



**I.P.N.**

**Instituto Politécnico Nacional**

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Vibraciones de una Red Diatómica  
con  
Interacciones a Segundos Vecinos**

**T E S I S**

**ERASTO VICTOR VERGARA NAVA**

México, D. F.

1974

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FISICA Y MATEMATICAS

VIBRACIONES DE UNA RED DIATOMICA  
CON  
INTERACCIONES A SEGUNDOS VECINOS

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
LICENCIADO EN FISICA Y MATEMATICAS

PRESENTA

ERASTO VICTOR VERGARA NAVA

DIRECTOR DE TESIS

Dr. HAROLD V. McINTOSH

MEXICO, D.F. 1974

**A la memoria de mi padre, a mi madre, a mis hermanos y a Margarita.**

Agradezco al Dr. H. V. McIntosh por la ayuda que me prestó en este trabajo, al Fis. Rodolfo Reyes S., a los Licenciados Jesús Ortega Campos y José Luis Meza León.

Así como al Rector Dr. Sergio Flores S. y a las autoridades del Centro de Cálculo "Arq. Joel Arriaga N." por las facilidades en el uso del sistema I.B.M. 1130 que fue en el que se obtuvieron los resultados gráficos de este trabajo.

También a la Srita. Ma. Eugenia Ramos Montes de Oca por la mecanografía de este trabajo, así como a la Srita. Agustina Rosas Flores.

# Indice

Introducción

## PRIMERA PARTE

Definiciones y generalidades de la cadena diatómica

<b>I</b>		<b>1</b>
I-1	Generalidades . . . . .	1
I-2	Obtención de la matriz de movimiento del modelo de la cadena diatómica . . . . .	3
I-3	Eigenvalores y eigenvectores de la matriz de movimiento . . . . .	6
I-4	Matrices de recurrencia . . . . .	7
I-5	Relación de dispersión . . . . .	14

## SEGUNDA PARTE

Modelo de la cadena diatómica con diferentes condiciones a la frontera

<b>I.</b>	<b>Caso del modelo de la cadena diatómica con extremos fijos</b>	<b>17</b>
I-1	Caso cuando el modelo de la cadena tiene sus extremos fijos . . .	17
I-2	Amplificación de la gráfica (I-1) . . . . .	28
I-3	Caso del modelo de la cadena diatómica con masas pequeñas en los extremos . . . . .	31
I-4	Modelo de la cadena diatómica de ocho partículas intercambiando las masas . . . . .	33
I-5	Caso del modelo de la cadena diatómica cuando las partículas de los extremos son de masa grande . . . . .	35
<b>II.</b>	<b>Caso del modelo con extremos libres</b>	<b>37</b>
II-1	Caso del modelo de la cadena diatómica con partículas de masa pequeña en los extremos . . . . .	38
II-2	Caso del modelo cuando las partículas de los extremos son de masa grande . . . . .	40
<b>III.</b>	<b>Caso del modelo de la cadena con un extremo libre y otro fijo</b>	<b>43</b>

III-1 Caso cuando el modelo tiene sus partículas de los extremos de masa pequeña . . . . .	43
III-2 Caso cuando la cadena tiene partículas de masa grande en los extremos . . . . .	46
III-3 Conclusiones . . . . .	48
III-4 Gráfica para diferentes valores de los parámetros . . . . .	48

**TERCERA PARTE**

Caso especial del modelo de la cadena diatómica (anillo)

<b>I. Cadena cíclica o anillo diatómico</b>	<b>51</b>
<b>II. Transición entre la cadena lineal y la cíclica</b>	<b>57</b>
II-1 Conclusiones . . . . .	61
<b>Apéndice A Explicación de la gráficas de esta tesis</b>	<b>63</b>
<b>Apéndice B Programa principal PENTA</b>	<b>69</b>
<b>Apéndice C Programa principal PENHL</b>	<b>75</b>
<b>Apéndice D Programa principal PENCC</b>	<b>79</b>
<b>Apéndice E Subrutinas PENJA y el programa principal PENTA</b>	<b>83</b>
<b>Referencias</b>	<b>91</b>

Se generó este documento a partir de una tesis original, por lo que puede contener errores de transcripción. Se corrigieron algunos errores tipográficos evidentes.

# I N T R O D U C C I O N

Las vibraciones de una red o cadena son de gran utilidad en la descripción de muchos modelos físicos. Por ejemplo, la absorción de radiación infrarroja, la dispersión de rayos X, de electrones, así como el estudio de sólidos, líquidos y cristales, ya que se pueden presentar por algún tipo de cadena.

Ahora bien, en este trabajo presentaremos el estudio de las vibraciones y características de una cadena diatómica que es un caso especial.

El estudio lo dividimos en tres partes:

En la primera parte empezaremos dando algunas definiciones que nos serán de gran utilidad, tales como la de un modelo, modo normal de vibración que es la manera más simple de moverse el sistema, después introduciremos el concepto de matriz de recurrencia y su uso, así como el de relación de dispersión.

En la segunda parte nos limitaremos a analizar el comportamiento de varios casos de la cadena diatómica, cambiando las condiciones a la frontera, ya que pueden ser de extremos fijos, libres o una combinación. Obteniéndose propiedades sobresalientes como el movimiento exponencial.

En la tercera parte analizaremos el comportamiento de la cadena diatómica cíclica ( anillo diatómico ), cuya estructura es diferente a los modelos anteriores por lo que su comportamiento será diferente. Además presentaremos un estudio de la transición de la cadena líneal a la cadena cíclica comprobando los resultados anteriores.

Por lo último daremos las conclusiones más importantes de este trabajo, las cuales pueden ser tomadas en cuenta en la investigación de modelos más reales.

## **PRIMERA PARTE**

### **Definiciones y generalidades de la cadena diatómica**

# Capítulo I

## I-1 Generalidades

Se define como modelo de un sistema a la estructura cuyo comportamiento es conocido o se puede deducir a partir de bases teóricas, y que se asemeja bastante al sistema real en estudio.

Ahora bien, la selección del modelo más adecuado juega un papel importante, ya que debe ser en función de los objetivos y precisión que se requiera, para que así los resultados obtenidos sean lo más afines a nuestros intereses.

El modelo que nosotros adoptaremos para representar a una cadena diatómica unidimensional estará formado por dos clases de partículas (átomos), con masas distintas y unidas por medio de resortes, estos de masa despreciable, con constantes elásticas  $K$ , esquemáticamente tenemos.

Figura 1

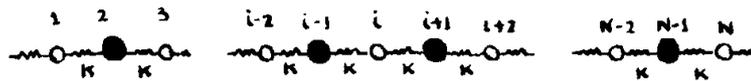


FIGURA DE UN MODELO DE LA CADENA DIATOMICA

Ahora bien, cuando se hace<sup>1</sup> vibrar a una cadena así constituida, se definen como grados de libertad de la cadena, a los diferentes movimientos más simples que pueda tener respecto a un sistema de coordenadas<sup>2</sup> cartesianas dichos

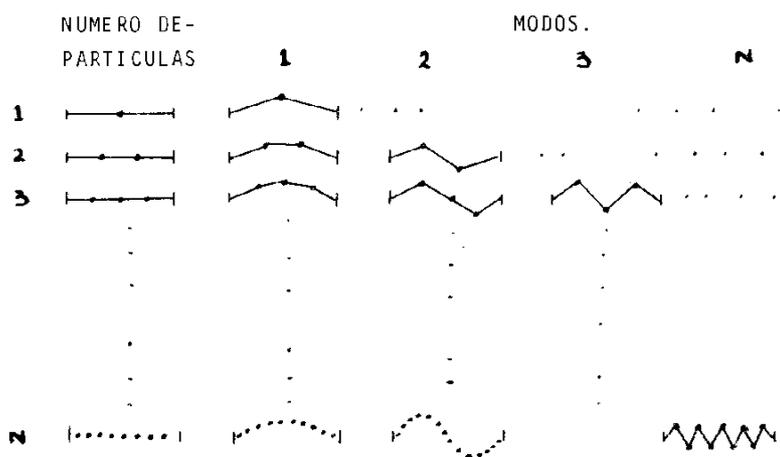
<sup>1</sup>La única forma de movimiento que se considerará para los desplazamientos de la cadena serán en sentido transversal.

<sup>2</sup>Por ser una cadena lineal sólo existiran movimientos en una sólo dirección o eje coordenado.

movimientos simples en la cadena estaran definidos en función de los movimientos armónicos simples de las partículas que la constituyen, dando lugar de esta manera en la red o cadena a los llamados modos normales de vibración.

Con el fin de aclarar más este punto consideremos gráficamente sistemas con diferentes grados de libertad y sus respectivos modos normales.

Figura 2



ESQUEMA DE CADENAS CON DIFERENTE NUMERO DE PARTICULAS Y SUS RESPECTIVOS MODOS NORMALES DE VIBRACION.

De lo anteriormente expuesto y con la figura 2 podemos concluir, que cuando una cadena esta formada por "n" partículas, tendrá "n" grados de libertad y en consecuencia "n" modos normales de vibración.

Siendo conveniente hacer notar que en cada modo normal, todas las partículas de la cadena oscilarán o vibrarán con la misma frecuencia y fase.

De esta manera, cualquier movimiento en la cadena será el resultado de una superposición de sus modos normales de vibración, de tal forma y en general cualquier movimiento de la cadena, estará descrito en función de dichos modos.

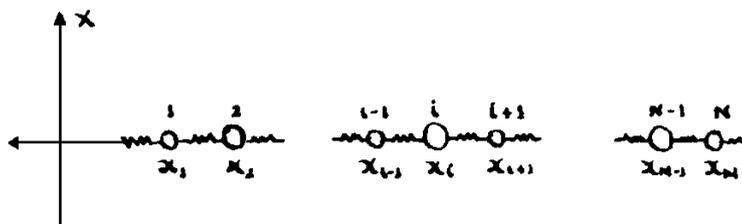
Como un caso especial y debido a que en general cada modo normal tiene su propia frecuencia; cuando a dos de estos les corresponde la misma frecuencia, se les llama modos degenerados, esta mención viene al caso, ya que la existencia de este tipo de modos será de interés más adelante cuando se vea el caso de la cadena diatómica cíclica.

## I-2 Obtención de la matriz de movimiento del modelo de la cadena diatómica

El siguiente paso es establecer el método que se usará para resolver este tipo de modelo de cadena.

Consideremos el modelo de la cadena diatómica compuesto de “n” partículas con sus extremos fijos y las partículas que intervienen de dos clases de masas diferentes en forma alternada; numeraremos a las partículas por la sucesión 1, 2, 3, 4...N, y los desplazamientos que sufran dichas partículas en relación a su posición de equilibrio lo denotaremos por  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , respectivamente; esquemáticamente tenemos:

Figura 3



REPRESENTACION DE UNA CADENA DIATOMICA CON “N” PARTICULAS

Al vibrar la cadena y suponiendo que la única fuerza que actúa es la de interacción a segundos vecinos, es decir la partícula  $i$ -ésima sólo interaccionará con las partículas  $i-2$ ,  $i-1$  a la izquierda y  $i+1$ ,  $i+2$  a la derecha, siendo la interacción con las demás partículas igual a cero.

Puesto que en nuestro modelo es válida la ley de Hooke la fuerza resultante aplicada a la  $i$ -ésima partícula, obedece a la ecuación del tipo:

$$\begin{aligned} F_i &= -K(X_i - X_{i-1}) - K(X_i - X_{i+1}) - K^1(X_i - X_{i-2}) - K^1(X_i - X_{i+2}) \\ &= -K(X_{i-1} + X_{i+1} - 2X_i) - K^1(X_{i+2} + X_{i-2} - 2X_i) \end{aligned} \quad (\text{I-1})$$

donde  $X_{i-2}, X_{i-1}, X_{i+1}, X_{i+2}$  son los correspondientes desplazamientos de los vecinos más próximos y  $K, K^1$  son las constantes que intervienen en el desplazamiento de la partícula  $i$  al interaccionar con sus primeros y segundos vecinos respectivamente.

