque puede ser muy complejo. De cualquier manera, en esta tesis se presentan ciertas herramientas que si bien no forman parte de la teoría de estructura local de Gutowitz si pueden ayudar a encontrar ciertos aspectos interesantes acerca de los autómatas celulares que reproducen el comportamiento de modelos para flujo de tránsito de autos bajo ciertas condiciones.

Capítulo 3

Teoría de autómata celular

Los autómatas celulares son sistemas dinámicos discretos cuyos elementos tienen una interacción constante entre sí tanto en el espacio como en el tiempo.

Los autómatas celulares tienen la capacidad de representar comportamientos complejos a partir de una dinámica sencilla. Debido a esto, desde su origen se les ha utilizado como elementos de la computación para la modelación de fenómenos biológicos y físicos. Además, los autómatas celulares son estudiados como objetos matemáticos debido al interés intrínseco relativo a los aspectos formales de su comportamiento.

Este capítulo contiene algunos antecedentes sobre el origen de la teoría de autómata celular. Además, se explica la estructura de los autómatas celulares en una dimensión y se describen de manera general tanto el autómata celular *Life* como la clasificación de Wolfram. Por último, se presentan algunos elementos que sirven para el análisis del comportamiento de los autómatas celulares y que serán utilizados en esta tesis en particular.

3.1 Antecedentes

Aunque el nombre de John von Neumann en la actualidad es fuertemente asociado con las computadoras que tienen una arquitectura de una sola UCP (Unidad Central de Procesamiento), es necesario recordar que von Neumann también es uno de los principales pioneros de la computación paralela.

A principios de 1942, J. Presper Eckert, John W. Mauchly y sus asociados de la Escuela de Ingeniería Eléctrica Moore de la Universidad de Pennsylvania comenzaron la construcción de una computadora electrónica digital de “alta velocidad” para satisfacer las necesidades de las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos. Eckert y Mauchly llamaron a su máquina “Electrical Numerical Integrator And Calculator”, la cual vino a ser conocida públicamente simplemente como ENIAC en 1946.

En 1945, von Neumann inició un estudio analítico de la computación y probó que una computadora podía tener una estructura física fija y simple, a diferencia del diseño original de la ENIAC, en el cual el sistema operativo y los programas de aplicación estaban almacenados en unidades separadas las cuales tenían que ser conectadas a la ENIAC para poder realizar los cálculos, además, las conexiones variaban de un programa a otro. Poco tiempo después de su análisis, von Neumann formó un grupo de investigación encabezado por él mismo, Howard Aiken y Norbert Wiener para trabajar en problemas sobre computadoras, comunicaciones, análisis de series de tiempo y los “aspectos de comunicación y control del sistema nervioso humano”. El último tópico fue incluido debido al gran interés de von Neumann en el trabajo sobre redes neuronales realizado por McCulloch y Pitts en 1943 [49]. En 1946, von Neumann diseñó la EDVAC (Electronic Discrete Variable Computer), la primer máquina con un programa almacenado. En 1947, bajo la influencia de las ideas sobre autómatas desarrolladas por Post y Turing (1936), von Neumann comenzó estudios sobre la complejidad requerida para que un dispositivo o sistema fuese auto-reproductivo. Estos estudios también incluían el problema de organizar un sistema básicamente desde componentes no confiables (un campo de estudio que actualmente se conoce como "computación tolerante a fallas"). En un principio, von Neumann investigó un modelo continuo de un autómata auto-reproductivo basado en ecuaciones diferenciales parciales, pero cuando encontró dificultades para proveer reglas rigurosas y explícitas e instrucciones necesarias para poder llevarlo a la práctica y cuando se hizo evidente que este autómata podría ser muy grande, redireccionó sus esfuerzos hacia un modelo de auto-reproducción utilizando un arreglo de elementos computacionales (células). Tanto Burks (1970) como Goldstine (1972) confirman que la idea de tal arreglo fue sugerida a von Neumman por Stanislaw Ulam. A von Neumman le atrajo la idea de utilizar paralelismo porque esto podría eventualmente proporcionarle una mayor velocidad en las computaciones. Desafortunadamente, su muerte prematura en 1957 no le permitió alcanzar completamente sus metas. De esta manera, se puede decir que a principios de los 1950's von Neumann concibió a los autómatas celulares.

La construcción original de von Neumann de un arreglo celular (autómata celular) auto-reproductivo requería que cada célula de un espacio celular representado por una cuadrícula bi-dimensional soportara un conjunto de 29 estados. El arreglo por sí mismo requería aproximadamente 200,000 células. Además, el valor del estado en que se encuentra cada célula del arreglo localizada en una posición (i, j) (donde i es la columna y j el renglón) en un tiempo t estará determinado por los valores de los estados en que se encuentran las células localizadas en las posiciones $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j+1)$ e $(i, j-1)$ y el valor del estado en que se encuentra la célula central localizada en la posición (i, j) en el tiempo $t-1$; cada célula del arreglo en algún momento será una célula central, la cual junto con las células ubicadas arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha (ortogonalmente) de la misma forman lo que se conoce como vecindad von Neumann (ver figura 3.1). Las interacciones locales de las vecindades en un tiempo t determinan el estado global del arreglo (el cual es actualizado sincrónicamente) en el tiempo $t+1$.

Este grado de complejidad fue necesario debido a que von Neumann buscaba diseñar su autómata como un sistema de computación universal o máquina de Turing[1]. En los

[1]Alan Turing propuso por primera vez su teórica "Turing Machine" en la Universidad de Cambridge, en

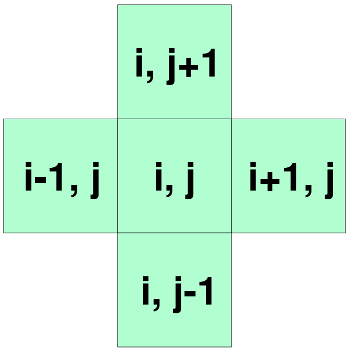

Figura 3.1: Vecindad von Neumann.

1960's, E.F. Codd [19] propuso una variante la cual requería ocho estados por célula y seguía utilizando la vecindad von Neumann; otros investigadores, en particular los del Instituto de Tecnología de Massachusetts (M.I.T.) encontraron constructores auto-reproductivos, aunque no universales de una naturaleza más simple, en particular un autómata celular descubierto por Fredkin [26], el cual era capaz de auto-reproducir cualquier configuración inicial utilizando la vecindad von Neumann y solamente dos estados por célula.

Ulam y Schrandt (1967) también investigaron la dinámica de estos autómatas celulares de dos estados por célula, y de hecho, extendieron su investigación estudiando autómatas celulares en tres dimensiones. Su trabajo, junto con el de investigadores tales como Tratcher, Moore, Myhill, Stein y Holland son coleccionados en [13]. Subsecuentemente, Banks [4] (un estudiante de Fredkin) probó la existencia de un autómata celular tipo von Neumann auto-reproductivo utilizando cuatro estados por célula.

Durante su investigación sobre autómatas celulares de dos estados (en este caso 0 y 1), Ulam y Schrandt tenían especial interés por los patrones formados por los grupos de células en estado 0 y los grupos de células en estado 1 en varias etapas durante las computaciones.

el Reino Unido, en 1936. A principios de 1948 demostró la que él definió como la "máquina universal que puede realizar cualquier tarea que pueda ser descrita mediante símbolos". Así, Alan Turing fue el primero en percatarse que la computadora podía ejecutar lógica humana siempre y cuando esa lógica pudiera serle expresada a la computadora en un lenguaje que ésta pudiese interpretar. Los conceptos de Turing crearon el escenario para el desarrollo de los lenguajes de programación.

Para ciertas reglas, una configuración inicial de células en estado 1 "sobre un fondo" de células en estado 0 evolucionaba de tal forma que las células en estado 1 se disipaban completamente, mientras que con otras reglas el efecto era totalmente opuesto.

John Conway, investigador interesado en encontrar una construcción más simple que la de von Neumann, descubrió una regla para un autómata celular de dos estados y un tipo de vecindad parecida a la de von Neumann, con la variante de que se toma en cuenta a los vecinos ubicados en las esquinas. A este tipo de vecindad se le conoce como vecindad Moore (ver figura 3.2). Esta regla tenía un efecto intermedio, es decir, llevaba eventualmente al autómata ya sea a un patrón de comportamiento estable o a patrones que exhibían algo repetitivo (por ejemplo, patrones de comportamiento oscilatorios). Conway presentó en 1970 su regla a la cual bautizó con el nombre *"Life"*.

i-1, j+1	i, j+1	i+1, j+1
i-1, j	i, j	i+1, j
i-1, j-1	i, j-1	i+1, j-1

Figura 3.2: Vecindad Moore.

Life representa una especie de "juego ecológico" ya que las células del autómata pueden estar "vivas" o "muertas". *Life* trabaja sobre una cuadrícula bi-dimensional infinita y los estados de las células están determinados por las siguientes condicionantes:

- **NACIMIENTO**. Una célula que está muerta en un tiempo t estará viva en un tiempo $t+1$ si y sólo si exactamente tres de sus ocho vecinos están vivos en el tiempo t.

- **MUERTE POR SOBRE-POBLACIÓN**. Una célula que está viva en un tiempo t morirá en un tiempo $t+1$ si cuatro o más de sus ocho vecinos están vivos en el tiempo t.

- **MUERTE POR POCA POBLACIÓN (AISLAMIENTO)**. Una célula que está viva en un tiempo t morirá en un tiempo $t+1$ si a lo más uno de sus ocho vecinos están vivos en el tiempo t.

- **SOBREVIVENCIA**. Una célula que está viva en un tiempo t permanecerá viva en un tiempo $t+1$ si dos o tres de sus ocho vecinos están vivos en el tiempo t.

Life comienza a funcionar a partir de una configuración inicial de células vivas sobre un fondo de células muertas. Si se dan las condiciones, tanto los nacimientos como las muertes de las células ocurrirán de manera simultánea y formarán la configuración que constituirá una nueva *generación* dentro de la evolución de *Life*.

Existen configuraciones que permanecen estables durante toda la evolución de *Life*. En el vocabulario de *Life* a estas configuraciones se les conoce como *"still life"*. En la figura 3.3, en la cual las células vivas se representan con el color negro y las células muertas con el color blanco, se pueden observar algunas configuraciones *still life*.

También existen configuraciones que desaparecen después de transcurridas ciertas generaciones. En la figura 3.4 se pueden observar algunas de estas configuraciones.

Uno de los descubrimientos de Conway más remarcable es la figura formada por cinco células vivas llamada *glider* (ver figura 3.5).

Como se oberva en la figura 3.5, después de transcurridas dos generaciones, el *glider* tiene un ligero acarreo hacia la derecha, el cual se ve reflejado en una línea diagonal. A este fenómeno se le conoce como *"glide reflection"* debido al nombre de la figura. Una vez que transcurren dos generaciones más, el *glider* se endereza a sí mismo y entonces se ha movido en la cuadrícula un lugar diagonalmente hacia abajo y a la derecha desde su posición inicial. Conway eligió el término *velocidad de la luz* (haciendo una analogía del juego de ajedrez con respecto a la velocidad a la que se desplaza el rey) para ilustrar que el *glider* es el patrón que

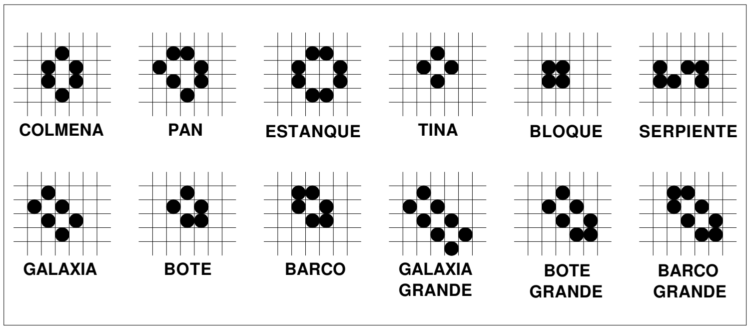

Figura 3.3: A las configuraciones que permanecen estables durante toda la evolución del autómata celular se les conoce como *still life*.

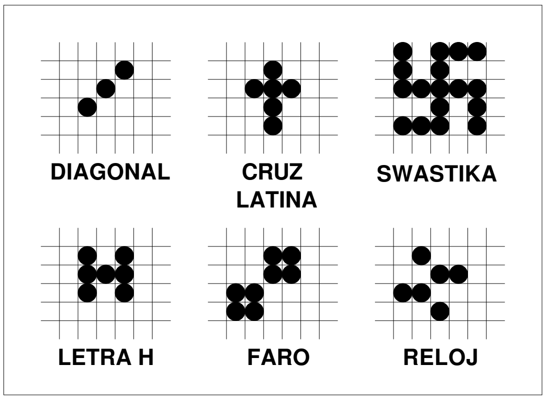

Figura 3.4: Configuraciones en las que todas la células vivas mueren.

más rápido se mueve sobre la cuadrícula. Ningún otro patrón puede reproducirse a sí mismo lo bastante rápido como para moverse a tal velocidad. De esta manera, Conway probó que la máxima velocidad diagonalmente es un cuarto de la *velocidad de la luz* ya que el *glider* se reproduce a sí mismo en la misma orientación después de cuatro generaciones y ha viajado un lugar diagonalmente en la cuadrícula. Por lo anterior, se dice que un *glider* se desliza de un lado a otro del campo a un cuarto de la *velocidad de la luz*.

"Life" se popularizó a partir de su publicación en la columna mensual de Martin Gardner llamada *"Mathematical Games"* en *Scientific American* y posteriormente varias personas presentaron resultados interesentes basados en sus propias experimentaciones con *"Life"*. Aunque no de valor práctico, *"Life"* ha tenido el mayor impacto en la investigación sobre

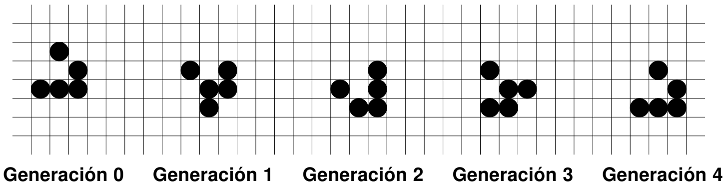

Figura 3.5: Uno de los descubrimientos de Conway más remarcable es la figura formada por cinco células vivas llamada *glider*. Después de transcurridas dos generaciones, el *glider* tiene un ligero acarreo hacia la derecha, el cual se ve reflejado en una línea diagonal. A este fenómeno se le conoce como *"glide reflection"* debido al nombre de la figura. Una vez que transcurren dos generaciones más, el *glider* se endereza a sí mismo y entonces se ha movido en la cuadrícula un lugar diagonalmente hacia abajo y a la derecha desde su posición inicial.

autómatas celulares.

En la década de los 1980's, los estudios de Stephen Wolfram sobre autómatas celulares arrojaron resultados interesantes. Wolfram realizó una investigación sobre las propiedades de los autómatas celulares en una dimensión utilizando conceptos de mecánica estadística y aprovechando que las microcomputadoras, los lenguajes de programación, y los monitores de video disponibles en ese momento eran lo suficientemente capaces como para llevar a cabo un gran número de estudios experimentales con autómatas celulares.

A diferencia de otros investigadores como Conway, por ejemplo, el cual se concentró en una sola regla que sirviera para sus propositos, Wolfram comparó un gran número de reglas diferentes y posteriormente propuso una clasificación de acuerdo a los diferentes patrones de comportamiento que había observado.

Por otro lado, a pesar de que von Neumann no pensó en los autómatas celulares como un objeto matemático de estudio y aunque desde su surgimiento se les ha utilizado en aplicaciones prácticas específicas como el reconocimiento de patrones y el procesamiento de imágenes por citar algunas, el estudio de los aspectos formales sobre el comportamiento de los autómatas celulares también resulta muy interesante. En este sentido, se han encontrado trabajos con resultados aplicables al análisis teórico de los autómatas celulares como los trabajos de Hedlund [30] y Birkhoff [7] sobre sistemas dinámicos.

3.2 Autómatas celulares en una dimensión

Como podemos notar, Conway definió ciertos términos tales como *nacimiento*, *muerte*, *sobrevivencia*, *still life* y *glider*. Con la creación de estos términos, Conway estableció, además de la dinámica de evolución, la posibilidad de identificar diferentes patrones de comportamiento que presenta *Life*.

Al igual que Conway, Wolfram definió una terminología básica por medio de la cual los autómatas celulares en una dimensión pueden ser clasificados de acuerdo a su dinámica de evolución.

Existen diferentes tipos de notación que describen la estructura de los autómatas celulares en una dimensión, en esta tesis, se hace uso de la llamada *notación Wolfram* que se describe a continuación.

3.2.1 Estructura

Un autómata celular uni-dimensional consta de un arreglo lineal finito de celdas o *células* (ver figura 3.6), una de las características por las cuales a los autómatas celulares en una dimensión también se les conoce como *Autómatas Celulares Lineales*. Cada célula del arreglo puede tomar como valor un elemento de un conjunto finito de estados, el cual es denotado por la letra K. Los elementos del conjunto K pueden ser de diferentes tipos (números, letras, símbolos, etc.) puesto que la naturaleza de los estados no es relevante. Para el procesamiento interno de las evoluciones del autómata celular lineal a través del tiempo lo más conveniente es utilizar números, esto por cuestiones computacionales, y para la representación final de esas evoluciones es útil utilizar diferentes colores, esto por cuestiones de visualización. Aunque la natulareza de los estados no influye en el comportamiento del autómata celular lineal, la interacción que mantienen las células durante la evolución por medio de esos estados sí influye de manera directa en el comportamiento del autómata celular lineal.

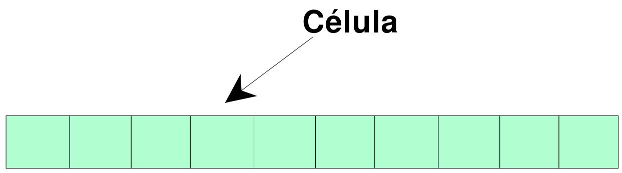

Figura 3.6: Arreglo de 10 células.

El número de estados para un autómata celular lineal puede ser variable, por esta razón en la notación Wolfram el número de estados se representa por medio de la variable k, es decir, la cardinalidad del conjunto K es igual a k, lo cual se escribe como $\#(K) = k$.

Otro elemento importante en la notación Wolfram es el que él denomina como *radio de vecindad* y que denota por medio de la variable r. El *radio de vecindad* indica el rango de interacción a nivel local que van a tener las células entre sí. Si r es igual a uno, entonces cada célula del arreglo verá afectado su estado durante la evolución del autómata a partir de los estados de sus células vecinas más próximas tanto del lado izquierdo como del lado derecho. Esto forma lo que se conoce como *vecindad*, donde el tamaño total de una vecindad es igual a $2r + 1$ incluyendo a la célula central. Para el caso en el que r es igual a uno, el tamaño total de la vecindad va a ser igual a tres (ver figura 3.7).

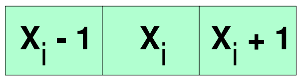

Figura 3.7: Vecindad de tamaño tres.

Un punto importante a mencionar es que al ser finito el arreglo la primera y la última célula no tendrán vecinos del lado izquierdo y derecho respectivamente. Una manera de solucionar esto es tomar el arreglo como un anillo, es decir, cerrando el arreglo en forma circular para conservar la uniformidad en todas las vecindades (ver figura 3.8), además, al tomar el arreglo como un anillo se establecen los límites a la frontera o condiciones de límites periódicos.

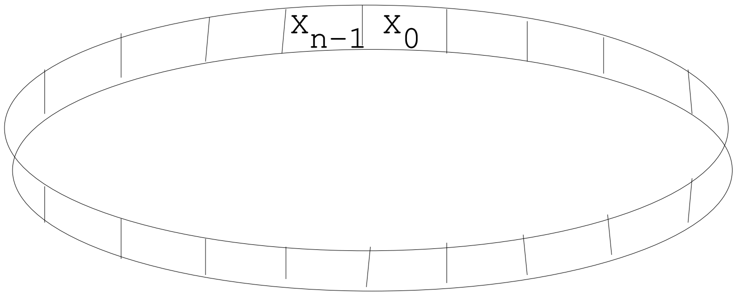

Figura 3.8: Estructura de un autómata celular lineal estableciendo condiciones de límites periódicos.

3.2.2 Función de transiciones locales

De esta forma surge la notación Wolfram (k, r) para un autómata celular lineal, donde k representa el número de estados por cada célula y r el radio de vecindad.

Lo que falta por definir es el estado al cual va a evolucionar cada célula del arreglo en el tiempo $t+1$ a partir de los estados de los vecinos y del suyo propio en el tiempo t. Esto va a constituir la función de transiciones locales, o dicho de manera más general, la *regla de evolución* del autómata.

Por cuestiones prácticas, comúnmente una regla de evolución se expresa en términos de su valor decimal, por ejemplo, regla 54 para un autómata celular lineal (2,1). Al definir una regla de evolución lo que se hace es especificar los estados a los que evolucionan las células que conforman el arreglo en base a todas las vecindades posibles (ver tabla 3.1), las cuales estan dadas por k^{2r+1}.

En la primer columna de la tabla 3.1 se observan todas las vecindades posibles para

Vecindad	Estado al que evoluciona la célula central
000	0
001	1
010	1
011	0
100	1
101	1
110	0
111	0

Tabla 3.1: Regla 54 expresada en notación binaria.

un autómata celular lineal (2,1). Estas vecindades están expresadas en notación binaria; al hacer la conversión a notación decimal obtenemos los números del cero al siete. Igualmente, en la segunda columna los estados a los que evolucionan las células están expresados en notación binaria, esta columna define la regla de evolución y para obtener su valor en notación decimal lo que se hace primero es tomar en cuenta únicamente las vecindades en las cuales sus respectivas células centrales evolucionan al estado 1, posteriormente se suman los valores decimales obtenidos de elevar el número 2 a la potencia que corresponde con el número decimal que representa a la vecindad que ocasiona una evolución al estado 1. En el caso de la regla 54 la suma sería: $2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 16 + 32 = 54$. Como se puede observar, a partir del contenido de la tabla 3.1 se puede definir la función de transiciones locales $f : A \mapsto B$ la cual se observa en la figura 3.9. Los elementos del conjunto A representan las vecindades expresadas en notación decimal y los elementos del conjunto B representan los estados de evolución de las vecindades expresados en notación binaria.

Como se mencionó anteriormente, para fines de visualización es útil utilizar colores para representar los estados del autómata. De esta manera es posible obtener una visión general acerca del comportamiento del autómata a través del tiempo. En la figura 3.10 se observa una representación equivalente a la de la tabla 3.1 pero utilizando colores. Cabe mencionar que para hacer este tipo de representaciones se hizo uso del software NXLCAU[2] desarrollado en el Departamento de Aplicación de Microcomputadoras del Instituto de Ciencias de la

[2]http://delta.cs.cinvestav.mx/˜mcintosh/

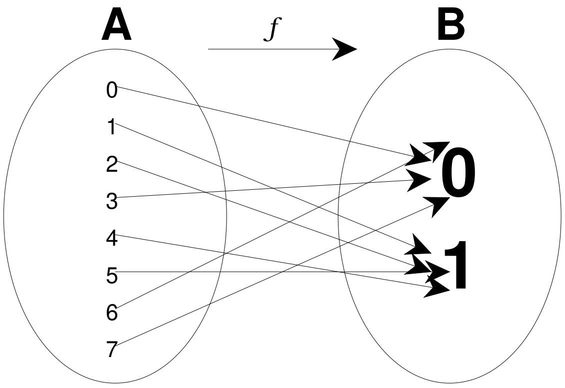

Figura 3.9: Función de transiciones locales de la regla 54.

Universidad Autónoma de Puebla en el lenguaje de programación C objetivo en el sistema operativo NeXTSTEP.

En la figura 3.11 se ilustra el comportamiento a nivel macroscópico de un autómata celular lineal (2,1) aplicando la regla 54 por medio del *diagrama de evoluciones*.

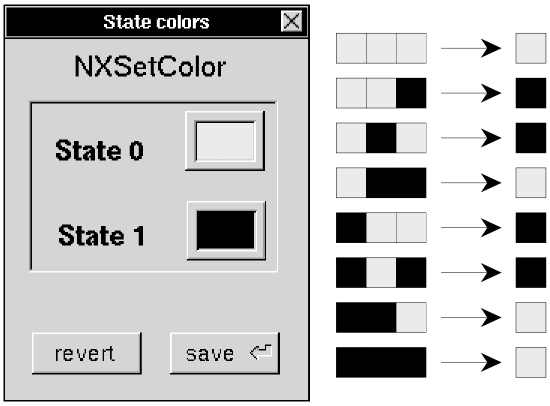

Figura 3.10: Representación de la regla 54 utilizando colores.

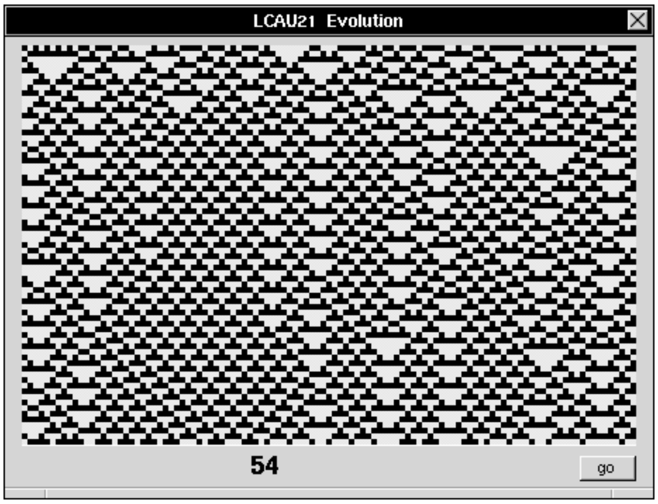

Figura 3.11: Diagrama de evoluciones de un autómata celular lineal (2,1) aplicando la regla 54.

3.2.3 Función de transiciones globales

Como se mencionó en la sección 3.2.1., un autómata celular uni-dimensional consta de un arreglo lineal finito de células, es decir, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto A de células que forman el arreglo y una sección S_n de los números naturales, donde llamaremos una sección del conjunto N de los números naturales denotada por S_n al conjunto de los primeros n números naturales, esto es: $S_n = \{1, 2, 3, ..., n\} \subset N$. Por lo tanto, decimos que n es la cardinalidad del conjunto A, es decir, $\#(A) = n$ y de esta manera sabemos con certeza que el conjunto A de células que forman el arreglo es un conjunto finito. Este arreglo de células en un determinado estado constituye una configuración global que conforma una generación x en una tiempo t dentro de la evolución del autómata. De esta forma se asume que todas las configuraciones globales posibles que se pueden formar durante la evolución del autómata celular lineal son finitas puesto que la longitud de éstas tiene que ajustarse al tamaño del arreglo. Las configuraciones globales que constituyen las generaciones que surgen durante la evolución del autómata se forman a partir de las transiciones locales, tal como se observa en la figura 3.12.

Dada la configuración global inicial que se muestra en la figura 3.12, después de transcurridas 4 generaciones todas las células del autómata convergen al estado 0. Es importante mencionar que la longitud del arreglo que constituye el autómata es de solamente diez células. La razón por la cual se toma un arreglo tan pequeño es el tratar de agilizar la comprensión de los conceptos que se manejan en esta tesis. Es por eso que a lo largo de la misma se utlizan arreglos de longitud pequeña cuando se pretende explicar diversos aspectos que tienen que ver con la teoría de autómata celular.

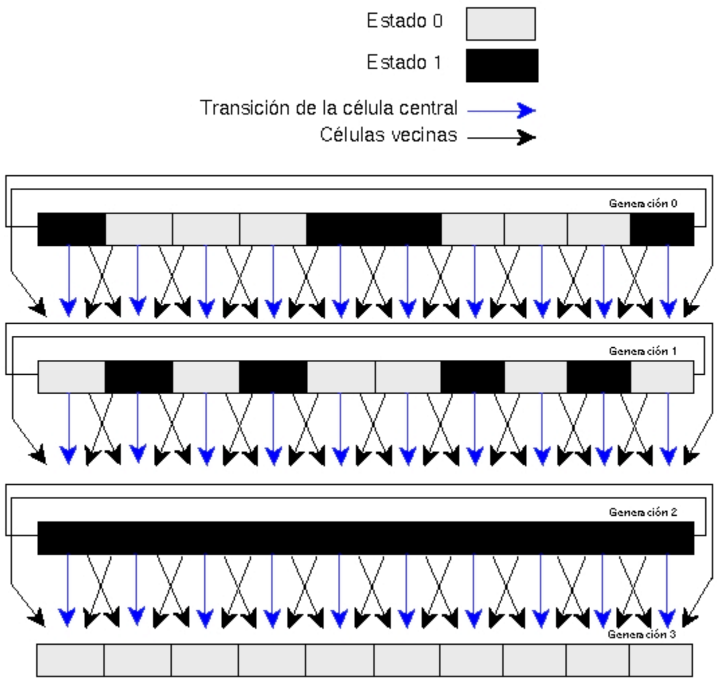

Figura 3.12: Transiciones globales de un autómata celular lineal (2,1) aplicando la regla 54.

El paso de una configuración global a otra, es decir, la evolución del autómata de una generación a otra define la función de transiciones globales $f : CG_t \mapsto CG_{t+1}$, donde el conjunto CG_t representa el estado global del autómata en el tiempo t, y el conjunto CG_{t+1} representa el estado global del autómata en el tiempo $t+1$, es decir, en la siguiente generación. En la figura 3.13 se ilustra la función de transiciones globales tomando las configuraciones de la figura 3.12, aunque en ésta se expresan en notación decimal. Los elementos del conjunto A representan el dominio de la función, esto es, los estados globales que se generan a partir de la configuración inicial cuyo número decimal es 561 aplicando la regla 54 en un determinado tiempo t, y los elementos del conjunto B representan la imagen de la función, esto es, los estados globales del autómata que se generan a partir de un determinado tiempo $t+1$. Tanto el dominio D como la imagen I son subconjuntos de A y B respectivamente es decir, $D \subset A$ e $I \subset B$. Los conjuntos A y B contienen tantos elementos como configuraciones distintas puedan existir. En la figura 3.13 sólamente se incluyen los elementos que definen la función para este caso en particular.

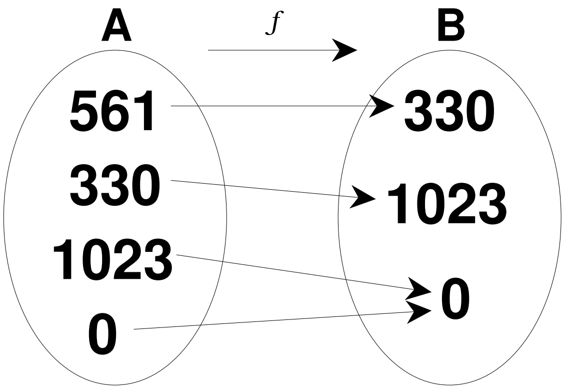

Figura 3.13: Función de transiciones globales aplicando la regla 54.

