

La Transformada Discreta de Fourier y la Transformada Rápida de Fourier

Dr. Luis Gerardo de la Fraga
Cinvestav, Departamento de Computación
fraga@cs.cinvestav.mx

30 de mayo de 2001

Resumen

Este documento describe la deducción de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) a partir de la formulación de los sistemas discretos en el tiempo y su Transformada de Fourier. También se deduce el algoritmo optimizado para calcular la TDF, que es la Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), en decimación en tiempo. Estos apuntes son una traducción propia del libro: Digital Signal Processing, de A.V. Oppenheim y R.W. Schaffer, Ed. Prentice Hall.

1. Secuencias

En teoría de sistemas discretos en el tiempo, nos concierne el procesamiento de señales que son representadas por secuencias. Una señal discreta en el tiempo es una secuencia.

Una secuencia de números x , en la cual el n -ésimo número en la secuencia se denota por $x(n)$, se escribe formalmente como:

$$x = x\{n\}, \quad \text{para } -\infty < n < \infty \quad (1)$$

Aunque las secuencias no siempre provienen de muestrear formas de onda analógicas, por conveniencia se refiere a $x(n)$ como la “ n -ésima” muestra de la secuencia.

También, aunque hablando estrictamente $x(n)$ denota el n -ésimo número en la secuencia, la notación de la ec. (1) es frecuentemente redundante, y es conveniente e inambiguo referida como “la secuencia $x(n)$ ”. Las señales discretas en el tiempo (i.e., secuencias) se representan gráficamente como se muestra en la fig. 1. Aunque la abscisa es dibujada como una línea continua, es importante reconocer que $x(n)$ está definida solamente para valores enteros de n . No es correcto pensar de $x(n)$ que es cero para un n no entero; $x(n)$ está simplemente indefinida para valores no enteros de n .

La *secuencia muestra unitaria*, $\delta(n)$, está definida como la secuencia de valores

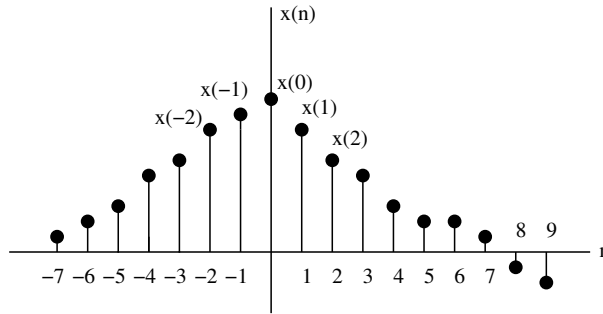


Figura 1: Representación gráfica de una señal discreta en el tiempo.

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Por conveniencia, la secuencia muestra unitaria es referida como un *impulso discreto en el tiempo*, o simplemente como un *impulso*. Su definición es simple y precisa y no sufre de las complicaciones matemáticas de la función impulso en el tiempo continuo. La representación gráfica de la secuencia muestra unitaria puede verse en la parte superior de la fig. 2

Una secuencia exponencial real es cualquier secuencia cuyos valores son de la forma a^n , donde a es un número real. Una secuencia senoidal tiene valores de la forma $A \cos(\omega_0 + \phi)$. Una secuencia exponencial compleja es de la forma $\exp[(\sigma + j\omega_0)n]$.

Una secuencia $x(n)$ se define que es *periódica* con periodo N si $x(n) = x(n + N)$ para todo n . La exponencial compleja con $\sigma = 0$ y las secuencias senoidales tienen un periodo de $2\pi/\omega_0$ solamente cuando éste número real es un entero. Si $2\pi/\omega_0$ no es un entero pero si un número racional, la secuencia racional será periódica pero con un periodo más largo que $2\pi/\omega_0$. Si $2\pi/\omega_0$ no es un número racional, las secuencias senoidal y exponencial complejas no son periódicas. La frecuencia ω_0 puede escogerse de una amplitud continua de valores. Sin embargo, no hay pérdida de generalidad en restringir ω_0 continua en el intervalo $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$ (o de forma equivalente $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$) ya que las secuencias senoidales o exponenciales complejas obtenidas de varias ω_0 en el intervalo $2\pi k \leq \omega_0 \leq 4\pi(k + 1)$ son exactamente idénticas para cualquier k obtenido al variar ω_0 en el intervalo $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$.

En el análisis de sistemas de procesamiento de señales discretas en el tiempo, las secuencias son manipuladas de varias maneras básicas. El producto y suma de dos secuencias x y y están definidas como el producto y suma muestra por muestra, respectivamente:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \{x(n)y(n)\} && \text{(producto)} \\ x + y &= \{x(n) + y(n)\} && \text{(suma)} \end{aligned}$$

La multiplicación de una secuencia x por un número α está definida como:

$$\alpha \cdot x = \{\alpha x(n)\}$$

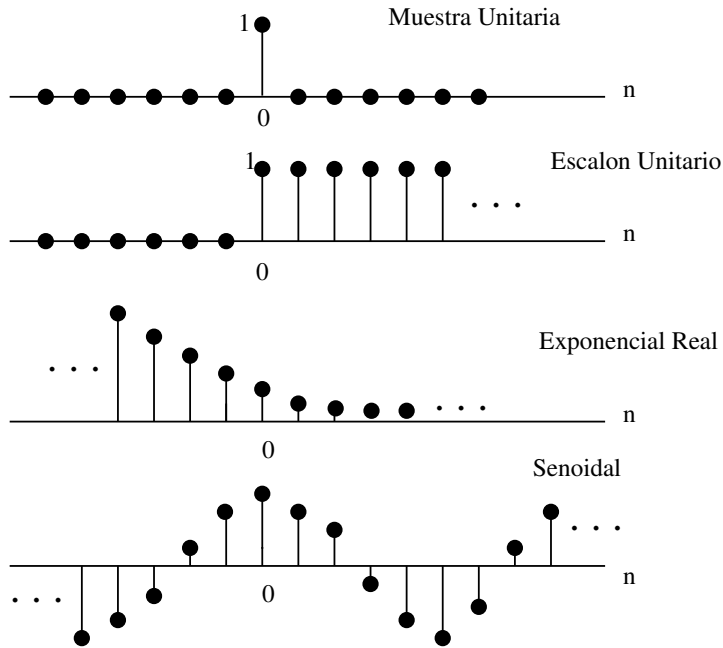


Figura 2: Algunos ejemplos de secuencias. Las secuencias mostradas juegan un rol importante en el análisis y representación de señales y sistemas discretos en el tiempo.