De una manera análoga las fuerzas restantes sobre las partículas 1 y  $N$  serán de la forma:

$$F_1 = K(X_2 - 2X_1) + K^1(X_3 - 2X_1)$$

$$F_N = K(X_{N-1} - 2X_N) + K^1(X_{N-2} - 2X_N)$$

De las ecuaciones anteriores no podemos decir que (I-1), sea válida para todas las partículas, por lo que valiéndonos de un artificio que consiste en agregar dos partículas ficticias en cada extremo de la cadena, cuyos desplazamientos los consideramos iguales a cero, con la anterior suposición, las dos últimas ecuaciones tomarán la forma (I-1), y empleando un procedimiento análogo con las partículas 2 y N-1 la ecuación (I-1) será válida para todos los átomos de la cadena.

Expresando en otra forma la ecuación (I-1) que obedece a la segunda ley de Newton se tiene:

$$M_i \ddot{X}_i = K(X_{i-1} + X_{i+1} - 2X_i) + K^1(X_{i-2} + X_{i+2} - 2X_i)$$

$$= K^1 X_{i-2} + K X_{i-1} + 2(-K - K^1) X_i + K X_{i+1} + K^1 X_{i+2} \quad (\text{I-2})$$

Aplicando (I-2) a todas las partículas de la cadena y simplificando los coeficientes de los desplazamientos obtenemos el siguiente: sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, llamadas ecuaciones de movimiento.

$$M_1 \ddot{X}_1 = A_2 X_{-1} + A_1 X_0 + A_0 X_1 + A_1 X_2 + A_2 X_3$$

$$M_2 \ddot{X}_2 = A_2 X_0 + A_1 X_1 + A_0 X_2 + A_1 X_3 + A_2 X_4$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$M_i \ddot{X}_i = A_2 X_{i-2} + A_1 X_{i-1} + A_0 X_i + A_1 X_{i+1} + A_2 X_{i+2} \quad (\text{I-3})$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$M_N \ddot{X}_N = A_2 X_{N-2} + A_1 X_{N-1} + A_0 X_N + A_1 X_{N+1} + A_2 X_{N+2}$$

donde  $A_1 = K$ ,  $A_2 = K^1$  y  $A_0 = -2(K + K^1)$   
que expresada matricialmente adopta la siguiente forma:

$$M \ddot{X} = K X \quad (\text{I-4})$$

y en la que M y K son matrices de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & m_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & m_N \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & & & \\ A_1 & A_0 & A_1 & A_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 & A_1 & A_2 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

Despejando  $\ddot{X}_i$  de las ecuaciones de movimiento (I-3) obtenemos un sistema que en forma matricial puede ser expresado como:

$$\ddot{X} = M^{-1}KX \quad (\text{I-5})$$

Una forma de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden así presentado, es llegar a obtener los eigenvalores diagonalizando la matriz  $Q$  que es el producto  $KX$ .

Si se observa detenidamente la matriz  $Q$  se ve que no es simétrica, aunque no singular.

Ahora bien, empleando un método que permita que dicha matriz  $Q$  adopte una forma simétrica facilitará muchos los cálculos al efectuar la diagonalización, lo cual se logrará en la siguiente forma.

Se multiplica por la izquierda a ambos miembros de la ecuación (I-5) por la matriz que denotaremos por  $\sqrt{N}^{-1}$  que el resultado de aplicar el operador  $\sqrt{\quad}$  a cada uno de los elementos de la matriz diagonal  $M$  cuya estructura es:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{m_1} & & & & & \\ & 1/\sqrt{m_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1/\sqrt{m_i} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1/\sqrt{m_N} \end{bmatrix}$$



$$Y_i = C_1 e^{i\sqrt{\lambda_i}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda_i}t} \quad (\text{I-9})$$

Donde se sabe que la raíz cuadrada del eigenvalor  $\lambda_i$  representa la frecuencia temporal o característica con que vibrará la partícula “i”.

Debido a que en la cadena la partícula “i” interacciona con sus segundos vecinos; esta frecuencia de la partícula “i” es la frecuencia de algunos de los modos normales de vibración de la cadena, ya que de la ecuación (I-6) se puede ver que a cada eigenvalor  $\lambda_i$  de la matriz  $A$  le corresponde un eigenvector  $X_i$ ; por lo tanto la interpretación física que se les da a la raíz cuadrada de los eigenvalores de la matriz de movimiento es que representan a las frecuencias características de la cadena y los eigenvectores  $X_i$  los modos normales de vibración.

Tomando en cuenta que a cada modo normal le corresponde una frecuencia característica.

## I-4 Matrices de recurrencia

Desde el punto de vista ondulatorio podemos observar el comportamiento de la cadena de la siguiente forma.

Consideramos la ecuación de movimiento de la partícula i-ésima que en forma explícita la obtenemos usando el renglón i-ésimo de la ecuación (I-6); que bien puede ser:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_i}{dt^2} &= \lambda_i Y_i = \frac{A_2}{M} Y_{i-2} + \frac{A_1}{\sqrt{mM}} Y_{i-1} + \frac{A_0}{M} Y_i + \frac{A_1}{\sqrt{mM}} Y_{i+1} + \frac{A_2}{M} Y_{i+2} \\ \frac{d^2 Y_i}{dt^2} &= \lambda_i Y_i = \frac{A_2}{m} Y_{i-2} + \frac{A_1}{\sqrt{mM}} Y_{i-1} + \frac{A_0}{m} Y_i + \frac{A_1}{\sqrt{mM}} Y_{i+1} + \frac{A_2}{m} Y_{i+2} \end{aligned}$$

según la masa que le corresponda a la partícula i, trabajando simultaneamente las dos ecuaciones anteriores y despejando  $Y_{i+2}$  en cada una de ellas.

$$Y_{i+2} = -\frac{A_1}{A_2} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}} Y_{i+1} + \frac{\lambda_{im} - A_0}{A_2} Y_i - \frac{A_1}{A_2} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}} Y_{i-1} - Y_{i-2}$$

y que junto con las ecuaciones redundantes.

$$Y_{i+1} = Y_{i+1} \quad Y_i = Y_i \quad Y_{i-1} = Y_{i-1}$$

podemos formar los siguientes sistemas matriciales de recurrencia:

$$\begin{bmatrix} y_{i+2} \\ y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A_1}{A_2} \sqrt{\frac{M}{m}} & \frac{\lambda_{im} - A_0}{A_2} & \frac{-A_1}{A_2} \sqrt{\frac{m}{M}} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ y_{i+2} \end{bmatrix}$$

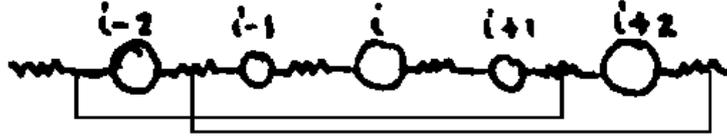
$$\begin{bmatrix} y_{i+2} \\ y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-A_1}{A_2} \sqrt{\frac{m}{M}} & \frac{\lambda i M - A_0}{A_2} & \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{M}{m}} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \end{bmatrix}$$

que con otra notación matricial más simple toman la siguiente forma:

$$Z_i = T_m Z_{i-1} \quad \text{y} \quad Z_i = T_M Z_{i-1} \quad (\text{I-10})$$

donde las matrices  $T_m$  y  $T_M$  se les conoce con el nombre de matrices de transferencia de la cadena diatómica.

Estas matrices nos permiten estudiar la variación en el espacio de un segmento, formado por un grupo determinado de partículas en función de otro similar; que en nuestro caso particular de interacción a segundos vecinos podemos estudiar el segmento formado por los cuatro desplazamientos de las partículas  $I+2$ ,  $I+1$ ,  $I$ ,  $I-1$  en términos del segmento similar formado por los desplazamientos de las partículas  $i+1$ ,  $i$ ,  $i-1$ ,  $i-2$ ; tal que si observamos a través de una ventana siempre tomaríamos cuatro partículas de la cadena, esto es en una forma esquemática se tiene:



Esquema de relación de dos ventanas.

Aplicando la Ec. (I-10) a las  $N$  partículas de la cadena obtenemos.

$$\begin{array}{llll} \text{Para} & i = 1 & \text{se tiene} & Z_1 = T_M Z_0 \\ & i = 2 & \text{se tiene} & Z_2 = T_M Z_1 = T_m T_M Z_0 \\ & i = i & & Z_i = T_M Z_{i-1} = T_m T_M \cdots Z_0 \\ \text{Sí} & i = N & \text{se tiene} & Z_N = T_M T_m T_M T_m \cdots Z_0 \end{array} \quad (\text{I-11})$$

$$\text{donde} \quad Z_0 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \\ y_{-1} \end{bmatrix} \quad Z_N = \begin{bmatrix} y_{N+2} \\ y_{N+1} \\ y_N \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

La última ecuación del sistema (I-11) nos dá en forma explícita todas las matrices de transferencia de la cadena diatómica que se presentan en forma alternada debido a la estructura misma de la cadena; matriz que nos permite estudiar una porción de la cadena que hemos llamado ventana (por similitud al alcance visual que se tiene cuando se hace una observación a través de ella) de tal forma que dicha ventana abarcará a cuatro partículas de nuestra cadena.

El empleo de la matriz de recurrencia que esta ligado en forma explícita a una ventana, cobra interés ya que podemos estudiar cada una de ellas en función de la anterior, donde esta última contiene a las tres primeras partículas de la ventana en estudio.

Por tal motivo la matriz de transferencia que tiene un caracter recursivo es una herramienta que nos sirve para estudiar la cadena por segmentos que la constituyen.

Debido a la importancia que tiene la matriz de recurrencia, es de interés encontrar los eigenvalores y sus eigenvectores, los que servirán para tener su interpretación física por estar relacionada con el movimiento general de la cadena.

Por lo que la ecuación para encontrar los eigenvalores de la matriz de transferencia se representa como:

$$TZ = \mu Z \quad (\text{I-12})$$

Donde se ha denotado por  $T$  a la matriz de recurrencia en una forma general, ya que no nos importará la masa que inicialice la ventana pues el análisis es el mismo para cualquier tipo de matriz  $T_M$  o  $T_m$ .

Al interpretar una ventana por medio de eigenvectores de  $T$ , donde cada componente de cada eigenvector es multiplicada por un factor  $\mu$  (al pasar de una partícula a otra) y como cada eigenvector de la matriz  $T$  es debido a los desplazamientos de las partículas en la ventana que se esta analizando, entonces los cuatro eigenvectores de la matriz  $T$  se suman, dando un vector que representa el comportamiento de la ventana, por lo que es posible relacionar físicamente una ventana con una onda, y al tratar el análisis de la cadena como una superposición de ondas.

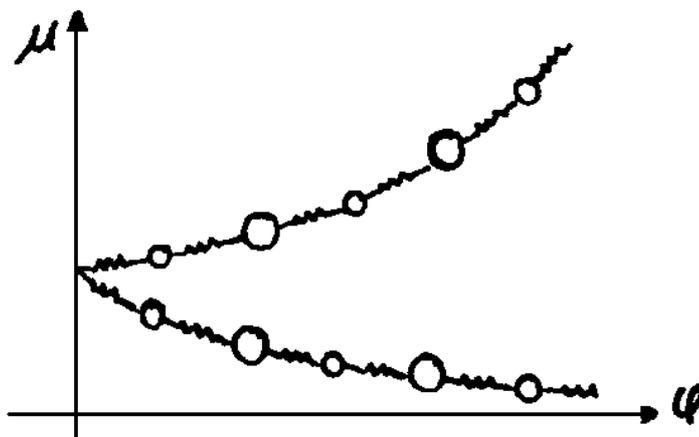
Por esto la interpretación física que se les da a los eigenvectores de la matriz de transferencia, es que dan origen a las ondas. Donde la constante de propagación es el eigenvalor  $\mu$  ya que estas ondas son multiplicadas por el factor  $\mu$  cuando se corre la ventana.

Y a este factor  $\mu$  que es el eigenvalor de la matriz de recurrencia se le conoce con el nombre de frecuencia espacial o número de onda, pues nos da la variación en el espacio. Existiendo cuatro casos de importancia para  $\mu$  que nos van a servir para distinguir la propagación de las oscilaciones, amortiguamientos, o crecimientos de estas ondas dentro de la cadena.