3.2.4 Clasificación de Wolfram

Wolfram, a través de su terminología y observando la dinámica de evolución definió cuatro clases de autómatas celulares lineales y son las siguientes:

- **Clase I**. Evolución a un estado uniforme. Después de transcurrido un cierto número de generaciones, todas las células del autómata convergen a un solo estado, tal y como sucede en la figura 3.12. En la figura 3.14 se observa el diagrama de evoluciones de un autómata celular lineal clase I. Este autómata celular es de orden (3,1) y su regla de evolución es la 6J3J3B3B6.

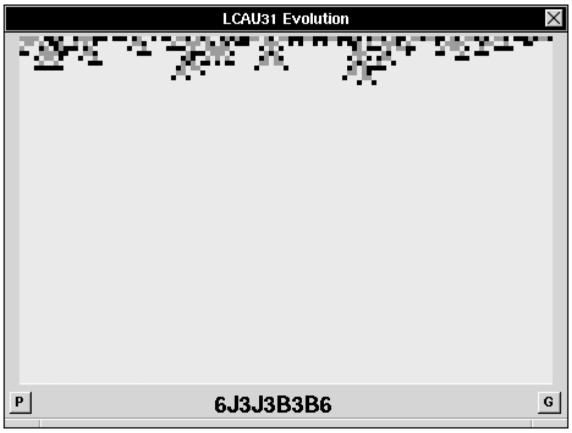

Figura 3.14: Diagrama de evoluciones de un autómata celular lineal (3,1) aplicando la regla 6J3J3B3B6.

- **Clase II**. Evolución a estados cíclicos aislados. Durante la evolución del autómata, existen ciertos patrones de comportamiento que se repiten de manera sistemática a través del tiempo. Estos patrones se pueden distinguir claramente sobre un "fondo" representado por un solo estado el cual es opuesto al de las células que representan el patrón de comportamiento cíclico (ver figura 3.15).

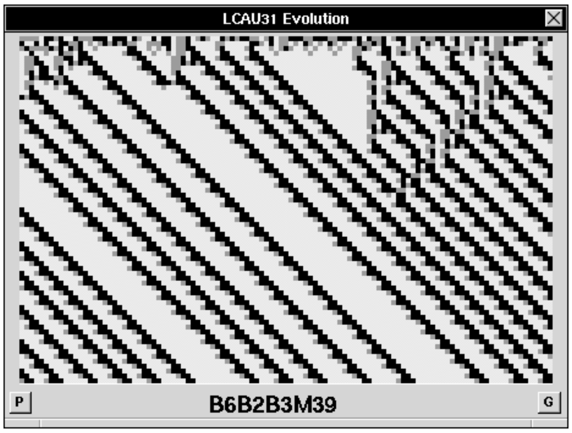

Figura 3.15: Diagrama de evoluciones de un autómata celular lineal (3,1) aplicando la regla B6B2B3M39.

- **Clase III**. Evolución a estados cíclicos amplios. Al igual que en un autómata celular clase II, en un autómata celular clase III existen patrones de comportamiento repetitivos, aunque no tan fácilmente identificables a simple vista debido a que el comportamiento de éste puede ser sumamente caótico, lo que hace más complicado el análisis de este tipo de autómata (ver figura 3.16).

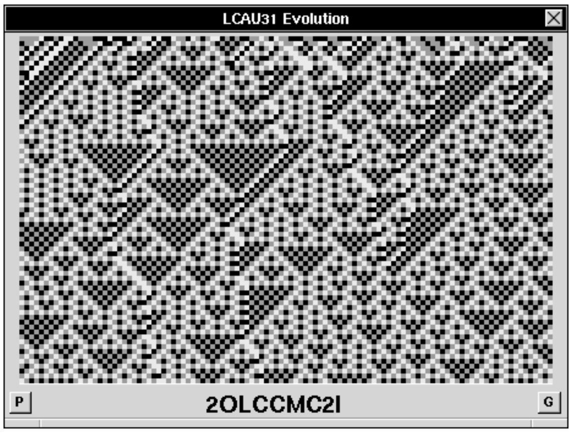

Figura 3.16: Diagrama de evoluciones de un autómata celular lineal (3,1) aplicando la regla 2OLCCMC2I.

- **Clase IV**. Evolución a estados complejos aislados. Esta clase de autómata es una combinación de las clases I, II y III. Al igual que en los autómatas clase II, existen comportamientos cíclicos aislados, lo que hace distinguible un "fondo" uniforme el cual permite identificar dichos comportamientos los cuales son similares a los que se presentan en un autómata clase III (ver figura 3.17).

3.2.5 Ciclo y Periodo

La evolución de todo autómata celular está regida por ciclos. Un *ciclo* es un cierto patrón de comportamiento que se repite durante la evolución del autómata por un tiempo indefinido. La longitud de un ciclo está determinada por el número de iteraciones o generaciones que transcurren para que una determinada configuración se repita, a este número se le conoce como *periodo*.

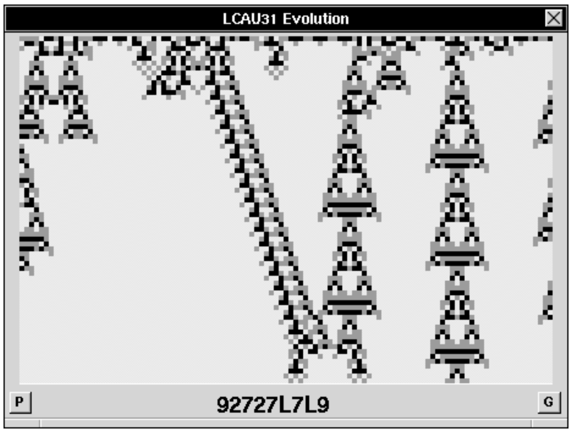

Figura 3.17: Diagrama de evoluciones de un autómata celular lineal (3,1) aplicando la regla 92727L7L9.

Dada la configuración inicial de la figura 3.18 tienen que transcurrir un total de 20 generaciones para que el autómata entre en un ciclo, como se muestra en la misma figura. Un aspecto importante a mencionar es que un autómata celular lineal puede tener varios ciclos dentro de su evolución, la posibilidad de detectarlos y analizarlos crecerá en función del tamaño del arreglo o espacio de configuración que se pueda manejar.

Como podemos apreciar en la figura 3.18, a partir de la generación número 21 tienen que transcurrir un total de 4 generaciones para que se repita la generación que inicia el ciclo, en este caso sería la generación cuya configuración corresponde al número 260 en decimal. En este caso se dice que el ciclo es de periodo 4 porque tienen que transcurrir 4 generaciones para que éste nuevamente se inicie; las configuraciones que componen este ciclo corresponden a los número 260, 910, 81 y 763 los cuales forman los nodos de lo que se denomina *diagrama de ciclos* (ver figura 3.19).

3.3 Ancestros

Toda configuración C generada en un tiempo $t+1$ a partir de otra configuración C en un tiempo t tiene por lo menos un *ancestro*. Por ejemplo, de acuerdo a la figura 3.18,

	Configuración	Número en notación decimal que corresponde a la configuración
	1 0 0 0 0 0 0 1 0 1	517
	0 1 0 0 0 0 0 1 1 0	262
	1 1 1 0 0 0 1 0 0 1	905
	0 0 0 1 0 1 1 1 1 0	94
	0 0 1 1 1 0 0 0 0 1	225
	1 1 0 0 0 1 0 0 1 1	787
	0 0 1 0 1 1 1 1 0 0	188
	0 1 1 1 0 0 0 0 1 0	450
	1 0 0 0 1 0 0 1 1 1	551
	0 1 0 1 1 1 1 0 0 0	376
	0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	388
	1 0 0 1 0 0 1 1 1 0	590
	1 1 1 1 1 1 0 0 0 1	1009
	0 0 0 0 0 0 1 0 1 0	10
	0 0 0 0 0 1 1 1 1 1	31
	1 0 0 0 1 0 0 0 0 1	545
	0 1 0 1 1 1 0 0 1 0	370
	1 1 1 0 0 0 1 1 1 1	911
	0 0 0 1 0 1 0 0 0 0	80
	0 0 1 1 1 1 1 0 0 0	248
	0 1 0 0 0 0 0 1 0 0	260
Ciclo de periodo 4	1 1 1 0 0 0 1 1 1 0	910
	0 0 0 1 0 1 0 0 0 1	81
	1 0 1 1 1 1 1 0 1 1	763
	0 1 0 0 0 0 0 1 0 0	260

Figura 3.18: Configuraciones de un autómata celular lineal (2,1) generadas aplicando la regla 54.

la configuración 517 es ancestro de la configuración 262 y a su vez la configuración 262 es ancestro de la configuración 905 y así sucesivamente.

3.3.1 Inyectividad

Sea $f : A \mapsto B$ una función donde los elementos del conjunto B son todas las configuraciones posibles para un autómata dado y los elementos del conjunto A son todos los ancestros que tienen dichas configuraciones. Se dice que f es una función *inyectiva* si y solo si se satisface la siguiente propiedad: si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, es decir, cuando los elementos que componen la imagen están relacionados con uno y solo un elemento del dominio, tal

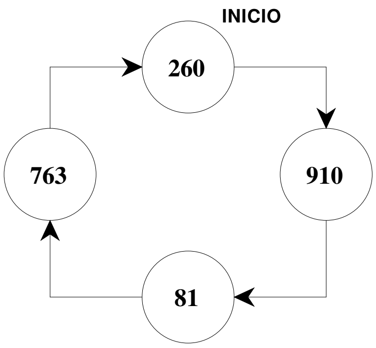

Figura 3.19: Ciclo de periodo 4.

como se muestra en la figura 3.20.

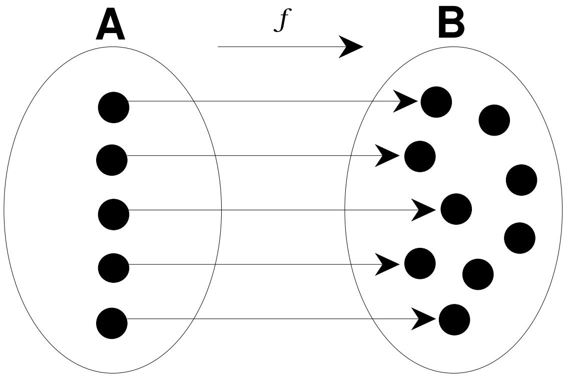

Figura 3.20: Función inyectiva.

Se puede observar en la figura 3.20 que existen elementos que no forman parte de la función, es decir, en el conjunto B hay elementos que no están relacionados con ningún elemento del conjunto A.

Los elementos que no forman parte del conjunto imagen representan configuraciones que no pueden ser generadas a partir de otras configuraciones. Dadas sus características, a estos elementos se les identifica con el término *Jardín del Edén*.

Por lo antes mencionado, un *Jardín del Edén* solo podrá ser una configuración inicial la cual no aparecerá de nuevo durante la evolución del autómata.

Las condiciones que determinan el surgimiento de este fenómeno son bastante complejas. Existen artículos tales como los de S. Amoroso y G. Cooper [1], Moore [53], McIntosh [50] y Sven Skyum [90] donde se determina de manera rigurosa y formal el surgimiento de *Jardines del Edén.*

3.3.2 Sobreyectividad

Se dice que $f : A \mapsto B$ es una función *sobreyectiva* si y solo si se satisface la siguiente propiedad: $\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A \mid f(a) = b$, es decir, una función es sobreyectiva si el codominio de la función coincide con la imagen de la misma, tal como se muestra en la figura 3.21.

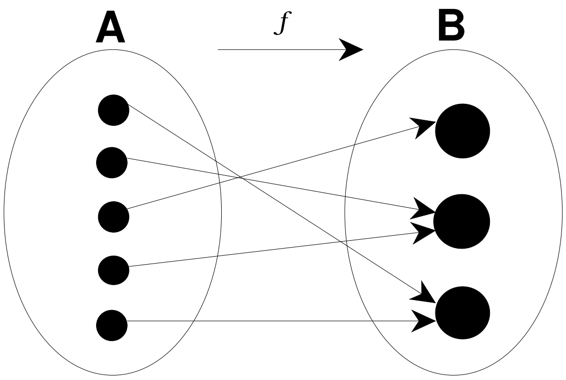

Figura 3.21: Función sobreyectiva.

El hecho de que en una función sobreyectiva la imagen tiene que coincidir con el codominio es un indicativo de que cualquier configuración generada durante la evolución del autómata (incluyendo la configuración inicial) tendrá por lo menos un ancestro; esto hace desaparecer la posibilidad de que existan *Jardines del Edén.* Por otra parte, en la figura 3.21 se aprecia que existen elementos en el conjunto imagen B que están relacionados con más de un elemento del conjunto A, esto quiere decir que existen configuraciones que pueden ser generadas a partir de varias configuraciones diferentes, en otras palabras, una configuración puede tener múltiples ancestros.

3.3.3 Biyectividad

Una función $f : A \mapsto B$ es biyectiva si es inyectiva y es sobreyectiva a la vez, es decir, todos los elementos del conjunto B (sobreyectividad) tienen que estar relacionados con uno y solo un elemento del conjunto A (inyectividad). Cuando hay biyectividad no existen ni Jardines del Edén ni ancestros múltiples, por lo tanto, todas las configuraciones generadas tienen ancestros únicos, o dicho de otra manera, el autómata es reversible, es decir, se puede encontrar una regla que reproduzca las evoluciones del autómata de forma inversa.

Un claro ejemplo de biyectividad se puede observar en el ciclo generado por un autómata (2,1) aplicando la regla 54 presentado en la figura 3.19. En la figura 3.22 se ilustra este mismo ciclo en forma de conjuntos.

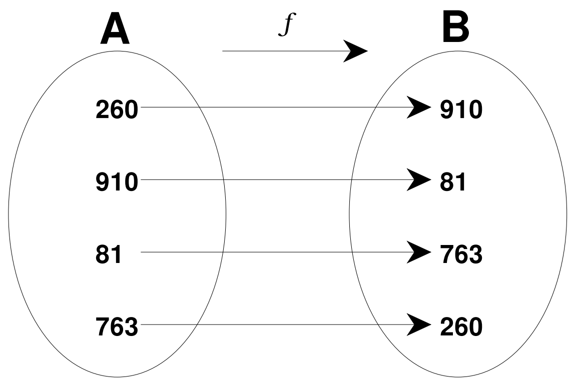

Figura 3.22: Función biyectiva.

3.4 Herramientas gráficas para el análisis

La teoría de gráficas juega un rol importante en la teoría de autómata celular, según afirma McIntosh en [51], ya que por medio de ésta es posible describir la evolución del autómata y relacionar sus propiedades locales con sus propiedades globales.

Desde un punto de vista puramente abstracto, una gráfica consta de N nodos y de L ligas. Los nodos son un conjunto formado a menudo por enteros no negativos desde 0 hasta $n-1$, mientras que las ligas son un conjunto formado del producto cartesiano $N \otimes N$.

Para trazar una gráfica, simplemente se dibujan los nodos, los cuales son frecuentemente etiquetados de acuerdo a los elementos del conjunto N, y las ligas, las cuales son representadas por flechas juntando a los nodos. Una liga va desde el nodo i hasta el nodo j si $(i,j) \in L$.

La ecuación que define a la matriz topológica de una gráfica es la siguiente:

$$MT_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in L \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Un punto importante a destacar acerca de la matriz topológica es el hecho de que los elementos que la conforman describen las rutas entre los nodos, los cuales a su vez, contienen múltiples ligas, de acuerdo al elemento involucrado. Debido a que los elementos de la matriz topológica son enteros, éstos son útiles para contar el número total de rutas. Aquí hay que hacer notar que las rutas no están bajo ningún criterio de clasificación.

La idea fundamental de lo que es una gráfica es un punto de partida para crear herramientas las cuales pueden ser empleadas para ciertos fines específicos. Un ejemplo de esto son los diagramas de Bruijn[3], herramienta principal de la teoría de registro de corrimientos. La teoría de registro de corrimientos es una disciplina basada en el tratamiento de secuencias superponiéndose; debido a que en un autómata celular lineal las vecindades se van superponiendo no es difícil imaginar que los diagramas de Bruijn y sus subdiagramas (de subconjuntos) puedan ser útiles en el análisis de los autómatas celulares en una dimensión.

3.4.1 Diagrama de Bruijn

Los nodos del diagrama de Bruijn son secuencias de símbolos de algún alfabeto, justo como en las expresiones regulares. Las ligas del diagrama describen la manera en la cual tales secuencias pueden superponerse. Diferentes grados de superposición llevan a diferentes diagramas. En el diagrama básico, la superposición consta de un símbolo inicial, un símbolo que relaciona las secuencias y un símbolo terminal.

Cuando los símbolos que representan los estados del autómata celular son enteros, la facilidad de tratar sus propiedades aritméticamente o algebráicamente motiva a la utilización de esta herramienta. Por ejemplo, la ecuación que define a la matriz topológica de un diagrama de Bruijn es:

$$MB_{i,j} = \begin{cases} 1 \quad j = \begin{cases} ki \\ ki+1 \\ . \\ . \qquad\qquad (mod \quad k^{2r}) \\ . \\ ki+k-1 \end{cases} \\ \\ 0 \quad \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{3.2}$$

donde k representa el número de estados y r el radio de vecindad. La variable i, la cual representa el renglón de la matriz va a tomar valores desde 0 hasta $\#(N)-1$, mientras que la

[3]En honor a N. G. de Bruijn por su aportación en [20]

variable j, la cual representa la columna de la matriz tomará valores de acuerdo a los valores que tengan k, i y r (para algunos casos). Así pues, para un autómata celular lineal (2,1) los valores de i y de j se generan de la siguiente manera: si $i = 0$ entonces j va a tomar valores a partir de las operaciones $2(0)$ y $2(0) + 1$, por lo tanto en este caso j toma los valores 0 y 1 respectivamente. Si $i = 1$ entonces $j = 2(1) = 2$ y $j = 2(1) + 1 = 3$. Si $i = 2$ entonces $j = 2(2) = 4$ módulo $4 = 0$ y $j = 2(2) + 1 = 5$ módulo $4 = 1$. Si $i = 3$ entonces $j = 2(3) = 6$ módulo $4 = 2$ y $j = 2(3) + 1 = 7$ módulo $4 = 3$. La matriz topológica de Bruijn MB que se obtiene a partir de la ecuación 3.2 es la siguiente:

$$MB = \begin{pmatrix} 1_{00} & 1_{01} & 0_{02} & 0_{03} \\ 0_{10} & 0_{11} & 1_{12} & 1_{13} \\ 1_{20} & 1_{21} & 0_{22} & 0_{23} \\ 0_{30} & 0_{31} & 1_{32} & 1_{33} \end{pmatrix}$$

Cabe mencionar que los valores de i van de 0 a 3 debido a que la cardinalidad del conjunto N (la cual está determinada por k^{2r}) es 4 puesto que 4 nodos pueden representar todas las vecindades posibles de tres células para un autómata celular lineal (2,1). En la figura 3.23 se observan estas vecindades, las cuales se obtienen de la siguiente forma: consideremos el nodo con la etiqueta 00 y el nodo con la etiqueta 01; para que exista una liga entre ambos, debe coincidir el último símbolo del nodo que se considera de partida con el primer símbolo del nodo que se considera de llegada. En este caso si tomamos el nodo 00 como nodo de partida y el nodo 01 como nodo de llegada, podremos verificar que el símbolo 0 enlaza a los dos nodos y por lo tanto puede existir una liga que conecte al nodo 00 con el nodo 01. En el caso contrario, es decir, si se toma el nodo 01 como nodo de partida y el nodo 00 como nodo de llegada, no podrá existir una liga de enlace entre ambos nodos puesto que el último símbolo del nodo de partida no coincide con el primer siímbolo del nodo de llegada. Esta misma verificación se realiza para todos los nodos del diagrama para establecer todas las ligas posibles. Cabe mencionar que las etiquetas de los nodos del diagrama de Bruijn genérico para un autómata celular lineal (2,1) son símbolos que forman *vecindades parciales*. Para el caso genérico, las vecindades parciales de dos células forman una vecindad completa de tres células al superponer el símbolo que establece la liga entre dos nodos. En todo diagrama de Bruijn los nodos están etiquetados con vecindades parciales las cuales están conformadas por un número par de células. En el siguiente capítulo analizaremos diagramas de Bruijn con vecindades parciales de más de dos células.

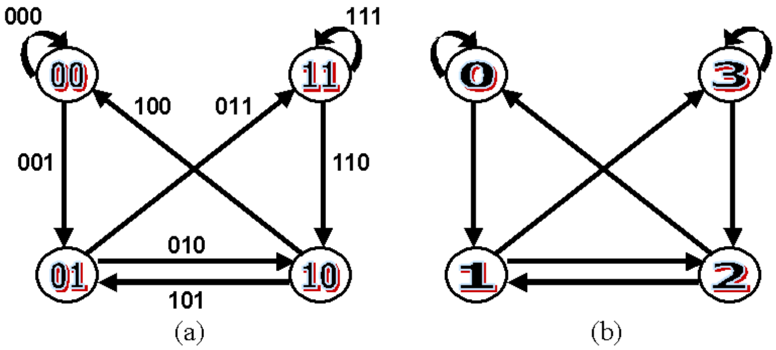

Figura 3.23: Diagramas de Bruijn genéricos para un autómata celular lineal (2,1). En el diagrama del lado izquierda (a) las vecindades parciales están expresadas en notación binaria, mientras que en el diagrama del lado derecho (b) están en notación decimal.

En la figura 3.24 se muestra el diagrama de Bruijn de la regla 54. En ésta se ilustran las ligas que producen cada una de las ocho vecindades y se resaltan con color negro aquellas en las cuales sus respectivas células centrales evolucionan al estado 1.

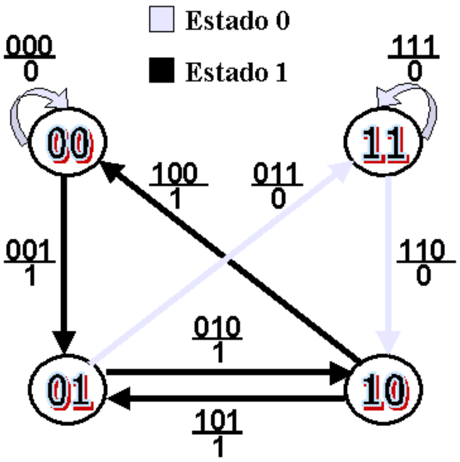

Figura 3.24: Diagrama de Bruijn de la regla 54.

Nodo de partida	Nodo de llegada con evolución a 0	Nodo de llegada con evolución a 1
0	0	1
1	3	2
2	$\emptyset$	0,1
3	2,3	$\emptyset$

Tabla 3.2: Conexiones entre nodos para la regla 54.

3.4.2 Diagrama de subconjuntos

Otro diagrama que se puede obtener a partir del diagrama de Bruijn es el *diagrama de subconjuntos*. Para construir el diagrama de subconjuntos de la regla 54 el primer paso es tomar las vecindades parciales las cuales etiquetan a los nodos del diagrama mostrado en la figura 3.24 en notación decimal (ver figura 3.23 (b)). Posteriormente, se construye una relación de las conexiones entre nodos tomando como criterio de clasificación el estado al que evolucionan las células centrales de las vecindades que se forman de acuerdo a los nodos que se conectan.

En la tabla 3.2 se puede observar que existen dos casos en los cuales se incluye al conjunto vacío. Esta inclusión se da debido a que el nodo etiquetado con el número 2 no tiene establecida ninguna liga por medio de la cual la célula central de la vecindad resultante de la conexión a través de la misma evolucione al estado 0. El mismo caso se da en el nodo 3 para el otro estado. La incorporación del conjunto vacío garantiza que los nodos van a estar ligados hacía algún lado, lo que nos permitirá establecer las relaciones que generan el diagrama de subconjuntos.

Una vez que se tiene la relación de conexiones entre nodos, el siguiente paso es obtener todos los subconjuntos de N y relacionarlos a partir de la tabla 3.2. Los subconjuntos de N están determinados por $2^{\#(N)}$, para este caso sería $2^4 = 16$ subconjuntos de N incluyendo al conjunto vacío.

En la tabla 3.3 se muestran los 16 subconjuntos del conjunto N y se representan con

Subconjunto de partida	Valor en decimal	Subconj. de llegada con evolución a 0	Subconj. de llegada con evolución a 1
{ 0,1,2,3 }	15	13	7
{ 0,1,2 }	7	9	7
{ 0,1,3 }	11	13	6
{ 0,2,3 }	13	13	3
{ 1,2,3 }	14	12	7
{ 0,1 }	3	9	6
{ 0,2 }	5	1	3
{ 0,3 }	9	13	2
{ 1,2 }	6	8	7
{ 1,3 }	10	12	4
{ 2,3 }	12	12	3
{ 0 }	1	1	2
{ 1 }	2	8	4
{ 2 }	4	0	3
{ 3 }	8	12	0
{ $\emptyset$ }	0	0	0

Tabla 3.3: Relaciones entre subconjuntos para la regla 54.

un valor decimal el cual es obtenido sumando el resultado de elevar la base 2 a la potencia que indique el elemento del subconjunto. Por ejemplo, el subconjunto { 0,1,2,3 } tiene un valor decimal 15 puesto que $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. En el caso del conjunto vacío se asume que éste tiene como valor decimal 0. Los subconjuntos de las columnas 3 y 4 también están expresados en términos de su valor decimal. La manera de relacionar a los subconjuntos es la siguiente: tomemos el subconjunto { 0,1,2 } cuyo valor decimal es 7, el subconjunto con evolución a 0 con el cual va a establecer una liga estará constituido por elementos de la columna 2 de la tabla 3.2 que correspondan con los elementos del subconjunto 7 sin repetirlos. En este caso el subconjunto de llegada con evolución a 0 sería { 0,3 } el cual tiene como valor decimal 9. De igual manera se obtiene, aunque tomando la columna 3 de la tabla 3.2, el subconjunto con evolución a 1 con el cual establece una liga el subconjunto 7, el cual en este caso sería el subconjunto { 0,1,2 } cuyo valor decimal es 7.

A partir de la tabla 3.3 se puede trazar el diagrama de subconjuntos, este diagrama es mostrado en la figura 3.25.

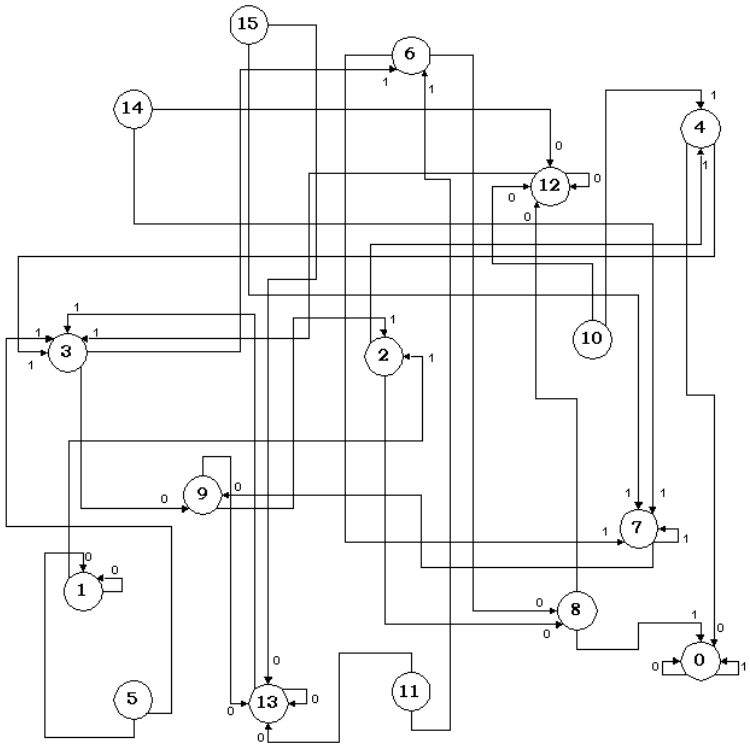

Figura 3.25: Diagrama de subconjuntos de la regla 54.

En la figura 3.25 se observa que los subconjuntos de N representan nodos los cuales están interconectados de acuerdo a la relación de la tabla 3.3. Además, las ligas están etiquetadas de acuerdo al estado de evolución que va relacionando a las parejas de nodos.

Una aplicación importante del diagrama de subconjuntos la podemos encontrar al querer indentificar configuraciones las cuales son *Jardines del Edén*. Un ejemplo de una configuración de este tipo se da cuando existe una secuencia de conexiones del subconjunto máximo al subconjunto mínimo; en este caso el subconjunto máximo sería 15 y el mínimo sería $\emptyset$. La configuración que resulta se obtiene de acuerdo al estado de evolución que relaciona a las parejas de nodos. Por ejemplo, si el nodo 15 evoluciona al estado 0 con el nodo 14, y el nodo 14 evoluciona al estado 1 con el nodo 13 y así sucesivamente hasta llegar al $\emptyset$, los estados de evolución que se obtienen a partir de las conexiones constituirán una configuración *Jardín* *del Edén.*

3.5 Comentarios

Los autómatas celulares surgieron a partir del interés que tuvo en su momento von Neumann por analizar y tratar de reproducir el comportamiento del sistema nervioso humano. Debido a la complejidad del problema y a la carencia de infraestructura tecnológica, von Neumann optó por aprovechar su análisis teórico acerca de la computadora conjuntándolo con investigaciones que pudieran serle útiles para conseguir sus propósitos. De esta manera comienza a experimentar con conceptos tales como paralelismo, al trabajar con varias computadoras o células las cuales a través del manejo de estados en los cuales pueden encontrarse se intercomunican durante la ejecución de un determinado proceso. Así es como von Neumann concibe a los autómatas celulares, los cuales desde sus orígenes han sido aplicados para ciertos fines prácticos tales como el reconocimiento de patrones o el procesamiento de imágenes.

Una vez que von Neumann empezó a trabajar con autómatas celulares, trató de construir un modelo que consistía en crear un autómata capaz de auto-reproducirse, para entonces, ya estaba involucrado con lo referente a un término denominado computación universal. Von Neumann pudo crear el modelo, pero desgraciadamente falleció dejando su investigación inconclusa.

Posterior a la muerte de von Neumann, otros investigadores se interesaron en su trabajo y se encontraron con la dificultad de poder llevarlo a la práctica debido a que el modelo original utilizaba un gran número de estados, lo que lo hacía bastante complejo, así que se dieron a la tarea de tratar de reducir el número de estados sin perder las propiedades que debía poseer el autómata. En este sentido se dieron aportaciones interesantes a través del tiempo, hasta llegar a *Life*, un autómata que cumplía con los requisitos de auto-reproducirse y hacer computación universal, lo que ocasionó un parteaguas en el estudio de los autómatas celulares.