Una secuencia y se dice que está retardada o es una versión recorrida de una secuencia x si y tiene valores

$$y(n) = x(n - n_0)$$

donde n_0 es un entero.

Una secuencia arbitraria puede expresarse como una suma de muestras unitarias retardadas escaladas. Por ejemplo, la secuencia $p(n)$ de la fig. 3 puede expresarse como:

$$p(n) = a_{-3}\delta(n + 3) + a_1\delta(n - 1) + a_2\delta(n - 2) + a_7\delta(n - 7)$$

De forma más general, una secuencia arbitraria puede expresarse como:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \tag{3}$$

2. Sistemas Lineales Invariantes al Corrimiento

Un *sistema* está definido matemáticamente como una transformación única o un operador que mapea una secuencia de entrada $x(n)$ en una secuencia de salida $y(n)$. Esto se denota como:

$$y(n) = T[x(n)]$$

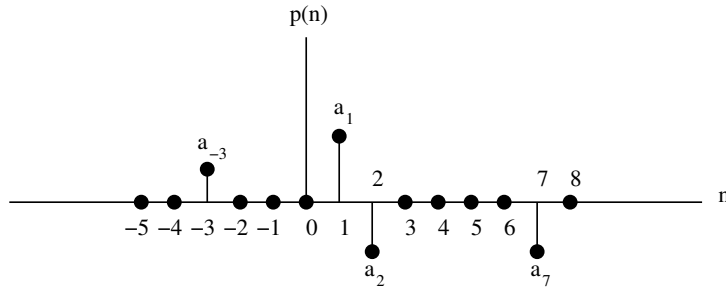


Figura 3: Secuencia arbitraria que será expresada como una suma de muestras unitarias escaladas y retardadas.

y de forma gráfica como se ve en la fig. 4

$$x(n) \longrightarrow \boxed{T[\quad]} \longrightarrow y(n)$$

Figura 4: Representación de una transformación que mapea una secuencia de entrada $x(n)$ en una secuencia de salida $y(n)$.

Los *sistemas lineales* están definidos por el principio de superposición. Si $y_1(n)$ y $y_2(n)$ son las respuestas cuando $x_1(n)$ y $x_2(n)$ son las entradas, respectivamente, entonces un sistema es lineal si y solo si:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n) \quad (4)$$

para constantes arbitrarias a y b . De forma extendida, un sistema es lineal si cumple la *condición de homogeneidad*: $\{ T[ax(n)] = aT[x(n)] \}$ y la *condición de aditividad*

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$$

siendo a una constante arbitraria.

Una secuencia arbitraria $x(n)$ puede ser representada como una suma de secuencias muestra unitaria escaladas y retardadas como en la (3). Esta representación junto con la ec. (4) sugieren que un sistema lineal puede estar completamente caracterizado por su respuesta a la muestra unitaria. Específicamente, sea $h_k(n)$ la respuesta del sistema a $\delta(n - k)$, una muestra unitaria ocurre a $n = k$. Entonces de la ec. (3)

$$\begin{aligned}
y(n) = T[x(n)] &= T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n)
\end{aligned} \tag{5}$$

Por consiguiente, de acuerdo a la ec. (5) la respuesta del sistema puede ser expresada en términos de la respuesta del sistema a $\delta(n-k)$. Si sólo se toma en cuenta la linealidad, $h_k(n)$ dependerá tanto de n como de k , por lo que el uso computacional de la ec. (5) es limitado. Un resultado más útil se obtiene si se toma en cuenta la restricción adicional de invarianza al corrimiento.

La clase de *sistemas invariantes al corrimiento* está caracterizada por la propiedad de que si $y(n)$ es la respuesta a $x(n)$, entonces $y(n-k)$ es la respuesta a $x(n-k)$, donde k es un entero positivo o negativo. Cuando el índice n es asociado con el tiempo, invarianza al corrimiento corresponde a *invarianza en el tiempo*. La propiedad de invarianza al corrimiento implica que si $h(n)$ es la respuesta a $\delta(n-k)$, entonces la respuesta a $\delta(n-k)$ es simplemente $h(n-k)$. Por lo que la ec. (5) se convierte en :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n-k) \tag{6}$$

Cualquier sistema lineal invariante al corrimiento (SLIC), entonces, está completamente caracterizado por su respuesta al pulso unitario $h(n)$.

La ec. (6) es llamada comúnmente la *suma de convolución*. Si $y(n)$ es una secuencia cuyos valores están relacionados a los valores de dos secuencias $h(n)$ y $x(n)$ como en la ec. (6), se dice que $y(n)$ es la convolución de $x(n)$ con $h(n)$ y se describe por la notación

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{7}$$

Por sustitución de variables (haciendo $a = n - k$, por ejemplo) en la ecuación (7) obtenemos la expresión alternativa,

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = h(n) * x(n) \tag{8}$$

De este modo, el orden en que las dos secuencias son convolucionadas no es importante y la salida del sistema es la misma si la entrada y la respuesta al impulso unitario son intercambiadas. En otras palabras, un SLIC con entrada $x(n)$ y respuesta al impulso unitario $h(n)$ tendrá la misma salida que un sistema lineal invariante al corrimiento con entrada $h(n)$ y respuesta al impulso unitario $x(n)$.

3. Representación en el Dominio de la Frecuencia de Sistemas y Señales Discretas en el Tiempo

Para un SLIC hemos visto que una representación de la secuencia de entrada como una suma ponderada de secuencias muestra unitaria retardadas, resulta, resulta en una representación de la salida como una suma ponderada de respuestas a la muestra unitaria retardadas.

Una propiedad fundamental de los SLIC es que la respuesta en estado estable ¹ a una senoidal es una senoidal a la misma frecuencia de la entrada, con una amplitud y fase determinadas por el sistema. Esta propiedad de los SLIC hace que la representación de las señales en términos de senoides o exponenciales complejas (esto es, representaciones en Fourier) sea útil en teoría de sistemas lineales.