Por lo tanto será conveniente definir el logaritmo del número de onda  $\mu$  que podemos denotar por  $\varphi$ , entonces  $\ell_n \mu = \varphi$ .

### PRIMER CASO

Si  $\varphi$  es real positivo o negativo esto implica que  $\mu$  es real positivo o negativo, y como  $\ell m \mu = \varphi$  por lo que el comportamiento de la cadena en esa ventana será de forma exponencial creciente o decreciente dependiendo de que  $\varphi$  sea positivo o negativo; esquemáticamente tenemos:



ESQUEMA DEL MOVIMIENTO DE LA CADENA CUANDO EL EIGENVALOR O NUMERO DE ONDA ES EXPONENCIAL

### SEGUNDO CASO

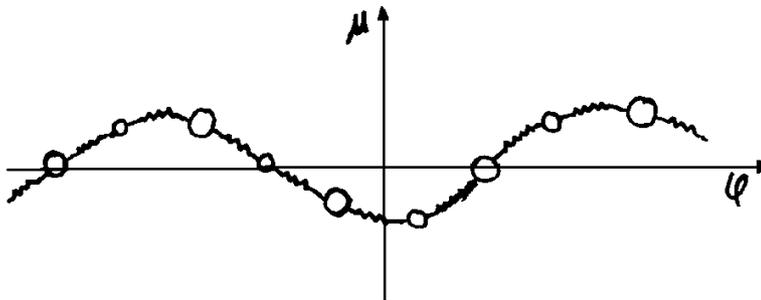
Si  $\varphi$  es imaginario de la forma  $\varphi = i \beta$  entonces

$$\mu = e^{i\beta} = \cos\beta + i \operatorname{sen}\beta$$

Por lo tanto, el comportamiento de la cadena en esa ventana será una forma senoidal o cosenoidal es decir de tipo ondulatorio, y como al pasar de una partícula a otra tenemos que multiplicar por el factor  $\mu$  cuyo módulo es:

$$|\mu| = |e^{i\beta}| = |\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta| = \sqrt{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta} = 1$$

Por lo que el movimiento será ondulatorio aunque la amplitud se conserve constante, esquemáticamente tenemos:

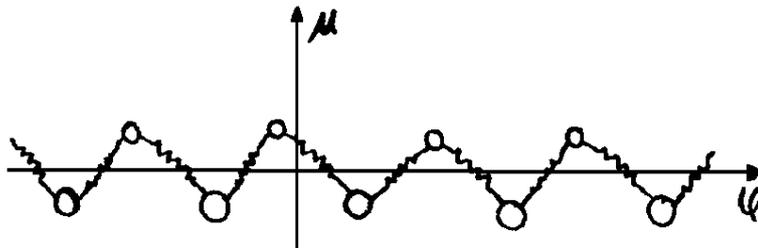


Esquema del movimiento de la cadena cuando el número de onda es un imaginario puro.

### TERCER CASO

Si es de la forma  $\varphi = \alpha + i\pi$  donde  $\alpha$  es real, entonces  $\mu = e^{\alpha+i\pi} = e^{\alpha}e^{i\pi} = e^{\alpha}(\cos\pi + i\text{sen}\pi) = -e^{\alpha}$  que como se sabe al pasar de una partícula a otra, hay que multiplicar por el número de onda  $-e^{\alpha}$ , el cual produce defasamientos de  $180^\circ$  entre las partículas contiguas de la cadena debido al signo negativo, por lo que se observarán oscilaciones con inversiones completas de fase. Una característica que se puede observar es que las partículas alternantes tendrán el mismo comportamiento.

En general sí N es par las partículas 2, 4, 6, ...,  $i + 2$ ,  $i + 4$ , .....  $2N$ ,  $2N + 2$  tienen el mismo comportamiento o sea van en la misma fase y las partículas 1, 3, 5, .....  $i + 1$ , ..  $2N + 1$  tienen la misma fase, esquematizando obtenemos.



Esquema de movimiento de la cadena cuando el número de onda es de la forma

### CUARTO CASO

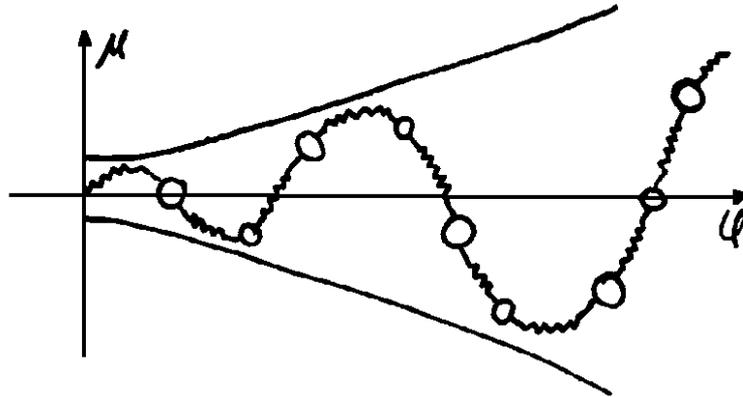
Si  $\varphi$  es complejo de la forma  $\varphi = \alpha + i\beta$  y donde  $\alpha, \beta$  son reales entonces.

$$\mu = e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(e^{i\beta}) = e^{\alpha}(\cos\beta + i\text{sen}\beta)$$

Por lo cual el comportamiento de la cadena será senoidal o cosenoidal (o sea del tipo ondulatorio) afectado por el factor exponencial  $\epsilon^\alpha$  que depende de la parte real de  $\varphi$ .

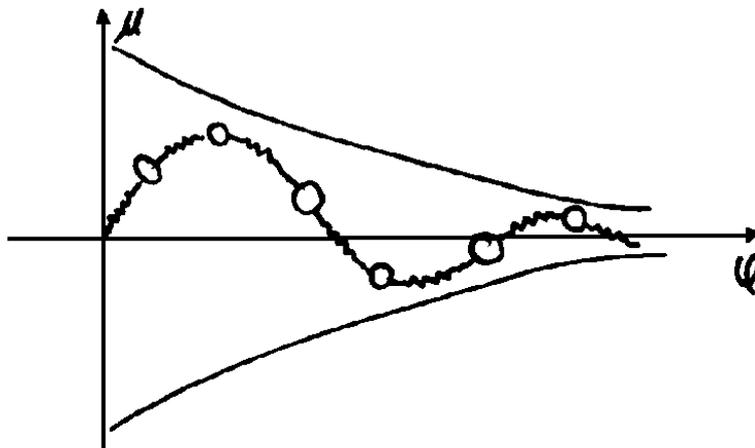
Esta parte real de  $\varphi(\epsilon^\alpha)$  puede ser de dos tipos

1.-  $\varphi$  es exponencial creciente quedando el movimiento de la cadena de la siguiente forma.



ESQUEMA DEL MOVIMIENTO DE LA CADENA CUANDO  $\alpha > 0$

2.-  $\varphi$  es exponencial decreciente afectando el movimiento ondulatorio de la cadena de la siguiente manera:



ESQUEMA DEL MOVIMIENTO DE LA CADENA CUANDO  $\alpha < 0$

Ahora bién, con el fin de facilitar el algebra es conveniente definir a  $m$   $M$  y a la razón de masas, así como el cociente de las constantes elásticas como parámetros, esto es:

$$mM = \mu \quad \rho^2 = \frac{m}{M} \quad K = \frac{A_1}{A_2}$$

con lo que las matrices (I-11) toman la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} -K/\rho & (\lambda M - A_0)/A_2 & -K/\rho & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -K\rho & (\lambda M - A_0)/A_2 & -K\rho & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como la estructura de la cadena es tal que las masas de las partículas se alternan, es conveniente multiplicarlas para así obtener la matriz de transeferencia de una molécula, resultando:

$$T_d = \begin{bmatrix} K^2 + \frac{(\lambda M - A_0)}{A_2} & \frac{-k}{\rho} \left[ \frac{(\lambda m - A_0)}{A_2} \right] \frac{-K}{\rho} & K^2 - 1 & \frac{K}{\rho} \\ -K\rho & \frac{(\lambda m - A_0)}{A_2} & -K\rho & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I-13})$$

de las definiciones anteriores se puede notar que

$$m = \mu\rho \Rightarrow \rho = \frac{mM}{\mu M} = \frac{\mu^2}{\mu M} = \frac{\mu}{M}$$

$$M = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\frac{\lambda M}{A_2} = \frac{\lambda\mu}{A_2\rho}$$

$$\frac{\lambda m}{A_2} = \frac{\lambda\mu\rho}{A_2}$$

por lo que definimos el siguiente parámetro:

$$\varepsilon = \frac{\lambda M}{A_2} = \frac{\lambda\sqrt{Mm}}{A_2}$$

que depende en la media geométrica de las masas y en la constante elástica de segundos vecinos.

$$\text{Además sabemos que } A_o = -2(A_1 + A_2)$$

$$\text{entonces } \frac{-A_o}{A_2} = 2(k + 1)$$

Sustituyendo estos resultados en (I-12) obtenemos finalmente la matriz de transferencia,  $T_d$  para una molécula de la cadena diatómica, es decir dos partículas seguidas.

$$T_d = \begin{bmatrix} K^2 + \frac{\varepsilon}{\rho} + 2(K + 1) & \frac{-K}{\rho}[\varepsilon\rho + 2(K + 1) + 1] & K^2 + 1 & K/\varepsilon \\ -K\rho & \varepsilon\rho + 2(K + 1) & -K\rho & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I-14})$$

## I-5 Relación de dispersión

Ahora bién al analizar el movimiento del modelo de la cadena diatómica, las frecuencias temporal  $\lambda$  y espacial  $\mu$  van a variar, por lo que la velocidad de las ondas va a estar dada por el cociente de la frecuencia temporal  $\lambda$  y la frecuencia espacial  $\mu$ , lo cual nos servirá para interpretar mejor los resultados que se obtengan.

Por lo tanto se define como relación de dispersión a cualquier función que relaciona a estas dos frecuencias, siendo esta una forma de caracterizar el movimiento de la cadena, ya que si la relación de dispersión es constante entonces las ondas que representan el movimiento de la cadena no sufrirán distorsión en su forma, en presencia de un tren de ondas; es decir no dependen de la longitud de onda. Recíprocamente cuando la relación de dispersión no es constante entonces las ondas si serán distorsionadas en su forma, es decir dependen de la longitud de onda.

Una relación de dispersión para el modelo de la cadena diatómica se puede obtener al encontrar los eigenvalores  $\mu$  de la matriz de recurrencia  $T_d$  esto es:

$$\begin{bmatrix} K^2 - \varepsilon\rho + 2(K + 1) - \mu & \frac{-K}{\rho}(\varepsilon\rho + 2(K + 1) + 1) & K^2 - 1 & K/\rho \\ K\rho & \varepsilon\rho + 2(K + 1) - \mu & -K\rho & -1 \\ 1 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

resultando.

$$\begin{aligned}
& -\mu K^2(\varepsilon\rho + 2K + 3) - (K^2 - 1) + \mu^2(K^2 - 1)(\varepsilon\rho + 2K + 2 - \mu) + K^2 - \\
& -\mu[-\mu(K^2 + \varepsilon/\rho + 2(K + 1) - \mu)(\varepsilon\rho + 2K + 2 - \mu) - K^2 + \\
& + (K^2 + \varepsilon/\rho + 2(K + 1) - \mu) + \mu^2 K^2(\varepsilon\rho + 2K + 3)] = 0
\end{aligned}$$

Agrupando y reduciendo obtenemos finalmente la relación de dispersión que relaciona a  $\mu$  y  $\varepsilon$  ( donde  $\varepsilon$  se definió en función de  $\lambda$ ) esto es:

$$\begin{aligned}
& \mu^4 - \mu^3[K^2 + \varepsilon(\rho + 1/\rho) + 4(K + 1)] + \mu^2[4(K + 1)^2 - 2K^2 + 2 + \\
& + 2(K + 1)\varepsilon(\rho + 1/\rho) + \varepsilon^2] - \mu[K^2 + \varepsilon(\rho + 1/\rho) + 4(K + 1)] + 1 = 0 \quad (\text{I-15})
\end{aligned}$$

la cual nos da los números de onda de la cadena diatómica que después utilizaremos para comprobar el comportamiento que se observe.