Con el paso del tiempo, se han ido construyendo fundamentos teóricos debido al interés que los autómatas celulares han despertado en cuanto al análisis de los aspectos formales de su comportamiento. Hoy en día existe gran interés por estudiar a los autómatas celulares en una dimensión a partir de las primeras investigaciones que en este sentido realizó Wolfram.

Se ha demostrado que los autómatas celulares uni-dimensionales ofrecen mediante una dinámica sencilla la reproducción de comportamientos complejos. Por esta razón se han creado varios modelos para reproducir el flujo de tránsito de autos basados en la dinámica de un autómata celular. Los diagramas de Bruijn y de subconjuntos añaden practicidad y funcionalidad al análisis de este problema. Con los diagramas de Bruijn y de subconjuntos podemos saber diversos aspectos que tienen que ver con el comportamiento de un autómata celular uni-dimensional; por ejemplo, podemos saber de que manera van a evolucionar las células del autómata, conocer los diversos ancestros que puede tener una configuración, y podemos identificar configuraciones que no pueden ser generadas a partir de otras. En el siguiente capítulo veremos de que forma podemos aplicar todo esto al análisis del flujo de tránsito de autos.

Capítulo 4

Analizando la regla de AC(2,1) 184

En este capítulo presentamos el modelo para flujo de tránsito que utiliza la regla de AC(2,1) 184 y algunas "variantes" propuestas para mejorar el flujo sin modificar las velocidades. Se muestra un análisis utlizando las herramientas citadas en el capítulo anterior por medio del cual se obtiene la información relevante en cuanto a las caracteríticas que determinan el comportamiento del autómata celular en cuestión.

4.1 Modelo AC(2,1) 184

El modelo que representa el tránsito de automóviles con la dinámica más simple es aquel en el cual los autos se desplazan de izquierda a derecha de manera sincronizada en cada paso de tiempo a través de un solo carril por la carretera, misma que se representa por un conjunto de celdas las cuales pueden estar desocupadas u ocupadas por un vehículo (ver figura 4.1).

En este modelo, las velocidades de los autos se representan mediante la variable v, la cual puede tener sólo dos valores: 0 y 1. Cuando v es igual a 0 significa que el auto está detenido, y cuando v es igual a 1 significa que el auto puede avanzar un espacio hacia adelante.

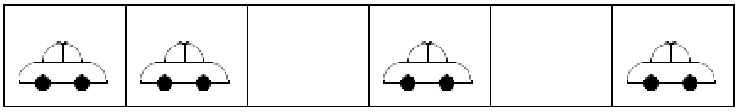

Figura 4.1: Carril de una carretera representada por medio de celdas.

Vecindad	Estado al que evoluciona la célula central
000	0
001	0
010	0
011	1
100	1
101	1
110	0
111	1

Tabla 4.1: Regla de AC(2,1) 184.

Como podemos notar, los valores que puede asumir v nos indican que los autos sólo pueden alcanzar una velocidad igual a 1, mismo número de sitios que los vehículos pueden avanzar como máximo. De esta manera, la velocidad máxima que pueden alcanzar los autos, la cual es representada mediante el parámetro V_{max} es igual a 1 y el promedio de velocidad es dado por

$$V_p = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \rho \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-\rho}{\rho} & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{4.1}$$

donde V_p es el promedio de velocidad que mantienen los autos después de un número determinado de iteraciones. El valor de V_p es determinado por la densidad ρ la cual se representa por el número de autos en la carretera. En la figura 4.2 se ilustra como varía V_p de acuerdo a ρ.

Se encontró una equivalencia entre la mecánica de este modelo y la regla de AC(2,1) 184 estudiada por Wolfram [101] la cual se muestra en la tabla 4.1.

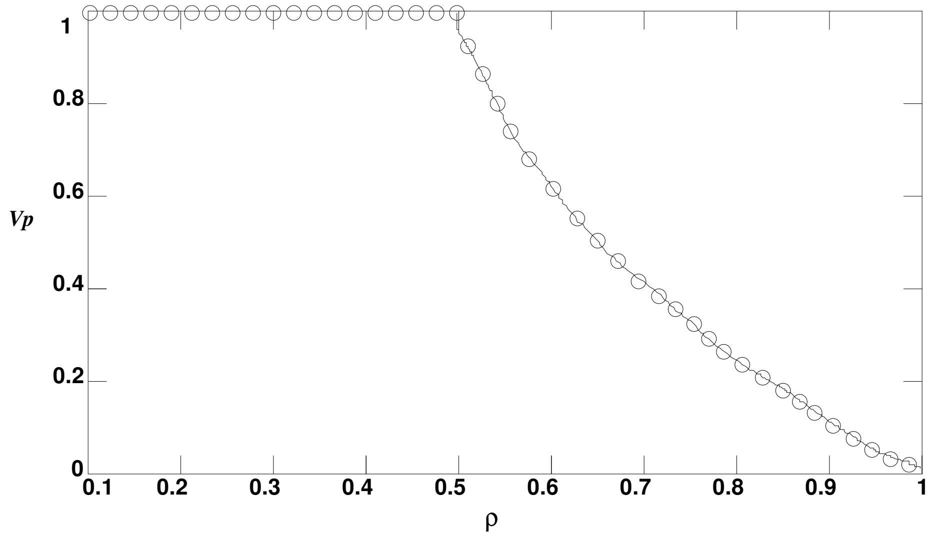

Figura 4.2: Promedio de velocidad de los autos en función de la densidad.

En el caso de la regla 184, las células que están en estado 0 representan un sitio vacío (no un sitio ocupado por un auto con velocidad 0), mientras que las que están en estado 1 representan un sitio ocupado por un auto (no un sitio ocupado por un auto con velocidad 1). Al observar esta regla no hay que tomar en cuenta velocidades, solamente hay que observar que los sitios vacíos se representan con el estado 0 y los sitios ocupados con el estado 1. Haciendo evolucionar este autómata se puede comprobar que los 1's se desplazan de izquierda a derecha en cada generación siempre y cuando haya ceros a su derecha.

Aunque la dinámica de la regla 184 no toma en cuenta las velocidades, su patrón de comportamiento es equivalente al del modelo que incluye a v y V_{max} cuando $V_{max} = 1$. Esto se puede apreciar en la figura 4.3 en la cual se ilustra como se desplazan los autos aplicando la regla 184 y el modelo que incluye a v y V_{max}.

Se han creado otros modelos a partir de la regla 184, con la variante de que los autos se desplazan en bloque, con esto lo que se busca es aumentar la fluidez sin modificar el número de velocidades diferentes a las que se pueden desplazar los automóviles. Han surgido modelos como el "tránsito monitoreado" de Fukś y Boccara [24] y una generalización del

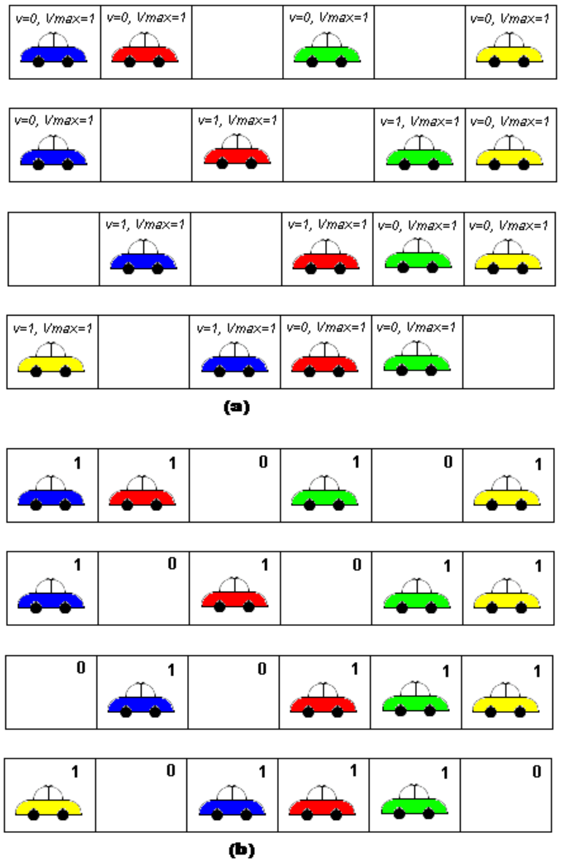

Figura 4.3: (a) Desplazamiento de los autos aplicando el modelo que incluye los parámetros v y V_{max}. (b) Desplazamiento de los autos aplicando la regla de evolución 184 para un AC(2,1).

modelo de Takayasu y Takayasu [91], los cuales se explican en las siguientes secciones.

4.2 Modelo de Fukś y Boccara

Fukś y Boccara mencionan que la regla 184 es ineficiente ya que los conductores mantienen una "actitud defensiva", la cual ilustran utilizando la configuración de la figura 4.4.

La primera línea representa las localizaciones de los autos A, B y C en el tiempo t, mientras que la segunda línea representa su localización en el tiempo $t+1$. Los ceros representan los sitios vacíos. Puesto que el conductor del auto A no sabe si el auto B se va a mover o no, por seguridad éste no se mueve. Si él pudiese ver que hay un sitio más adelante podría predecir que el auto B se moverá y que el sitio al frente de él estará vacante en el siguiente paso de tiempo.

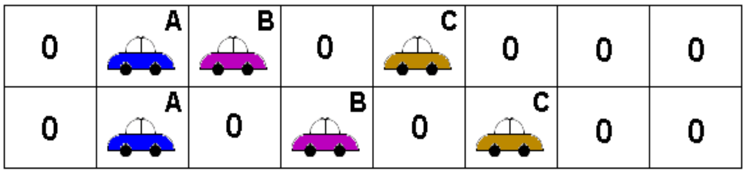

Figura 4.4: Desplazamiento de los autos de acuerdo a la regla 184.

Fukś y Boccara construyeron una regla simple que incorpora tal mecanismo de "predicción" de la siguiente forma: el conductor en el sitio i primero observa un bloque de q sitios directamente enfrente de él (por ejemplo del sitio $i+1$ al sitio $i+q$) para saber si al menos un sitio está vacío (cabe mencionar que para tener disponible esta información los autos tienen que ser "monitoreados"). Si esto sucede, él mueve su auto un sitio a la derecha, aún si el sitio $i+1$ está ocupado ya que sabe que el auto en el sitio $i+1$ se moverá porque todos los conductores siguen la misma regla. Si todos los sitios de $i+1$ a $i+q$ están ocupados el auto en el sitio i no se moverá. La regla anterior se denota por $R_{1,q}$. Para $q=2$, la configuración de la figura 4.4 evolucionará en la configuración de la figura 4.5.

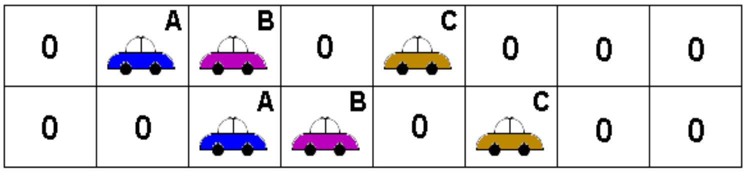

Figura 4.5: Desplazamiento de los autos de acuerdo al modelo de Fukś y Boccara.

Como podemos ver, los autos A y B ahora se mueven como un "bloque". Tal bloque mejora significativamente la fluidez, como se muestra en los diagramas fundamentales de las figuras 4.6 y 4.7. El modelo de Fukś y Boccara es equivalente al AC(2,2) cuya regla de evolución es la 3212885888.

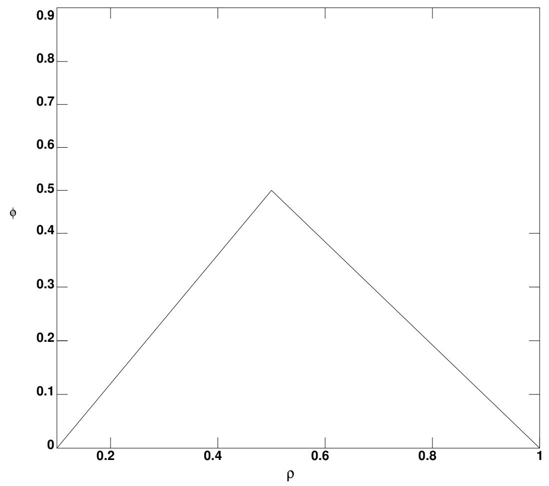

Figura 4.6: Diagrama fundamental de la regla 184.

4.3 Generalización

Recientemente se propuso una generalización de la regla de AC(2,1) 184 con el propósito de aplicarla en el análisis de diversos fenómenos del transporte a través de la obtención de varias propiedades algebraicas. Su ecuación de evolución es

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t). \tag{4.2}$$

donde U_j^t representa un auto en el sitio j en el tiempo t, L es un entero positivo fijo. Se asume que puede haber L autos como máximo, es decir, hay L sitios. Podemos comprobar que si $0 \leq U_j^t \leq L$ para cualquier j, entonces $0 \leq U_j^{t+1} \leq L$ se mantiene para cualquier j. Debido a que la ecuación 4.2 se obtiene a partir de una ultradiscretización de la ecuación de Burgers [33] a este autómata celular se le conoce como AC Burger (BCA) [71]. Hay que hacer notar que el BCA es equivalente al AC(2,1) 184 en el caso en el que $L = 1$. El entero positivo L puede interpretarse físicamente como el carril de una carretera que consta de L sitios.

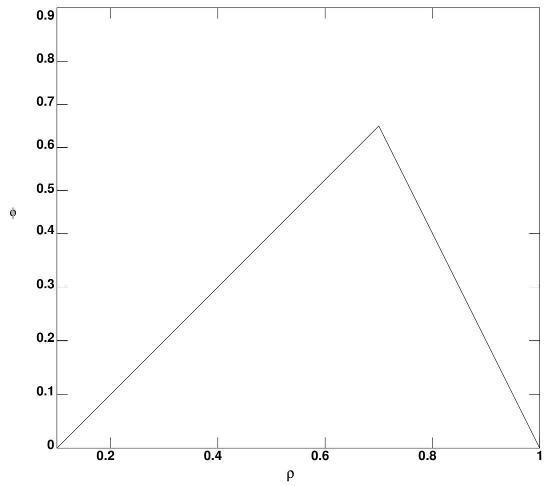

Figura 4.7: Diagrama fundamental del modelo de Fukś y Boccara.

4.4 Modelo de arranque lento (*SLOW STAR MODEL SIS*)

El modelo SIS para tránsito consiste de un solo carril uni-direccional en el cual los autos no pueden moverse hasta después de haberse detenido y haber esperado por una unidad de tiempo. El número de autos bloqueados por los autos que están en $j+1$ en el tiempo $t-1$ se representa por $U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1})$. Esos autos no pueden moverse en el tiempo t; por lo tanto el máximo número de autos que se pueden mover al sitio j en el tiempo t es dado por $U_j^t - \{U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1})\}$. De esta forma, la generalización del AC SIS es dada por la ecuación

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} = U_j^t &+ \min[U_{j-1}^t - \{U_{j-1}^{t-1} - \min(U_{j-1}^{t-1}, L - U_j^{t-1})\}, L - U_j^t] \\ &-\min[U_j^t - \{U_j^{t-1} - \min(U_j^{t-1}, L - U_{j+1}^{t-1})\}, L - U_{j+1}^t]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Esta generalización incluye el modelo original de Takayasu y Takayasu [91] en el caso de que $L = 1$. Puesto que U^{t+1} es determinada por U^t y U^{t-1}, la ecuación de evolución es de segundo orden en tiempo, de esta forma se incluye una inercia de autos en el modelo.

Existen otros modelos que contemplan la posibilidad de que los autos avancen más de un sitio a la vez, un ejemplo de este tipo de modelos son el EBCA1 y EBCA2 [72], los cuales son extensiones del Autómata Celular Burger (BCA). En esta tesis no se analizan todos los modelos existentes puesto que el objetivo no es encontrar el que ofrezca las mejores características en cuanto a fluidez sino mostrar una perspectiva de análisis que permita estudiar cualquier modelo o autómata que represente el comportamiento del tránsito de autos.

En la siguiente sección se ilustra lo anterior analizando la regla de AC(2,1) 184.

4.5 Diagramas de Bruijn extendidos

En el capítulo anterior explicamos la forma de construir un diagrama de Bruijn. En el diagrama de Bruijn está contenida toda la información referente al comportamiento y a las características propias del autómata celular. En la figura 4.8 se muestra el diagrama de Bruijn básico de la regla 184.

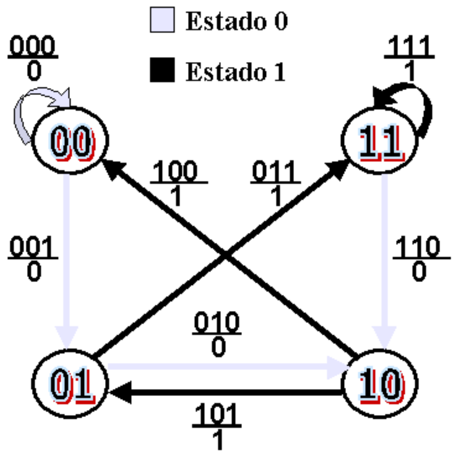

Figura 4.8: Diagrama de Bruijn de la regla 184.

A partir del diagrama básico se pueden obtener, por ejemplo, las configuraciones *still lifes* las cuales se observan en el subdiagrama de la figura 4.9. Como se puede apreciar, solamente se conservan las ligas que representan las vecindades cuya célula central se conserva después de aplicar la regla de evolución. En este subdiagrama existen dos ciclos que llevan a secuencias infinitas de 0's y 1's, las cuales son las configuraciones *still lifes*.

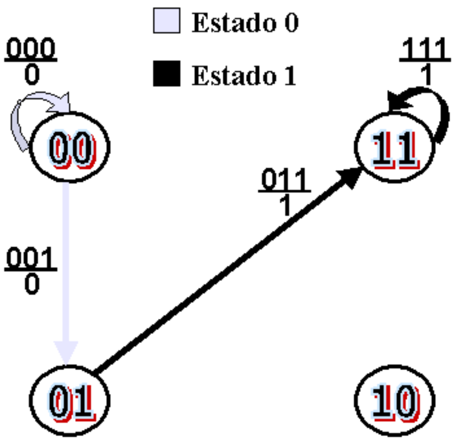

Figura 4.9: Subdiagrama que muestra las configuraciones *still lifes* de la regla 184.

Sin embargo, es difícil identificar mucha información a partir del diagrama básico de un autómata. Por esta razón es útil analizar subdiagramas derivados del diagrama de Bruijn de un autómata celular específico como son los diagramas de subconjuntos y de ciclos. Además, el mismo diagrama de Bruijn se puede ampliar utilizando nodos con vecindades parciales de tamaño más grande que las mínimas necesarias para construir el diagrama básico. Cabe mencionar que las vecindades parciales deben ser de tamaño par puesto que las vecindades completas que resultan de conectar dos nodos deben ser de tamaño impar.

En la figura 4.10 se muestra el diagrama de subconjuntos de la regla 184. En este diagrama se puede apreciar una ruta que va del nodo etiquetado con el número 15 al nodo etiquetado con el símbolo que representa al conjunto vacío, es decir, del nodo máximo al nodo mínimo, lo cual significa que existen configuraciones del tipo *Jardín del Edén*. En este caso la secuencia 1100 y todas sus subsecuencias no podrán ser producidas a partir de otras configuraciones, con lo que se comprueba que la regla 184 tiene características de inyectividad.

El propósito de utilizar diagramas de Bruijn extendidos es el de poder examinar a detalle el comportamiento del autómata más allá de una generación.

Nodos conectados	Generación 0	Generación 1	Generación 2
(0000)△(0000)	00000	000	0
(0000)△(0001)	00001	000	0
(0001)△(0010)	00010	000	0
(0001)△(0011)	00011	001	0
(0010)△(0100)	00100	001	0
(0010)△(0101)	00101	001	0
(0011)△(0110)	00110	010	0
(0011)△(0111)	00111	011	1
(0100)△(1000)	01000	010	0
(0100)△(1001)	01001	010	0
(0101)△(1010)	01010	010	0
(0101)△(1011)	01011	011	1
(0110)△(1100)	01100	101	1
(0110)△(1101)	01101	101	1
(0111)△(1110)	01110	110	0
(0111)△(1111)	01111	111	1
(1000)△(0000)	10000	100	1
(1000)△(0001)	10001	100	1
(1001)△(0010)	10010	100	1
(1001)△(0011)	10011	101	1
(1010)△(0100)	10100	101	1
(1010)△(0101)	10101	101	1
(1011)△(0110)	10110	110	0
(1011)△(0111)	10111	111	1
(1100)△(1000)	11000	100	1
(1100)△(1001)	11001	010	0
(1101)△(1010)	11010	010	0
(1101)△(1011)	11011	011	1
(1110)△(1100)	11100	101	1
(1110)△(1101)	11101	101	1
(1111)△(1110)	11110	110	0
(1111)△(1111)	11111	111	1

Tabla 4.2: Vecindades de tamaño 5 del diagrama de Bruijn extendido de la regla 184.

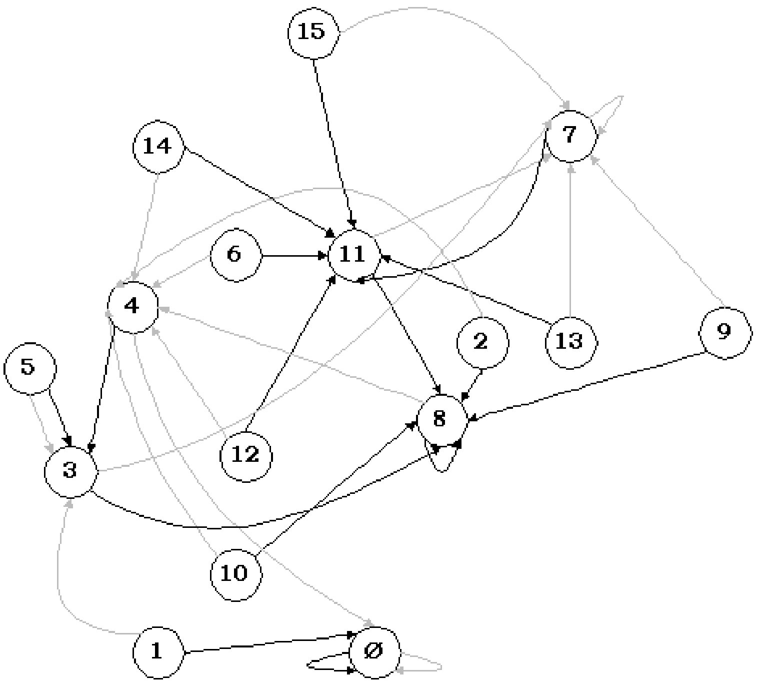

Figura 4.10: Diagrama de subconjuntos de la regla 184. Las ligas de color negro representan subconjuntos que se conectan con otros subconjuntos a través del estado 1, mientras que las ligas de color gris representan lo mismo pero a través del estado 0.

Para ilustrar lo anterior la tabla 4.2 muestra la estructura del diagrama de Bruijn extendido a 2 generaciones de la regla de AC(2,1) 184. En la primer columna de izquierda a derecha se puede observar la forma en que están conectados los nodos a través del operador de superposición $\triangle$. Para que dos nodos puedan estar conectados se sigue la misma norma explicada en el capítulo anterior, es decir, los elementos intermedios de las vecindades parciales que constituyen los nodos fuente y destino deben coincidir para conformar junto con las células inicial y final de los nodos origen y destino respectivamente la vecindad completa, en este caso, de tamaño 5. Estas vecindades, las cuales constituyen la generación 0 y se observan en la segunda columna de la tabla 4.2 evolucionan a un solo estado en la segunda generación. Para obtener esto se toma la primer célula de izquierda a derecha y las células restantes que completan la vecindad. En este caso, como se está trabajando con un autómata (2,1) se toman las dos células de la derecha. Aquí es importante señalar que no se toman los vecinos de la izquierda porque en la evolución de las secuencias de un diagrama de Bruijn extendido no se toman en cuenta los límites periódicos. Una vez que se tiene la vecindad se aplica la regla de evolución y se obtiene la primera célula de la siguiente generación, posteriormente se toma la segunda célula de izquierda a derecha y se repite el proceso hasta completar la secuencia que constituirá la siguiente generación.

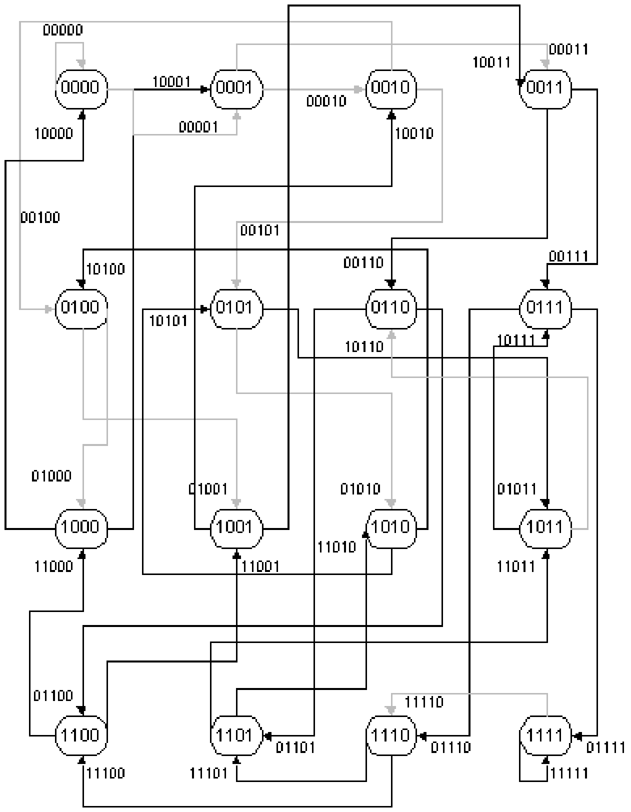

Figura 4.11: Diagrama de Bruijn extendido a vecindades parciales de 4 células.

Es importante mencionar que si las vecindades que constituyen las generaciones en la evolución del autómata fuesen de tamaño par, entonces la evolución no sería correcta porque las vecindades estarían incompletas. Para ejemplificar lo anterior tomemos la secuencia 00101 de la generación 0 de la tabla 4.2. Como se mencionó anteriormente se toma la primer célula que en este caso es el 0 y las dos células de la derecha que son 0 y 1 las cuales forman la vecindad 001. Se aplica la regla de evolución y se obtiene la primera célula de la siguiente generación la cual es 0. Se repite el proceso hasta obtener la secuencia 001 que será la generación 1 y posteriormente se aplica nuevamente la regla de evolución para obtener un 0. Por lo tanto la secuencia 00101 evoluciona al estado 0 en la segunda generación. El estado 0 será la etiqueta de la liga que une a los dos nodos que forman la vecindad 00101, estos nodos son el 0010 y el 0101 ó 2 y 5 en notación decimal. En la figura 4.11 se muestra el diagrama de Bruijn extendido construido a partir de la tabla 4.2, mientras que en la figura 4.12 se muestra el diagrama de Bruijn extendido utilizando vecindades parciales de 6 células.

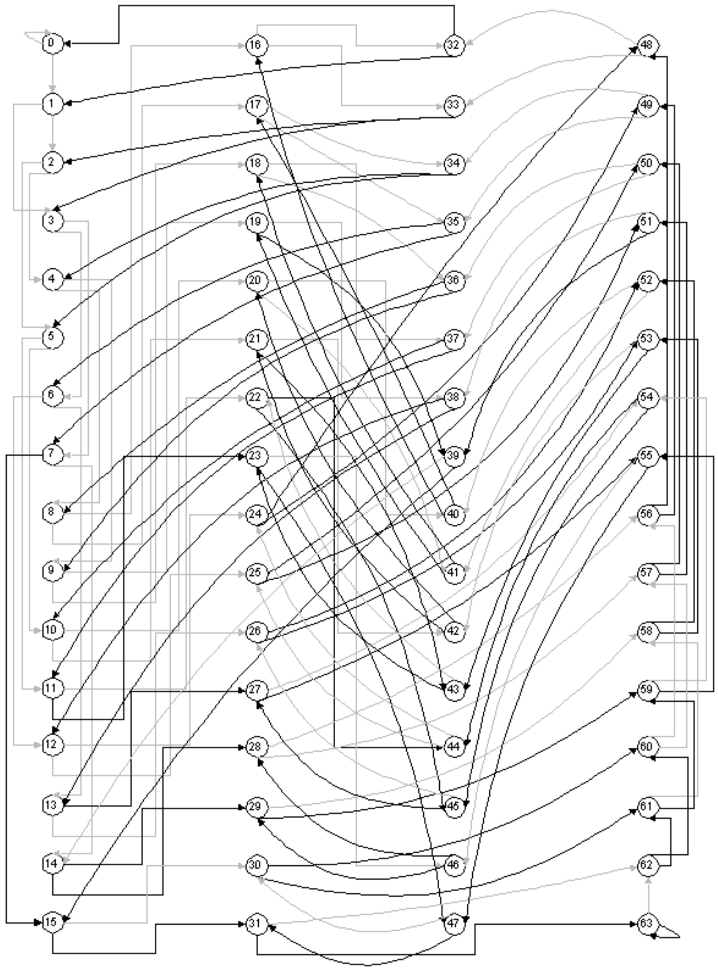

Figura 4.12: Diagrama de Bruijn extendido a vecindades parciales de 6 células.

El número de nodos en un diagrama de Bruijn extendido, al igual que en el diagrama básico, es dado por k^{2r} y el número de artistas por k^{2r+1}. En el caso del diagrama que utiliza vecindades parciales de 4 células el número de nodos que contiene el diagrama aumenta debido a que el tamaño de las vecindades que se forman al realizar la operación de superposición es 5 y el radio de vecindad se extiende a 2 vecinos de cada lado. Por lo tanto, el número de nodos es $2^{2(2)} = 16$ y el número de artistas es $2^{2(2)+1} = 32$. Lo anterior se aplica para determinar el número de nodos y de aristas de cualquier diagrama de Bruijn extendido. Luego, la matriz de conectividad del diagrama de la figura 4.11 se define de la siguiente manera:

$$MB = \begin{pmatrix} 0_{0000,0000} & 0_{0000,0001} & 0_{0001,0010} & 0_{0001,0011} \\ 0_{0010,0100} & 0_{0010,0101} & 0_{0011,0110} & 1_{0011,0111} \\ 0_{0100,1000} & 0_{0100,1001} & 0_{0101,1010} & 1_{0101,1011} \\ 1_{0110,1100} & 1_{0110,1101} & 0_{0111,1110} & 1_{0111,1111} \\ 1_{1000,0000} & 1_{1000,0001} & 1_{1001,0010} & 1_{1001,0011} \\ 1_{1010,0100} & 1_{1010,0101} & 0_{1011,0110} & 1_{1011,0111} \\ 0_{1100,1000} & 0_{1100,1001} & 0_{1101,1010} & 1_{1101,1011} \\ 1_{1110,1100} & 1_{1110,1101} & 0_{1111,1110} & 1_{1111,1111} \end{pmatrix}$$

A través de los diagramas de Bruijn extendidos podemos encontrar los desplazamientos que tendrán ciertas secuencias durante la evolución del autómata. Estas secuencias se obtienen a partir de la indentificación de los ciclos en los diagramas de Bruijn y de tomar como elementos de la secuencia a analizar los estados que etiquetan a las ligas que conectan a los nodos que forman el ciclo. Para ejemplificar lo anterior tomemos la secuencia 001 formada de la siguiente manera: el nodo 0010 se conecta con el nodo 0100, y a su vez éste se conecta con el nodo 1001 y finalmente se cierra el ciclo al conectarse éste último con el nodo 0010 y se forma un pequeño diagrama[1] que define un *acarreo*. Si llenamos el espacio que correspondería a la configuración inicial del autómata celular con la secuencia 001 (o cualquier permutación de la misma) podremos comprobar que al aplicar la regla de evolución (tomando ya en cuenta las condiciones de límites periódicos) las células se desplazan 2 posiciones a la izquierda en una generación durante la evolución del autómata.