Supongamos que la secuencia de entrada es $x(n) = e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty$, i.e., una exponencial compleja de frecuencia ω (en radianes). Entonces, usando la ec. (8) la salida es:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega n}e^{-j\omega k} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Si se define

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \quad (9)$$

podemos escribir:

$$y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (10)$$

De la ec. (9) podemos ver que $H(e^{j\omega})$ describe el cambio en la amplitud compleja de una exponencial compleja como una función de la frecuencia ω . La cantidad $H(e^{j\omega})$ se llama *respuesta en frecuencia* del sistema cuya respuesta a la muestra unitaria es $h(n)$. En general, $H(e^{j\omega})$ es compleja y puede expresarse en términos de sus partes real e imaginaria como:

¹Aquí nos interesa el estudio de sistema los cuales están trabajando normalmente. Podemos imaginar un aparato eléctrico al cual encendemos el interruptor, entonces estudiamos el aparato mucho tiempo después de haberlo encendido. La respuesta al encendido se la conoce como *respuesta transitoria*. La respuesta cuando funciona normalmente se le llama *respuesta en estado estable*

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

o en términos de su magnitud y fase :

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$$

Algunas veces es más conveniente referirse al *retardo de grupo* más que a la fase. El retardo de grupo está definido como el negativo de la primera derivada, con respecto a ω , de la fase.

Ya que una senoide puede ser expresada como una combinación lineal de exponenciales complejas, la respuesta en frecuencia también expresa la respuesta a una entrada senoidal. Específicamente, considerar

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

De la ec. (10), la respuesta a $(A/2)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$ es

$$y_1(n) = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}$$

Si $h(n)$ es real, entonces de la ec. (7) la respuesta a $(A/2)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$ es el complejo conjugado de la respuesta a $(A/2)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$. Así la respuesta del sistema es:

$$y(n) = \frac{A}{2} [H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}]$$

ó

$$y(n) = A|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

donde $\theta = \arg[H(e^{j\omega_0})]$ es la fase de la respuesta del sistema a la frecuencia ω_0 .

$H(e^{j\omega})$ es una función continua de ω . Aún más, esta es una función periódica de ω con periodo 2π . Esta propiedad se deduce directamente de la ec. 9 ya que $e^{j(\omega+2\pi)k} = e^{j\omega k}$. El hecho de que la respuesta en frecuencia tiene mismo valor en ω y en $\omega + 2\pi$ significa simplemente que el sistema responde idénticamente a exponenciales complejas a estas dos frecuencias, y dado que estas dos frecuencias exponenciales son indistinguibles, este comportamiento es completamente razonable.

Ya que $H(e^{j\omega})$ es una función periódica de ω , esta puede ser representada por series de Fourier. La ecuación (9) de hecho, expresa $H(e^{j\omega})$ en la forma de series de Fourier donde los coeficientes de Fourier corresponden a la respuesta a la muestra unitaria $h(n)$. Con esa observación sigue que $h(n)$ puede evaluarse a partir de $H(e^{j\omega})$ por medio de la relación usada para obtener los coeficientes de Fourier de una función periódica, i.e.,

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (11)$$

donde

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (12)$$

Estas ecuaciones tienen una interpretación alternativa como una representación de la secuencia $h(n)$. Específicamente es útil considerar a la ec. (11) como una representación de la secuencia $h(n)$ como una superposición (una integral) de señales exponenciales cuyas amplitudes complejas están determinadas por la ec. (12). Por lo que las ecuaciones (11) y (12) forman el par de transformadas de Fourier para la secuencia $h(n)$, con la ec. (12) jugando el papel de la transformada directa (análisis) de la secuencia $h(n)$ y la ec. (11) siendo la transformada de Fourier inversa (síntesis). Tal representación existe si las series en la ec. (12) convergen.

La representación de una secuencia por la transformada de la ec. (12) no está restringida a la respuesta a la muestra unitaria de un sistema, si no que puede aplicarse a cualquier secuencia cumpliendo que las series de la ec. (12) convergen. Se este modo, para una secuencia general $x(n)$ se define la transformada de Fourier como :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (13)$$

y la transformada de Fourier inversa como:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (14)$$

El hecho de que una secuencia pueda ser representada por una superposición de exponenciales complejas es de una gran importancia en el análisis de los SLIC. Esto es debido al principio de una superposición y al hecho de que la respuesta de tal sistema a una exponencial compleja está completamente determinada por la respuesta en frecuencia, $H(e^{j\omega})$. Si vemos a la ec. (14) como una superposición de exponenciales complejas de amplitud incremental, entonces la respuesta de un SLIC a una entrada $x(n)$ es una correspondiente superposición de respuestas debidas a cada exponencial compleja que va representando la salida. Ya que la respuesta de cada exponencial compleja se obtiene multiplicándola por $H(e^{j\omega})$,

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega$$

Por lo que la transformada de Fourier de la salida es :

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (15)$$

Este resultado tiene su contraparte en la teoría de sistemas lineales continuos en el tiempo y, por supuesto, puede derivarse de una forma más rigurosa simplemente evaluando la transformada de Fourier de la suma de convolución

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n-k)$$

Aunque generando de esta forma la ec. (15) provee una justificación rigurosa, la discusión previa ha sido para enfatizar que la ec. (15) es un resultado directo de las propiedades especiales de los SLIC.

4. Algunas Propiedades de Simetría de la Transformada de Fourier

Una secuencia conjugada simétrica $x_e(n)$ está definida como una secuencia para la cual $x_e(n) = x_e^*(-n)$

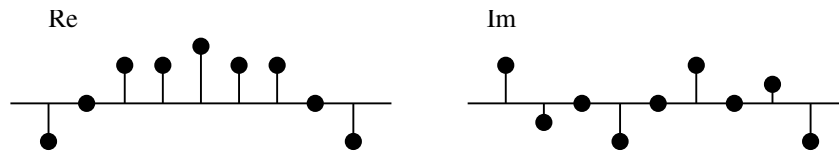


Figura 5: Ejemplo de una secuencia conjugada simétrica

Una secuencia conjugada antisimétrica $x_o(n)$ está definida como una secuencia para la cual $x_o(n) = -x_o^*(-n)$ donde $*$ denota la conjugación compleja.