## Segunda Parte

Modelo de la cadena diatómica  
con diferentes condiciones a la frontera

# Capítulo I

La finalidad de esta parte es conocer en forma amplia el comportamiento del modelo de la cadena diatómica con interacción a segundos vecinos.

Por lo que se tratarán varios casos del modelo, haciendo variar las condiciones a la frontera de dicho modelo, y con los resultados que se obtengan; mencionar las conclusiones mas importantes.

Los casos que trataremos son extremos fijos, libres y una combinación es decir un extremo libre y otro fijo.

Por tal motivo es conveniente ver el apéndice A de este trabajo ya que ahí se hace una explicación más detallada de las tres clases de gráficas que nos van a dar el comportamiento general del caso que estamos estudiando.

## I-1 Caso cuando el modelo de la cadena tiene sus extremos fijos

Como el modelo que hemos adoptado para representar a la cadena diatómica consiste de  $N$  partículas con dos tipos de masas diferentes, que se presentan en una forma alternada entonces podemos denotar por una masa pequeña  $m$  a un tipo y por una masa grande  $M$  al otro tipo, esquemáticamente tenemos.

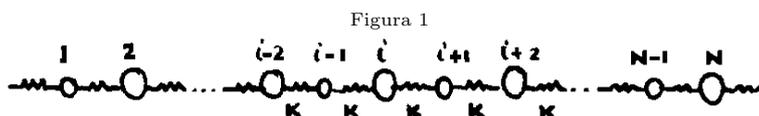


Figura del modelo de cadena diatómica de  $N$  partículas.

Ahora bién, el comportamiento general para este caso del modelo<sup>3</sup> va a estar determinado por el espectro, de todas las frecuencias características o eigenvalores de la matriz de movimiento, por una superposición de todos los modos normales de vibración y sus respectivos números de onda. Por tal motivo necesitamos conocer en forma explícita la matriz de movimiento para este caso del modelo, la cual se encontró en la primera parte por (I-6), esto es:

<sup>3</sup>Este tipo de tratamiento es similar para todos los casos.



imposible observar de una manera clara el movimiento general de la cadena, por lo que la gráfica (I-2) esta dividida en 8 subgráficas, presentándose cada una de ellas en una página diferente.

Cada una de las subgráficas va a tener en la parte superior la gráfica de uno de los diferentes modos normales de vibración. Que observando con detalle cada una de las gráficas es posible ver ciertas discontinuidades, siendo este un resultado que ya se esperaba; excluyendo el modo 8 que es al que le corresponde la frecuencia mas baja, ya que no presenta en su gráfica puntos nodales. Por lo que podemos decir que este modo es el mas subceptible a todo tipo de variación.

Las gráficas de los modos normales, así como las de los demás casos se obtuvieron por medio del programa principal PENHL cuyo listado se encuentra en el apéndice C.

Lo único que falta para un estudio completo de este caso, es conocer en que región (es) esta(n) definida(s) la(s) gráfica(s) de los números de onda correspondientes a cada una de las frecuencias temporales del espectro. Por lo tanto la forma de obtener esos números de onda es haciendo uso de la siguiente relación de dispersión.

$$C = \frac{2(\rho\varepsilon + (K + 2)) \pm \sqrt{4[(\rho\varepsilon + (K + 2))^2 + 2\rho\varepsilon(K + 1) + 2(K^2 + 2K + 1)]}}{8} \quad (\text{I-2})$$

la cual se deduce con detalle en el apéndice A.

Las gráficas de los números de onda serán de gran utilidad ya que el comportamiento de la cadena desde el punto de vista ondulatorio va a depender de la(s) region(es) donde se encuentren definidas las gráficas de estos números de onda.

Estas gráficas se obtuvieron haciendo uso del programa principal PENCC cuyo listado se encuentra en el apéndice D.

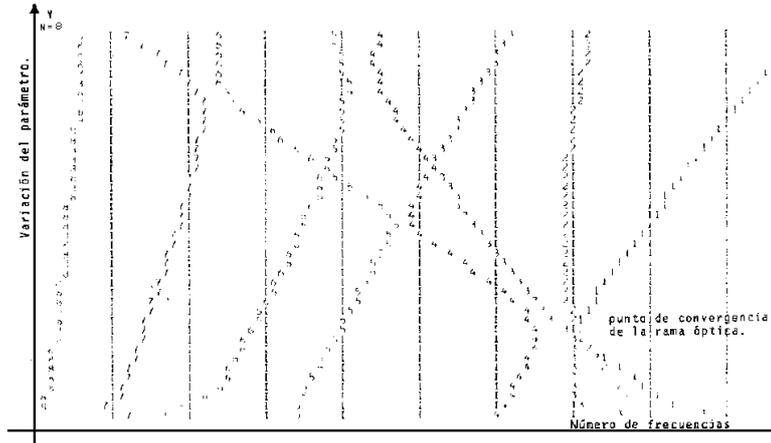
Cada una de estas gráficas se presenta en la parte inferior de las subgráficas, que componen a la gráfica (I-2).

Observando las gráficas de los números de onda, correspondientes a la frecuencia de la rama óptica, (es decir las frecuencias 1,2,3,4 ) se puede ver que estan definidas en la región exponencial cuando el valor del parámetro  $A_1$  es cercano al punto de convergencia. Por lo que se espera que el comportamiento de la cadena diatómica sea en forma exponencial en ese punto de convergencia.

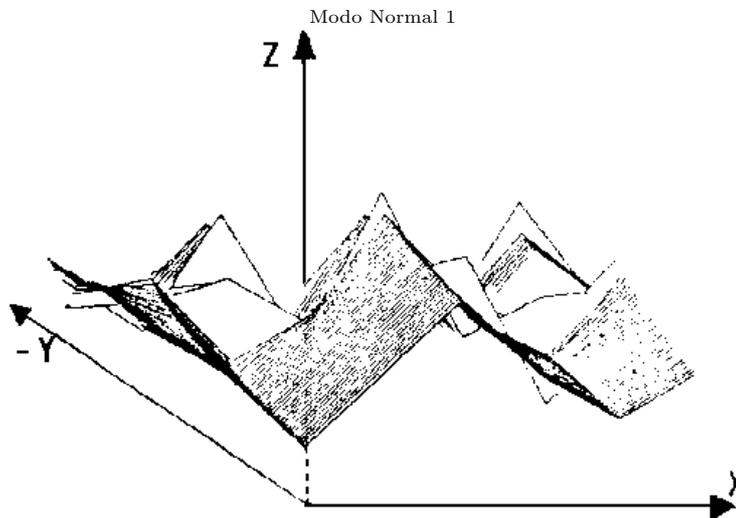
Con el fin de entender las gráficas de los modos normales de vibración es conveniente mencionar el sistema de coordenadas que se usó al obtener dichas gráficas. Entonces en el eje  $X$  se da la posición de las partículas de la cadena, el eje  $Z$  nos da la amplitud que sufra cada una de las partículas y la parte negativa del eje  $Y$  nos da la variación del parámetro que en esta parte es la constante elástica de primeros vecinos  $A_1$ .

Así mismo el sistema de coordenadas que se usó en las gráficas de los números de onda son las raíces  $C_1$  y  $C_2$  que resultan al resolver la relación de dispersión (I-2).

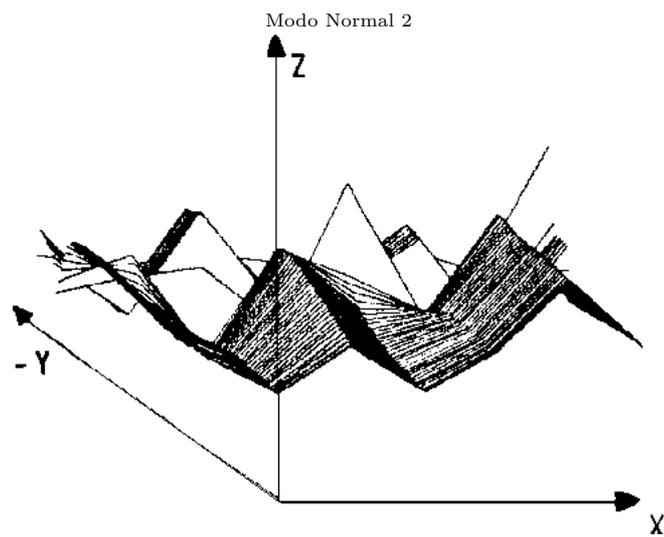
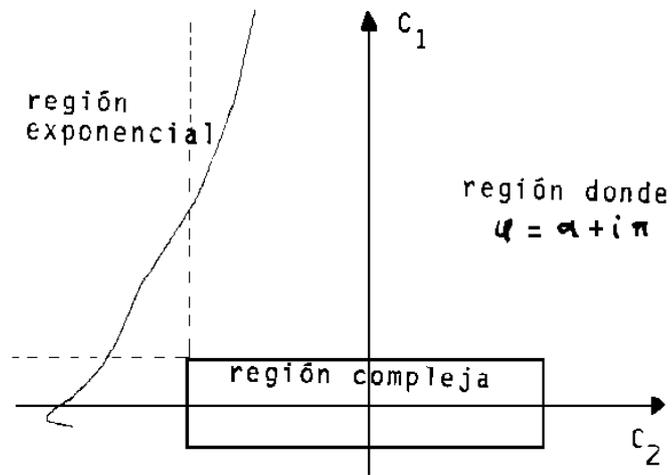
Gráfica I-1



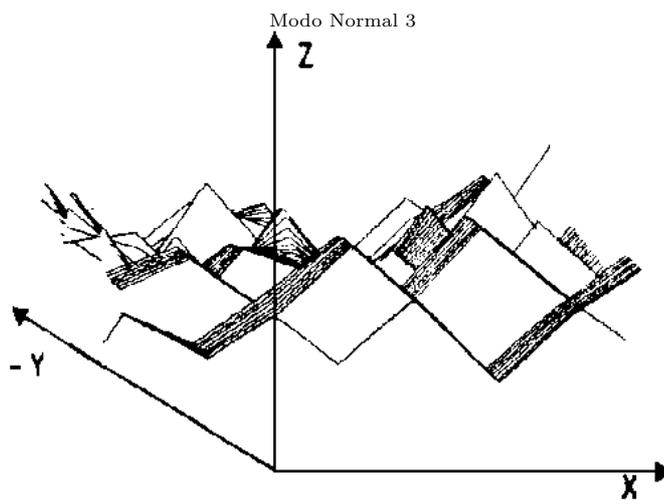
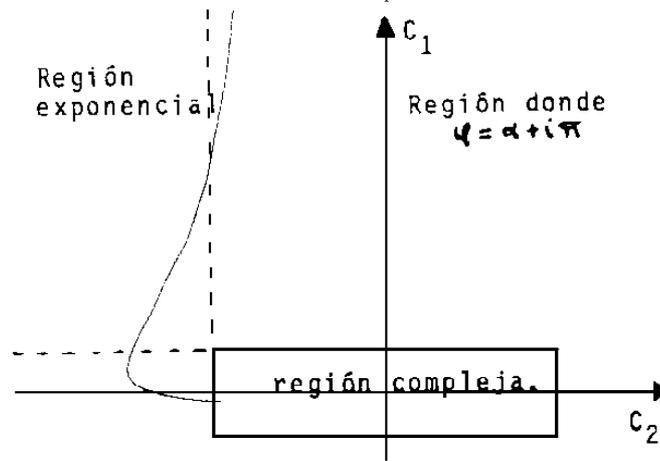
Gráfica del negativo del cuadrado de las frecuencias características o temporales del modelo de la cadena diatómica de 8 partículas, en donde el parámetro que se modifica es la constante elástica  $A_1$  de primeros vecinos de tal forma que  $A_1 + A_2$  constante, siendo  $A_2$  la constante elástica de segundos vecinos. El eje Y corresponde a la variación del parámetro y el eje X corresponde al número de frecuencias permitidas del espectro. La parte interesante en este trabajo es el punto de convergencia de la rama óptica, ya que existe una degeneración en ese punto, como se puede ver en la gráfica.