[1]Por cuestiones prácticas en los subsecuentes diagramas las etiquetas de los nodos estan en notación decimal

En este trabajo se encontraron diversos ciclos dentro de los diagramas de Bruijn extendidos que generan diferentes secuencias; el propósito de analizar estas secuencias no es el de aportar datos directamente a la construcción de un diagrama como el de la figura 4.6. De hecho lo que se pretende es aportar información para poder predecir como se comportarán ciertas secuencias o ciertas configuraciones con diferentes densidades de autos a través del tiempo, esto con el fin de complementar los estudios que se basan en el enfoque de construir diagramas fundamentales y establecer ecuaciones a partir de los resultados que se obtienen de experimentaciones con diferentes modelos y variables que estos contienen (densidad, velocidad, etc.).

En la figura 4.13 se muestran los subdiagramas contenidos en los diagramas de Bruijn extendidos los cuales muestran las diferentes secuencias con diversos desplazamientos en 1,2 y 3 generaciones aplicando la regla de AC(2,1) 184.

Como se puede observar en la figura 4.13, existen acarreos tanto a la izquierda como a la derecha para diferentes densidades de 1's (autos). Los desplazamientos a la izquierda nos pueden servir, por ejemplo, para determinar de que manera se comportarán los bloques de autómoviles en cuanto a su desplazamiento a través del tiempo.

Por otra parte, los desplazamientos a la derecha nos pueden servir para predecir el avance de ciertas configuraciones de autos sobre la carretera.

Otro tipo de diagrama que también se obtiene a partir del diagrama de Bruijn y que también nos sirve para analizar a los autómatas celulares que representan el comportamiento del tránsito a nivel microscópico y a encontrar las propiedades que nos pueden indicar de qué manera ciertas configuraciones de células se comportarán a través del tiempo es el diagrama de ciclos. En las figuras 4.14, 4.15 y 4.16 se muestran algunos de los ciclos encontrados en la regla 184 y estos van desde los que se repiten en una generación hasta los que se repiten en diez generaciones. Como se puede observar en las figuras 4.14, 4.15 y 4.16, un autómata celular contiene ciclos con características diferentes.

Algunos ciclos representan una función sobreyectiva como el compuesto por las configuraciones 6, 9, 5, 10, 3 y 12 las cuales forman un ciclo de periodo 2. Otros ciclos representan una función biyectiva como el compuesto por las configuraciones 2, 1, 8 y 4 las cuales forman un ciclo de periodo 4.

A diferencia de los anillos que representan secuencias con diferentes desplazamientos, lo cual fue explicado anteriormente, los nodos de los diagramas de ciclos representan configuraciones globales dentro de la evolución del autómata. Esto nos sirve para identificar ancestros, es decir, si tenemos una configuración C_t por medio de los diagramas de ciclos podemos conocer cuántas y cuáles configuraciones la pueden generar en $t-1$. Por ejemplo, si tenemos la configuración 11011 podemos saber que esta configuración tiene cuatro ancestros en los tiempos $t-1, t-2, t-3$ y $t-4$; estas configuraciones son: 10111, 01111, 11110 y 11101. Esto puede ser muy útil para analizar el flujo de tránsito puesto que si tenemos una cierta distribución de los automóviles sobre la carretera podemos determinar paso a paso como se fue generando ésta en el transcurso del tiempo.

De esta manera el análisis lo podemos hacer sobre secuencias cortas que nos permiten enfocarnos al estudio del comportamiento a nivel microscópico de grupos pequeños de autos o al estudio a nivel macroscópico con configuraciones más grandes.

Por último, podemos ver una simulación de flujo de tránsito de autos representada mediante un diagrama de espacio-tiempo el cual se obtiene a través del diagrama de evoluciones del autómata celular.

4.6 Comentarios

Como se mencionó al inicio de este capítulo, el modelo que reproduce el flujo de tránsito de autos con la dinámica más simple es el representado por la regla de AC(2,1) 184. Este ha servido como punto de partida para construir modelos más robustos y por consecuencia más complejos y difíciles de analizar. Se han planteado modelos que mejoran la fluidez como variantes de la regla 184, aunque siendo estrictos no se pueden considerar como tales puesto que la regla 184, como cualquier autómata celular, maneja una dinámica muy precisa y por tanto el hacer modificaciones a la misma implica que ya no estamos tratando con el mismo autómata sino con otro que seguramente será representado por otra regla.

Por otra parte, la simplicidad de la regla 184 tal vez no nos permita profundizar mucho en el análisis por medio de los diagramas de Bruijn, de subconjuntos y de ciclos, pero sí nos demuestra que este tipo de herramientas gráficas son muy útiles para analizar otros autómatas celulares los cuales reproducen el comportamiento del flujo de tránsito de autos de manera más real en función de su complejidad.

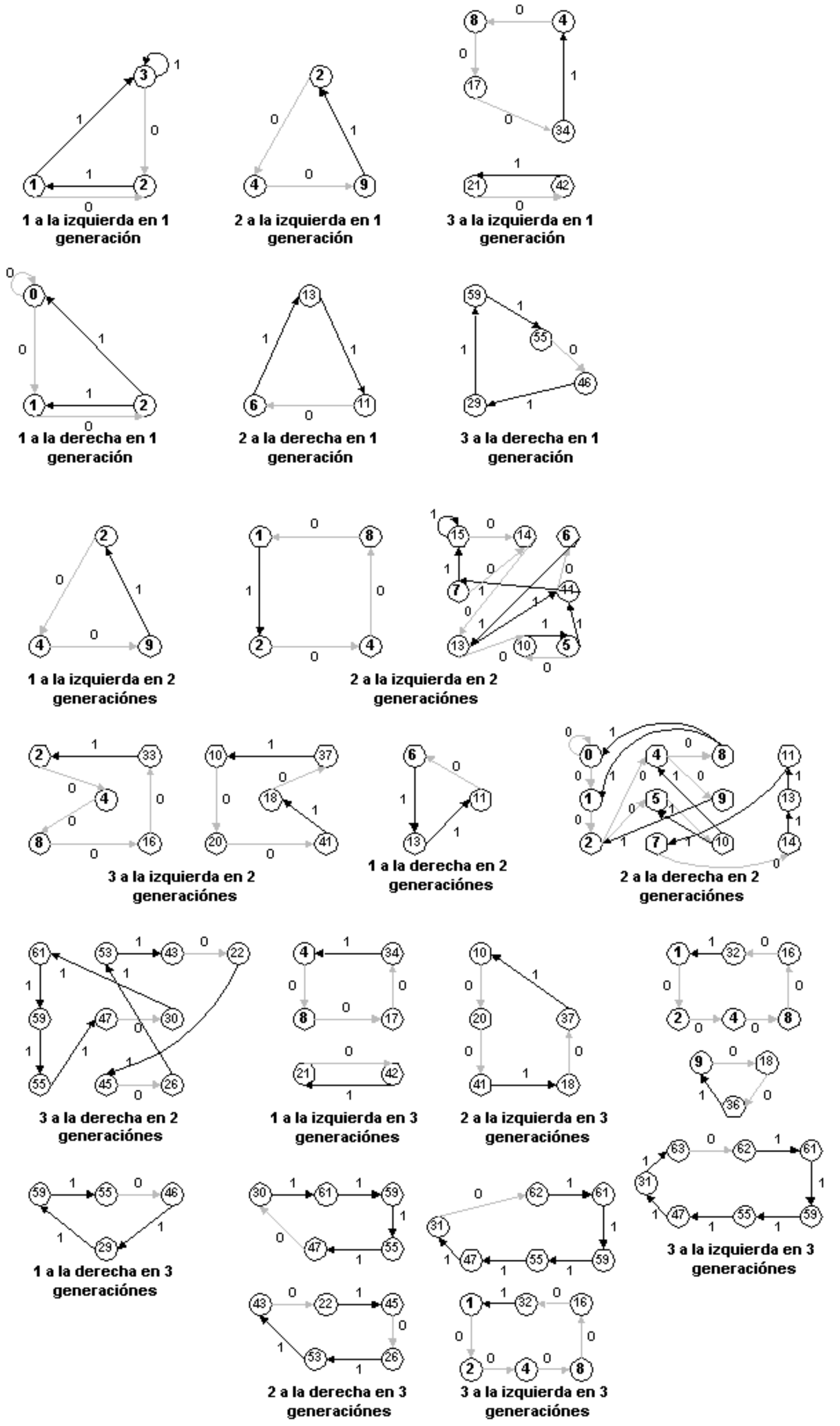

Figura 4.13: Desplazamientos que tienen las células al aplicar la regla de AC(2,1) 184.

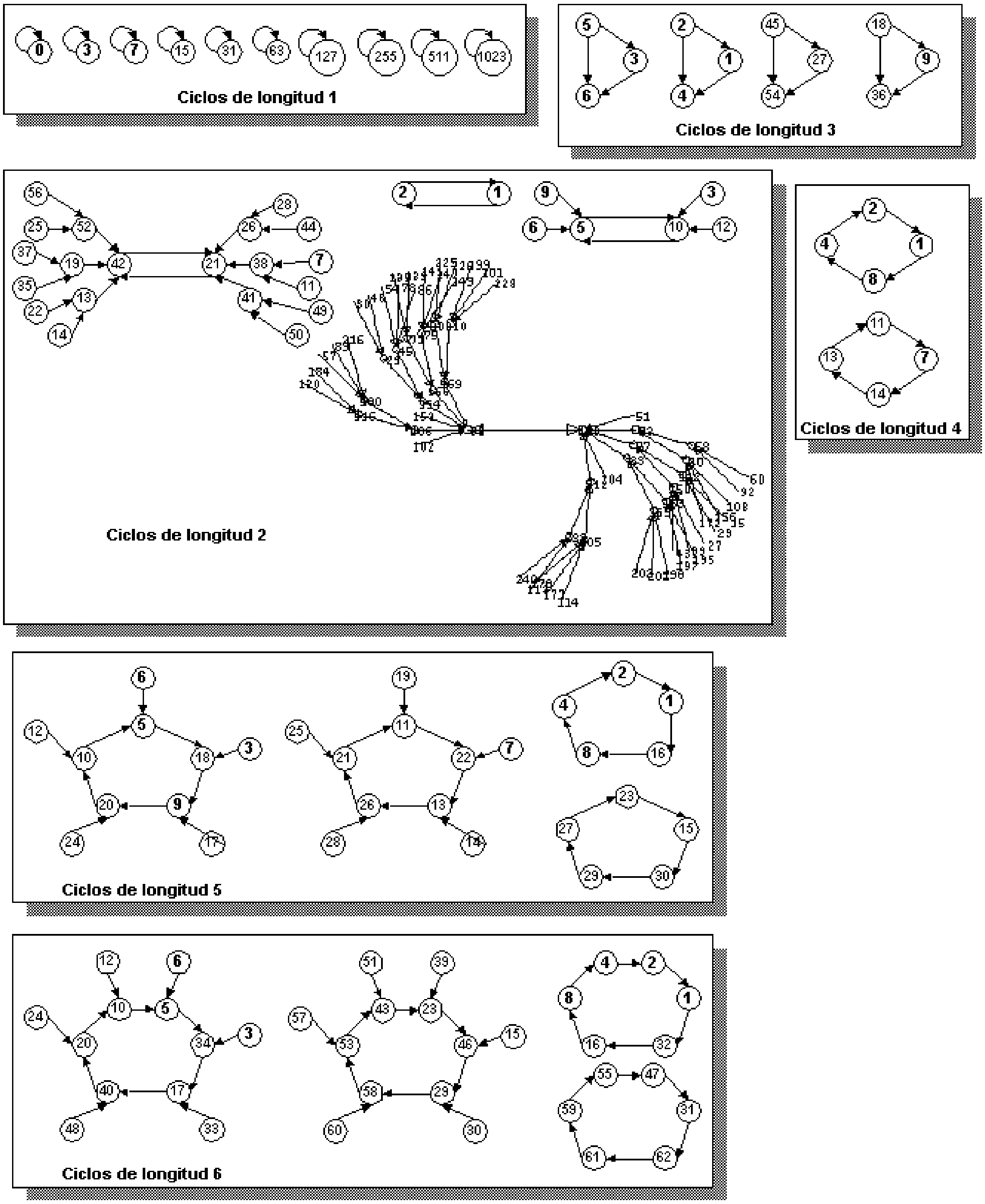

Figura 4.14: Ciclos de periodo 1 a periodo 6 de la regla 184.

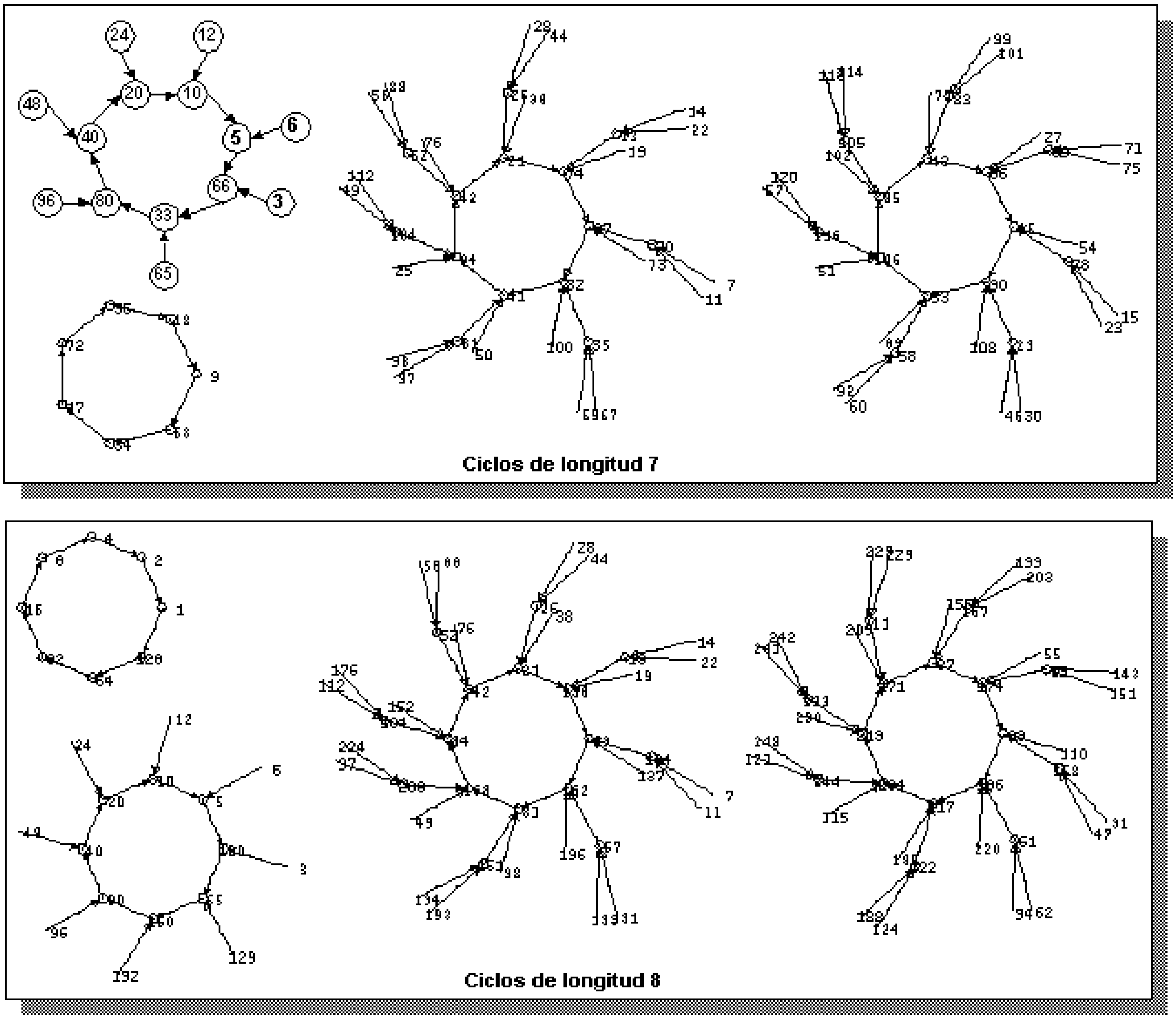

Figura 4.15: Ciclos de periodo 7 y periodo 8 de la regla 184.

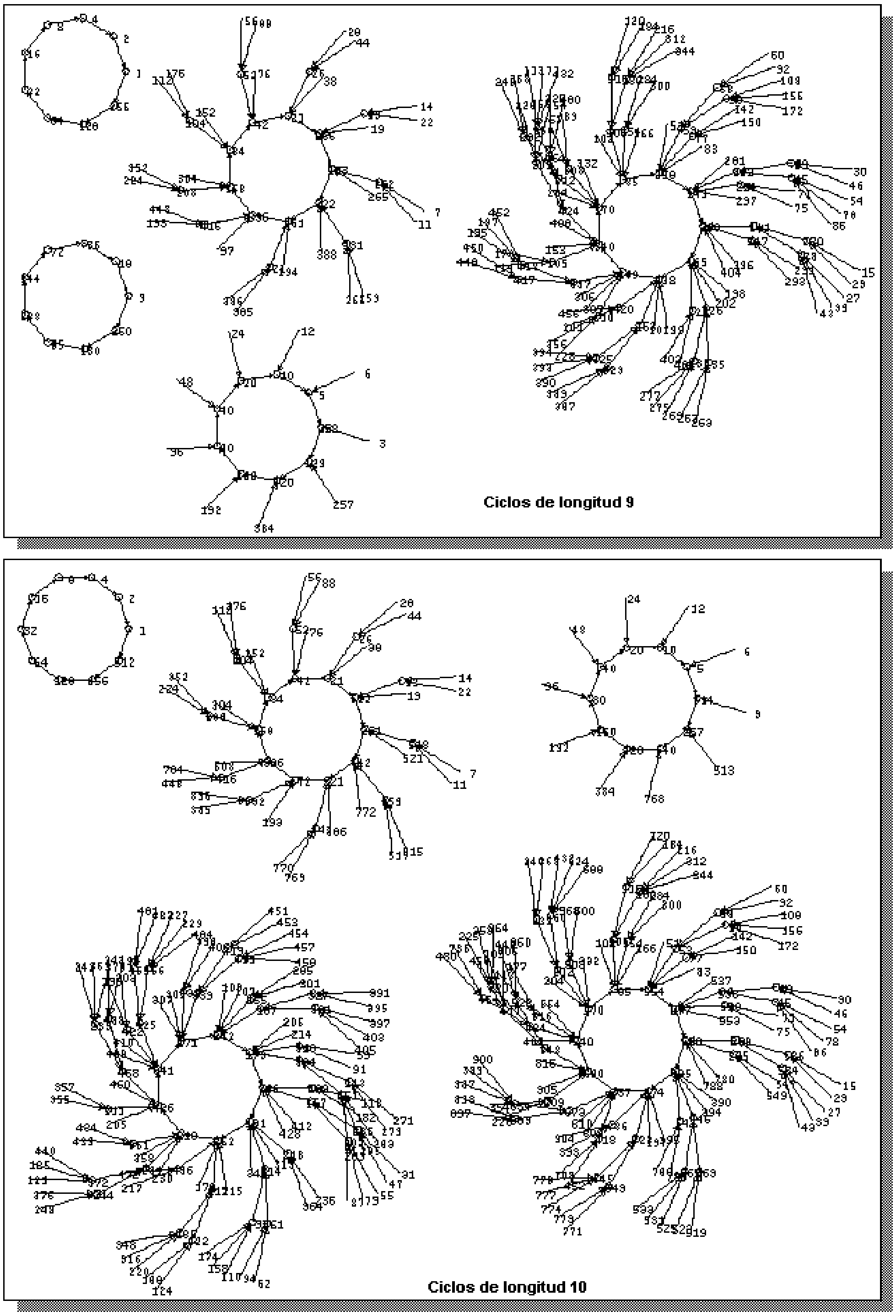

Figura 4.16: Ciclos de periodo 9 y periodo 10 de la regla 184.

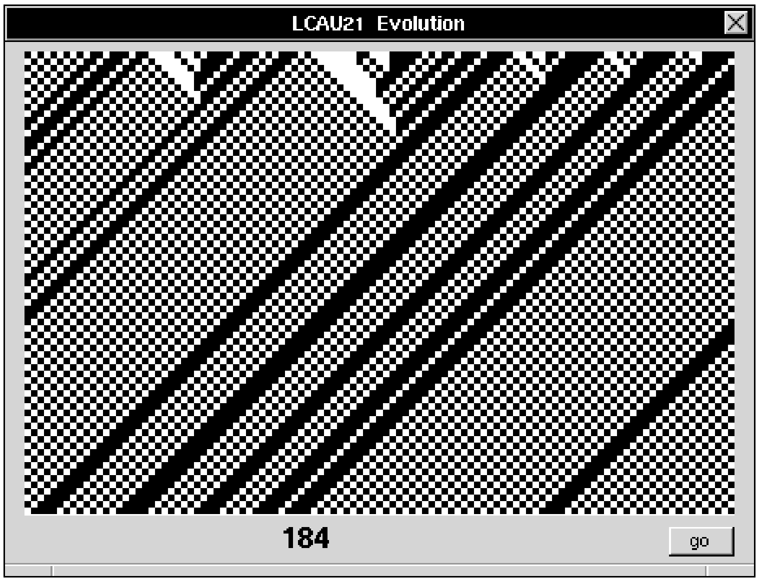

Figura 4.17: Simulación del flujo de tránsito representada mediante el diagrama de evoluciones.

Capítulo 5

Analizando el AC de Kai Nagel en una dimensión

En este capítulo se propone un mecanismo para encontrar reglas de autómatas celulares que reproduzcan el comportamiento del flujo de tránsito cuando $V_{max} > 1$. Se toma como base el modelo de Kai Nagel en una dimensión y en una dirección. En base a este modelo se presentan dos reglas que reproducen dicho comportamiento y se plantea su nivel de confiabilidad en base al análisis previamente realizado.

5.1 Descripción del modelo

Kai Nagel [57] creó un modelo para tránsito de autos basado en los autómatas celulares, es decir, definió un autómata celular el cual trabaja sobre un arreglo uni-dimensional de L sitios tomando en cuenta condiciones de límites periódicos. Cada sitio puede estar ocupado por un vehículo o vacío (ver Figura 5.1).

A diferencia de otros modelos como el de Fukś y Boccara en el cual los autos pueden verificar un grupo de q sitios adelante de ellos para saber si hay un lugar vacante que les

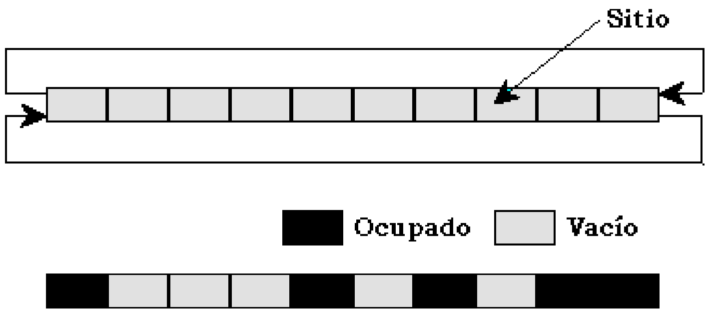

Figura 5.1: Arreglo de 10 sitios.

permita avanzar en bloque en el mismo paso de tiempo, en el modelo de Nagel existe una variable que condiciona el avance de todos y cada uno de los autos que contiene el arreglo. Esta variable es conocida como *gap (claro)*, la cual representa el número total de espacios vacíos enfrente de un auto (ver figura 5.2).

Figura 5.2: Ejemplo de un *gap* con valor 3.

En este modelo sí es posible que los autos avancen con una velocidad mayor que 1, es decir, V_{max} puede ser mayor que 1, por lo tanto v puede tener diferentes valores entre 0 y V_{max} para cada uno de los autos. Otra condicionante es que si la velocidad de un auto es mayor que el número de sitios vacíos, entonces esa velocidad es reajustada de acuerdo al espacio disponible para avanzar.

De tal forma, para una configuración arbitraria una actualización del sistema consta de los siguientes pasos consecutivos, los cuales son ejecutados simultáneamente para todos los vehículos:

1. Aceleración: si la velocidad v de un vehículo es menor que V_{max} y si hay bastante

espacio al frente ($v \leq gap - 1$), entonces la velocidad se incrementa en uno.

2. Reducir la velocidad (debido a otros autos): si el siguiente vehículo al frente está muy cerca ($v \geq gap + 1$), la velocidad se reduce a gap.

$$\text{Si } (v \geq gap + 1) \text{ Entonces } v := gap.$$

3. Movimiento de auto: cada auto avanza v sitios.

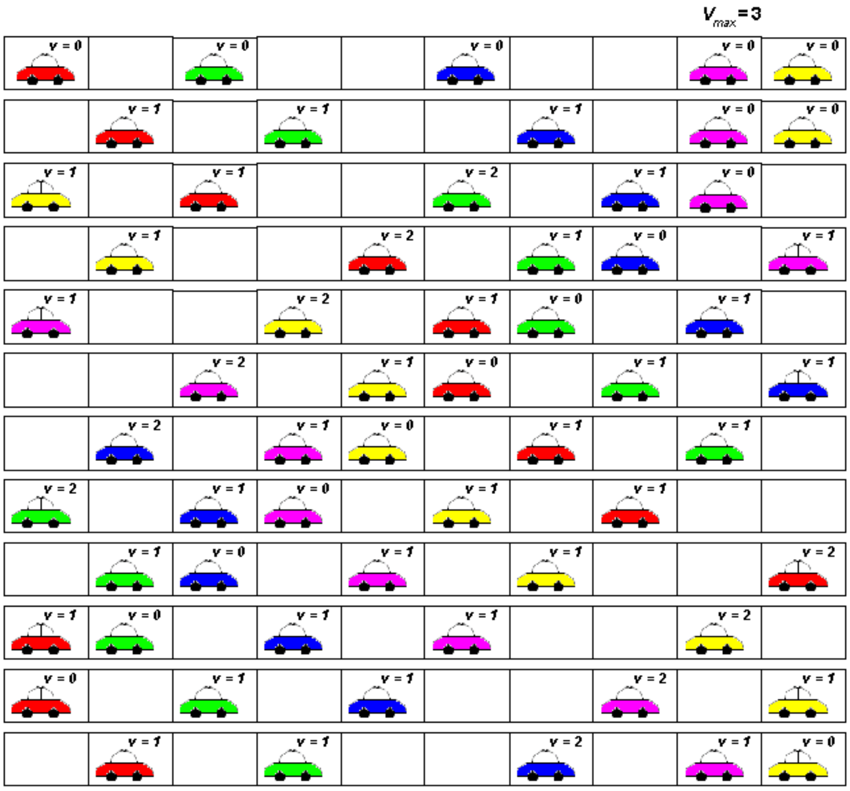

Figura 5.3: Flujo de tránsito de autos aplicando el modelo de Nagel con $V_{max} = 3$ y $\rho = 0.5$.

5.2 Regla equivalente con un Autómata (2,1)

De acuerdo a lo anterior se utilizó igualmente un arreglo de 10 sitios y se estableció una configuración inicial para posteriormente iterarla aplicando los pasos del modelo de Nagel con

Vecindad	Estado al que evoluciona la célula central
000	1
001	1
010	0
011	1
100	0
101	1
110	0
111	0

Tabla 5.1: Regla de AC(2,1) 43.

la finalidad de encontrar una regla de autómata celular que reproduciese el comportamiento del modelo para tránsito de autos de Nagel.

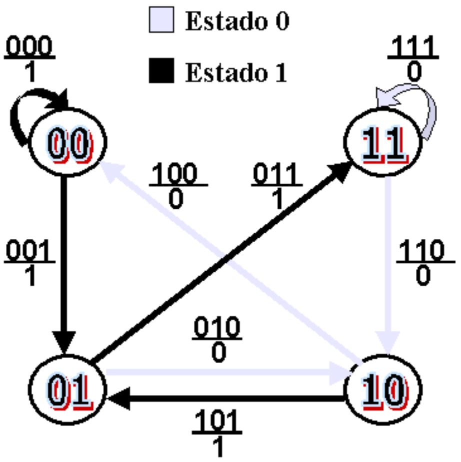

Figura 5.4: Diagrama de Bruijn de la regla 43.

Como se puede apreciar en la figura 5.3 se iteró el arreglo dando a V_{max} un valor de 3 y a la densidad ρ un valor de 0.5. Como se puede observar, después de la onceava iteración se repite la secuencia generada a partir de la configuración inicial dando como resultado un ciclo que en términos de la teoría de autómata celular inicia a partir de la generación 1 y se cierra en la generación 10, es decir, es un ciclo de periodo 10. A partir de este ciclo se buscó una regla de evolución que representara a un autómata celular (2,1). Por lo tanto se tomó el arreglo antes de iterarlo como la configuración inicial del autómata y se verificó el estado de evolución de cada una de las células centrales que conforman las vecindades de tamaño 3 en las secuencias generadas durante las iteraciones. De esta manera la regla obtenida es la 43, la cual reproduce el comportamiento del tránsito bajo el escenario planteado.

Una vez encontrada la regla de evolución se construyeron los diagramas aplicando la misma mecánica de análisis expuesta en los capítulos anteriores para conocer las características que posee la regla. De esta forma se construyó el diagrama de Bruijn el cual se muestra en la figura 5.4.

