

Diseño y Análisis de Algoritmos, 2023.

Tarea tres.

Maestría en Ciencias de la Computación, Cinvestav.

Entregar: miércoles 18 de Octubre

Resuelve los siguientes problemas, muestra tu trabajo. Entregar las soluciones por escrito.

1. Considera el algoritmo que vimos en clase para jugar cualquier juego. Dicho algoritmo recibe como entrada un estado X y un jugador *player*, y genera como salida si el estado es bueno o malo para el jugador. Modifica el algoritmo de tal forma que reciba como entrada un *buen* estado X y un jugador *player*, y genere como salida un buen movimiento para el mismo jugador. ¿Podrías modificar tu algoritmo para que genere todos los buenos movimientos para dicho jugador? ¿Cuál es la máxima altura del game tree generado si empezamos con el tablero en el que ningún jugador ha tir?
2. Una suma encadenada para un entero n es una secuencia de enteros en la que el primer elemento es siempre igual a 1 y el último elemento es siempre igual a n , además, cualquier elemento diferente del primero puede escribirse como la suma de cualesquiera dos anteriores, con repeticiones. Formalmente podemos describir una suma encadenada como una secuencia de enteros $x_0, x_1, x_2, \dots, x_\ell$ que satisface las siguientes propiedades:
 - $x_0 = 1$ y $x_\ell = n$,
 - para todo $k > 0$, existen índices i, j con $i \leq j < k$ tales que $x_k = x_i + x_j$.

La *longitud* de una suma encadenada es igual a ℓ , es decir, el número de elementos en la secuencia, menos uno.

Por ejemplo, la secuencia la secuencia 1, 2, 4 es una suma encadenada de longitud $\ell = 3$ para $n = 4$. La secuencia 1, 2, 3, 6, 12, 24, 30, 31 es una suma encadenada de longitud $\ell = 7$ para $n = 31$. Nota que la suma encadenada no es necesariamente única, por ejemplo, para $n = 8$, tanto la secuencia 1, 2, 4, 8 como la secuencia 1, 2, 3, 5, 8 son sumas encadenadas, la primera de longitud cuatro y la segunda de longitud cinco.

Diseña un algoritmo que utilice la técnica de backtracking, y que reciba como entrada n y devuelva como salida la suma encadenada de longitud más corta para n .

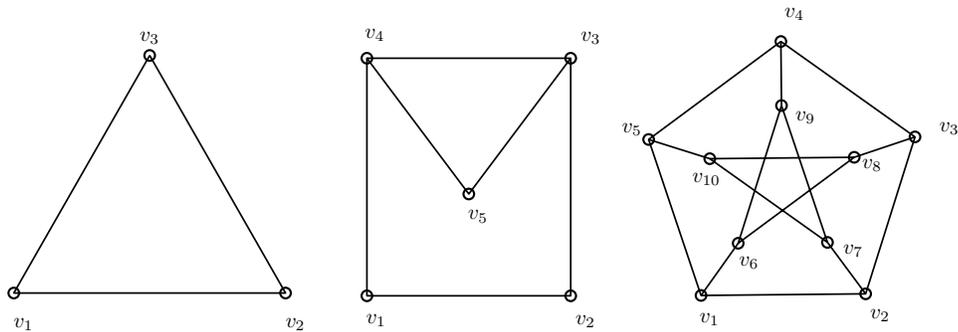


Figura 1: Se muestran tres gráficas distintas. La primera tiene como conjunto de vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ y como conjunto de aristas a $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$.

3. Considera el siguiente problema. Dado un arreglo A con n enteros positivos y un entero positivo t , deseamos determinar si existe una pareja de enteros en A cuya suma sea igual a t . Da un algoritmo que resuelva este problema y que tenga complejidad $O(n \lg n)$. ¿Podrías modificar tu algoritmo para que en tiempo menor de $O(n^3)$ determine si existe una terna de enteros en A cuya suma sea igual a t ? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Existirá tal algoritmo?
4. Coloración de gráficas.

Una gráfica G es una pareja de conjuntos $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito no vacío, y E es un conjunto de parejas de elementos de V . A los elementos de V les llamamos vértices y a los elementos de E les llamamos aristas. Generalmente una gráfica se representa con un diagrama, en donde los vértices son representados con pequeños círculos y las aristas son representadas con curvas entre vértices. Por ejemplo, en la Figura 4 se muestran tres gráficas distintas.

Considérese el conjunto de enteros $\{1, 2, \dots, k\}$, llamaremos a los elementos de este conjunto *colores*. Una k -coloración propia de los vértices de una gráfica G es una función que asigna un color a cada vértice de la gráfica, de tal forma que todos los pares de vértices que compartan una arista tengan colores distintos. En la figura 4 se muestran algunas gráficas coloreadas propiamente.

Diseña un algoritmo que resuelva el siguiente problema. Dada una gráfica G y un entero positivo k , decidir si G tiene una k -coloración propia.

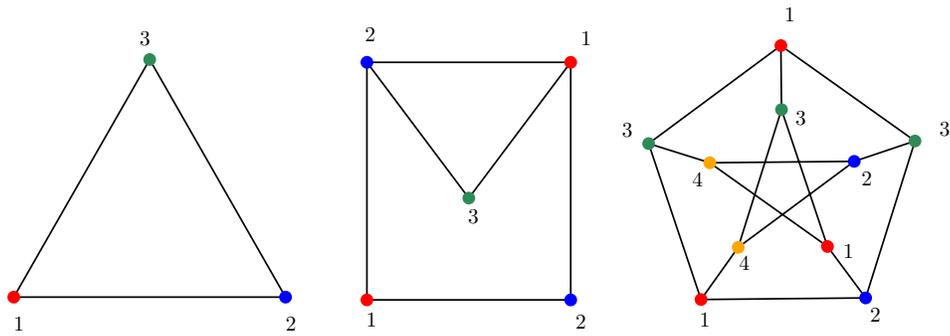


Figura 2: Se muestran tres gráficas distintas. La primera y la segunda están 3-coloreadas propiamente, y la última está 4-coloreada propiamente. Nótese que la primera y la segunda gráfica no se pueden colorear propiamente usando menos de tres colores, mientras que el mínimo número de colores para dar una coloración propia de la última gráfica es tres.