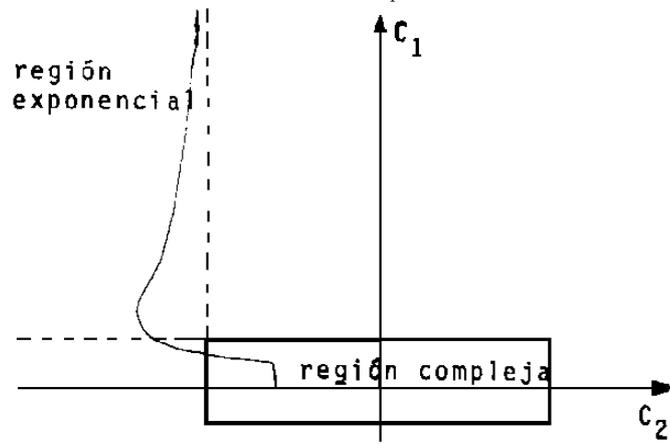
Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 1.



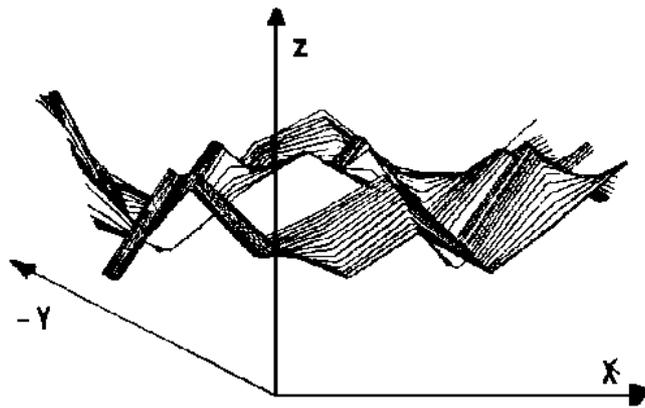
Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 2.

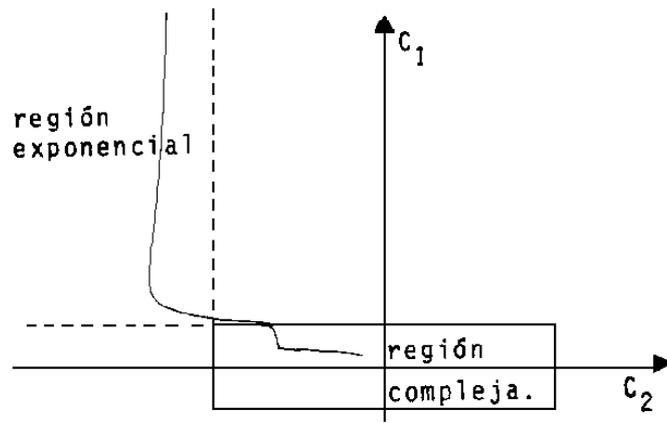


Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 3.

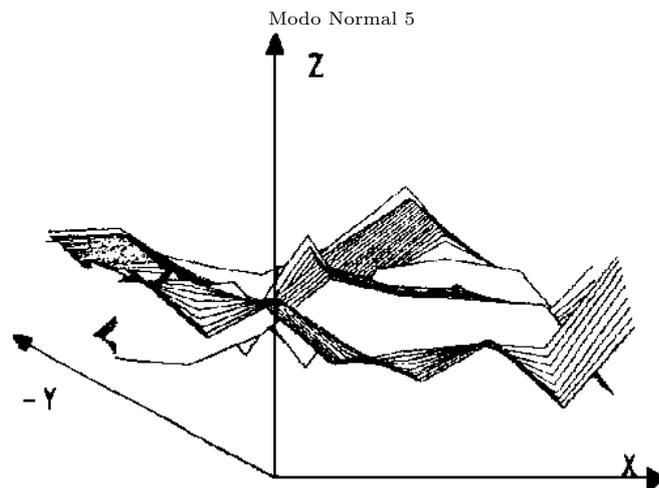


Modo Normal 4

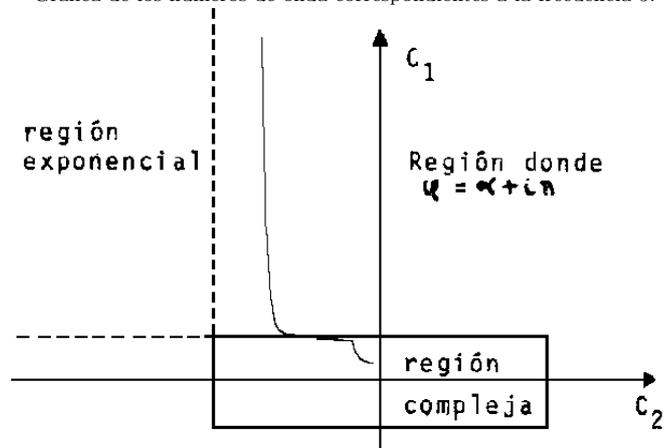




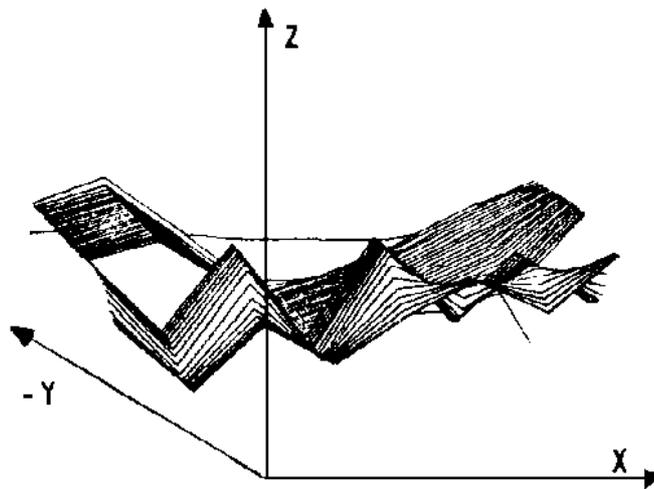
Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 4.



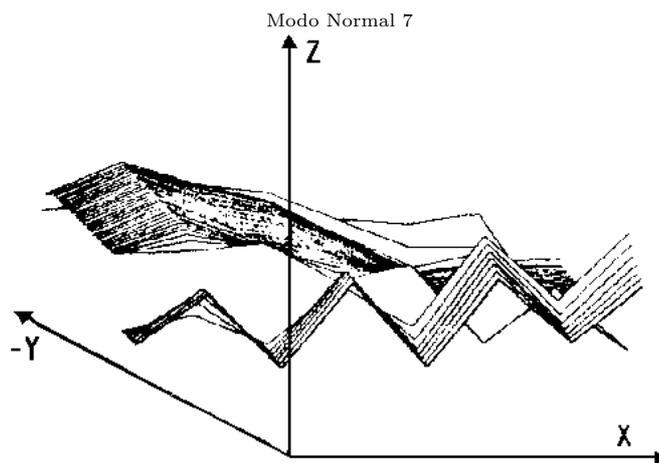
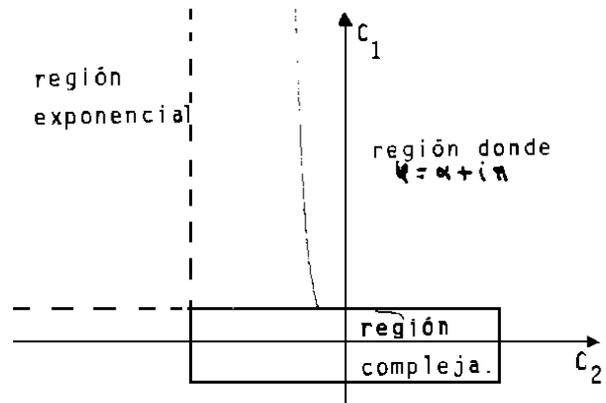
Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 5.



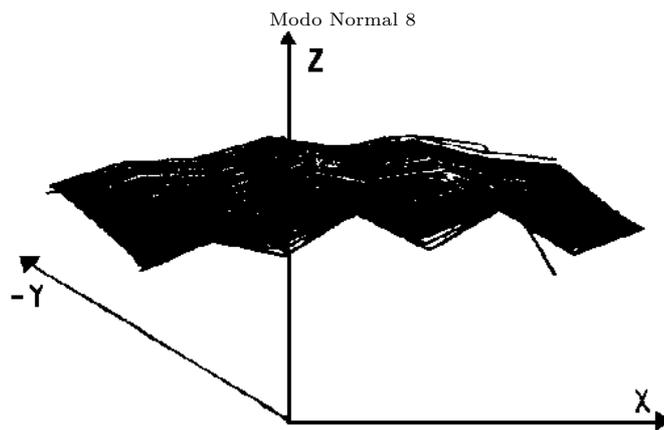
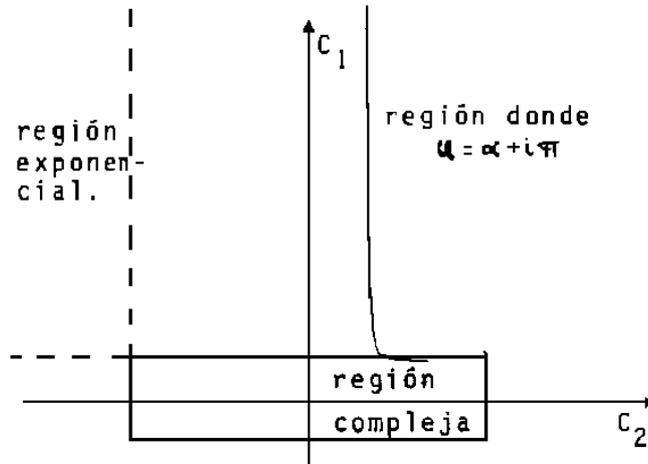
Modo Normal 6



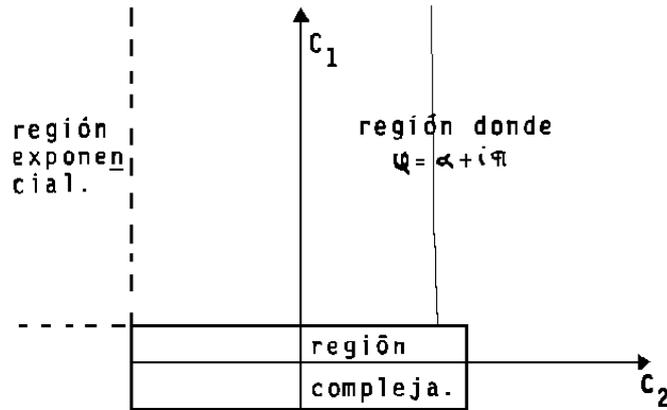
Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 6.



Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 7.



Gráfica de los números de onda correspondientes a la frecuencia 8.



## I-2 Amplificación de la gráfica (I-1)

En esta sección se amplificará la gráfica (I-1) en el punto donde convergen las frecuencias de la rama óptica; analizando cual es el comportamiento de los modos normales de vibración, así como el de los correspondientes números de onda.

Esto se logró haciendo dos cambios fundamentalmente.

- 1.- Agregando a la subrutina PENGR dos argumentos  $W_1$ ,  $W_2$  que van hacer los límites inferior y superior de lo que se desea graficar.
- 2.- En el programa principal se tomó el valor de las constantes elásticas  $A_1$ ,  $A_2$  desde donde se empieza a cruzar las frecuencias. Por lo tanto los valores serán:

$$W_1 = 4.0, \quad W_2 = 8.0, \quad A_1 = 1.5, \quad A_2 = 0.5$$

$$XM = 1.50 \quad F = 0.008$$

La gráfica(I-3) nos muestra el espectro de frecuencias en el punto de convergencia ya amplificado, por lo que sólo aparecen las frecuencias de la rama óptica. Entonces para conocer el comportamiento de la cadena en este momento se obtuvieron las gráficas de los modos normales de vibración correspondientes.