A partir del diagrama de Bruijn se construyó su diagrama de subconjuntos (ver figura 5.5) para saber si existen *Jardines del Edén* para esta regla, encontrando que la secuencia 111 es precisamente de este tipo, aspecto que parece ser desfavorable ya que al trabajar con un autómata celular (2,1) para modelar flujo de tránsito la naturaleza del mismo nos indica que solamente hay dos estados, 0 que representa un sitio desocupado y 1 que representa un sitio ocupado por un auto (igual que en la regla 184), de tal forma que hay una divergencia entre la regla 43 la cual solamente puede presentar la secuencia 111 en la configuración inicial y el modelo de Nagel el cual sí permite un grupo de tres autos situados consecutivamente.

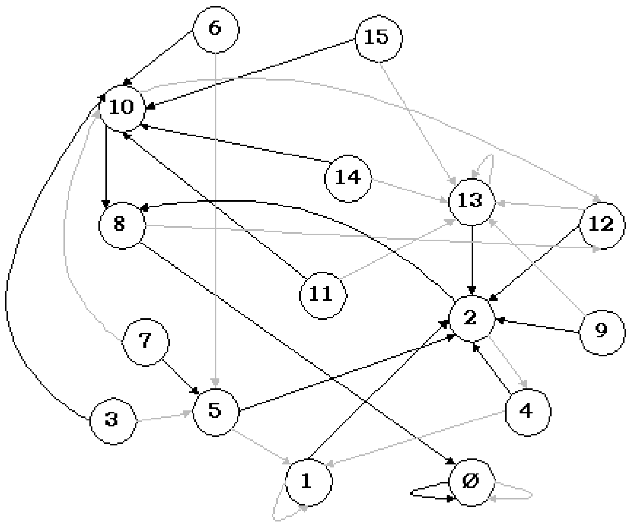

Figura 5.5: Diagrama de subconjuntos de la regla 43.

Lo anterior puede ser un indicio de que la regla 43 no cumple por completo con los requerimientos para reproducir el tránsito de autos de manera equivalente al modelo de Nagel con $V_{max} = 3$.

Para verificar lo anterior construimos los diagramas de Bruijn extendidos de los cuales se obtienen las secuencias que permiten ver los desplazamientos de las mismas con el fin de comprobar si coinciden éstos con los que se generan en el modelo original.

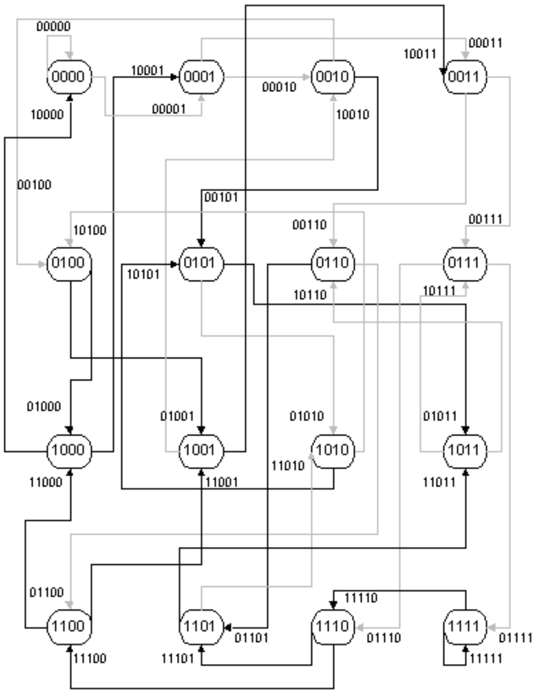

Figura 5.6: Diagrama de Bruijn de la regla 43 extendido a vecindades parciales de 4 células.

Como se ha mencionado anteriormente, de los diagramas de Bruijn se obtienen los ciclos que construyen secuencias que muestran diferentes desplazamientos a través de la evolución del autómata celular. Para comprobar si la regla 43 representa el comportamiento del modelo de Nagel para tránsito de autos en una dimensión tomemos el subdiagrama integrado por los nodos 1, 3, 7, 14, 12 y 8 (ver figura 5.8), el cual produce una secuencia que tiene un desplazamiento de sus células de dos posiciones a la izquierda en una generación. Si tomamos esa misma secuencia, la cual puede ser 000111 (o cualquier permutación de ésta) como una configuración donde los ceros representan espacios vacios y los unos espacios ocupados con una velocidad inicial 0 para todos los vehículos, tendremos como resultado que el desplazamiento no coincide con el de la secuencia producida por el subdiagrama ya que la secuencia 000111 se transforma en la secuencia 011100 en la siguiente generación mientras que aplicando el modelo de Nagel la configuración que se obtiene en el siguiente paso de tiempo es 1**00*, donde 1 representa un sitio ocupado por un vehículo con $v = 1$, * representa un sitio desocupado y 0 representa un sitio ocupado por un auto con $v = 0$.

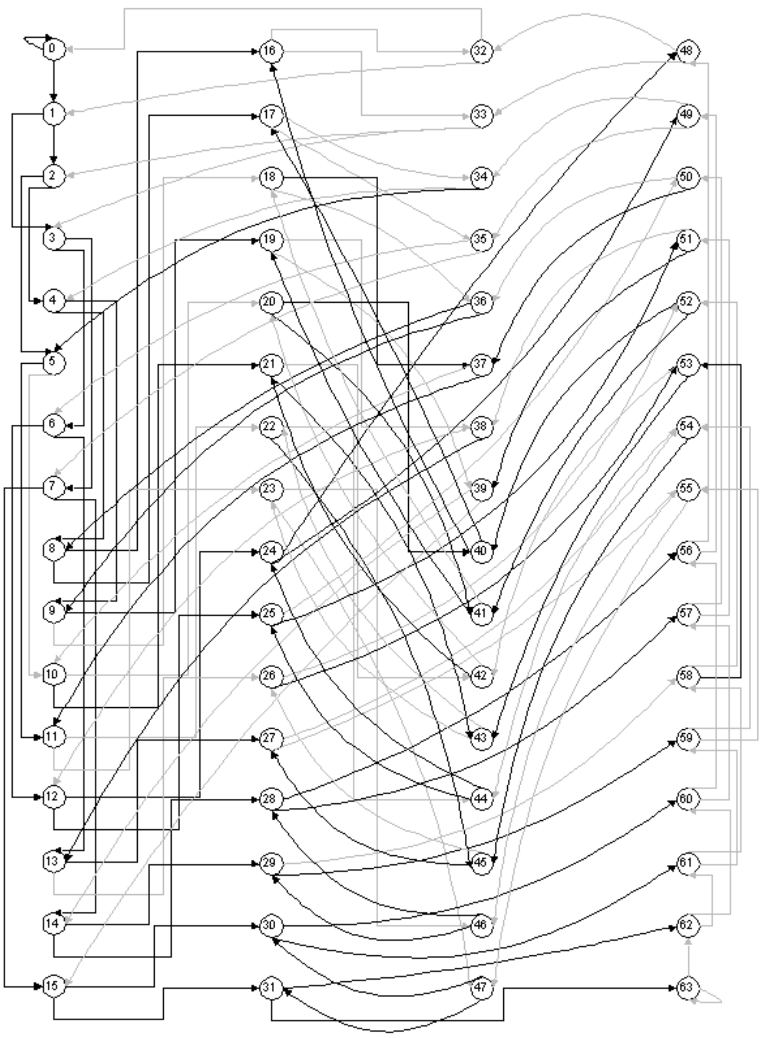

Figura 5.7: Diagrama de Bruijn de la regla 43 extendido a vecindades parciales de 6 células.

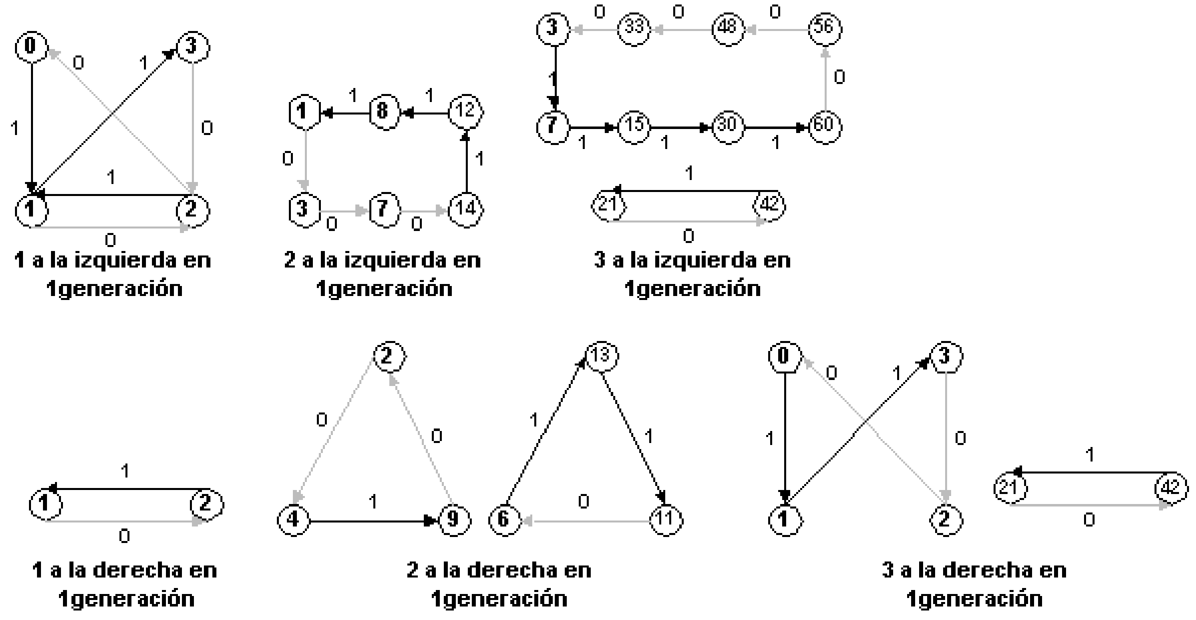

Figura 5.8: Desplazamientos en una generación que tienen las células al aplicar la regla de AC(2,1) 43.

Este tipo de aspectos se pueden observar en otros subdiagamas que representan otros desplazamientos y que hacen que la regla 43 no represente de manera global el mismo comportamiento que al aplicar a una configuración arbitraria el modelo de Nagel con $V_{max} = 3$. De hecho, estas inconsistencias se pueden observar desde las evoluciones mismas de las células centrales que conforman las vecindades. Por ejemplo, en la configuración inicial de la figura 5.3 se puede observar que la vecindad 100 evoluciona a 1 en la siguiente generación, siendo 1 el estado que representa un sitio ocupado por un auto sin tomar en cuenta velocidades, mientras que en las subsecuentes generaciones la vecindad 100 evoluciona a 0 tal y como lo indica la regla.

Este, como otros detalles semejantes tienen varias explicaciones: la primera es que si en el estado global inicial asumimos que para todos los autos $v = 0$, entonces por consecuencia aunque un auto tenga dos espacios vacios adelante de él sólo avanzará uno de acuerdo a los pasos del modelo de Nagel y no dos como lo indica la regla 43; la segunda explicación es que la regla sólo es consistente mientras $\rho \geq 0.5$, porque en el momento que $\rho < 0.5$ la regla se desajusta del funcionamiento de acuerdo al modelo de Nagel; la tercera explicación es que al ser la regla 43 un autómata binario, el reducir la densidad afecta debido a que el autómata sólamente contempla dos estados, los cuales no tienen nada que ver con las velocidades de los autos, mientras que en el modelo de Nagel el manejar V_{max} con diferentes valores hace posible un mayor número de situaciones las cuales no puede incluir el autómata celular en cuestión debido a su propia naturaleza.

5.3 Regla equivalente con un Autómata (4,2)

Se puede resumir que la regla 43 tiene limitaciones porque no incluye a todas las variables involucradas en el modelo de Nagel. Una manera de solucionar esto es que los diferentes valores que puede tomar v también los pueda tomar k, es decir, que las velocidades de los autos sean estados que formen parte del autómata celular que reproduce el flujo de tránsito de autos.

En esta sección se muestra un autómata celular que tiene un comportamiento equivalente al del modelo de Nagel con $V_{max} = 2$. A este autómata se le dió por nombre LCATRAFFICFLOWVMAX2. Este autómata pasa de ser de tipo (2,1) a tipo (4,2). Es de tipo (4,2) porque los estados que pueden tomar las células (sitios) son: vacío, ocupado por un auto con velocidad 0 (estacionado), ocupado por un auto con velocidad 1 y ocupado por un auto con velocidad 2.

El radio de vecindad se extiende a 2 porque 2 es el número máximo de sitios que pueden avanzar los autos, de esta manera se contemplan todas las configuraciones locales que se pueden dar con $V_{max} = 2$. Esta especie de monitoreo a los sitios es algo parecido a lo que se plantea en el modelo de Fukś y Boccara, con la diferencia de que el bloque de sitios que se revisa en este autómata es el mismo en ambas direcciones.

Es importante mencionar que para un autómata celular (4,2) el número total de vecindades es dado por $4^{2(2)+1}$ y el número total de reglas de evolución distintas es dado por $4^{4^{2(2)+1}}$, esto muestra el incremento exponencial del autómata en cuanto a su complejidad y a la dificultad para analizarlo.

Por lo anterior, es muy complicado revisar todas las reglas para saber cual se ajusta a las características requeridas. Por esta razón se optó por llevar a cabo algo semejante a lo que se hizo para encontrar la regla de Autómata Celular (2,1) 43.

Para encontrar la regla con comportamiento equivalente al del modelo de Nagel lo que se hizo fue calcular las 1024 vecindades y posteriormente determinar el estado de evolución de cada una de las células centrales en base a la mecánica del modelo original.

En las siguientes figuras se muestran las vecindades y su respectivo estado de evolución (segunda y tercer columna de izquierda a derecha). Los elementos del conjunto de estados de este autómata son $K = \{0, 1, 2, 3\}$ donde 0 representa un sitio vacío, 1 representa un sitio ocupado por un auto con velocidad 0, 2 un sitio ocupado por un auto con velocidad 1 y 3 un sitio ocupado por un auto con velocidad 2. La tercera columna constituye la regla de evolución del autómata.

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(0000) <=> (0000)	00000	0		(1000) <=> (0000)	10000	0
(0000) <=> (0001)	00001	0		(1000) <=> (0001)	10001	0
(0000) <=> (0002)	00002	0		(1000) <=> (0002)	10002	0
(0000) <=> (0003)	00003	0		(1000) <=> (0003)	10003	0
(0001) <=> (0010)	00010	0		(1001) <=> (0010)	10010	0
(0001) <=> (0011)	00011	0		(1001) <=> (0011)	10011	0
(0001) <=> (0012)	00012	0		(1001) <=> (0012)	10012	0
(0001) <=> (0013)	00013	0		(1001) <=> (0013)	10013	0
(0002) <=> (0020)	00020	0		(1002) <=> (0020)	10020	0
(0002) <=> (0021)	00021	0		(1002) <=> (0021)	10021	0
(0002) <=> (0022)	00022	0		(1002) <=> (0022)	10022	0
(0002) <=> (0023)	00023	0		(1002) <=> (0023)	10023	0
(0003) <=> (0030)	00030	0		(1003) <=> (0030)	10030	0
(0003) <=> (0031)	00031	0		(1003) <=> (0031)	10031	0
(0003) <=> (0032)	00032	0		(1003) <=> (0032)	10032	0
(0003) <=> (0033)	00033	0		(1003) <=> (0033)	10033	0
(0010) <=> (0100)	00100	0		(1010) <=> (0100)	10100	0
(0010) <=> (0101)	00101	0		(1010) <=> (0101)	10101	0
(0010) <=> (0102)	00102	0		(1010) <=> (0102)	10102	0
(0010) <=> (0103)	00103	0		(1010) <=> (0103)	10103	0
(0011) <=> (0110)	00110	1		(1011) <=> (0110)	10110	1
(0011) <=> (0111)	00111	1		(1011) <=> (0111)	10111	1
(0011) <=> (0112)	00112	1		(1011) <=> (0112)	10112	1
(0011) <=> (0113)	00113	1		(1011) <=> (0113)	10113	1
(0012) <=> (0120)	00120	1		(1012) <=> (0120)	10120	1
(0012) <=> (0121)	00121	1		(1012) <=> (0121)	10121	1
(0012) <=> (0122)	00122	1		(1012) <=> (0122)	10122	1
(0012) <=> (0123)	00123	1		(1012) <=> (0123)	10123	1
(0013) <=> (0130)	00130	1		(1013) <=> (0130)	10130	1
(0013) <=> (0131)	00131	1		(1013) <=> (0131)	10131	1
(0013) <=> (0132)	00132	1		(1013) <=> (0132)	10132	1
(0013) <=> (0133)	00133	1		(1013) <=> (0133)	10133	1
(0020) <=> (0200)	00200	0		(1020) <=> (0200)	10200	0
(0020) <=> (0201)	00201	0		(1020) <=> (0201)	10201	0
(0020) <=> (0202)	00202	0		(1020) <=> (0202)	10202	0
(0020) <=> (0203)	00203	0		(1020) <=> (0203)	10203	0
(0021) <=> (0210)	00210	1		(1021) <=> (0210)	10210	1
(0021) <=> (0211)	00211	1		(1021) <=> (0211)	10211	1
(0021) <=> (0212)	00212	1		(1021) <=> (0212)	10212	1
(0021) <=> (0213)	00213	1		(1021) <=> (0213)	10213	1
(0022) <=> (0220)	00220	1		(1022) <=> (0220)	10220	1
(0022) <=> (0221)	00221	1		(1022) <=> (0221)	10221	1
(0022) <=> (0222)	00222	1		(1022) <=> (0222)	10222	1
(0022) <=> (0223)	00223	1		(1022) <=> (0223)	10223	1
(0023) <=> (0230)	00230	1		(1023) <=> (0230)	10230	1
(0023) <=> (0231)	00231	1		(1023) <=> (0231)	10231	1
(0023) <=> (0232)	00232	1		(1023) <=> (0232)	10232	1
(0023) <=> (0233)	00233	1		(1023) <=> (0233)	10233	1
(0030) <=> (0300)	00300	0		(1030) <=> (0300)	10300	0
(0030) <=> (0301)	00301	0		(1030) <=> (0301)	10301	0

Figura 5.9: Vecindades que conforman el autómata el cual tiene un comportamiento equivalente al del modelo de Nagel con $V_{max} = 2$.

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(0030) <=> (0302)	00302	0		(1030) <=> (0302)	10302	0
(0030) <=> (0303)	00303	0		(1030) <=> (0303)	10303	0
(0031) <=> (0310)	00310	1		(1031) <=> (0310)	10310	1
(0031) <=> (0311)	00311	1		(1031) <=> (0311)	10311	1
(0031) <=> (0312)	00312	1		(1031) <=> (0312)	10312	1
(0031) <=> (0313)	00313	1		(1031) <=> (0313)	10313	1
(0032) <=> (0320)	00320	1		(1032) <=> (0320)	10320	1
(0032) <=> (0321)	00321	1		(1032) <=> (0321)	10321	1
(0032) <=> (0322)	00322	1		(1032) <=> (0322)	10322	1
(0032) <=> (0323)	00323	1		(1032) <=> (0323)	10323	1
(0033) <=> (0330)	00330	1		(1033) <=> (0330)	10330	1
(0033) <=> (0331)	00331	1		(1033) <=> (0331)	10331	1
(0033) <=> (0332)	00332	1		(1033) <=> (0332)	10332	1
(0033) <=> (0333)	00333	1		(1033) <=> (0333)	10333	1
(0100) <=> (1000)	01000	2		(1100) <=> (1000)	11000	2
(0100) <=> (1001)	01001	2		(1100) <=> (1001)	11001	2
(0100) <=> (1002)	01002	2		(1100) <=> (1002)	11002	2
(0100) <=> (1003)	01003	2		(1100) <=> (1003)	11003	2
(0101) <=> (1010)	01010	2		(1101) <=> (1010)	11010	2
(0101) <=> (1011)	01011	2		(1101) <=> (1011)	11011	2
(0101) <=> (1012)	01012	2		(1101) <=> (1012)	11012	2
(0101) <=> (1013)	01013	2		(1101) <=> (1013)	11013	2
(0102) <=> (1020)	01020	2		(1102) <=> (1020)	11020	2
(0102) <=> (1021)	01021	2		(1102) <=> (1021)	11021	2
(0102) <=> (1022)	01022	2		(1102) <=> (1022)	11022	2
(0102) <=> (1023)	01023	2		(1102) <=> (1023)	11023	2
(0103) <=> (1030)	01030	2		(1103) <=> (1030)	11030	2
(0103) <=> (1031)	01031	2		(1103) <=> (1031)	11031	2
(0103) <=> (1032)	01032	2		(1103) <=> (1032)	11032	2
(0103) <=> (1033)	01033	2		(1103) <=> (1033)	11033	2
(0110) <=> (1100)	01100	0		(1110) <=> (1100)	11100	1
(0110) <=> (1101)	01101	0		(1110) <=> (1101)	11101	1
(0110) <=> (1102)	01102	0		(1110) <=> (1102)	11102	1
(0110) <=> (1103)	01103	0		(1110) <=> (1103)	11103	1
(0111) <=> (1110)	01110	1		(1111) <=> (1110)	11110	1
(0111) <=> (1111)	01111	1		(1111) <=> (1111)	11111	1
(0111) <=> (1112)	01112	1		(1111) <=> (1112)	11112	1
(0111) <=> (1113)	01113	1		(1111) <=> (1113)	11113	1
(0112) <=> (1120)	01120	1		(1112) <=> (1120)	11120	1
(0112) <=> (1121)	01121	1		(1112) <=> (1121)	11121	1
(0112) <=> (1122)	01122	1		(1112) <=> (1122)	11122	1
(0112) <=> (1123)	01123	1		(1112) <=> (1123)	11123	1
(0113) <=> (1130)	01130	1		(1113) <=> (1130)	11130	1
(0113) <=> (1131)	01131	1		(1113) <=> (1131)	11131	1
(0113) <=> (1132)	01132	1		(1113) <=> (1132)	11132	1
(0113) <=> (1133)	01133	1		(1113) <=> (1133)	11133	1
(0120) <=> (1200)	01200	0		(1120) <=> (1200)	11200	0
(0120) <=> (1201)	01201	0		(1120) <=> (1201)	11201	0
(0120) <=> (1202)	01202	0		(1120) <=> (1202)	11202	0
(0120) <=> (1203)	01203	0		(1120) <=> (1203)	11203	0

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(0121) <=> (1210)	01210	1		(1121) <=> (1210)	11210	1
(0121) <=> (1211)	01211	1		(1121) <=> (1211)	11211	1
(0121) <=> (1212)	01212	1		(1121) <=> (1212)	11212	1
(0121) <=> (1213)	01213	1		(1121) <=> (1213)	11213	1
(0122) <=> (1220)	01220	1		(1122) <=> (1220)	11220	1
(0122) <=> (1221)	01221	1		(1122) <=> (1221)	11221	1
(0122) <=> (1222)	01222	1		(1122) <=> (1222)	11222	1
(0122) <=> (1223)	01223	1		(1122) <=> (1223)	11223	1
(0123) <=> (1230)	01230	1		(1123) <=> (1230)	11230	1
(0123) <=> (1231)	01231	1		(1123) <=> (1231)	11231	1
(0123) <=> (1232)	01232	1		(1123) <=> (1232)	11232	1
(0123) <=> (1233)	01233	1		(1123) <=> (1233)	11233	1
(0130) <=> (1300)	01300	0		(1130) <=> (1300)	11300	0
(0130) <=> (1301)	01301	0		(1130) <=> (1301)	11301	0
(0130) <=> (1302)	01302	0		(1130) <=> (1302)	11302	0
(0130) <=> (1303)	01303	0		(1130) <=> (1303)	11303	0
(0131) <=> (1310)	01310	1		(1131) <=> (1310)	11310	1
(0131) <=> (1311)	01311	1		(1131) <=> (1311)	11311	1
(0131) <=> (1312)	01312	1		(1131) <=> (1312)	11312	1
(0131) <=> (1313)	01313	1		(1131) <=> (1313)	11313	1
(0132) <=> (1320)	01320	1		(1132) <=> (1320)	11320	1
(0132) <=> (1321)	01321	1		(1132) <=> (1321)	11321	1
(0132) <=> (1322)	01322	1		(1132) <=> (1322)	11322	1
(0132) <=> (1323)	01323	1		(1132) <=> (1323)	11323	1
(0133) <=> (1330)	01330	1		(1133) <=> (1330)	11330	1
(0133) <=> (1331)	01331	1		(1133) <=> (1331)	11331	1
(0133) <=> (1332)	01332	1		(1133) <=> (1332)	11332	1
(0133) <=> (1333)	01333	1		(1133) <=> (1333)	11333	1
(0200) <=> (2000)	02000	0		(1200) <=> (2000)	12000	0
(0200) <=> (2001)	02001	0		(1200) <=> (2001)	12001	0
(0200) <=> (2002)	02002	0		(1200) <=> (2002)	12002	0
(0200) <=> (2003)	02003	0		(1200) <=> (2003)	12003	0
(0201) <=> (2010)	02010	2		(1201) <=> (2010)	12010	2
(0201) <=> (2011)	02011	2		(1201) <=> (2011)	12011	2
(0201) <=> (2012)	02012	2		(1201) <=> (2012)	12012	2
(0201) <=> (2013)	02013	2		(1201) <=> (2013)	12013	2
(0202) <=> (2020)	02020	2		(1202) <=> (2020)	12020	2
(0202) <=> (2021)	02021	2		(1202) <=> (2021)	12021	2
(0202) <=> (2022)	02022	2		(1202) <=> (2022)	12022	2
(0202) <=> (2023)	02023	2		(1202) <=> (2023)	12023	2
(0203) <=> (2030)	02030	2		(1203) <=> (2030)	12030	2
(0203) <=> (2031)	02031	2		(1203) <=> (2031)	12031	2
(0203) <=> (2032)	02032	2		(1203) <=> (2032)	12032	2
(0203) <=> (2033)	02033	2		(1203) <=> (2033)	12033	2
(0210) <=> (2100)	02100	0		(1210) <=> (2100)	12100	0
(0210) <=> (2101)	02101	0		(1210) <=> (2101)	12101	0
(0210) <=> (2102)	02102	0		(1210) <=> (2102)	12102	0
(0210) <=> (2103)	02103	0		(1210) <=> (2103)	12103	0
(0211) <=> (2110)	02110	1		(1211) <=> (2110)	12110	1
(0211) <=> (2111)	02111	1		(1211) <=> (2111)	12111	1

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(0211) <=> (2112)	02112	1		(1211) <=> (2112)	12112	1
(0211) <=> (2113)	02113	1		(1211) <=> (2113)	12113	1
(0212) <=> (2120)	02120	1		(1212) <=> (2120)	12120	1
(0212) <=> (2121)	02121	1		(1212) <=> (2121)	12121	1
(0212) <=> (2122)	02122	1		(1212) <=> (2122)	12122	1
(0212) <=> (2123)	02123	1		(1212) <=> (2123)	12123	1
(0213) <=> (2130)	02130	1		(1213) <=> (2130)	12130	1
(0213) <=> (2131)	02131	1		(1213) <=> (2131)	12131	1
(0213) <=> (2132)	02132	1		(1213) <=> (2132)	12132	1
(0213) <=> (2133)	02133	1		(1213) <=> (2133)	12133	1
(0220) <=> (2200)	02200	0		(1220) <=> (2200)	12200	0
(0220) <=> (2201)	02201	0		(1220) <=> (2201)	12201	0
(0220) <=> (2202)	02202	0		(1220) <=> (2202)	12202	0
(0220) <=> (2203)	02203	0		(1220) <=> (2203)	12203	0
(0221) <=> (2210)	02210	1		(1221) <=> (2210)	12210	1
(0221) <=> (2211)	02211	1		(1221) <=> (2211)	12211	1
(0221) <=> (2212)	02212	1		(1221) <=> (2212)	12212	1
(0221) <=> (2213)	02213	1		(1221) <=> (2213)	12213	1
(0222) <=> (2220)	02220	1		(1222) <=> (2220)	12220	1
(0222) <=> (2221)	02221	1		(1222) <=> (2221)	12221	1
(0222) <=> (2222)	02222	1		(1222) <=> (2222)	12222	1
(0222) <=> (2223)	02223	1		(1222) <=> (2223)	12223	1
(0223) <=> (2230)	02230	1		(1223) <=> (2230)	12230	1
(0223) <=> (2231)	02231	1		(1223) <=> (2231)	12231	1
(0223) <=> (2232)	02232	1		(1223) <=> (2232)	12232	1
(0223) <=> (2233)	02233	1		(1223) <=> (2233)	12233	1
(0230) <=> (2300)	02300	0		(1230) <=> (2300)	12300	0
(0230) <=> (2301)	02301	0		(1230) <=> (2301)	12301	0
(0230) <=> (2302)	02302	0		(1230) <=> (2302)	12302	0
(0230) <=> (2303)	02303	0		(1230) <=> (2303)	12303	0
(0231) <=> (2310)	02310	1		(1231) <=> (2310)	12310	1
(0231) <=> (2311)	02311	1		(1231) <=> (2311)	12311	1
(0231) <=> (2312)	02312	1		(1231) <=> (2312)	12312	1
(0231) <=> (2313)	02313	1		(1231) <=> (2313)	12313	1
(0232) <=> (2320)	02320	1		(1232) <=> (2320)	12320	1
(0232) <=> (2321)	02321	1		(1232) <=> (2321)	12321	1
(0232) <=> (2322)	02322	1		(1232) <=> (2322)	12322	1
(0232) <=> (2323)	02323	1		(1232) <=> (2323)	12323	1
(0233) <=> (2330)	02330	1		(1233) <=> (2330)	12330	1
(0233) <=> (2331)	02331	1		(1233) <=> (2331)	12331	1
(0233) <=> (2332)	02332	1		(1233) <=> (2332)	12332	1
(0233) <=> (2333)	02333	1		(1233) <=> (2333)	12333	1
(0300) <=> (3000)	03000	0		(1300) <=> (3000)	13000	0
(0300) <=> (3001)	03001	0		(1300) <=> (3001)	13001	0
(0300) <=> (3002)	03002	0		(1300) <=> (3002)	13002	0
(0300) <=> (3003)	03003	0		(1300) <=> (3003)	13003	0
(0301) <=> (3010)	03010	2		(1301) <=> (3010)	13010	2
(0301) <=> (3011)	03011	2		(1301) <=> (3011)	13011	2
(0301) <=> (3012)	03012	2		(1301) <=> (3012)	13012	2
(0301) <=> (3013)	03013	2		(1301) <=> (3013)	13013	2