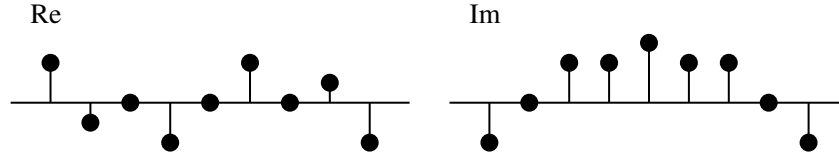


Figura 6: Ejemplo de una secuencia conjugada antisimétrica

Una secuencia arbitraria $x(n)$ puede expresarse siempre como una suma de secuencias conjugada simétricas y conjugadas antisimétricas (ver fig. 7) como:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (16)$$

donde:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \quad (17)$$

y

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \quad (18)$$

Una secuencia real que es conjugada simétrica, esto es $x_e(n) = x_e(-n)$, es referida generalmente como una secuencia par, y una secuencia real la cual es conjugada antisimétrica, esto es $x_o(n) = -x_o(-n)$, es referida generalmente como una secuencia impar.

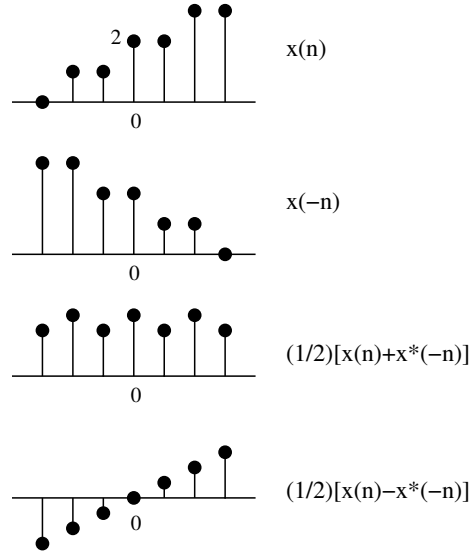


Figura 7: Construcción de las secuencias componentes par e impar de una secuencia real $x(n)$

Una transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ puede ser descompuesta en una suma de funciones conjugada simétrica y conjugada antisimétrica como:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (19)$$

donde

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (20)$$

y

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (21)$$

donde $X_e(e^{j\omega})$ es conjugada simétrica y $X_o(e^{j\omega})$ es conjugada antisimétrica, i.e.,

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$$

y

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$$

Como en el caso de las secuencias, si una función real es conjugada simétrica, es referida generalmente como una *función par*, y si es conjugada antisimétrica es referida generalmente como una *función impar*.

Consideremos el caso más general, una secuencia compleja $x(n)$ con transformada de Fourier (TF) $X(e^{j\omega})$. Puede demostrarse que la TF de $x^*(n)$ es $X^*(e^{-j\omega})$ y la TF de $x^*(-n)$ es $X^*(e^{j\omega})$. Como resultado de esto, y usando el hecho de que la TF de la suma de dos secuencias es la suma de las TF, se tiene que la TF de $\frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$ o, equivalentemente, $\Re[x(n)]$ es $\frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$, o equivalentemente, la parte conjugada simétrica de $X(e^{j\omega})$. De forma similar, $\frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$ o, equivalentemente, $j\Im[x(n)]$ tiene una TF que

es el componente conjugado antisimétrico de $X_o(e^{j\omega})$. Considerando la TF de $x_e(n)$ y de $x_o(n)$, los componentes conjugado simétrico y conjugado antisimétrico de $x(n)$, se deduce que la TF de $x_e(n)$ es $\Re[X(e^{j\omega})]$ y la TF de $x_o(n)$ es $j\Im[X(e^{j\omega})]$.

Si $x(n)$ es una secuencia real, las propiedades de simetría son muy útiles. Para una secuencia real, la TF es conjugada simétrica; i.e., $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$. Expresando $X(e^{j\omega})$ en términos de sus partes real e imaginaria como

$$X(e^{j\omega}) = \Re[X(e^{j\omega})] + j\Im[X(e^{j\omega})]$$

se tiene que

$$\Re[X(e^{j\omega})] = \Re[X(e^{-j\omega})]$$

y

$$\Im[X(e^{j\omega})] = -\Im[X(e^{-j\omega})]$$

i.e., la parte real de la TF es una función par y la parte imaginaria es una función impar. De forma similar, expresando $X(e^{j\omega})$ en coordenadas polares como

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

se tiene que para una secuencia real $x(n)$, la magnitud de la TF es una función par de ω y la fase dada por $\arg[X(e^{j\omega})]$ es una función impar de ω . También para una secuencia real, la parte par de $x(n)$ transforma a $\Re[X(e^{j\omega})]$ y la parte impar de $x(n)$ transforma a $j\Im[X(e^{j\omega})]$.

5. Las Series Discretas de Fourier

Considerando una secuencia $\tilde{x}(n)$ que es periódica con periodo N , de forma que $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + kN)$ para cualquier valor entero de k . Es posible representar a $\tilde{x}(n)$ en términos de series de Fourier, esto es, por sumas de secuencias de senos y cosenos, o equivalentemente por secuencias de exponenciales complejas, con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $2\pi/N$ asociada con la secuencia periódica. En contraste con las series de Fourier de funciones periódicas continuas, existen solamente N distintas exponenciales complejas que tienen un periodo que es un submúltiplo entero del periodo fundamental N . Esto es una consecuencia del hecho de que la exponencial compleja

$$e_k(n) = e^{j(2\pi/N)nk} \quad (22)$$

es periódica en k con un periodo de N . Así, $e_0(n) = e_N(n)$, $e_1(n) = e_{N+1}(n)$, etc., y consecuentemente el conjunto de N exponenciales complejas en la ec. (22) con $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ definen todas las exponenciales complejas distintas con frecuencias que son un múltiplo entero de $2\pi/N$. Así la representación en series de Fourier de una secuencia periódica, $\tilde{x}(n)$, necesita contener solo N de estas exponenciales complejas y por esta razón tiene la forma

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk} \quad (23)$$

La constante multiplicativa $1/N$ ha sido incluida por conveniencia y, por supuesto, no tiene un efecto importante sobre la naturaleza de la representación. Para obtener los coeficientes $\tilde{X}(k)$ a partir de la secuencia periódica $\tilde{x}(n)$, se usa el hecho de que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)nk} = \begin{cases} 1, & \text{para } r = mN, m \text{ un entero} \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (24)$$