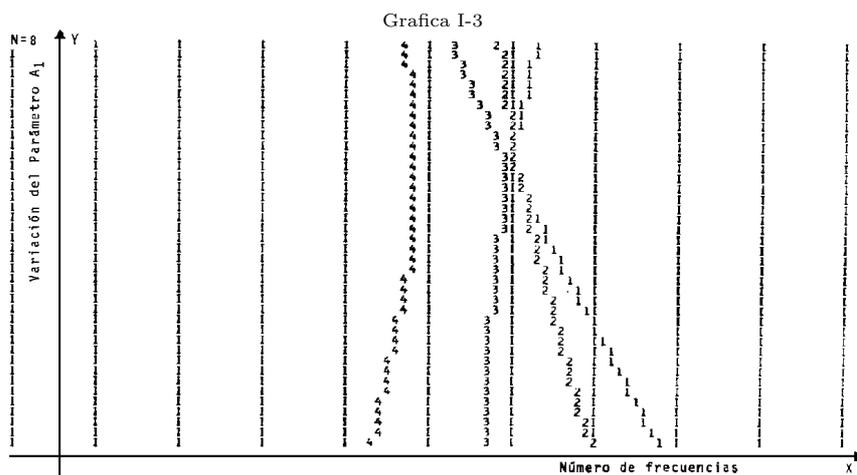
Pero sólo mostraremos lo más importante de este comportamiento, es decir el modo cuyo movimiento sea en forma exponencial.

En la gráfica (I-4) aparece el modo normal cuatro correspondiente a la frecuencia cuatro, el cual tiene la forma de una exponencial negativa tomando en cuenta a las partículas pequeñas, que es un comportamiento que ya se esperaba.

También en la gráfica (I-4) aparecen los números de onda correspondientes a la frecuencia cuatro, cuya gráfica se puede ver que esta definida en la región exponencial, siendo esto la comprobación que lo observado es correcto.

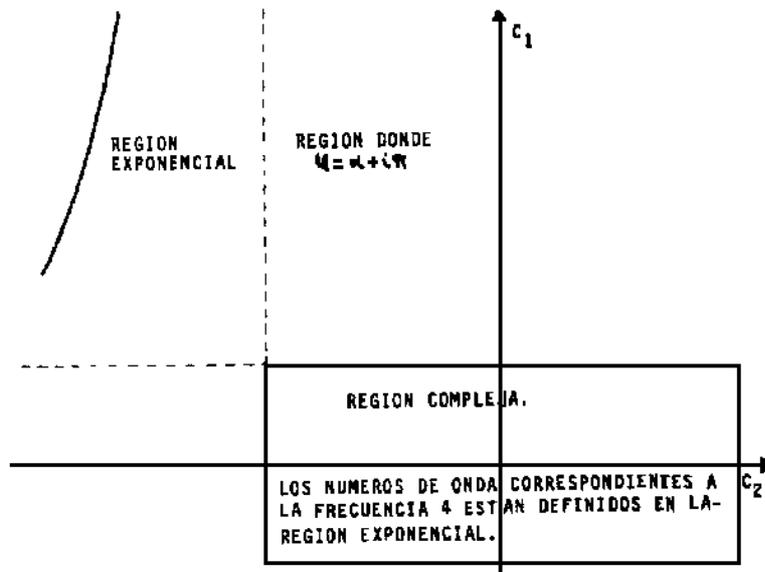
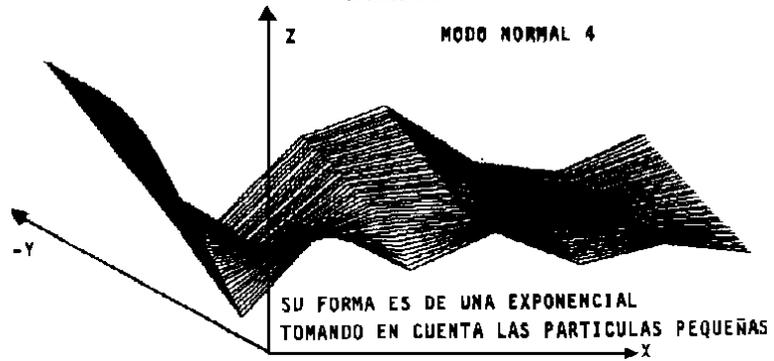
De lo anterior se puede concluir que la cadena diatómica tiene movimiento exponencial en ese momento, que es un resultado muy importante.

También se puede observar en esta gráfica, que las partículas pequeñas tienen mayor amplitud que las partículas grandes, y de que existen un fuerte amortiguamiento en la parte final de la cadena, es decir que casi no hay movimiento; esto se debe a que la interacción a segundos vecinos es muy débil en ese momento.



Ampliación de la gráfica (I-1) en el punto de convergencia de la rama óptica, esto se logró modificando la constante elástica de primeros vecinos a partir del valor  $A_1 = 1.5$  con incrementos más pequeños  $F = 0.008$  y el valor de las masas  $XMP = 0.75$ ,  $XMG = 1.50$ . Haciendo variar el parámetro en el eje, Y en el eje X, el número de frecuencias del espectro

Grafica I-4



### I-3 Caso del modelo de la cadena diatómica con masas pequeñas en los extremos

Analicemos ahora el modelo de la cadena cuando tiene nueve partículas, por lo que las partículas de los extremos tendrán masa pequeña.

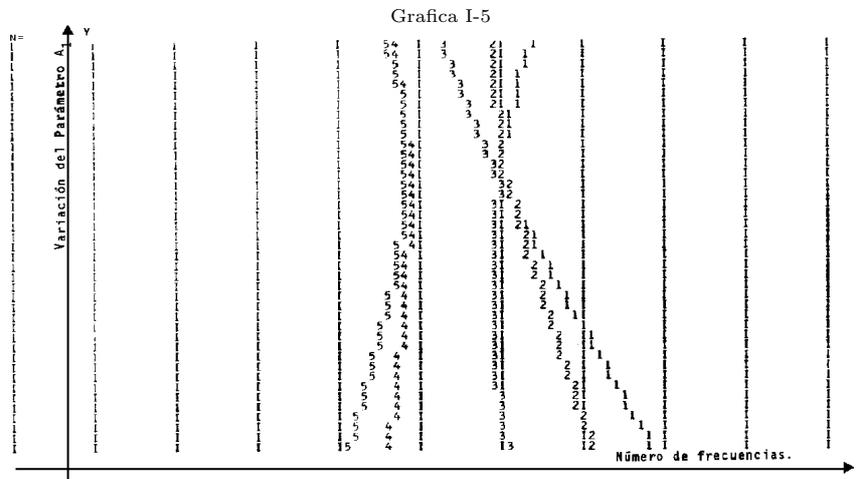
Al igual que en la sección anterior nos interesa saber cual es el comportamiento de la cadena en el punto de convergencia de la rama óptica.

La gráfica (I-5) nos muestra el espectro de frecuencias en ese punto de convergencia, que a diferencia del caso anterior aquí aparecen las cinco primeras frecuencias.

La gráfica (I-6) nos muestra al modo normal 4 ya que vuelve a hacer el más interesante pues su forma es la de un coseno hiperbolico tomando en cuenta a las partículas pequeñas.

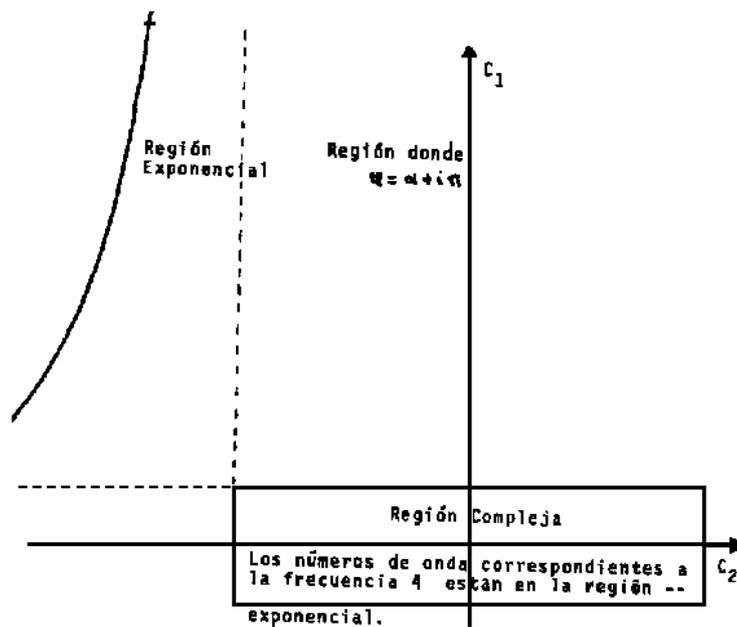
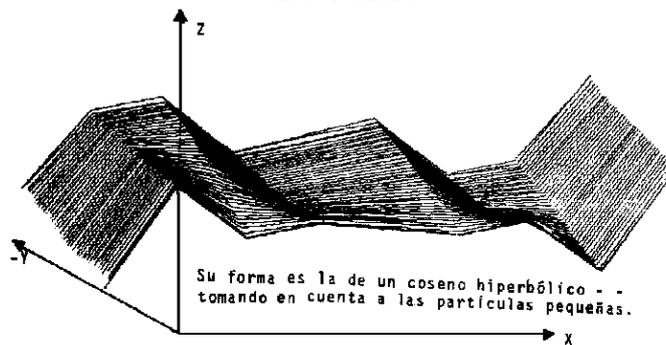
De donde podemos concluir que el movimiento de la cadena es de nuevo de forma exponencial, ya que  $\cosh = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})/2$  y este resultado se puede comprobar pues los números de onda correspondientes están definidos en la región exponencial.

También se puede observar que las partículas pequeñas siguen conservando mayor amplitud que las partículas grandes.



Ampliación en el punto de convergencia cuando las partículas de los extremos de la cadena son de masa pequeña, donde se puede ver además del cruzamiento de las frecuencias 1,2,3, el cruzamiento, de las frecuencias 4,5.

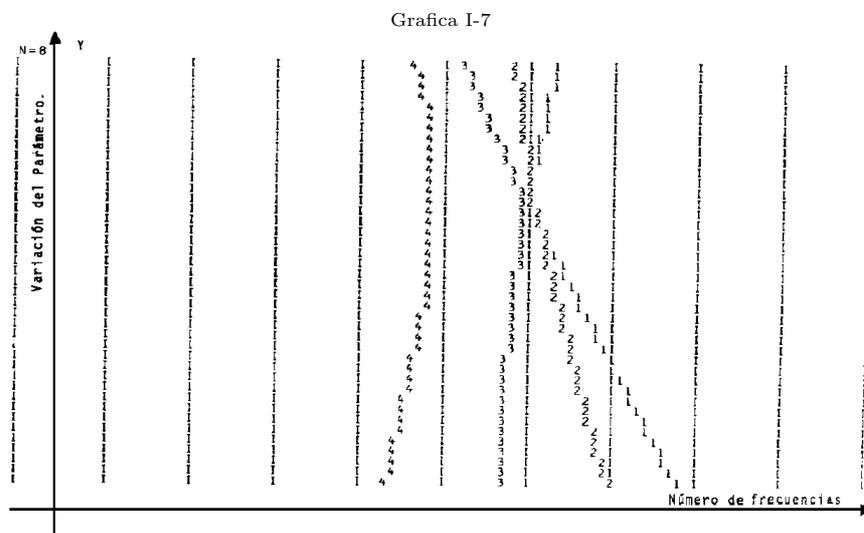
Gráfica (I-6)  
 Modo Normal 4



## I-4 Modelo de la cadena diatómica de ocho partículas intercambiando las masas

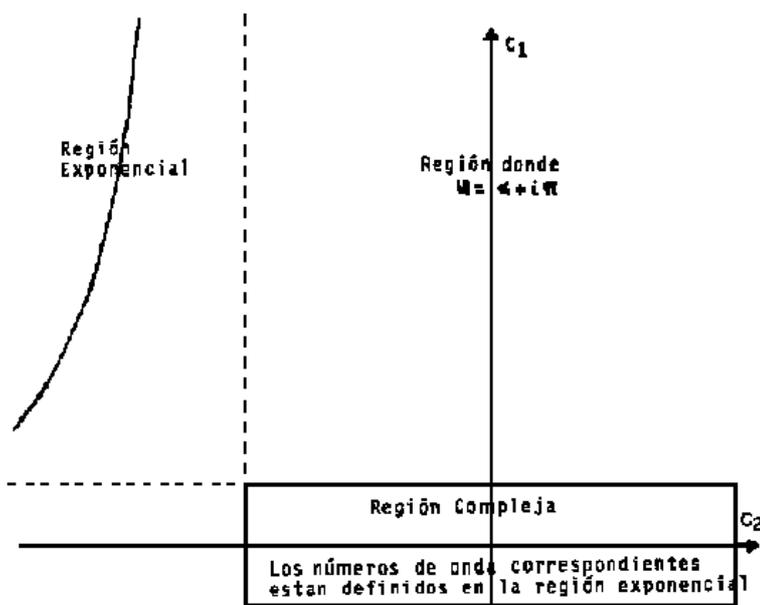
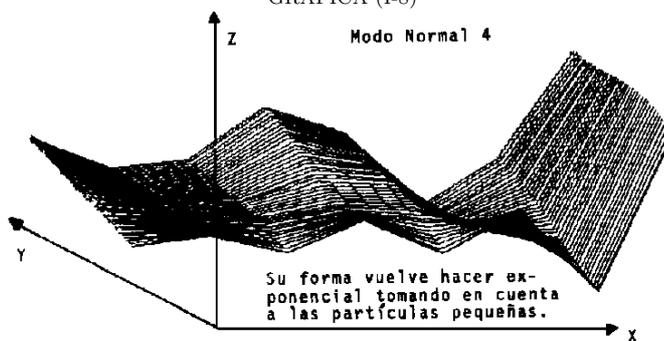
Es interesante ver cual es el comportamiento de la cadena cuando se intercambian las masas de las partículas.