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(0302) <> (3020)	03020	2		(1302) <> (3020)	13020	2
(0302) <> (3021)	03021	2		(1302) <> (3021)	13021	2
(0302) <> (3022)	03022	2		(1302) <> (3022)	13022	2
(0302) <> (3023)	03023	2		(1302) <> (3023)	13023	2
(0303) <> (3030)	03030	2		(1303) <> (3030)	13030	2
(0303) <> (3031)	03031	2		(1303) <> (3031)	13031	2
(0303) <> (3032)	03032	2		(1303) <> (3032)	13032	2
(0303) <> (3033)	03033	2		(1303) <> (3033)	13033	2
(0310) <> (3100)	03100	0		(1310) <> (3100)	13100	0
(0310) <> (3101)	03101	0		(1310) <> (3101)	13101	0
(0310) <> (3102)	03102	0		(1310) <> (3102)	13102	0
(0310) <> (3103)	03103	0		(1310) <> (3103)	13103	0
(0311) <> (3110)	03110	1		(1311) <> (3110)	13110	1
(0311) <> (3111)	03111	1		(1311) <> (3111)	13111	1
(0311) <> (3112)	03112	1		(1311) <> (3112)	13112	1
(0311) <> (3113)	03113			(1311) <> (3113)	13113	1
(0312) <> (3120)	03120	1		(1312) <> (3120)	13120	1
(0312) <> (3121)	03121	1		(1312) <> (3121)	13121	1
(0312) <> (3122)	03122	1		(1312) <> (3122)	13122	1
(0312) <> (3123)	03123	1		(1312) <> (3123)	13123	1
(0313) <> (3130)	03130	1		(1313) <> (3130)	13130	1
(0313) <> (3131)	03131	1		(1313) <> (3131)	13131	1
(0313) <> (3132)	03132	1		(1313) <> (3132)	13132	1
(0313) <> (3133)	03133	1		(1313) <> (3133)	13133	1
(0320) <> (3200)	03200	0		(1320) <> (3200)	13200	0
(0320) <> (3201)	03201	0		(1320) <> (3201)	13201	0
(0320) <> (3202)	03202	0		(1320) <> (3202)	13202	0
(0320) <> (3203)	03203	0		(1320) <> (3203)	13203	0
(0321) <> (3210)	03210	1		(1321) <> (3210)	13210	1
(0321) <> (3211)	03211	1		(1321) <> (3211)	13211	1
(0321) <> (3212)	03212	1		(1321) <> (3212)	13212	1
(0321) <> (3213)	03213	1		(1321) <> (3213)	13213	1
(0322) <> (3220)	03220	1		(1322) <> (3220)	13220	1
(0322) <> (3221)	03221	1		(1322) <> (3221)	13221	1
(0322) <> (3222)	03222	1		(1322) <> (3222)	13222	1
(0322) <> (3223)	03223	1		(1322) <> (3223)	13223	1
(0323) <> (3230)	03230	1		(1323) <> (3230)	13230	1
(0323) <> (3231)	03231	1		(1323) <> (3231)	13231	1
(0323) <> (3232)	03232	1		(1323) <> (3232)	13232	1
(0323) <> (3233)	03233	1		(1323) <> (3233)	13233	1
(0330) <> (3300)	03300	0		(1330) <> (3300)	13300	0
(0330) <> (3301)	03301	0		(1330) <> (3301)	13301	0
(0330) <> (3302)	03302	0		(1330) <> (3302)	13302	0
(0330) <> (3303)	03303	0		(1330) <> (3303)	13303	0
(0331) <> (3310)	03310	1		(1331) <> (3310)	13310	1
(0331) <> (3311)	03311	1		(1331) <> (3311)	13311	1
(0331) <> (3312)	03312	1		(1331) <> (3312)	13312	1
(0331) <> (3313)	03313	1		(1331) <> (3313)	13313	1
(0332) <> (3320)	03320	1		(1332) <> (3320)	13320	1
(0332) <> (3321)	03321	1		(1332) <> (3321)	13321	1

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1	Transiciones	G. 0	G. 1
(0332) <=> (3322)	03322	1	(1332) <=> (3322)	13322	1
(0332) <=> (3323)	03323	1	(1332) <=> (3323)	13323	1
(0333) <=> (3330)	03330	1	(1333) <=> (3330)	13330	1
(0333) <=> (3331)	03331	1	(1333) <=> (3331)	13331	1
(0333) <=> (3332)	03332	1	(1333) <=> (3332)	13332	1
(0333) <=> (3333)	03333	1	(1333) <=> (3333)	13333	1
(2000) <=> (0000)	20000	3	(3000) <=> (0000)	30000	3
(2000) <=> (0001)	20001	3	(3000) <=> (0001)	30001	3
(2000) <=> (0002)	20002	3	(3000) <=> (0002)	30002	3
(2000) <=> (0003)	20003	3	(3000) <=> (0003)	30003	3
(2001) <=> (0010)	20010	3	(3001) <=> (0010)	30010	3
(2001) <=> (0011)	20011	3	(3001) <=> (0011)	30011	3
(2001) <=> (0012)	20012	3	(3001) <=> (0012)	30012	3
(2001) <=> (0013)	20013	3	(3001) <=> (0013)	30013	3
(2002) <=> (0020)	20020	3	(3002) <=> (0020)	30020	3
(2002) <=> (0021)	20021	3	(3002) <=> (0021)	30021	3
(2002) <=> (0022)	20022	3	(3002) <=> (0022)	30022	3
(2002) <=> (0023)	20023	3	(3002) <=> (0023)	30023	3
(2003) <=> (0030)	20030	3	(3003) <=> (0030)	30030	3
(2003) <=> (0031)	20031	3	(3003) <=> (0031)	30031	3
(2003) <=> (0032)	20032	3	(3003) <=> (0032)	30032	3
(2003) <=> (0033)	20033	3	(3003) <=> (0033)	30033	3
(2010) <=> (0100)	20100	0	(3010) <=> (0100)	30100	0
(2010) <=> (0101)	20101	0	(3010) <=> (0101)	30101	0
(2010) <=> (0102)	20102	0	(3010) <=> (0102)	30102	0
(2010) <=> (0103)	20103	0	(3010) <=> (0103)	30103	0
(2011) <=> (0110)	20110	1	(3011) <=> (0110)	30110	1
(2011) <=> (0111)	20111	1	(3011) <=> (0111)	30111	1
(2011) <=> (0112)	20112	1	(3011) <=> (0112)	30112	1
(2011) <=> (0113)	20113	1	(3011) <=> (0113)	30113	1
(2012) <=> (0120)	20120	1	(3012) <=> (0120)	30120	1
(2012) <=> (0121)	20121	1	(3012) <=> (0121)	30121	1
(2012) <=> (0122)	20122	1	(3012) <=> (0122)	30122	1
(2012) <=> (0123)	20123	1	(3012) <=> (0123)	30123	1
(2013) <=> (0130)	20130	1	(3013) <=> (0130)	30130	1
(2013) <=> (0131)	20131	1	(3013) <=> (0131)	30131	1
(2013) <=> (0132)	20132	1	(3013) <=> (0132)	30132	1
(2013) <=> (0133)	20133	1	(3013) <=> (0133)	30133	1
(2020) <=> (0200)	20200	0	(3020) <=> (0200)	30200	0
(2020) <=> (0201)	20201	0	(3020) <=> (0201)	30201	0
(2020) <=> (0202)	20202	0	(3020) <=> (0202)	30202	0
(2020) <=> (0203)	20203	0	(3020) <=> (0203)	30203	0
(2021) <=> (0210)	20210	1	(3021) <=> (0210)	30210	1
(2021) <=> (0211)	20211	1	(3021) <=> (0211)	30211	1
(2021) <=> (0212)	20212	1	(3021) <=> (0212)	30212	1
(2021) <=> (0213)	20213	1	(3021) <=> (0213)	30213	1
(2022) <=> (0220)	20220	1	(3022) <=> (0220)	30220	1
(2022) <=> (0221)	20221	1	(3022) <=> (0221)	30221	1
(2022) <=> (0222)	20222	1	(3022) <=> (0222)	30222	1
(2022) <=> (0223)	20223	1	(3022) <=> (0223)	30223	1

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(2023) <> (0230)	20230	1		(3023) <> (0230)	30230	1
(2023) <> (0231)	20231	1		(3023) <> (0231)	30231	1
(2023) <> (0232)	20232	1		(3023) <> (0232)	30232	1
(2023) <> (0233)	20233	1		(3023) <> (0233)	30233	1
(2030) <> (0300)	20300	0		(3030) <> (0300)	30300	0
(2030) <> (0301)	20301	0		(3030) <> (0301)	30301	0
(2030) <> (0302)	20302	0		(3030) <> (0302)	30302	0
(2030) <> (0303)	20303	0		(3030) <> (0303)	30303	0
(2031) <> (0310)	20310	1		(3031) <> (0310)	30310	1
(2031) <> (0311)	20311	1		(3031) <> (0311)	30311	1
(2031) <> (0312)	20312	1		(3031) <> (0312)	30312	1
(2031) <> (0313)	20313	1		(3031) <> (0313)	30313	1
(2032) <> (0320)	20320	1		(3032) <> (0320)	30320	1
(2032) <> (0321)	20321	1		(3032) <> (0321)	30321	1
(2032) <> (0322)	20322	1		(3032) <> (0322)	30322	1
(2032) <> (0323)	20323	1		(3032) <> (0323)	30323	1
(2033) <> (0330)	20330	1		(3033) <> (0330)	30330	1
(2033) <> (0331)	20331	1		(3033) <> (0331)	30331	1
(2033) <> (0332)	20332	1		(3033) <> (0332)	30332	1
(2033) <> (0333)	20333	1		(3033) <> (0333)	30333	1
(2100) <> (1000)	21000	2		(3100) <> (1000)	31000	2
(2100) <> (1001)	21001	2		(3100) <> (1001)	31001	2
(2100) <> (1002)	21002	2		(3100) <> (1002)	31002	2
(2100) <> (1003)	21003	2		(3100) <> (1003)	31003	2
(2101) <> (1010)	21010	2		(3101) <> (1010)	31010	2
(2101) <> (1011)	21011	2		(3101) <> (1011)	31011	2
(2101) <> (1012)	21012	2		(3101) <> (1012)	31012	2
(2101) <> (1013)	21013	2		(3101) <> (1013)	31013	2
(2102) <> (1020)	21020	2		(3102) <> (1020)	31020	2
(2102) <> (1021)	21021	2		(3102) <> (1021)	31021	2
(2102) <> (1022)	21022	2		(3102) <> (1022)	31022	2
(2102) <> (1023)	21023	2		(3102) <> (1023)	31023	2
(2103) <> (1030)	21030	2		(3103) <> (1030)	31030	2
(2103) <> (1031)	21031	2		(3103) <> (1031)	31031	2
(2103) <> (1032)	21032	2		(3103) <> (1032)	31032	2
(2103) <> (1033)	21033	2		(3103) <> (1033)	31033	2
(2110) <> (1100)	21100	0		(3110) <> (1100)	31100	0
(2110) <> (1101)	21101	0		(3110) <> (1101)	31101	0
(2110) <> (1102)	21102	0		(3110) <> (1102)	31102	0
(2110) <> (1103)	21103	0		(3110) <> (1103)	31103	0
(2111) <> (1110)	21110	1		(3111) <> (1110)	31110	1
(2111) <> (1111)	21111	1		(3111) <> (1111)	31111	1
(2111) <> (1112)	21112	1		(3111) <> (1112)	31112	1
(2111) <> (1113)	21113	1		(3111) <> (1113)	31113	1
(2112) <> (1120)	21120	1		(3112) <> (1120)	31120	1
(2112) <> (1121)	21121	1		(3112) <> (1121)	31121	1
(2112) <> (1122)	21122	1		(3112) <> (1122)	31122	1
(2112) <> (1123)	21123	1		(3112) <> (1123)	31123	1
(2113) <> (1130)	21130	1		(3113) <> (1130)	31130	1
(2113) <> (1131)	21131	1		(3113) <> (1131)	31131	1

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(2113) <=> (1132)	21132	1		(3113) <=> (1132)	31132	1
(2113) <=> (1133)	21133	1		(3113) <=> (1133)	31133	1
(2120) <=> (1200)	21200	0		(3120) <=> (1200)	31200	0
(2120) <=> (1201)	21201	0		(3120) <=> (1201)	31201	0
(2120) <=> (1202)	21202	0		(3120) <=> (1202)	31202	0
(2120) <=> (1203)	21203	0		(3120) <=> (1203)	31203	0
(2121) <=> (1210)	21210	1		(3121) <=> (1210)	31210	1
(2121) <=> (1211)	21211	1		(3121) <=> (1211)	31211	1
(2121) <=> (1212)	21212	1		(3121) <=> (1212)	31212	1
(2121) <=> (1213)	21213	1		(3121) <=> (1213)	31213	1
(2122) <=> (1220)	21220	1		(3122) <=> (1220)	31220	1
(2122) <=> (1221)	21221	1		(3122) <=> (1221)	31221	1
(2122) <=> (1222)	21222	1		(3122) <=> (1222)	31222	1
(2122) <=> (1223)	21223	1		(3122) <=> (1223)	31223	1
(2123) <=> (1230)	21230	1		(3123) <=> (1230)	31230	1
(2123) <=> (1231)	21231	1		(3123) <=> (1231)	31231	1
(2123) <=> (1232)	21232	1		(3123) <=> (1232)	31232	1
(2123) <=> (1233)	21233	1		(3123) <=> (1233)	31233	1
(2130) <=> (1300)	21300	0		(3130) <=> (1300)	31300	0
(2130) <=> (1301)	21301	0		(3130) <=> (1301)	31301	0
(2130) <=> (1302)	21302	0		(3130) <=> (1302)	31302	0
(2130) <=> (1303)	21303	0		(3130) <=> (1303)	31303	0
(2131) <=> (1310)	21310	1		(3131) <=> (1310)	31310	1
(2131) <=> (1311)	21311	1		(3131) <=> (1311)	31311	1
(2131) <=> (1312)	21312	1		(3131) <=> (1312)	31312	1
(2131) <=> (1313)	21313	1		(3131) <=> (1313)	31313	1
(2132) <=> (1320)	21320	1		(3132) <=> (1320)	31320	1
(2132) <=> (1321)	21321	1		(3132) <=> (1321)	31321	1
(2132) <=> (1322)	21322	1		(3132) <=> (1322)	31322	1
(2132) <=> (1323)	21323	1		(3132) <=> (1323)	31323	1
(2133) <=> (1330)	21330	1		(3133) <=> (1330)	31330	1
(2133) <=> (1331)	21331	1		(3133) <=> (1331)	31331	1
(2133) <=> (1332)	21332	1		(3133) <=> (1332)	31332	1
(2133) <=> (1333)	21333	1		(3133) <=> (1333)	31333	1
(2200) <=> (2000)	22000	0		(3200) <=> (2000)	32000	0
(2200) <=> (2001)	22001	0		(3200) <=> (2001)	32001	0
(2200) <=> (2002)	22002	0		(3200) <=> (2002)	32002	0
(2200) <=> (2003)	22003	0		(3200) <=> (2003)	32003	0
(2201) <=> (2010)	22010	2		(3201) <=> (2010)	32010	2
(2201) <=> (2011)	22011	2		(3201) <=> (2011)	32011	2
(2201) <=> (2012)	22012	2		(3201) <=> (2012)	32012	2
(2201) <=> (2013)	22013	2		(3201) <=> (2013)	32013	2
(2202) <=> (2020)	22020	2		(3202) <=> (2020)	32020	2
(2202) <=> (2021)	22021	2		(3202) <=> (2021)	32021	2
(2202) <=> (2022)	22022	2		(3202) <=> (2022)	32022	2
(2202) <=> (2023)	22023	2		(3202) <=> (2023)	32023	2
(2203) <=> (2030)	22030	2		(3203) <=> (2030)	32030	2
(2203) <=> (2031)	22031	2		(3203) <=> (2031)	32031	2
(2203) <=> (2032)	22032	2		(3203) <=> (2032)	32032	2
(2203) <=> (2033)	22033	2		(3203) <=> (2033)	32033	2

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(2210) <=> (2100)	22100	0		(3210) <=> (2100)	32100	0
(2210) <=> (2101)	22101	0		(3210) <=> (2101)	32101	0
(2210) <=> (2102)	22102	0		(3210) <=> (2102)	32102	0
(2210) <=> (2103)	22103	0		(3210) <=> (2103)	32103	0
(2211) <=> (2110)	22110	1		(3211) <=> (2110)	32110	1
(2211) <=> (2111)	22111	1		(3211) <=> (2111)	32111	1
(2211) <=> (2112)	22112	1		(3211) <=> (2112)	32112	1
(2211) <=> (2113)	22113	1		(3211) <=> (2113)	32113	1
(2212) <=> (2120)	22120	1		(3212) <=> (2120)	32120	1
(2212) <=> (2121)	22121	1		(3212) <=> (2121)	32121	1
(2212) <=> (2122)	22122	1		(3212) <=> (2122)	32122	1
(2212) <=> (2123)	22123	1		(3212) <=> (2123)	32123	1
(2213) <=> (2130)	22130	1		(3213) <=> (2130)	32130	1
(2213) <=> (2131)	22131	1		(3213) <=> (2131)	32131	1
(2213) <=> (2132)	22132	1		(3213) <=> (2132)	32132	1
(2213) <=> (2133)	22133	1		(3213) <=> (2133)	32133	1
(2220) <=> (2200)	22200	0		(3220) <=> (2200)	32200	0
(2220) <=> (2201)	22201	0		(3220) <=> (2201)	32201	0
(2220) <=> (2202)	22202	0		(3220) <=> (2202)	32202	0
(2220) <=> (2203)	22203	0		(3220) <=> (2203)	32203	0
(2221) <=> (2210)	22210	1		(3221) <=> (2210)	32210	1
(2221) <=> (2211)	22211	1		(3221) <=> (2211)	32211	1
(2221) <=> (2212)	22212	1		(3221) <=> (2212)	32212	1
(2221) <=> (2213)	22213	1		(3221) <=> (2213)	32213	1
(2222) <=> (2220)	22220	1		(3222) <=> (2220)	32220	1
(2222) <=> (2221)	22221	1		(3222) <=> (2221)	32221	1
(2222) <=> (2222)	22222	1		(3222) <=> (2222)	32222	1
(2222) <=> (2223)	22223	1		(3222) <=> (2223)	32223	1
(2223) <=> (2230)	22230	1		(3223) <=> (2230)	32230	1
(2223) <=> (2231)	22231	1		(3223) <=> (2231)	32231	1
(2223) <=> (2232)	22232	1		(3223) <=> (2232)	32232	1
(2223) <=> (2233)	22233	1		(3223) <=> (2233)	32233	1
(2230) <=> (2300)	22300	0		(3230) <=> (2300)	32300	0
(2230) <=> (2301)	22301	0		(3230) <=> (2301)	32301	0
(2230) <=> (2302)	22302	0		(3230) <=> (2302)	32302	0
(2230) <=> (2303)	22303	0		(3230) <=> (2303)	32303	0
(2231) <=> (2310)	22310	1		(3231) <=> (2310)	32310	1
(2231) <=> (2311)	22311	1		(3231) <=> (2311)	32311	1
(2231) <=> (2312)	22312	1		(3231) <=> (2312)	32312	1
(2231) <=> (2313)	22313	1		(3231) <=> (2313)	32313	1
(2232) <=> (2320)	22320	1		(3232) <=> (2320)	32320	1
(2232) <=> (2321)	22321	1		(3232) <=> (2321)	32321	1
(2232) <=> (2322)	22322	1		(3232) <=> (2322)	32322	1
(2232) <=> (2323)	22323	1		(3232) <=> (2323)	32323	1
(2233) <=> (2330)	22330	1		(3233) <=> (2330)	32330	1
(2233) <=> (2331)	22331	1		(3233) <=> (2331)	32331	1
(2233) <=> (2332)	22332	1		(3233) <=> (2332)	32332	1
(2233) <=> (2333)	22333	1		(3233) <=> (2333)	32333	1
(2300) <=> (3000)	23000	0		(3300) <=> (3000)	33000	0
(2300) <=> (3001)	23001	0		(3300) <=> (3001)	33001	0

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(2300) <> (3002)	23002	0		(3300) <> (3002)	33002	0
(2300) <> (3003)	23003	0		(3300) <> (3003)	33003	0
(2301) <> (3010)	23010	2		(3301) <> (3010)	33010	2
(2301) <> (3011)	23011	2		(3301) <> (3011)	33011	2
(2301) <> (3012)	23012	2		(3301) <> (3012)	33012	2
(2301) <> (3013)	23013	2		(3301) <> (3013)	33013	2
(2302) <> (3020)	23020	2		(3302) <> (3020)	33020	2
(2302) <> (3021)	23021	2		(3302) <> (3021)	33021	2
(2302) <> (3022)	23022	2		(3302) <> (3022)	33022	2
(2302) <> (3023)	23023	2		(3302) <> (3023)	33023	2
(2303) <> (3030)	23030	2		(3303) <> (3030)	33030	2
(2303) <> (3031)	23031	2		(3303) <> (3031)	33031	2
(2303) <> (3032)	23032	2		(3303) <> (3032)	33032	2
(2303) <> (3033)	23033	2		(3303) <> (3033)	33033	2
(2310) <> (3100)	23100	0		(3310) <> (3100)	33100	0
(2310) <> (3101)	23101	0		(3310) <> (3101)	33101	0
(2310) <> (3102)	23102	0		(3310) <> (3102)	33102	0
(2310) <> (3103)	23103	0		(3310) <> (3103)	33103	0
(2311) <> (3110)	23110	1		(3311) <> (3110)	33110	1
(2311) <> (3111)	23111	1		(3311) <> (3111)	33111	1
(2311) <> (3112)	23112	1		(3311) <> (3112)	33112	1
(2311) <> (3113)	23113	1		(3311) <> (3113)	33113	1
(2312) <> (3120)	23120	1		(3312) <> (3120)	33120	1
(2312) <> (3121)	23121	1		(3312) <> (3121)	33121	1
(2312) <> (3122)	23122	1		(3312) <> (3122)	33122	1
(2312) <> (3123)	23123	1		(3312) <> (3123)	33123	1
(2313) <> (3130)	23130	1		(3313) <> (3130)	33130	1
(2313) <> (3131)	23131	1		(3313) <> (3131)	33131	1
(2313) <> (3132)	23132	1		(3313) <> (3132)	33132	1
(2313) <> (3133)	23133	1		(3313) <> (3133)	33133	1
(2320) <> (3200)	23200	0		(3320) <> (3200)	33200	0
(2320) <> (3201)	23201	0		(3320) <> (3201)	33201	0
(2320) <> (3202)	23202	0		(3320) <> (3202)	33202	0
(2320) <> (3203)	23203	0		(3320) <> (3203)	33203	0
(2321) <> (3210)	23210	1		(3321) <> (3210)	33210	1
(2321) <> (3211)	23211	1		(3321) <> (3211)	33211	1
(2321) <> (3212)	23212	1		(3321) <> (3212)	33212	1
(2321) <> (3213)	23213	1		(3321) <> (3213)	33213	1
(2322) <> (3220)	23220	1		(3322) <> (3220)	33220	1
(2322) <> (3221)	23221	1		(3322) <> (3221)	33221	1
(2322) <> (3222)	23222	1		(3322) <> (3222)	33222	1
(2322) <> (3223)	23223	1		(3322) <> (3223)	33223	1
(2323) <> (3230)	23230	1		(3323) <> (3230)	33230	1
(2323) <> (3231)	23231	1		(3323) <> (3231)	33231	1
(2323) <> (3232)	23232	1		(3323) <> (3232)	33232	1
(2323) <> (3233)	23233	1		(3323) <> (3233)	33233	1
(2330) <> (3300)	23300	0		(3330) <> (3300)	33300	0
(2330) <> (3301)	23301	0		(3330) <> (3301)	33301	0
(2330) <> (3302)	23302	0		(3330) <> (3302)	33302	0
(2330) <> (3303)	23303	0		(3330) <> (3303)	33303	0

Figura 5.9: Continuación...

Transiciones	G. 0	G. 1		Transiciones	G. 0	G. 1
(2331) <> (3310)	23310	1		(3331) <> (3310)	33310	1
(2331) <> (3311)	23311	1		(3331) <> (3311)	33311	1
(2331) <> (3312)	23312	1		(3331) <> (3312)	33312	1
(2331) <> (3313)	23313	1		(3331) <> (3313)	33313	1
(2332) <> (3320)	23320	1		(3332) <> (3320)	33320	1
(2332) <> (3321)	23321	1		(3332) <> (3321)	33321	1
(2332) <> (3322)	23322	1		(3332) <> (3322)	33322	1
(2332) <> (3323)	23323	1		(3332) <> (3323)	33323	1
(2333) <> (3330)	23330	1		(3333) <> (3330)	33330	1
(2333) <> (3331)	23331	1		(3333) <> (3331)	33331	1
(2333) <> (3332)	23332	1		(3333) <> (3332)	33332	1
(2333) <> (3333)	23333	1		(3333) <> (3333)	33333	1

Figura 5.9: Continuación...

5.3.1 Construcción de los diagramas

En la primer columna de izquierda a derecha de la figura 5.9 se muestran todas y cada una de las conexiones entre los nodos del diagrama de Bruijn de LCATRAFFICFLOWVMAX2. Estos nodos están representados por vecindades parciales de cuatro células, las vecindades parciales de la izquierda representan a los nodos fuente mientras que las vecindades parciales de la derecha representan a los nodos destino. Como se mencionó anteriormente, el incremento en el número de estados y en el radio de vecindad de un autómata celular hace que su tamaño crezca de manera exponencial. Por esta razón su nivel de complejidad también crece de manera exponencial y por consecuencia el análisis del mismo requiere una mayor cantidad de tiempo y esfuerzo.

La construcción del diagrama de Bruijn de LCATRAFFICFLOWVMAX2 es bastante laboriosa por los motivos ya expuestos, y aunque el programa NXLCAU lo proporciona de manera automática, lo muestra de forma desordenada, lo que hace prácticamente imposible analizarlo sin tener que invertir una buena cantidad de tiempo en darle forma legible. Por esta razón, se optó por construirlo de manera manual con el fin de llevar a cabo el análisis paso a paso. Por otra parte, en el caso del diagrama de subconjuntos no fue posible construirlo manualmente debido a que la cantidad de nodos es demasiado grande, es decir, el número de nodos que contiene el diagrama de subconjuntos de este autómata es dado por 2^{256}.

El diagrama de Bruijn de LCATRAFFICFLOWVMAX2 contiene un total de $4^{2(2)} = 256$ nodos y $4^{2(2)+1} = 1024$ aristas las cuales representan las 1024 vecindades. En la figura 5.10 se muestra solo un fragmento del diagrama de Bruijn construido.

Como se puede observar en la figura 5.10, es difícil ubicar los diferentes ciclos los cuales están todos contenidos en el diagrama debido al tamaño y la cantidad de aristas que se cruzan unas con otras. Por esta razón se buscó una forma más práctica de localizar los anillos que contiene el diagrama para verificar si las secuencias que generan tienen desplazamientos constantes, tal y como se planteó para la regla 184 y la regla 43. Una manera alterna a

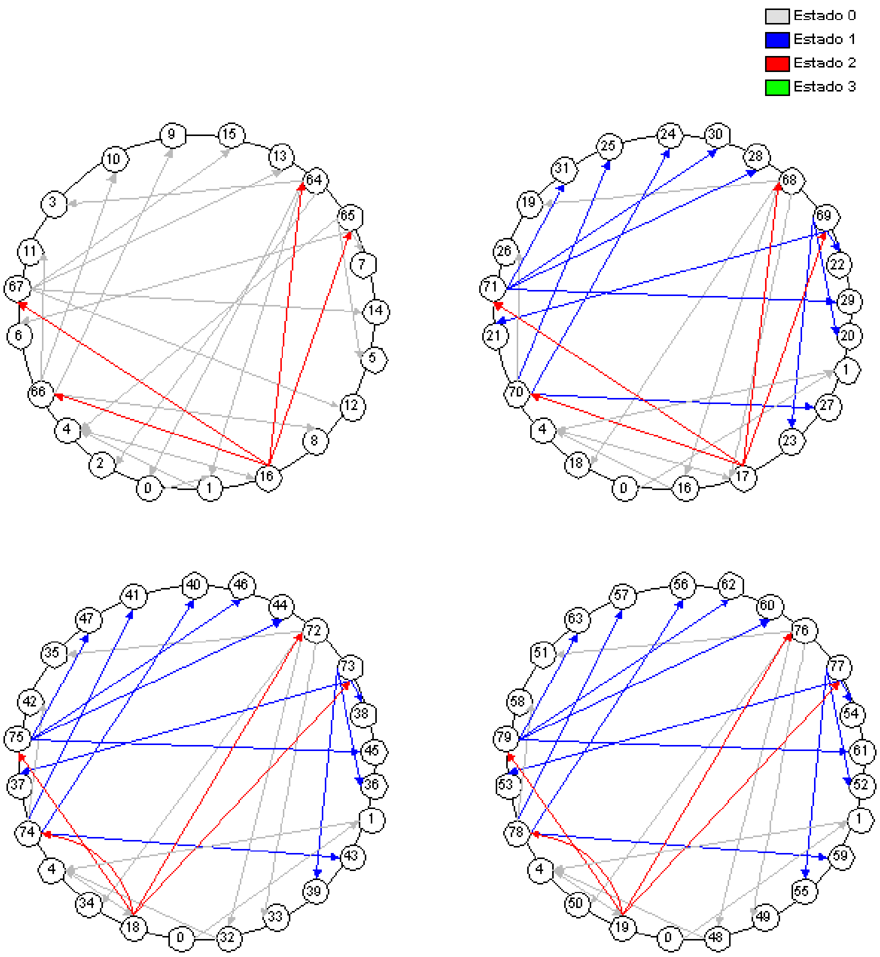

Figura 5.10: Fragmento del diagrama de Bruijn de LCATRAFFICFLOWVMAX2 el cual tiene un comportamiento equivalente al del modelo de Nagel con $V_{max} = 2$.

la representación típica del diagrama de Bruijn es dibujarlo como una especie de árbol, donde cada una de las vecindades parciales de la primer columna de la figura 5.9 tiene una representación decimal. Estas vecindades están ordenadas de forma ascendente de acuerdo al número de estados y a las posibles combinaciones. Así pues, la raíz del árbol sería el nodo etiquetado con el número 0, sus ramas son los nodos 1,2 y 3 puesto que de acuerdo a la figura 5.9 son los nodos con los que se conecta el nodo 0, además de la conexión hacía sí mismo. Siguiendo esta mecánica las ramas del nodo 1 serían los nodos 4,5,6 y 7 y las del nodo 2 los nodos 8,9,10 y 11.