Por lo tanto, multiplicando ambos lados de la ec. (23) por $e^{-j(2\pi/N)nr}$ y sumando de $n = 0$ hasta $N-1$, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nr} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)(k-r)n}$$

O, intercambiando el orden de la suma sobre el lado derecho de la ecuación

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nr} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]$$

Y usando la ec. (24),

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nr} = \tilde{X}(r)$$

Por lo que los coeficientes $\tilde{X}(k)$ en la ec. (23) se obtienen de la relación

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j(2\pi/N)nk} \quad (25)$$

Nótese que la secuencia $\tilde{X}(k)$ dada por la ecuación (25) es periódica con un periodo de N ; i.e., $\tilde{X}(0) = \tilde{X}(N)$, $\tilde{X}(1) = \tilde{X}(N+1)$, etc. Esto es consistente, por supuesto, consistente con el hecho de que las exponenciales complejas de la ec. (22) son solamente distintas para $k = 0, 1, \dots, N-1$, y de esto modo solo puede haber N coeficientes distintos en la representación en series de Fourier de una secuencia periódica.

Las ecuaciones (23) y (25) juntas pueden ser vistas como un par de transformación y se refieren como la representación en series discretas de Fourier (SDF) de una secuencia periódica. Por conveniencia en la notación estas ecuaciones generalmente se escriben en términos de W_N definido como

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

De esta forma el par de SDF de análisis y síntesis queda expresado como

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} \quad (26)$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad (27)$$

6. La Transformada Discreta de Fourier

Una secuencia periódica puede ser representada por series de Fourier. Con la correcta interpretación, la misma representación puede ser aplicada a secuencias de duración finita. La representación de Fourier resultante para secuencias de duración finita es lo que se conoce como la transformada discreta de Fourier (TDF).

Se puede representar una secuencia de duración finita de largo N por una secuencia periódica con periodo N , un periodo de la cual es idéntica a la secuencia de duración finita.

Consideremos una secuencia de duración finita $x(n)$ de largo N de forma que $x(n) = 0$ excepto en el intervalo $0 \leq n \leq (N-1)$. Claramente una secuencia de largo M menor que N también puede considerarse de largo N , teniendo amplitud cero los últimos $(N-M)$ puntos del intervalo. La secuencia periódica correspondiente de periodo N , para la cual $x(n)$ es un periodo, será denotada por $\tilde{x}(n)$ y está dada por

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (28)$$

Dado que $x(n)$ es de largo finito N no hay solapamiento entre los términos $x(n+rN)$ para diferentes valores de r . Así, la ecuación (28) puede ser escrita alternativamente como

$$\tilde{x}(n) = x(n \% N) \quad (29)$$

donde $\%_0$ indica la operación *módulo*. La secuencia de duración finita $x(n)$ es obtenida a partir de $\tilde{x}(n)$ extrayendo un periodo; i.e.

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Por conveniencia en la notación, es útil definir la secuencia rectangular $R_N(n)$ dada por

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Con esta notación la ecuación de arriba puede escribirse como

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) \quad (30)$$

Como se escribió en la sección 5, los coeficientes de la series de Fourier discreta $\tilde{X}(k)$ de la secuencia periódica $\tilde{x}(n)$ son en sí mismas una secuencia periódica con periodo N . Para mantener una dualidad entre los dominios del tiempo y frecuencia, se escogerán los coeficientes de Fourier que se asocian con la secuencia de duración finita correspondiente a un periodo de $\tilde{X}(k)$. Así, con $X(k)$ denotando los coeficientes de Fourier que se asocian con $x(n)$, $X(k)$ y $\tilde{X}(k)$ están relacionados por

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= X(k \% N) \\ X(k) &= \tilde{X}(k)R_N(k) \end{aligned}$$

De la sección 5, $\tilde{X}(k)$ y $\tilde{x}(k)$ están relacionadas por

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{kn} \quad (31)$$

$$\tilde{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-kn} \quad (32)$$

Ya que las sumas en las ecs. (31) y (32) involucran solamente el intervalo entre 0 y $N - 1$, se deduce que

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N - 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (33)$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (34)$$

El par de transformadas dadas por las ecs. (33) y (34) se conocen como la transformada discreta de Fourier (TDF), con la ec. (33) representando la transformada de análisis y la ec. (34) la transformada de síntesis.

7. La Transformada Rápida de Fourier

Las transformada discreta de Fourier (TDF) juega un papel importante en el análisis, el diseño y la realización de algoritmos y sistemas de procesamiento digital de señales. Una de las razones por las que el análisis en Fourier es de una amplia importancia en procesamiento digital de señales es debido a la existencia de un algoritmo eficiente para calcular la TDF.

En las ec. (33) y (34), $x(n)$ y $X(k)$ pueden ser complejas. Las expresiones de estas ecuaciones sólo difieren en el signo del exponente de W_N y en un factor de escala $1/N$, por lo que una discusión de los procedimientos computacionales de la ec. (33) se aplican con las modificaciones obvias a la ec. (34).

Para indicar la importancia de los esquemas de cálculo eficiente, es instructivo considerar la evaluación directa de las ecuaciones de la TDF. Dado que $x(n)$ puede ser compleja² se puede escribir

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \{ (\Re[x(n)]\Re[W_N^{kn}] - \Im[x(n)]\Im[W_N^{kn}]) + j (\Re[x(n)]\Im[W_N^{kn}] + \Im[x(n)]\Re[W_N^{kn}]) \} \quad (35)$$