En las gráficas (I-7) y (I-8) se muestra el comportamiento de este modelo en el punto de convergencia de la rama óptica, en donde se vuelve a observar que la cadena se mueve en forma de una exponencial pero ahora positiva tomando en cuenta a las partículas pequeñas, este resultado es muy importante ya que viene a corroborar que la cadena se mueve en forma exponencial en cierto momento.



Espectro de frecuencias del punto de convergencia de la rama óptica cuando se intercambian las partículas de la cadena diatómica, el comportamiento para este caso es muy similar al caso cuando no había intercambio.

GRAFICA (I-8)



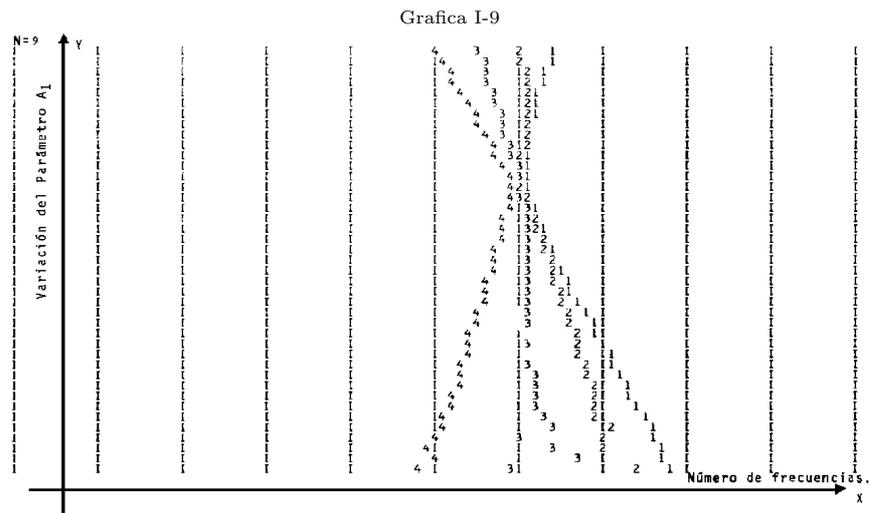
## I-5 Caso del modelo de la cadena diatómica cuando las partículas de los extremos son de masa grande

Agregando una partícula al modelo anterior obtenemos un caso interesante de la cadena, ya que las partículas de los extremos serán de masa grande.

La gráfica (I-9) nos muestra el espectro de frecuencias en el punto de convergencia de la rama óptica en forma ampliada, en donde se pueden ver las frecuencias correspondientes.

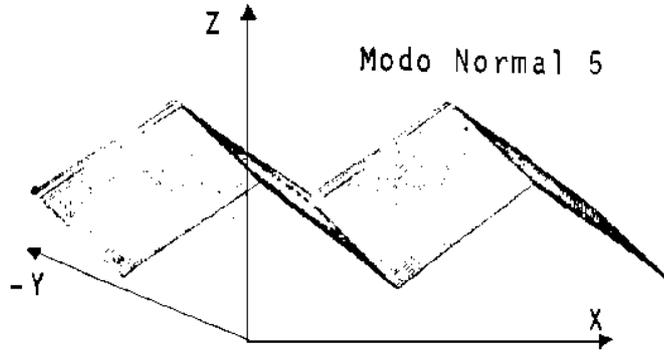
De nuevo para conocer el comportamiento de este caso del modelo se obtuvieron las gráficas de los modos normales de vibraciones; en donde se observó que el movimiento exponencial se pierden, debido a las partículas de los extremos.

Por lo tanto en la gráfica (I-10) se muestran los modos normales de vibración 5, 6, 7 que son los más importantes.

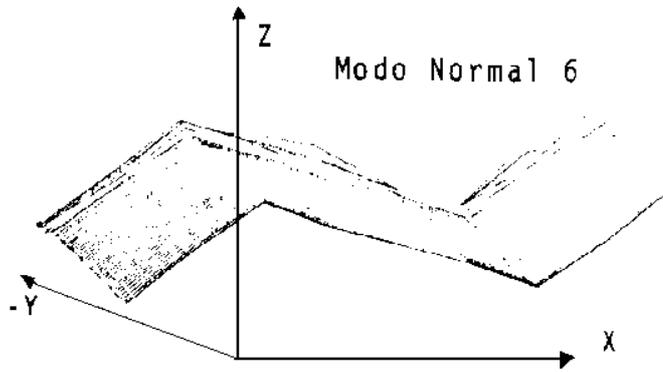


Espectro de frecuencias en el punto de convergencia de la rama óptica cuando las partículas de los extremos son de masa grande, el número de partículas para este caso es de nueve. Existiendo una degeneración entre las frecuencias 1 y 2.

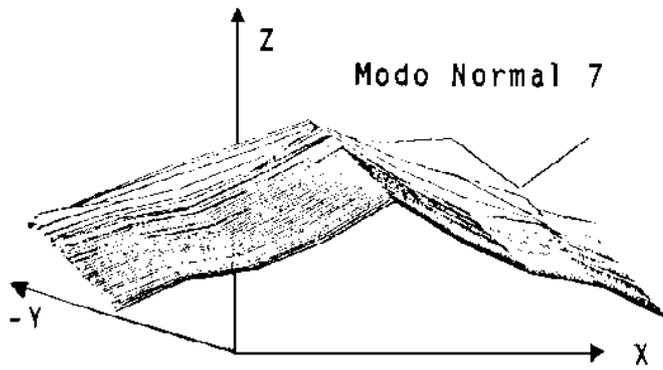
Gráfica (I-10)



Las partículas pequeñas 2,4,6,8 tienen un nodo.



Las partículas pequeñas 4,5,6 tienen movimiento.



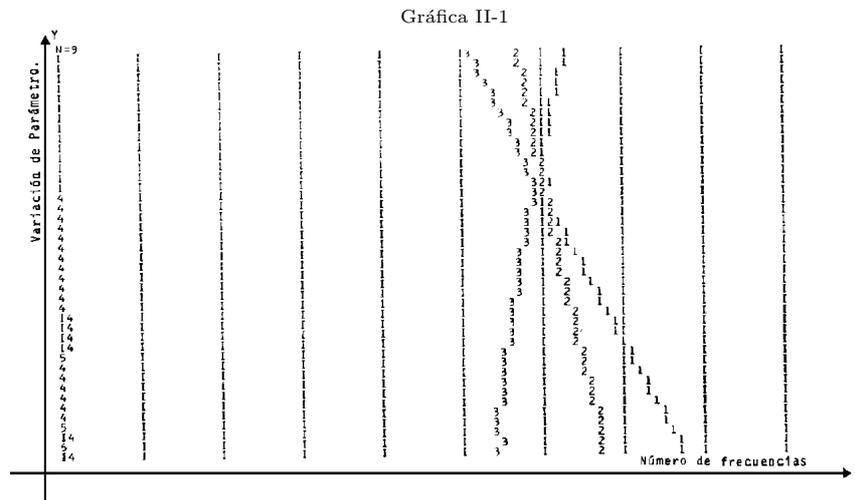
Las partículas de los extremos marginan el movimiento de la cadena.



## II-1 Caso del modelo de la cadena diatómica con partículas de masa pequeña en los extremos

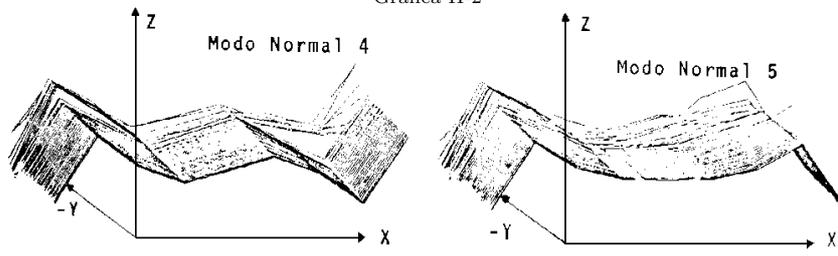
Este caso sera de nueve partículas y los valores de los parámetros  $XMP = 0.75$  y  $XMG = 1.50$  conservándose todos los demás iguales.

Las gráficas ( II-1 ) y ( II-2 ) nos muestran el comportamiento del modelo, en donde se puede observar que las partículas de los extremos tiene mayor amplitud que las partículas del centro, este resultado era de esperarse debido a las condiciones a la frontera, ver las gráficas de los modos normales 4, 5, 6 y 7. Y las gráficas de los números de onda correspondientes estan definidas en la región donde  $\varphi = \alpha + i\pi$  para los modos 6 y 7; lo cual se ve reflejado en las gráficas de los modos normales ya que presentan oscilaciones con inversiones de fase.

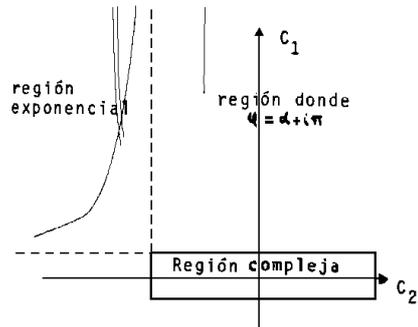
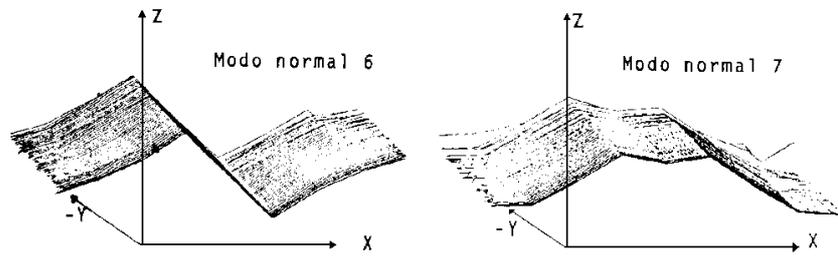


Espectro de frecuencias en el punto de convergencia cuando la cadena tiene sus extremos libres, las partículas de los extremos son de masa pequeña, aquí podemos observar el degeneramiento entre las frecuencias 4 y 5, muy separado del degeneramiento de las frecuencias 1,2,3, esto se debe a las condiciones a que esta sujeta la cadena.