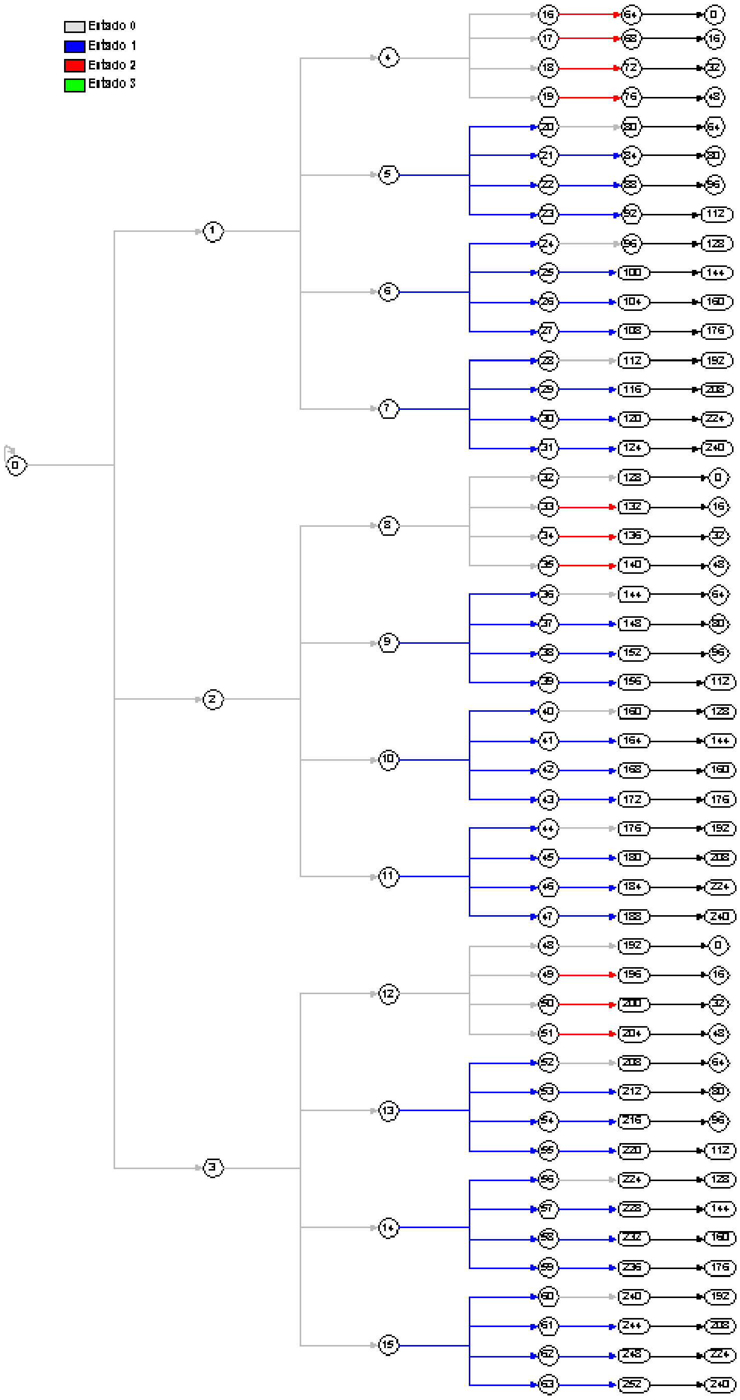

Figura 5.11: Árbol que representa las conexiones entre los nodos del diagrama de Bruijn. En esta figura el árbol está representado de manera resumida. Se puede observar que en algunos casos solo aparecen conectados los nodos que representan el inicio del rango de interconexión.

Como podemos notar, la conexión entre nodos sigue un patrón de 1 a 4 por la naturaleza del autómata que se está analizando y la forma en que se construyen los diagramas de Bruijn, es decir, cada nodo origen tiene 4 destinos y los orígenes y destinos están conectados en forma sucesiva de menor a mayor.

De esta manera, al llegar al nodo 63 tenemos que sus ramas son los nodos 252,253,254 y 255 con lo cual se llega al total de nodos del diagrama. De tal forma, al pasar al nodo 64 éste se ramificará o se conectará con los nodos 0,1,2 y 3 (los cuales ya serían hojas del árbol). Reiniciando nuevamente desde 0, con esto tenemos que cada 64 orígenes se repiten nuevamente los destinos con lo que se asegura la simetría del diagrama al tener cada nodo 4 aristas de salida y 4 aristas de llegada.

En la figura 5.11 se muestra el árbol ya elaborado de la manera antes descrita. En esta figura se representa el árbol de manera resumida por cuestiones de espacio. Por medio de este árbol es más fácil localizar los ciclos ya que sólamente hay que tomar como inicio del mismo algún nodo del árbol y seguir sus ramificaciones hasta encontrarlo nuevamente; si no es el caso, entonces la secuencia de nodos seleccionada no forma ningún ciclo. Como ejemplo de lo anterior está el ciclo formado de la siguiente manera: $0 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 35 \rightarrow 142 \rightarrow 56 \rightarrow 226 \rightarrow 136 \rightarrow 32 \rightarrow 128 \rightarrow 0$. Este mismo ciclo, como otros, se muestran en las subsecuentes figuras en la notación original (vecindades parciales de cuatro céluas) que se mostró en la figura 5.9, de tal forma que el ciclo equivalente expresado en la otra notación es: $0000 \rightarrow 0002 \rightarrow 0020 \rightarrow 0203 \rightarrow 2032 \rightarrow 0320 \rightarrow 3202 \rightarrow 2020 \rightarrow 0200 \rightarrow 2000 \rightarrow 0000$.

Una vez que se localiza un ciclo se verifica si la secuencia generada tiene desplazamientos constantes de todas sus células al aplicar la regla de evolución. Recordemos que la secuencia está constituida por los estados de evolución de cada una de las células centrales las cuales forman parte de las vecindades que se obtienen al efectuar la operación de superposición, la cual se ve reflejada gráficamente en la conexión entre los nodos. A continuación se muestran tanto ciclos que producen secuencias sin acarreo hacia la derecha como ciclos que producen secuencias con diferentes tipos de acarreo.

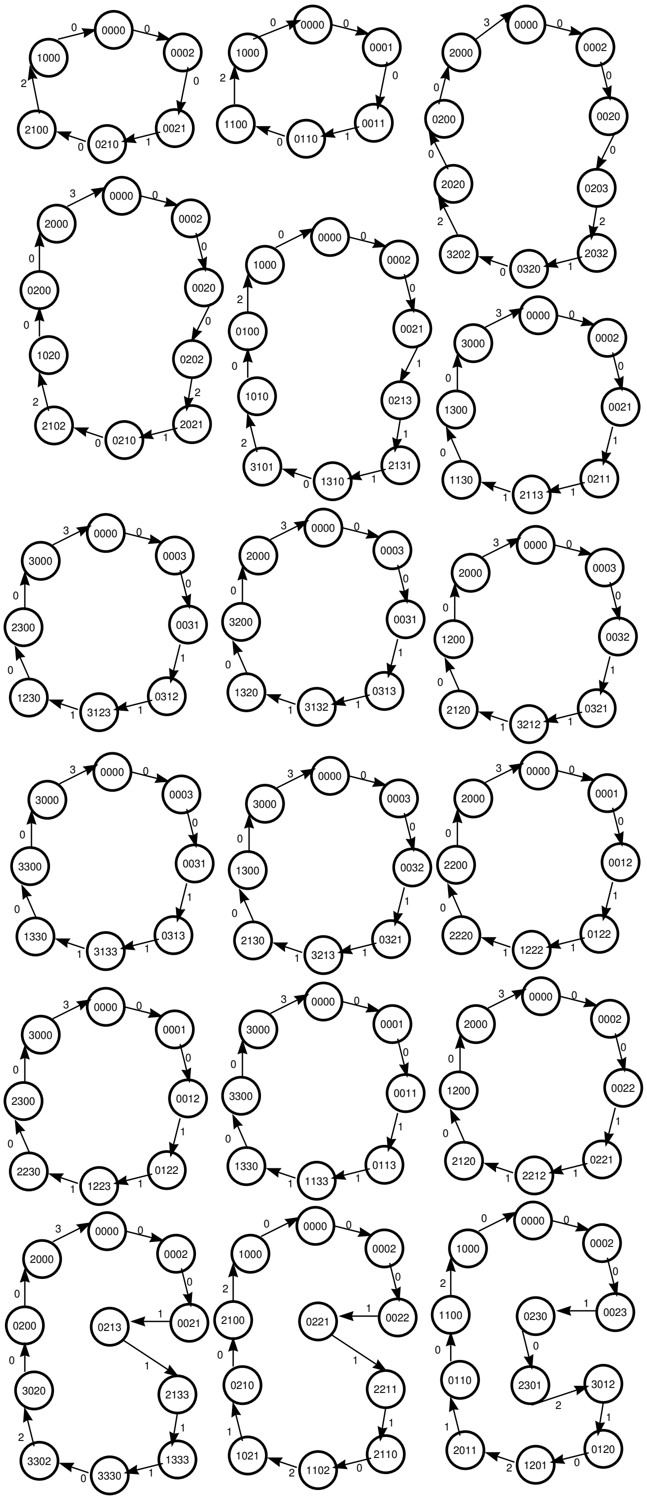

Figura 5.12: Anillos que generan secuencias en las cuales las células no tienen desplazamientos uniformes hacia la derecha.

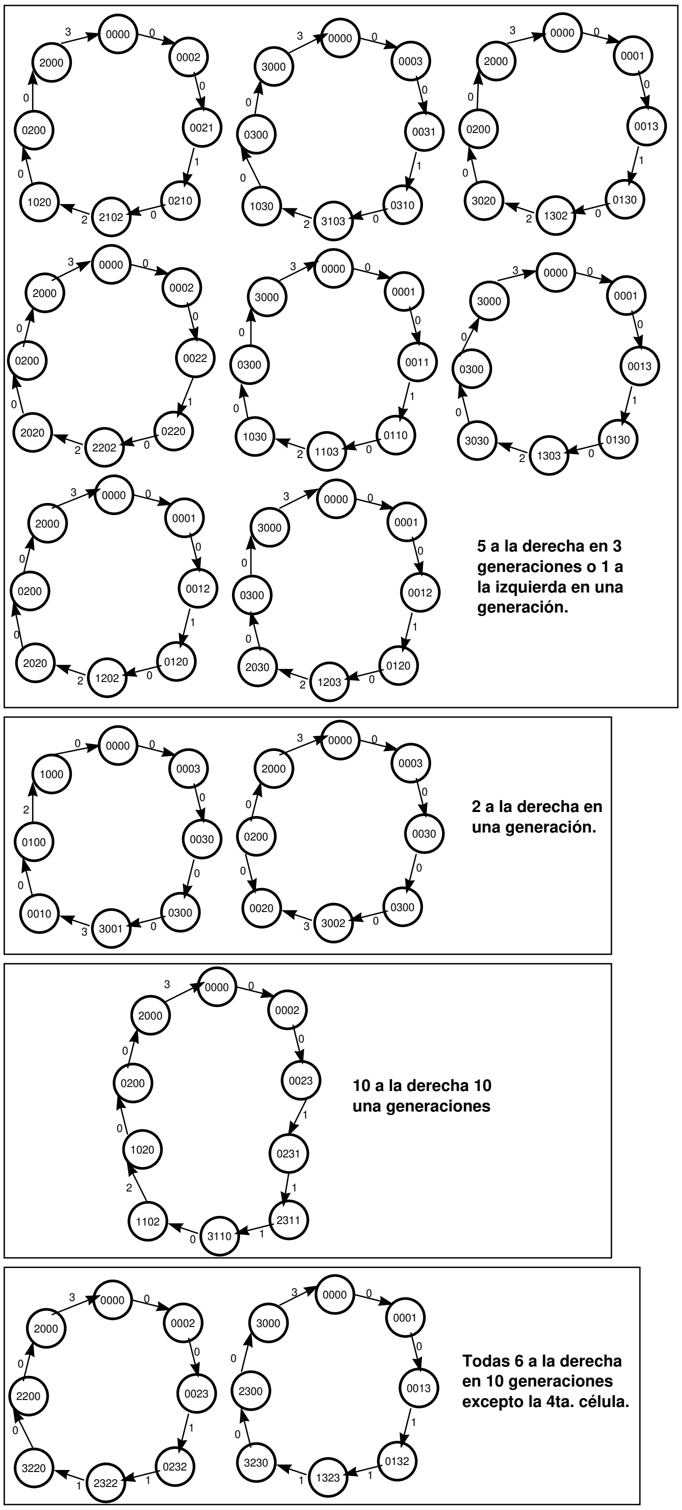

Figura 5.13: Anillos que generan secuencias en las cuales las células tienen desplazamientos uniformes hacia la derecha.

En la figura 5.12 se observan algunos de los anillos o ciclos contenidos en el diagrama de Bruijn que dan origen a diferentes secuencias las cuales no tienen un deplazamiento uniforme hacia la derecha de todas sus células a través de la evolución del autómata. Otro aspecto interesante que podemos resaltar y que se muestra también en la figura 5.12 es que anillos con diferentes estructuras generan la misma secuencia, es decir, podemos ubicar en el diagrama de Bruijn las diversas maneras en que es posible construir una determinada secuencia.

Aunque las secuencias mostradas en la figura 5.12 y muchas otras que se analizaron durante la investigación no tengan desplazamientos que permitan establecer con certeza cual será su comportamiento a través del tiempo, el análisis de las mismas nos permite encontrar otras secuencias que sí presentan diferentes acarreos, esto se da porque al analizar una secuencia lo que se hace es iterarla n veces hasta que el proceso entra en un ciclo, una vez que se cierra el ciclo se verifica si existe acarreo o no, si no existe de cualquier forma la secuencia que inicia el ciclo sí presenta un acarreo, aunque ésta es generada por un anillo distinto al que originalmente se está analizando.

Para ejemplificar lo anterior tomemos el anillo que produce la secuencia 00111003, al iterarla observamos que entra en un ciclo en la tercera generación el cual es de periodo 8, si tomamos ahora la secuencia que inicia el ciclo encontraremos que las células tienen un co-rrimiento de 8 sitios a la derecha en 8 generaciones, esta secuencia es producida por el anillo formado por los nodos $0202 \rightarrow 2023 \rightarrow 0230 \rightarrow 2302 \rightarrow 3020 \rightarrow 0200 \rightarrow 2002 \rightarrow 0020 \rightarrow 0202$. Es natural pensar que si tomamos una secuencia que inicia un ciclo el corrimiento de las células va a ser igual al periodo del ciclo. El problema es que nuestro enfoque es conforme al análisis de flujo de tránsito y lo que a nosotros nos interesa es predecir el avance de las células o autos a determinados intervalos de tiempo. Por esta razón, aunque las secuencias se repitan esto no asegura que el avance va a ser constante para todas las células. Lo que si podemos determinar a través de los ciclos es el avance de los autos a nivel individual.

Es importante mencionar que al trabajar con un autómata celular de más estados y bajo la perspectiva de análisis que tenemos el alterar la estructura de una secuencia implica que el corrimiento también va a ser alterado, a diferencia de las secuencias generadas por los anillos de los autómatas de tipo (2,1) mostradas en los capítulos anteriores, donde mencionamos que dado un acarreo, éste se mantiene constante para la secuencia que lo presenta o cualquier permutación de la misma.

Lo anterior se puede comprobar observando la figura 5.13 en la cual se muestran diferentes tipos de corrimientos, en la parte inferior izquierda podemos ver dos anillos que construyen secuencias las cuales tienen un desplazamiento de dos posiciones a la derecha en una generación, la secuencia producida por el anillo de la izquierda originalmente no presenta este tipo de desplazamiento, pero si hacemos una permutación colocando dos o tres ceros entre las células que están en los estados 2 y 3, entonces el corrimiento se produce. Otro punto importante es que la clasificación que hemos mostrado en las figuras 5.12 y 5.13 de los anillos con desplazamientos uniformes y no uniformes la hemos hecho en base a que básicamente los corrimientos que más nos interesa ubicar son hacia la derecha debido a la dinámica de los modelos para flujo de tránsito de autos, sin embargo, en prácticamente todos los anillos podemos observar un corrimiento de 1 sitio a la izquierda en una generación, esta característica es propia del fenómeno de tránsito vehicular y tiene su explicación en las ondas cinemáticas de acuerdo a la teoría de Lighthill-Whitham.

En la figura 5.14 se muestran algunos de los ciclos del LCATRAFFICFLOWVMAX2 obtenidos de las mismas secuencias analizadas para identificar acarreos, estos ciclos son de diferente longitud o periodo. En algunos ciclos de la figura 5.14 se muestran secuencias que tienen más de un ancestro, con lo que identificamos en el autómata celular características de sobreyectividad.

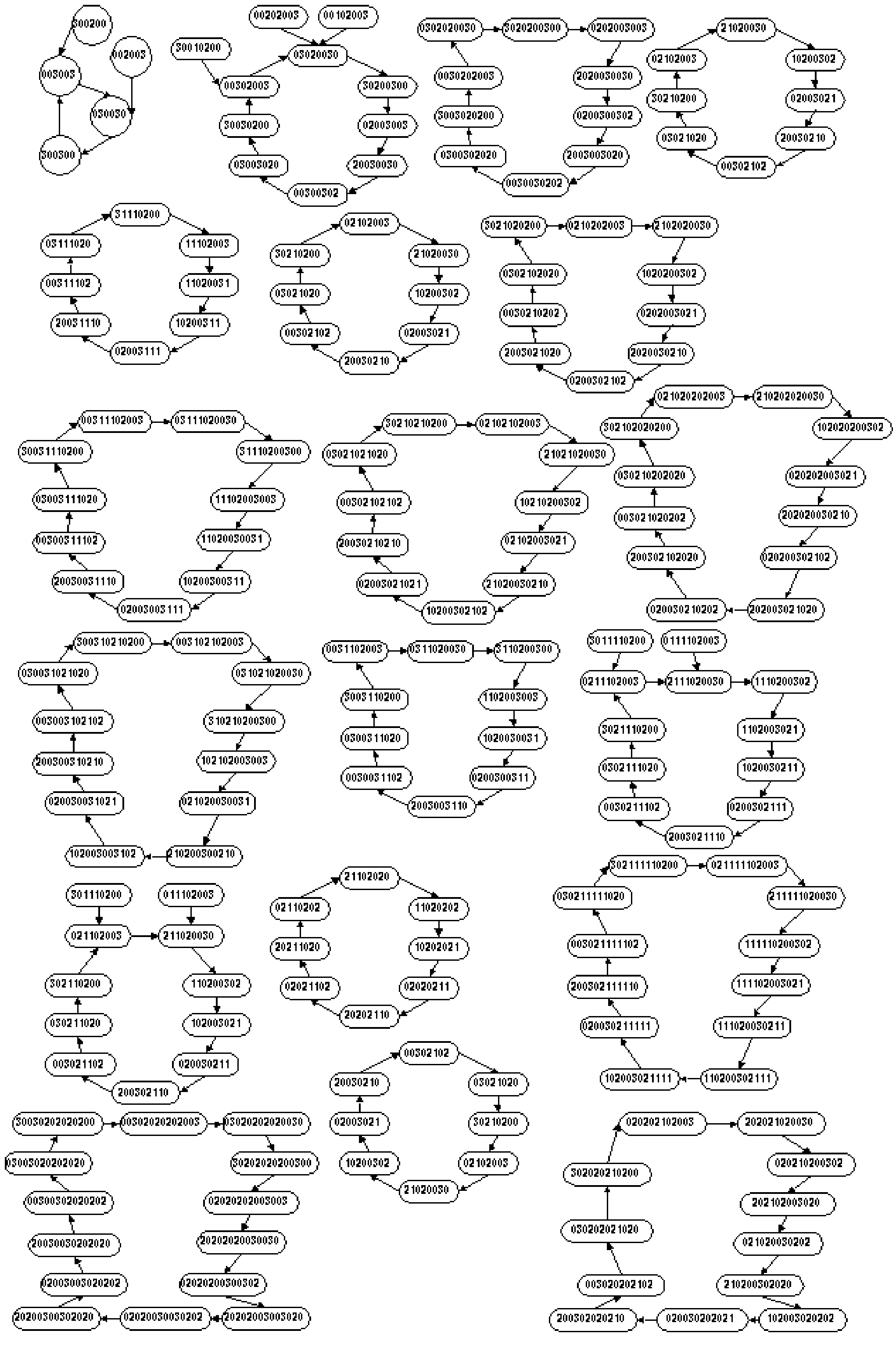

Figura 5.14: Algunos ciclos de diferentes periodos del LCATRAFFICFLOWVMAX2.

5.3.2 Comentarios

Mediante el tipo de análisis propuesto en este capítulo podemos observar el comportamiento a nivel macroscópico del autómata, podemos determinar el comportamiento que tendrán grupos de células o las células individualmente si el análisis lo realizamos a nivel microscópico. Por ejemplo, si tomamos la secuencia 21020030 mostrada en la figura 5.14 y suponemos, como lo mencionan algunos autores, que por cada sitio que avanza un auto recorre una distancia de 7.5 metros podemos determinar que todos los autos recorrerán una distancia de 60 metros en 8 pasos de tiempo con un promedio de velocidad $V_p = 1$ de acuerdo a la ecuación 4.1. Con esto podemos verificar que si $\rho \leq 0.5$ entonces $V_p = 1$, esto comprueba que el enfoque de análisis propuesto en esta tesis se ajusta a los parámetros establecidos por otros autores en sus ecuaciones para analizar el problema del tránsito de autos.

Por otro lado, el no haber construido el diagrama de subconjuntos no nos pemite determinar con certeza cuales son las configuraciones de tipo *Jardín del Edén*, aunque podemos sospechar que varias secuencias que analizamos pueden ser configuraciones de este tipo. La identificación de los *Jardines del Edén* nos puede servir para ubicar aquellas configuraciones que no se pueden construir a partir de otras configuraciones, esto se puede interpretar como todas aquellas situaciones que propician que el tránsito se altere de manera extraordinaria. Algunas de estas situaciones pueden ser: que ocurra algún accidente, que haya una marcha de personas, que choquen los autos, etcétera.

Capítulo 6

Conclusiones

El comportamiento del tránsito de autos representa un difícil problema en cuanto al análisis que hay que realizar para pretender caracterizarlo. Existen muchos trabajos de investigación en este sentido, orientados hacia diferentes puntos con el fin de abarcar el mayor número de aspectos posibles involucrados en este sistema complejo.

Unos de los objetivos de este trabajo de investigación es el de poder aportar un enfoque de análisis, que en un determinado momento pudiera ser útil si se emprendiera un proyecto de investigación para caracterizar el comportamiento del tránsito de autos de alguna ciudad de la República Mexicana. Este tipo de proyecto evidentemente sería mucho más extenso y requeriría de varias personas para trabajar en él. Otro objetivo, que no es excluyente del anterior, es el de poder aportar elementos que apoyen y fortalezcan el desarrollo de la investigación sobre flujo de tráfico.

6.1 Resultados obtenidos

Se analizaron cuatro autómatas celulares que de alguna manera reproducen el comportamiento del tránsito de autos, se incorporaron herramientas gráficas para analizar dichos autómatas, se propuso una forma alterna de identificar los anillos contenidos en diagramas de Bruijn muy grandes a partir de la construcción de una especie de árbol balanceado y se planteó la compatibilidad que existe entre los resultados que se obtienen aplicando la mecánica de análisis propuesta en esta tesis y los que se obtienen mediante los métodos que ya están bien establecidos.

6.2 Programa ilustrativo de LCATRAFFICFLOWVMAX2

Se desarrolló un programa computacional en PROGRESS versión 8.0 que ilustra el comportamiento de LCATRAFFICFLOWVMAX2. Este programa tiene una estructura parecida al applet que se encuentra disponible en [76] y del cual se muestra la pantalla principal en la sección 2.5.

Básicamente, el programa consta de seis opciones. Se puede visualizar la evolución del autómata a través de un arreglo o configuración pequeña o grande, según sea la seleccion del usuario. El usuario puede generar una configuración inicial aleatoria o la puede especificar célula por célula.

Otra caracteristica del programa es que una vez que da inicio la evolución del autómata, el usuario puede detenerla y reiniciarla en cualquier momento. Esto es útil si el usuario quiere verificar a que estado va a evolucionar cada célula en la siguiente generación. Ademas, en el margen derecho se van mostrando la velocidad y flujo promedios, así como una gráfica de los mismos en la parte inferior. Este despliegue se hace por etapa, paso de tiempo o generación durante la evolución del autómata celular. Una vez que concluye la evolución, aparecen en el margen izquierdo la velocidad y flujo promedios globales, junto con la densidad. A continuación se muestran las principales pantallas que componen el programa desarrollado en esta tesis para ilustrar el comportamiento de LCATRAFFICFLOWVMAX2.

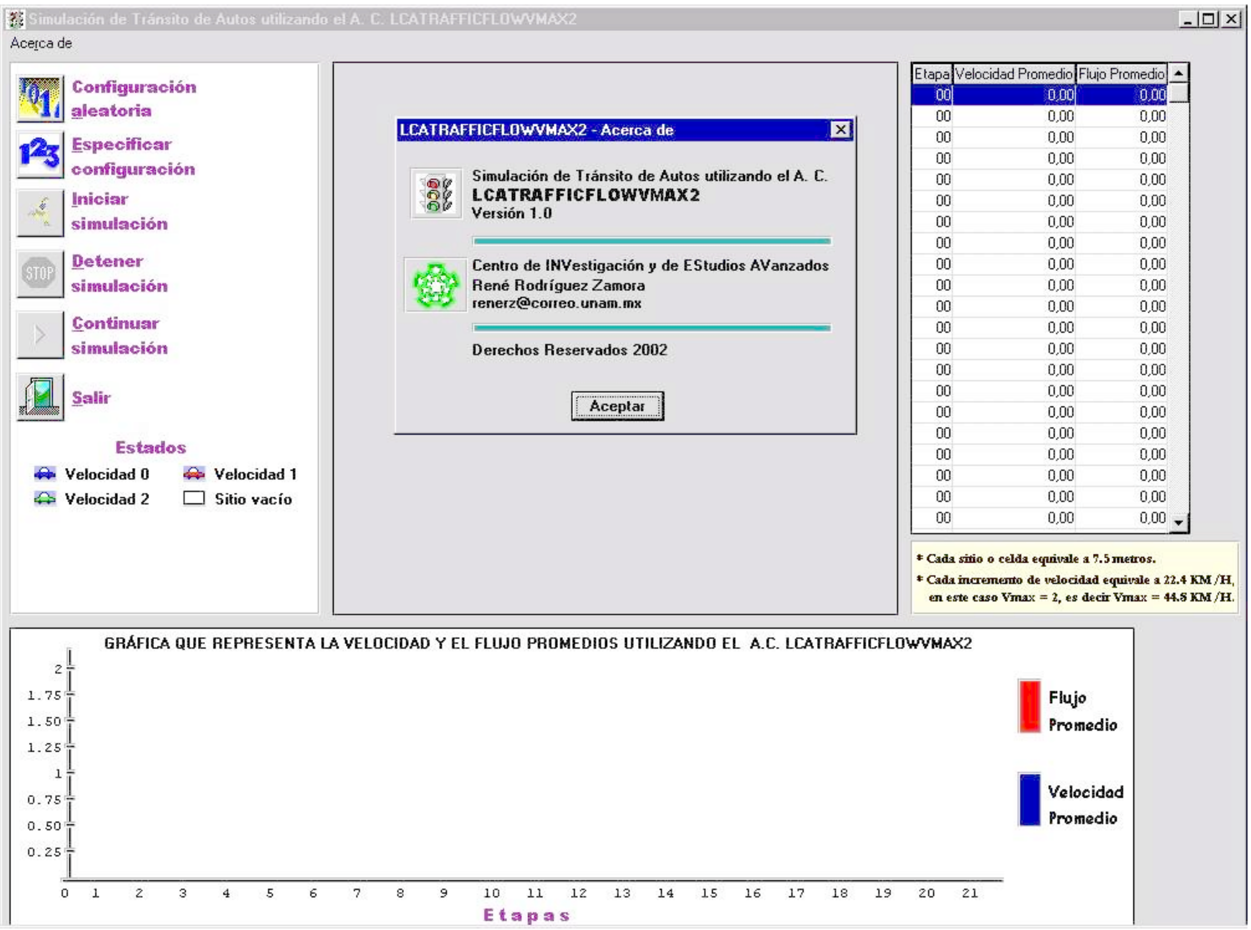

Figura 6.1: Pantalla principal.

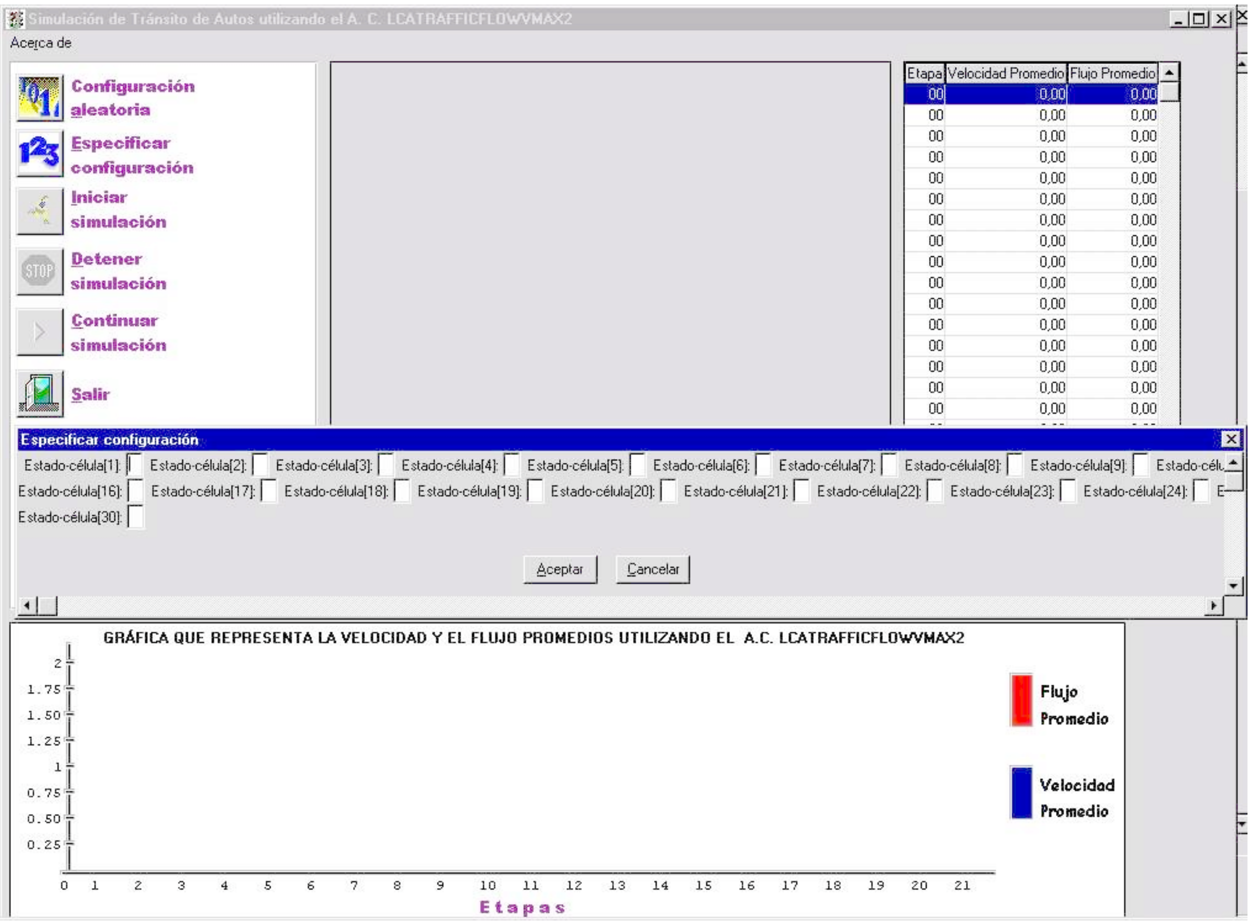

Figura 6.2: Pantalla donde se especifica la configuración inicial.