De la ec. (35) es claro que para cada valor de k , el cálculo directo de $X(k)$ requiere $4N$ multiplicaciones y $2N + 2(N - 1) = 4N - 2$ adiciones reales. Ya que $X(k)$ debe ser calculado para N valores diferentes de k , el cálculo directo de la TDF de una secuencia $x(n)$ requiere $4N^2$ multiplicaciones reales y $N(4N - 2)$ adiciones reales o, alternativamente, N^2 multiplicaciones complejas, y $N(N - 1)$ adiciones complejas. La realización del cálculo de la TDF sobre una computadora de uso general o sobre un hardware de uso específico requiere por supuesto de localidades para almacenamiento y acceder los valores de la secuencia de entrada $x(n)$ y los valores de los coeficientes W_N^{kn} . Debido a que la cantidad de accesos y almacenamiento de datos en algoritmos de cálculo numérico es generalmente proporcional al número de operaciones aritméticas, se acepta de forma general que un significado de la medida de complejidad, o, del tiempo requerido par llevar a cabo un algoritmo computacional, es el número de multiplicaciones y adiciones requeridos. De este modo, para el cálculo directo la TDF, una medida conveniente de la eficiencia de los cálculos es el hecho que se requieren $4N^2$ multiplicaciones reales y $N(4N - 2)$ adiciones reales. Ya que la cantidad de cálculos, y por ende el tiempo de procesamiento, es aproximadamente proporcional a N^2 , es evidente que el número de operaciones aritméticas requeridas para calcular la TDF por el método directo se vuelve muy grande para valores grandes de N . Debido a esta razón, procedimientos de cálculo que reduzcan el número de multiplicaciones y adiciones son de un interés considerable.

La mayoría de las aproximaciones para mejorar la eficiencia computacional de la TDF explotan una, o las dos, propiedades especiales de las cantidades de W_N^{kn} :

²Recuérdese el producto de dos números complejos:

$$(a + jb)(c + jd) = ac - bd + j(ad + bc)$$

1. $W_N^{k(N-n)} = (W_N^{kn})^*$
2. $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$

Por ejemplo, usando la primera propiedad, i.e., la simetría de las funciones seno y coseno, se pueden reagrupar los términos de la ec. (35) como

$$\Re[x(n)]\Re[W_N^{kn}] + \Re[x(N-n)]\Re[W_N^{k(N-n)}] = (\Re[x(n)] + \Re[x(N-n)]) \Re[W_N^{kn}]$$

y

$$-\Im[x(n)]\Im[W_N^{kn}] - \Im[x(N-n)]\Im[W_N^{k(N-n)}] = -(\Im[x(n)] - \Im[x(N-n)]) \Im[W_N^{kn}]$$

Un agrupamiento similar puede encontrarse para otros términos de la ec. (35). Por esta vía, el número de multiplicaciones puede reducirse en un factor de aproximadamente 2. Se puede tomar ventaja también de que para ciertos casos del producto kn , el seno y el coseno toman valores de 1 o 0, eliminando por lo tanto la necesidad de las multiplicaciones. Sin embargo, reducciones de este tipo aún dejan la cantidad de cómputo proporcional a N^2 . Afortunadamente, la segunda propiedad, i.e., la periodicidad de secuencia compleja W_N^{kn} , puede emplearse para alcanzar una gran reducción de cálculos.

Algoritmos computacionales que explotan tanto la simetría como la periodicidad de la secuencia W_N^{kn} fueron conocidos antes de la era digital de las computadoras de alta velocidad. Fue en 1965 cuando Cooley y Tukey ³ publicaron un algoritmo para calcular la TDF cuando N es un número compuesto, i.e., cuando N es el producto de dos o más enteros. La publicación de este artículo acarreó un flujo enorme de actividad en la aplicación de la TDF al procesamiento de señal y en el resultado del descubrimiento de otros nuevos algoritmos; los cuales se les conoce como *algoritmos de la transformada rápida de Fourier* (FFT, por sus siglas en inglés), o simplemente FFT. Colectivamente, el conjunto entero de tales algoritmos de les refiere comúnmente como “la FFT”.

El principio fundamental sobre el que se basan tales algoritmos es la descomposición del cálculo de la TDF de una secuencia de largo N en TDF sucesivas más pequeñas. La manera en que este principio es realizado origina una variedad de algoritmos diferentes, todos con un mejoramiento en velocidad de cómputo comparable.

Existen dos clases básicas de algoritmos FFT:

1. La llamada *decimación en tiempo*, nombre que se deriva del hecho de que en el proceso de reordenar los cálculos en más pequeñas transformaciones, la secuencia $x(n)$ (el índice n frecuentemente se asocia con el tiempo) se descompone sucesivamente en subsecuencias más pequeñas.
2. Algoritmos en *decimación en frecuencia*, en donde los coeficientes de la TDF, $X(k)$, son descompuestos en subsecuencias más pequeñas.

Aquí vamos a desarrollar el algoritmo en decimación en tiempo para una secuencia de tamaño un número que es una potencia de 2.

³J.W. Cooley and J.W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Math. Computation, Vol. 19, 1965, pp. 297-301.

8. Algoritmo de la FFT en Decimación en Tiempo

El principio de la decimación en tiempo es más fácil ilustrarlo si se considera el caso especial de N siendo una potencia de 2; i.e.,

$$N = 2^v$$

Ya que N es un entero par, se puede considerar el cómputo de $X(k)$ separando $x(n)$ en dos secuencias de $N/2$ puntos ⁴ consistentes de los puntos pares de $x(n)$ y los puntos impares de $x(n)$. $X(k)$ está dada por

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (36)$$

separamos $x(n)$ en sus puntos pares e impares obteniendo:

$$X(k) = \sum_{n \text{ par}} x(n)W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impar}} x(n)W_N^{nk}$$

o con la sustitución de variables $n = 2r$ para n par y $n = 2r + 1$ para n impar,

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)(W_N^2)^{rk} \end{aligned} \quad (37)$$

Pero $W_N^2 = W_{N/2}$ ya que

$$W_N^2 = e^{-2j(2\pi/N)} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}$$

Consecuentemente la ec. (37) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} \\ &= G(k) + W_N^k H(k) \end{aligned} \quad (38)$$

Cada una de las sumas de la ec. (38) es reconocida como una TDF de $N/2$ puntos, la primera suma siendo la TDF $N/2$ puntos de los puntos pares de la secuencia original, y la segunda suma siendo la TDF $N/2$ puntos de los puntos impares de la secuencia original. Aunque los valores del índice k va sobre N valores, $k = 0, 1, \dots, N-1$, cada

⁴En la discusión de la FFT se usarán intercambiamente las palabras *muestra* y *punto* para nombrar el valor de una secuencia. También se usará una secuencia de largo N como una secuencia de N puntos, y la TDF de una secuencia de largo N como una TDF de N puntos.

