Una nota sobre el método de calibración con dos círculos concéntricos

Dr. Luis Gerardo de la Fraga

14 de julio de 2017

En el artículo:

- J-S. Kim, P. Gurdjos, and I-S. Kweon, Geometric and algebraic constraints of projected concentric circles and their application to camera calibration, IEEE Trans. on Patt. Anal. Mach. Int., pp. 637–642, Vol. 27, No. 4, 2005,

la ecuación (7) es:

$$\Delta := \alpha_1 A_1^{-1} - \alpha_2 A_2^{-1} \text{ satisfying } \det \Delta = 0. \quad (1)$$

Dado que $\det \Delta = 0$, se tiene:

$$\det(\alpha_1 A_1^{-1} - \alpha_2 A_2^{-1}) = 0,$$

y dividiendo la expresión anterior anterior entre α_2^3, se obtiene:

$$\det\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} A_1^{-1} - A_2^{-1}\right) = 0.$$

En el mismo artículo definen $\beta := \alpha_1/\alpha_2$, entonces tenemos:

$$\det\left(\beta A_1^{-1} - A_2^{-1}\right) = 0. \quad (2)$$

La ecuación (2) es el problema de la eigendescomposición. Se puede ver haciendo:

$$\begin{aligned} \beta A_1^{-1}\mathbf{x} - A_2^{-1}\mathbf{x} = 0,& \\ \beta A_1^{-1}\mathbf{x} = A_2^{-1}\mathbf{x},& \quad \text{y,} \\ A_2^{-1}\mathbf{x} = \beta A_1^{-1}\mathbf{x}.& \end{aligned}$$

La última expresión en forma matricial es:

$$A_2^{-1} X = A_1^{-1} X D, \quad (3)$$

donde D es la matriz diagonal con los tres eigenvalores β.

A (3) se le conoce como **problema generalizado de eigenvalores o eigenvectores** o **eigendescomposición generalizada**. (3) se puede cambiar a una eigendescomposición estándar, simplemente haciendo:

$$A_1 A_2^{-1} X = X D, \quad (4)$$

La expresión $A_1 A_2^{-1}$ de la ecuación (4) viene en la página 639, segunda columna, del artículo, indicado como la matriz para encontrar sus eigenvalores (para encontrar los tres distintos valores de β).

Aquí el problema: En el pseudocódigo al final la primera columna de la página 639, indica se que tiene que hacer la eigendescomposición generalizada como `eig(A1, A2)`, que es equivalente a:

$$\begin{aligned} A_1 Y &= A_2 Y D_2, \\ A_2^{-1} A_1 Y &= Y D_2. \end{aligned} \quad (5)$$

¿Cómo es posible que D en (3) es igual a D_2 en (5)? (¿Lo hicieron a propósito los autores?)

Explicación: Si calculamos la transpuesta de (4):

$$\begin{aligned} (A_1 A_2^{-1} X)^{\mathrm{T}} &= (XD)^{\mathrm{T}}, \\ X^{\mathrm{T}} (A_2^{-1})^{\mathrm{T}} A_1^{\mathrm{T}} &= D^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}}, \\ X^{\mathrm{T}} A_2^{-1} A_1 &= D X^{\mathrm{T}}, \\ A_2^{-1} A_1 &= (X^{\mathrm{T}})^{-1} D X^{\mathrm{T}}, \\ A_2^{-1} A_1 (X^{\mathrm{T}})^{-1} &= (X^{\mathrm{T}})^{-1} D. \end{aligned}$$

Aquí se ha aprovechado que $A_1 = A_1^{\mathrm{T}}$ y $A_2 = A_2^{\mathrm{T}}$, por ser ambas matrices simétricas. Y como D es una matriz diagonal, también $D^{\mathrm{T}} = D$. También la inversa de una matriz simétrica es una matriz simétrica.

La última expresión es equivalente a (5), y aquí vemos claramente que $D_2 = D$, y $Y = (X^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Entonces, los eigenvalores de la matriz $A_1 A_2^{-1}$ en (4) son iguales a los eigenvalores de la matriz $A_2^{-1} A_1$ en (5).