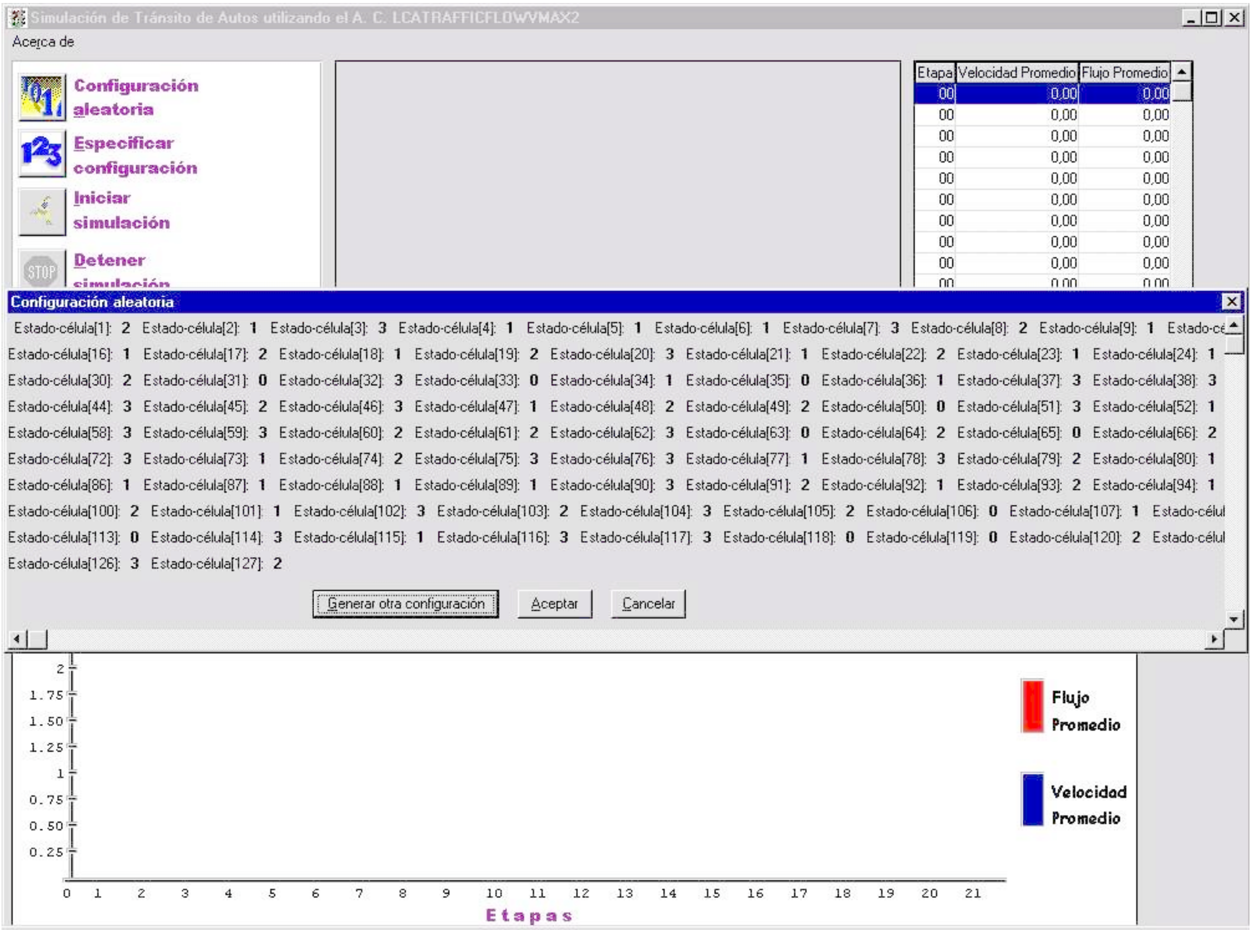

Figura 6.3: Pantalla donde se genera una configuración inicial aleatoria.

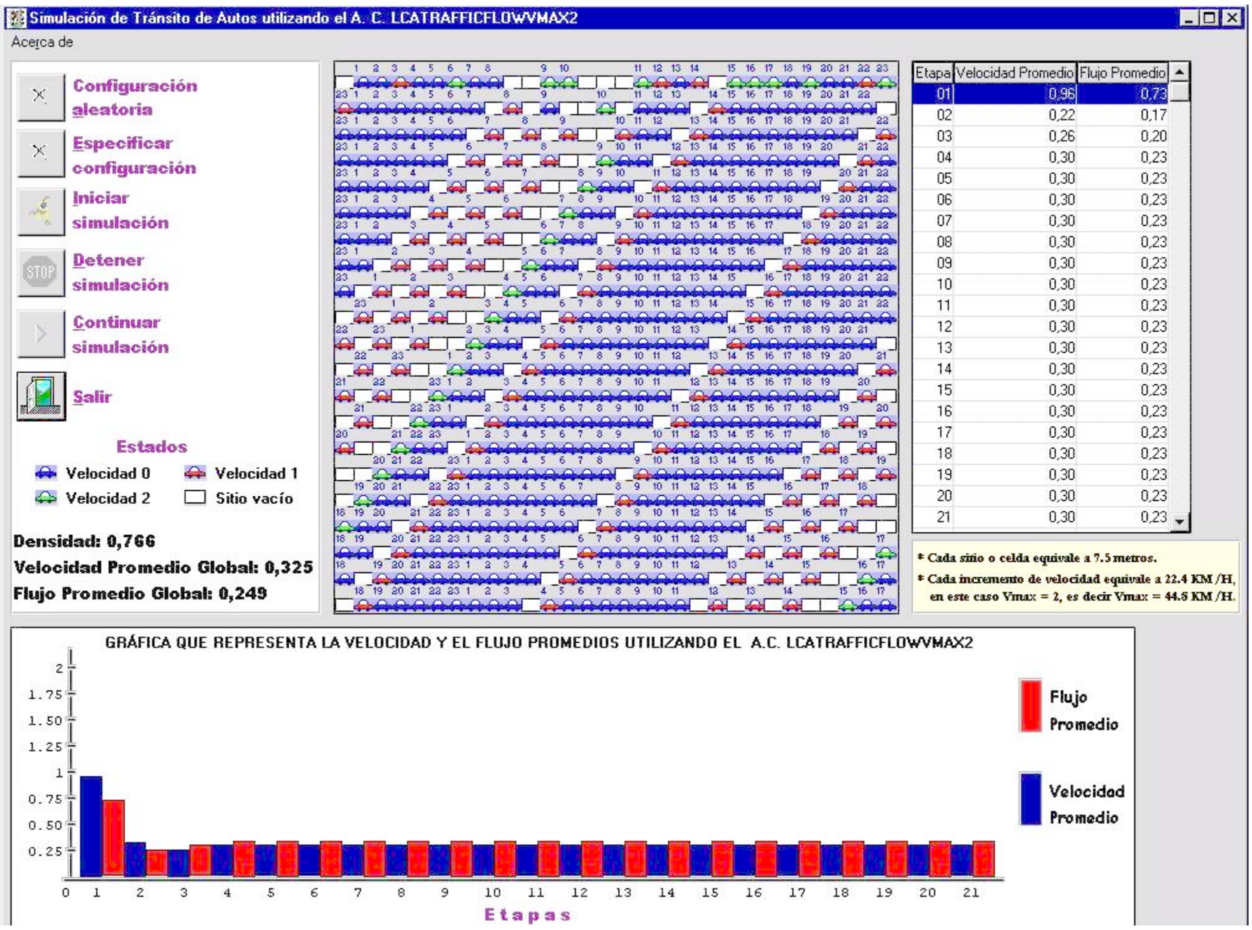

Figura 6.4: Pantalla donde se muestra la evolución del autómata con un arreglo pequeño.

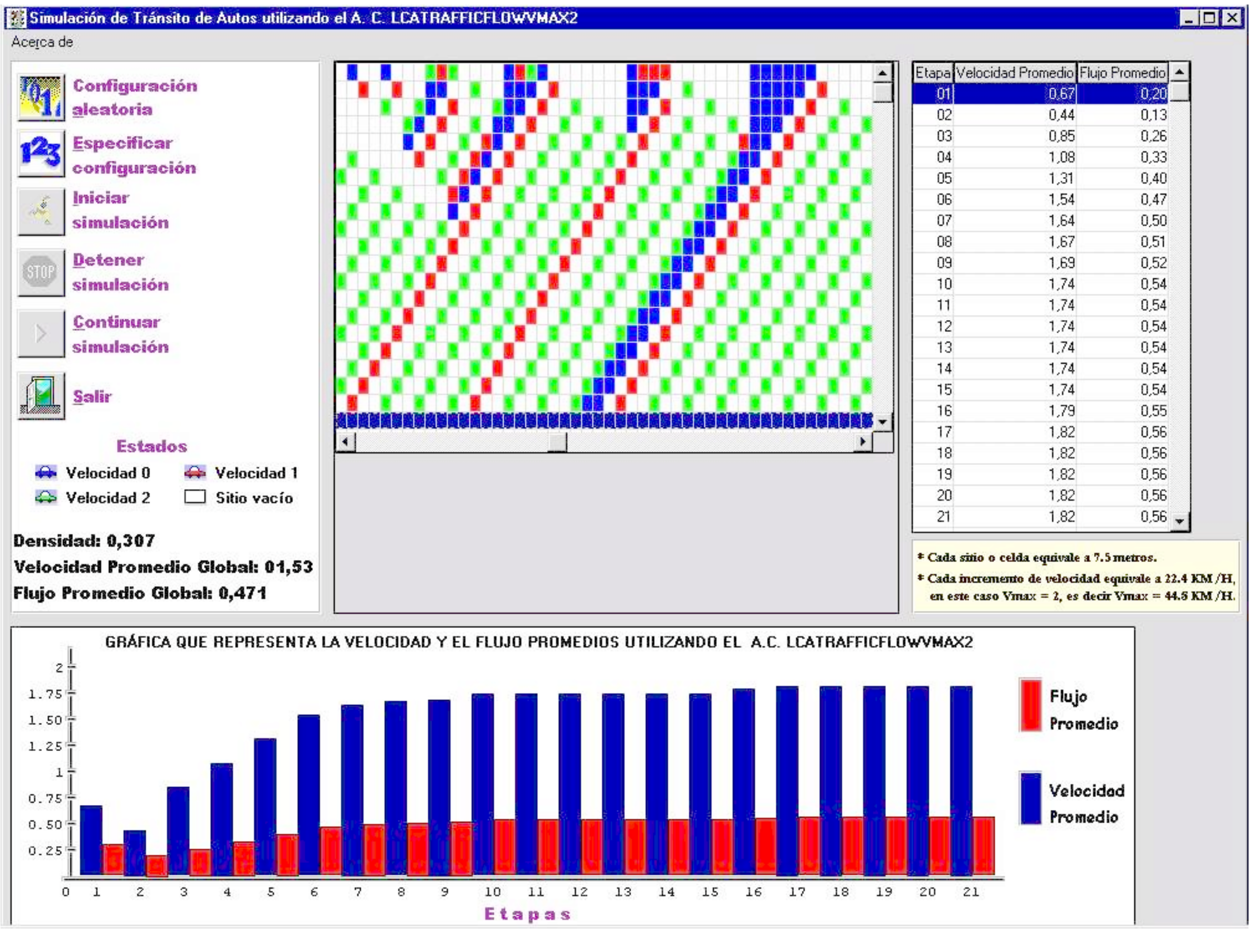

Figura 6.5: Pantalla donde se muestra la evolución del autómata con un arreglo grande.

6.3 Trabajos futuros

Esta investigación se puede extender bastante si se pretende seguir analizando a fondo el autómata celular LCATRAFFICFLOWVMAX2 o si se pretende estudiar otro autómata celular más complejo que incluya más velocidades para los autos. Algunos de los trabajos futuros pueden ser:

- Encontrar y analizar autómatas celulares que incluyan más velocidades para los autos. Se podría intentar analizar un autómata de orden (7,5), el cual incluiría cinco velocidades, número máximo con el que se ha podido trabajar. Es importante mencionar que para simulaciones de flujo de tránsito los valores de V_{max} pueden tener valores correspondientes en kilómetros o millas por hora.

- Extender el estudio del autómata celular LCATRAFFICFLOWVMAX2 con la finalidad de ubicar más y mejor sus características. Esto nos puede servir para establecer una formalización más precisa de la mecánica de análisis propuesta en esta tesis, lo que sería muy importante a la hora de analizar autómatas celulares más complejos que representen el comportamiento del tránsito de autos.

- Realizar un programa en computadora que represente una simulación de tránsito de autos. Este programa debe presentar resultados en cuanto al comportamiento del tránsito de autos utilizando como base la dinámica de la regla de autómata celular que lo está representando. Se puede incorporar el elemento estocástico, aunque de hecho este elemento en los modelos para flujo de tránsito en una dimensión sólo se utiliza para que los autos en un determinado momento disminuyan sus velocidades y modifiquen el sistema, esto con la finalidad de que sean más apegados a la realidad.

- Realizar un programa en computadora que ordene la información contenida en los diagramas de Bruijn y en los diagramas de subconjuntos, que automatice la construcción del árbol planteado en esta tesis y la identificación y clasificacón de los desplazamientos que tienen las células durante la evolución del autómata con la finalidad de analizar el comportamiento del tránsito tanto a nivel microscópico como a nivel macroscópico.

- Identificar autómatas celulares que reproduzcan el comportamiento de los modelos para flujo de tránsito de autos en dos dimensiones.

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Bibliografía

[1] S. Amoroso and G. Cooper. The Garden-of-Eden theorem for finite configurations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1970.

[2] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E*, 51(2):1035, 1995.

[3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E*, 51(2):1035–1042, February 1995.

[4] E.R. Banks. Universality in cellular automata. Proc. 11th Switch, Automata Th. Conf. (1970).

[5] Robert Barlović, Andreas Schadschneider, and Michael Schreckenberg. Random walk theory of jamming in a cellular automaton model for traffic flow. *Physica A*, 294:525–538, February 2001.

[6] R. J. Beckman. The Dallas-Ft. Worth case study. *Disponible en: http://www-transims.tsasa.lanl.gov/IOC-1.html*, November 1997.

[7] George D. Birkhoff. *Dynamical Systems.* American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1927.

[8] Michael Blank. Variational principles in the analysis of traffic flows. *Disponible en la siguiente dirección de Internet: http://www.trafficforum.org/*, March 2000.

[9] N. Boccara, H Fukś, and Q. Zeng. Car accidents and number of stopped cars due to road blockage on a one-lane highway. *J. Phys A: Math. Gen.*, 30:3329–3332, August 1999.

[10] Nino Boccara. On the existence of a variational principle for deterministic cellular automaton models highway traffic flow. *International Journal of Modern Physics C*, 12(2):143–158, May 2001.

[11] Nino Boccara and Henryk Fukś. Critical behavior of a cellular automaton highway traffic model. *to appear in Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2000.

[12] Elmer Brockfeld, Robert Barlović, Andreas Schadschneider, and Michael Schreckenberg. Optimizing traffic lights in a cellular automaton model for city traffic. *Disponible en la siguiente dirección de Internet: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, July 2001.

[13] Arthur W. Burks, editor. *Essays on Cellular Automata.* University of Illinois Press, Urbana, 1970.

[14] S. Cheybani, J.Kertész, and M. Schreckenberg. The nondeterministic Nagel-Schreckenberg traffic model with open boundary conditions. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, June 2000.

[15] Bastien Chopard, Alexandre Dupuis, and Pascal Luthi. A cellular automata model for urban traffic and its application to the city of Geneva. In M. Schreckenberg and D.E. Wolf, editors, *Proceedings of Traffic and Granular Flow 1997.* Springer-Verlag Singapore Pte. Ltd., 1998.

[16] Bastien Chopard, Pierre-Antoine Queloz, and Pascal Luthi. Traffic models of a 2d road network. In *3rd European Connection Machine Users Meeting*, October 1995.

[17] Debashish Chowdhury and Vishwesha G. Cellular-automata models of ant-trail and vehicular traffic: similarities and differences. *Disponible en la siguiente dirección de Internet: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, January 2002.

[18] Debashish Chowdhury, Ludger Santen, and Andreas Schadschneider. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. Physics Reports 329, Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln, D-50923 Köln, Germany, July 2000.

[19] E.F. Codd. *Cellular Automata*. Academic Press, New York, 1968.

[20] N. G. de Bruijn. A combinatorial problem. *Koninklijke Nederlands Akademic van Wetenschappen, Proceedings*, 49:758–764, 1946.

[21] B. Eisenblätter, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Jamming transition in a cellular automaton model for traffic flow. *Physical Review E*, 57(2):1309–1314, February 1998.

[22] Jörg Esser and Kai Nagel. Iterative census-based demand generation for transportation simulations. Technical Report 345, Institute for Scientific Computing, ETH Zürich, June 2000.

[23] Henryk Fukś. Solution of the density classification problem with two cellular automata rules. *Physical Review E*, 55(3):R2081–R2084, March 1997.

[24] Henryk Fukś and Nino Boccara. Generalized deterministic traffic rules. *International Journal of Modern Physics C*, 1997.

[25] M. Fukui and Y. Ishibashi. Traffic flow in 1d cellular automaton model including cars moving with high speed. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 65:1868–1870, 1996.

[26] Martin Gardner. On cellular automata, self-reproduction, The Garden of Eden and the game “Life”. *Scientific American*, 224(2):112–117, 1971.

[27] Demos C. Gazis, editor. *Traffic Science*, chapter Flow Theories. John Wiley and Sons, 1974.

[28] Geoffrey Gordon. *Simulación de sistemas*. Editorial Diana, 1980.

[29] Frank A. Haight. *Mathematical theories of Traffic Flow*, volume 7 of *Mathematics in science and engineering*. Academic press, 1963.

[30] Gustav Arnold Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical Systems Theory*, 3:320–375, 1969.

[31] Dirk Helbing. Empirical traffic data and their implications for consistent traffic flow modeling. *Physical Review E*, 55:R25–R28, June 1997.

[32] Dirk Helbing. Fundamentals of traffic flow. *Physical Review E*, 55:3735–3738, June 1998.

[33] Dirk Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. Technical report, Institute for Economics and Traffic, Dresden University of Technology, Andreas-Schubert-Str. 23, D-01062 Dresden, Germany, April 2001.

[34] Dirk Helbing, Ansgar Hennecke, Vladimir Shvetsov, and Martin Treiber. Micro and macrosimulation of freeway traffic. *Mathematical and Computer Modelling*, 35(5/6):517–547, 2002.

[35] Dirk Helbing and Benno Tilch. Generalized force model of traffic dynamics. *Physical Review E*, 58:133–138, June 1998.

[36] Robert Herman, editor. *Proceedings of the Symposium on the Theory of Traffic Flow.* Elsevier Publishing Company, 1961.

[37] Bernardo A. Huberman, Dirk Helbing, and M. Maurer. Optimizing traffic in virtual and real space. In D. Helbing, H. J. Herrmann, M. Schreckenberg, and D. E. Wolf, editors, *Traffic and Granular Flow '99: Social, Traffic, and Granular Dynamics.* Springer, Berlin, 2000.

[38] I. Ispolatov and P. L. Krapivsky. Phase transition in a traffic model with passing. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, February 2000.

[39] Kendall Preston Jr. and Michael J. B. Duff. *Modern Cellular Automata.* Plenum Press, New York, 1984.

[40] B. S. Kerner and P. Konhäuser. Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*, 50, 1994.

[41] W. Knospe, L Santen, A. Schadschneider, and M Schreckenberg. Towards a realistic microscopic description of highway traffic. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 33:L477–L485, 2000.

[42] S. Krauß, Kai Nagel, and P. Wagner. The mechanism of flow breakdown in traffic flow models. Presented at the International Symposium for Traffic and Transportation Theory (ISTTT) 1999 in Jerusalem.

[43] S. Kriso, R. Friedrich, J. Peinke, and P. Wagner. Reconstruction of dynamical equations for traffic flow. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, October 2001.

[44] Mark Land and Richard K. Belew. No perfect two-state cellular automata for density classification exists. *Physical Review Letters*, 74(25):5148–5150, June 1995.

[45] M. E. Lárraga, J. A. del Río, and Anita Mehta. Possible self-organised criticality and dynamical clustering of traffic flow in open systems. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, October 1999.

[46] H. Y. Lee, H.-W. Lee, and D. Kim. Phase diagram of congested traffic flow: An empirical study. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, August 2000.

[47] Wilhelm Leutzbach. *Introduction to the Theory of Traffic Flow*. Springer-Verlag, 1988.

[48] Anthony D. Mason and Andrew W. Woods. Car-following model of multispecies systems of road traffic. *Physical Review E*, 55(3):2203–2214, March 1997.

[49] W. S. McCulloch and W. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5:115–133, 1943.

[50] Harold V. McIntosh. *Linear Cellular Automata.* Universidad Autónoma de Puebla, Mayo de 1987, Revisado en Agosto de 1990. http://delta.cs.cinvestav.mx/˜mcintosh/newweb/papers.html.

[51] Harold V. McIntosh. Linear cellular automata via de bruijn diagrams. *Disponible en la siguiente dirección de Internet: http://delta.cs.cinvestav.mx/˜mcintosh/newweb/papers.html*, 1992.

[52] Harold V. McIntosh. Reversible cellular automata. *Disponible en: http://delta.cs.cinvestav.mx/˜mcintosh/newweb/papers.html*, 1992.

[53] Edward F. Moore. Mathematics in the biological sciences. *Scientific American*, September 1964.

[54] Takashi Nagatani. Bunching of cars in asymmetric exclusion models for freeway traffic. *Physical Review E*, 51(2):922–928, February 1995.

[55] Takashi Nagatani. Stabilization and enhancement of traffic flow by the next-nearest-neighbor interaction. *Physical Review E*, 60(6):6395–6401, December 1999.

[56] K. Nagel and M. Rickert. Experiences with a simplified microsimulation for the Dallas/Forth-Worth Area. *International Journal of Modern Physics C*, 8(3):483–503, March 1997.

[57] Kai Nagel. *High-speed microsimulations of traffic flow.* PhD thesis, Mathematisches Institute, Universität zu Köln, 1994.

[58] Kai Nagel. Individual adaptation in a path-based simulation of the freeway network of Northrhine-Westfalia. *Modern Physics C*, 7(61):883–892, 1996.

[59] Kai Nagel. Particle hopping models and traffic flow theory. *Physical Review E*, 53(5):4655–4672, May 1996.

[60] Kai Nagel. Distributed intelligence in large scale traffic simulations on parallel computers. *Disponible en: http://www.inf.ethz.ch/ nagel/papers/sfi-distrib-intelligence/html/sfi-distrib-intelligence.html*, January 2002.

[61] Kai Nagel, Chistopher L. Barrett, and Marcus Rickert. Parallel traffic micro-simulation by cellular automata and application for large scale transportation modeling. TRANSIMS Report Series, Los Alamos National Laboratory, January 1996.

[62] Kai Nagel and Christopher Barrett. Using microsimulation feedback for trip adaptation for realistic traffic in Dallas. *Modern Physics C*, 8(3):505–525, 1997.

[63] Kai Nagel, Richard L. Beckman, and Christopher L. Barrett. Transims for transportation planning. Proceedings of the International Conference on Complex Systems, Nashua, NH, 1999.

[64] Kai Nagel, Jörg Esser, and Marcus Rickert. Large-scale traffic simulations for transportation planning. *Disponible en: http://www.inf.ethz.ch/˜nagel/papers/*, 2000.

[65] Kai Nagel, Christopher Kayatz, and Peter Wagner. Breakdown and recovery in traffic flow models. Presentado en Traffic and Granular Flow 2001. Disponible en: http://www.inf.ethz.ch/˜nagel/papers, 2001.

[66] Kai Nagel and Maya Paczuski. Emergent traffic jams. *Physical Review E*, 51(4):2909–2918, April 1995.

[67] Kai Nagel and Steen Rasmussen. Traffic at the edge of chaos. *Disponible en: http://www.inf.ethz.ch/˜nagel/papers*, 1994. Artificial Life IV, edited by R.A. Brooks and P. Maes, MIT Press Cambridge MA, pp 222-235.

[68] Kai Nagel, Paula Strotz, Martin Pieck, Shannon Leckey, Rick Donnelly, and Christopher L. Barret. TRANSIMS traffic flow characteristics. *Disponible en la siguiente dirección de Internet: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, March 1999.

[69] Kai Nagel, Dietrich E. Wolf, Peter Wagner, and Patrice Simon. Two-lane traffic rules for cellular automata: A systematic approach. *Physical Review E*, 58(2):1425–1437, August 1998.

[70] L. Neubert, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Statistical analysis of freeway traffic. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, November 1999.

[71] K. Nishinari and D. Takahashi. Analytical properties of ultradiscrete burgers equation and rule-184 cellular automaton. *J. Phys. A*, 31:5439, 1998.

[72] K. Nishinari and D. Takahashi. A family of multi-value cellular automaton model for traffic flow. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, Febrary 2000.

[73] Alexander I. Olemskoi and Alexei V. Khomenko. Synergetic theory for jamming transition in traffic flow. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, April 2000.

[74] Página personal de Kai Nagel. http://www.inf.ethz.ch/˜nagel.

[75] A. Pottmeier, R. Barlovic, W. Knospe, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Localized defects in a cellular automaton model for traffic flow with phase separation. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, November 2001.

[76] Applet que muestra una simulación de tránsito de autos. http://www.traffic.uni-duisburg.de/model/.

[77] Schwarzmann R. Das eurotopp modell. Technical report, Institut für Verkehrswesen, July 1992.

[78] Bryan Raney and Kai Nagel. Iterative route planning for modular transportation simulation. presented at the Swiss Transportation Research Conference 2002 (STRC'02). Disponible en: http://www.inf.ethz.ch/˜nagel/papers.

[79] M. Rickert, Kai Nagel, M. Schreckenberg, and A. Latour. Two lane traffic simulations using cellular automata: Comparison with reality. Technical Report 95.213, Center for Parallel Computing, University of Cologne, D-50931 Cologne, Germany, 1995.

[80] M. Rickert, Kai Nagel, M. Schreckenberg, and A. Latour. Two lane traffic simulations using cellular automata. *Physica A*, 231:534–550, 1996.

[81] Marcus Rickert and Kai Nagel. Dynamic traffic assignment on parallel computers in TRANSIMS. *Future generation computer systems*, 17(5):637–648, 2001. Disponible en: http://www.inf.ethz.ch/˜nagel/papers.

[82] Stephan Rosswog and Peter Wagner. Towards a macroscopic modelling of the complexity in traffic flow. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, October 2001.

[83] A. Schadschneider, D. Chowdhury, E. Brockfeld, and K. Klauck. A new cellular automata model for city traffic. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, November 1999.

[84] Andreas Schadschneider. Statistical physics of traffic flow. *Physica A*, 285(101), 2000.

[85] Andreas Schadschneider and Michael Schreckenberg. Comment on Garden of Eden states in traffic model revisited. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, January 2002.

[86] M. Schreckenberg, R. Barlović, W. Knospe, and H. Klupfe. Statistical physics of cellular automata models for traffic flow. In M. Schreiber K. H. Hoffmann, editor, *Computational Statistical Physics*, pages 113–126. Springer, Berlin, 2001.

[87] P. M. Simon and K. Nagel. Simplified cellular automaton model for city traffic. *Physical Review E*, 58(2):1286–1295, August 1998.

[88] Patrice M. Simon, Jörg Esser, and Kai Nagel. Simple queueing model applied to the city of portland. Technical report, Los Alamos National Laboratory and Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Rd, Santa Fe NM 87501, U.S.A., May 9 1999.

[89] P.M. Simon and H.A. Gutowitz. A cellular automata model for bi-directional traffic. *Physical Review E*, 57:2441, 1998.

[90] Sven Skyum. Confusion in the Garden of Eden. *Proceedings of the American Mathematical Society*, July 1975.

[91] M. Takayasu and H. Takayasu. 1/f noise in a traffic model. *Fractals 1*, pages 860–866, 1993.

[92] Benno Tilch and Dirk Helbing. Evaluation of single vehicle data in dependence of the vehicle-type, lane, and site. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, December 1999.

[93] T. Toffoli and N. Margolus. *Cellular Automata Machines.* MIT Press Series in Scientific Computation, 1987.

[94] Andreas Voellmy, Milenko Vrtic, Bryan Raney, Kay Axhausen, and Kai Nagel. Status of a TRANSIMS implementation for Switzerland. *to appear in: Networks and Spatial Economics*, December 2001. Disponible en: http://www.inf.ethz.ch/˜nagel/papers.

[95] John von Neumann. *Theory of self-reproducing automata.* University of Illinois Press, 1966. Edited and completed by A. W. Burks.

[96] Burton H. Voorhees. *Computational Analysis of one-dimensional Cellular Automata*, volume 15 of *Nonlinear science.* World Scientific, 1996.

[97] P. Wagner. Traffic simulations using cellular automata: Comparison with reality. Technical Report 95.214, Center for Parallel Computing, University of Cologne, D-50931 Cologne, Germany, 1995.

[98] Peter Wagner and Kai Nagel. Microscopic modelling of travel demand: The home-to-work problem. Paper No. 990919, December 1998.

[99] Peter Wagner, Kai Nagel, and Dietrich F. Wolf. Realistic multi-lane traffic rules for cellular automata. *Physica A*, 234:687–698, 1997.

[100] Lei Wang, Bing-Hong Wang, and Bambi Hu. A cellular automaton traffic flow model between the Fukui-Ishibashi and Nagel-Schreckenberg models. *Disponible en: http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/TrafficForum/index.html*, February 2001.

[101] Stephen Wolfram. *Theory and Applications of Cellular Automata.* World Scientific, 1986.

[102] Stephen Wolfram. *Cellular Automata and Complexity.* Addison Wesley, 1994.

[103] Satoshi Yukawa and Macoto Kikuchi. Coupled-map modeling of one-dimensional traffic flow. *Journal of the Physical Society of Japan*, 64(1):35–37, January 1995.