una de las sumas necesita ser calculada sólo para k entre 0 y $N/2 - 1$, puesto que $G(k)$ y $H(k)$ son periódicas en k con periodo $N/2$. Después de que son calculadas las dos TDFs correspondientes a las dos sumas de la ec. (38), estas se combinan para resultar en la TDF de N puntos, $X(k)$. La fig. 8 indica los cálculos involucrados en calcular $X(k)$ de acuerdo a la ec. (38) para una secuencia de 8 puntos, i.e., para $N = 8$. En esta figura se han usado las convenciones de diagramas de flujo de señal: las ramas entrando a un nodo se asumen que producen la variable del nodo. Cuando no se indican un coeficiente, se asume que la transmitancia de la rama es de uno. Para las otras ramas, la transmitancia es una potencia entera de W_N . Así, notamos en la fig. 8 que son computadas dos TDFs de cuatro puntos, con $G(k)$ designando la TDF cuatro puntos de los puntos impares y $H(k)$ designando la TDF cuatro puntos de los puntos pares. $X(0)$ se obtiene multiplicando $H(0)$ por W_N^0 y sumando el producto a $G(0)$. $X(1)$ se obtiene multiplicando $H(1)$ por W_N^1 y sumando el producto resultante a $G(1)$. Para $X(4)$ se quiere multiplicar $H(4)$ por W_N^4 y sumar el resultado a $G(4)$. Sin embargo, puesto que $G(k)$ y $H(k)$ son periódicas en k con periodo 4, $H(4) = H(0)$ y $G(4) = G(0)$. Así $X(4)$ se obtiene multiplicando $H(0)$ por W_N^4 y sumando el resultado a $G(0)$.

Con los cálculos reestructurados acorde a la ec. (38), se compararán al número de multiplicaciones y de adiciones requeridas con las necesarias para calcular la TDF directa. Previamente se ha visto que el cálculo directo de la TDF sin explotar la simetría, se requieren N^2 multiplicaciones y adiciones complejas. Por comparación, la ec. (38) requiere el cálculo de dos TDF $N/2$ puntos, la cual requiere $2(N/2)^2$ multiplicaciones complejas y aproximadamente $2(N/2)^2$ adiciones complejas. Entonces las dos TDF $N/2$ puntos deben combinarse, requiriendo N multiplicaciones complejas correspondientes a multiplicar la segunda suma por W_N^k y entonces N adiciones complejas, correspondientes de sumar este producto con la primera suma. Consecuentemente, el cálculo de la ec. (38) para todos los valores de k requiere $N + 2(N/2)^2$ o $N + N^2/2$ multiplicaciones y adiciones complejas. Es fácil verificar que para $N > 2$, $N + N^2/2$ será menor que N^2 .

La ec. (38) corresponde a romper el cálculo N puntos original a el de dos $N/2$ puntos. Si $N/2$ es par, lo que sucede siempre si N es igual a una potencia de 2, entonces se puede considerar el cálculo de cada TDF $N/2$ puntos de la ec. (38) rompiendo cada suma de la ec. (38) en dos TDF de $N/4$ puntos, las cuales entonces se combinan para resultar en las TDF's de $N/2$ puntos. De este modo $G(k)$ y $H(k)$ de la ec. (38) podrían ser calculadas como:

$$G(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{rk} = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l)W_{N/2}^{lk} + \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1)W_{N/2}^{(2l+1)k}$$

o

$$G(k) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l)W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1)W_{N/4}^{lk} \quad (39)$$

De forma similar,

$$H(k) = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h(2l)W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^k \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h(2l+1)W_{N/4}^{lk} \quad (40)$$

De este modo si las TDF's cuatro puntos de la fig. 8 son calculadas de acuerdo a las ec. (39) y (40), entonces el cálculo podría ser llevado cabo como se indica en la fig. 9. Insertando el procedimiento de la fig. 9 dentro del diagrama de flujo de la fig. 8 se obtiene el diagrama de flujo completo de la fig. 10. Nótese que se utilizó el hecho de que $N_{N/2} = W_N^2$.

Para la TDF ocho puntos que ha sido utilizada en las ilustraciones, el cálculo ha sido reducido al cálculo de TDFs de dos puntos. La TDF dos puntos de, por ejemplo, $x(0)$ y $x(4)$, se dibuja en la fig. 11. Con el cálculo de la fig. 11 insertado en el diagrama de flujo de la fig. 10, se obtiene el diagrama de flujo completo para el cálculo de la TDF de ocho puntos, como se muestra en la fig. 12.

Para el caso más general con N siendo una potencia de 2 más grande que 3, se puede proceder descomponiendo la transformada 4 puntos en las ecs. (39) y (40) en transformadas de $N/8$ puntos, y continuar el proceso hasta tener sólo transformadas de dos puntos. Esto requiere v etapas de cálculos, donde $v = \log_2 N$. Previamente se ha encontrado que en la descomposición original de una transformada de N puntos en dos transformadas de $N/2$ puntos, el número de multiplicaciones y sumas complejas requeridas fue de $N + 2(N/2)^2$. Cuando las transformadas de $N/2$ puntos son descompuestas en transformadas de $N/4$ puntos, entonces el factor $(N/2)^2$ es reemplazado por $N/2 + 2(N/4)^2$, de forma que el cálculo completo entonces requiere $N + N + 4(N/4)^2$ multiplicaciones y adiciones complejas. Si $N = 2^v$, esto puede realizarse al menos $v = \log_2 N$, de manera que después de llevar a cabo la descomposición tantas veces como sea posible, el número de multiplicaciones y adiciones complejas es igual a $N \log_2 N$.

El diagrama de flujo de la fig. 12 muestra las operaciones explícitamente. Contando el número de ramas con transmitancias de la forma W_N^r , se nota que cada etapa tiene N multiplicaciones complejas y N adiciones complejas. Dado que hay $\log_2 N$ etapas, se tiene, como anteriormente, un total de $N \log_2 N$ multiplicaciones y adiciones complejas. Este es el mejoramiento computacional substancial que se había dicho que era posible. Todavía se puede explotar aún más la periodicidad de W_N^r para obtener más reducciones en el número de operaciones. Aquí no se tratará esto último y se recomienda remitirse para ahondar más en ello al libro de Oppenheim & Shafer o al artículo P. Kraniuskas, "A plain man guide to the FFT", *IEEE Signal Proc. Magazine*, April 1994, pp. 24-34.

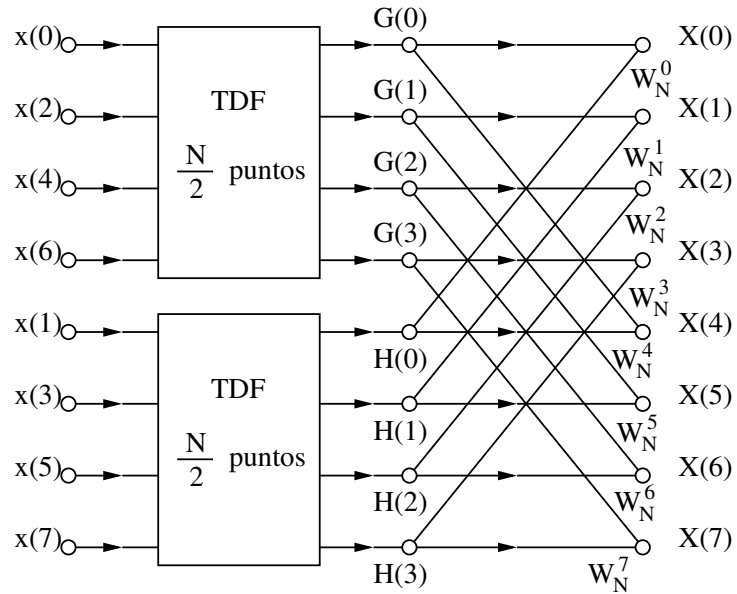


Figura 8: Diagrama de flujo de la decimación en tiempo de una TDF de N puntos en dos TDF de $N/2$ puntos.

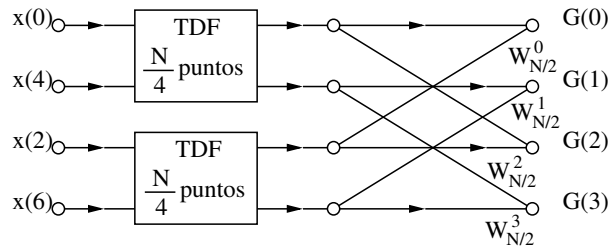


Figura 9: Diagrama de flujo de la decimación en tiempo de una TDF de $N/2$ puntos en dos TDF de $N/4$ puntos ($N = 8$).

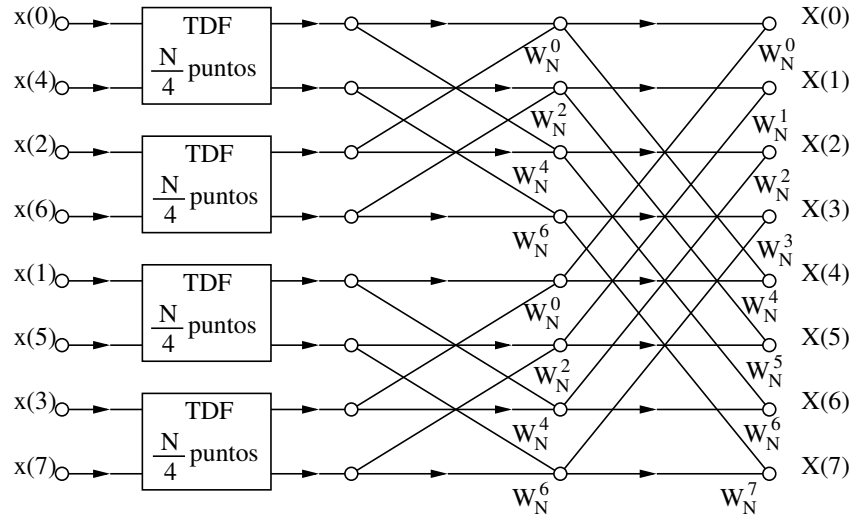


Figura 10: Resultado de la sustitución de la fig. 9 en la fig. 8.

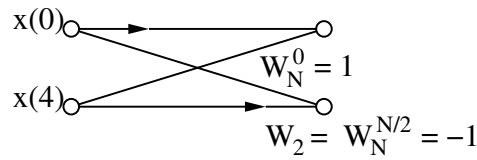


Figura 11: Diagrama de flujo de una TDF de 2 puntos.

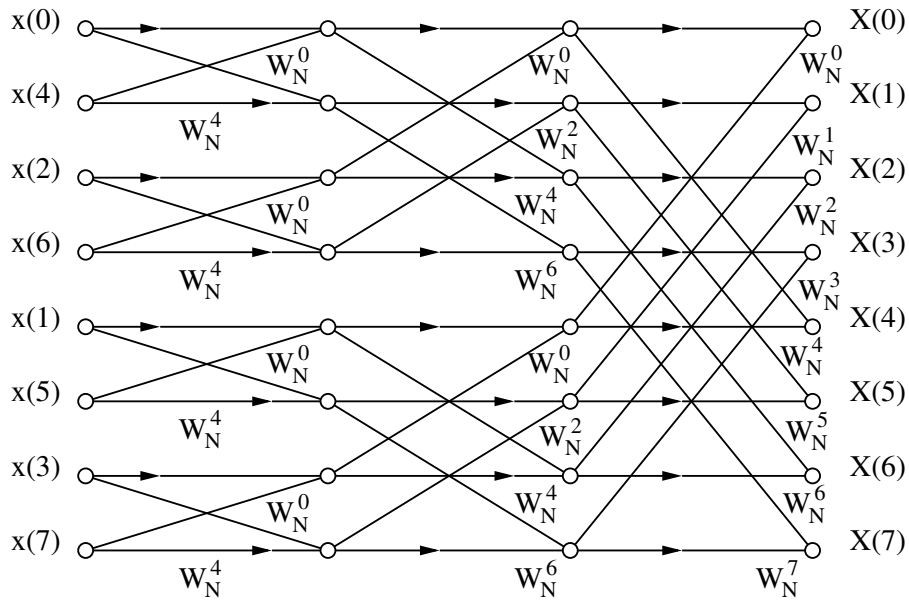


Figura 12: Diagrama completo de la decimación en tiempo de una TDF de 8 puntos.

Apéndice

Identidades de Euler (fórmulas útiles)

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$