Gráfica II-2



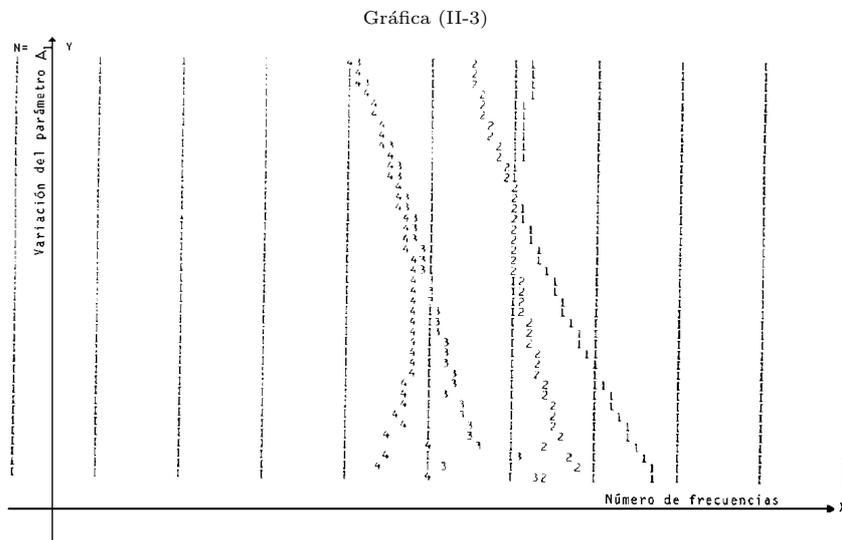
Se ve que las partículas de los extremos tienen mayor amplitud que las partículas del centro.



## II-2 Caso del modelo cuando las partículas de los extremos son de masa grande

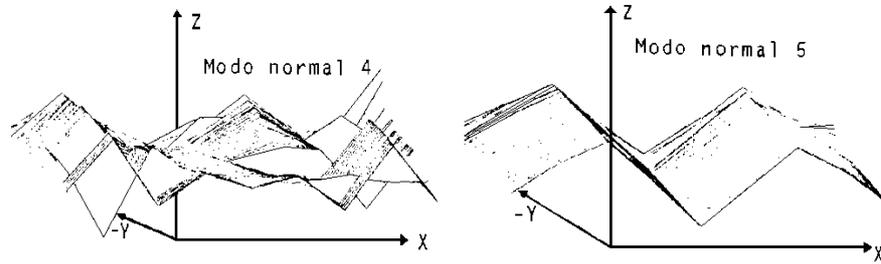
Este caso se logra intercambiando los valores de los parámetros XMP y XMG del caso anterior.

La gráfica (II-3) nos muestra el espectro de frecuencias, que resulta diferente a los anteriores, ya que se presentan dos degeneraciones entre las frecuencias 1,2 y 3,4. La gráfica (II-4) nos muestra a los modos normales de vibración 4,5, 6 y 7 que resultan ser los más importantes, ya que se puede ver que las partículas de los extremos vuelven a marginar el movimiento siendo este un resultado importante, pues se puede concluir que las partículas de los extremos por tener masa grande influyen más que las condiciones a la frontera.

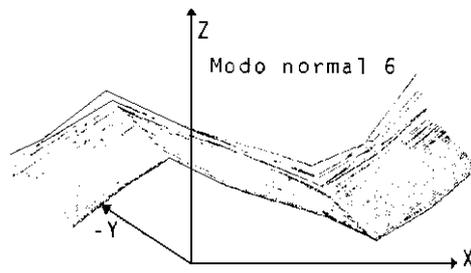


Espectro de frecuencias en el punto de convergencia cuando los extremos de la cadena son de masa pesada donde, se puede observar el doble cruzamiento de las frecuencias 1,2 y 3,4.

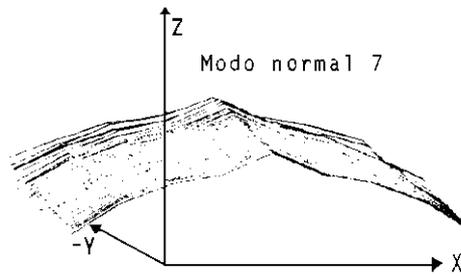
Gráfica (II-4)



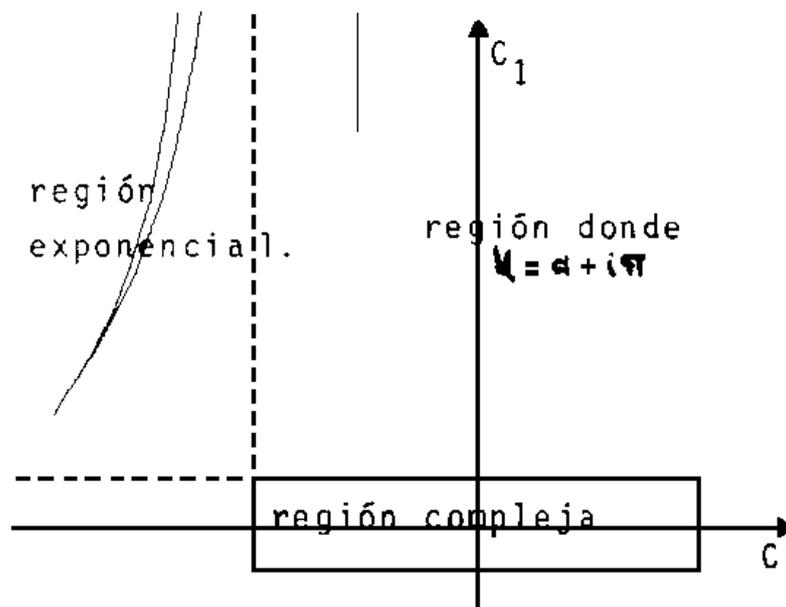
Existen nodos en las partículas 2,4,6 y 8.



Las partículas del centro 3,4,5 y 6 no tienen movimiento



Las partículas de los extremos marginan por completo el movimiento



## Capítulo III

Para finalizar esta parte del estudio analizaremos el modelo cuando las condiciones de la frontera son, un extremo libre y el otro fijo.

Por lo tanto, la matriz de movimiento  $A$  será:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-A_1 - A_2}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{m} & & & & \\ \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{-2A_1 - A_2}{M} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{M} & & & \\ \frac{A_2}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_0}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{m} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{A_2}{M} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_0}{M} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{M} \\ & & & \frac{A_2}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_0}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} \\ & & & & \frac{A_2}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_0}{m} \end{bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

También analizaremos solo dos casos del modelo, primero cuando las partículas de los extremos son de masa pequeña y segundo cuando son de masa grande.

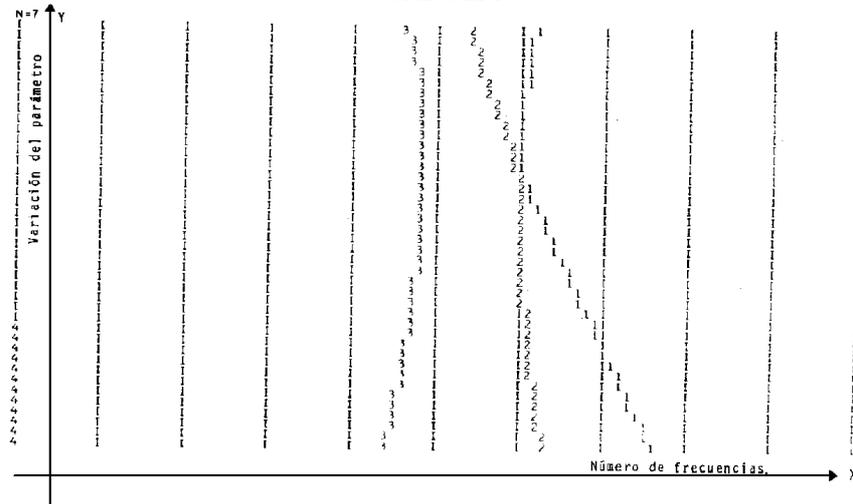
### III-1 Caso cuando el modelo tiene sus partículas de los extremos de masa pequeña

Este caso sólo constara de siete partículas y al igual que los casos anteriores el comportamiento quedará determinado por el espectro de frecuencias, modos normales de vibración y los correspondientes números de onda  $C_1$  y  $C_2$ .

Las gráficas (III-1) y (III-2) nos muestran estos resultados, en donde podemos observar que el extremo fijo va teniendo menor amplitud que el extremo

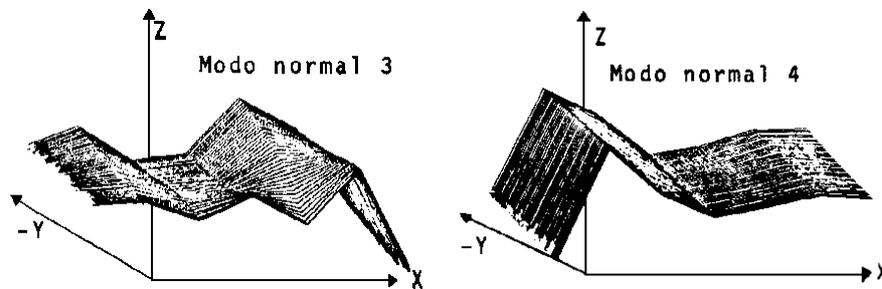
libre, ver los modos normales 3, 4, 5 y 6. Siendo este un resultado lógico, si se toman en cuenta los resultados anteriores; además los números de onda co-respondientes están definidos en la región exponencial y en la región donde  $\varphi = \alpha + i\pi$ .

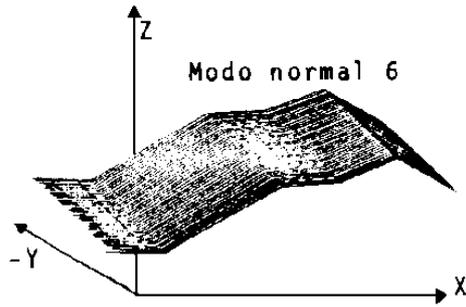
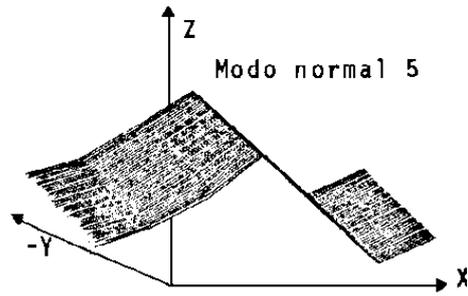
Grafica III-1



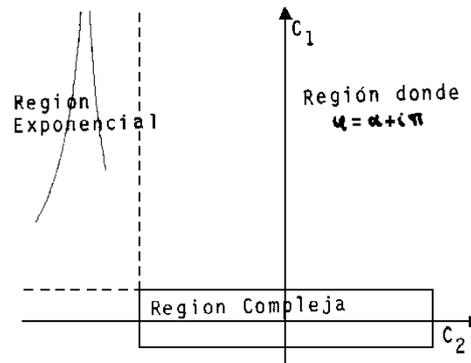
Espectro de frecuencias cuando la cadena tiene un extremo libre y el otro fijo, y el número de partículas es 7. Aquí se observa una degeneración entre las frecuencias 1 y 2.

Grafica III-2





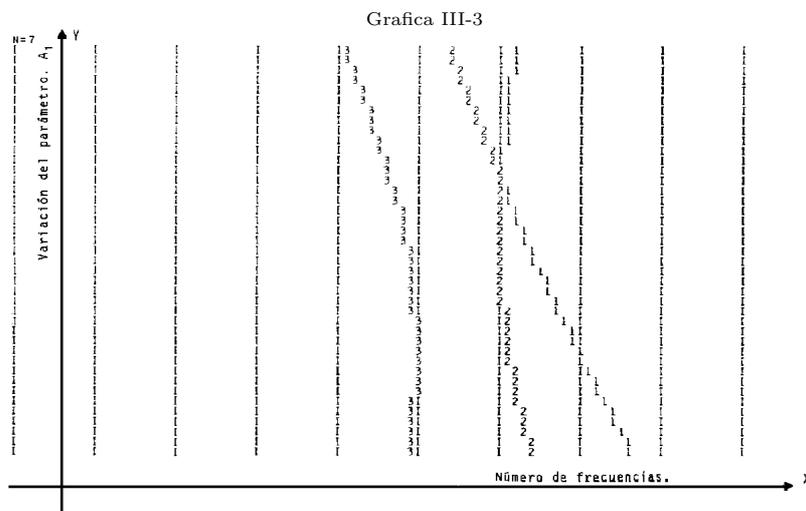
Se puede ver que el extremo izquierdo que es el libre tiene mayor amplitud que el derecho que es el fijo.



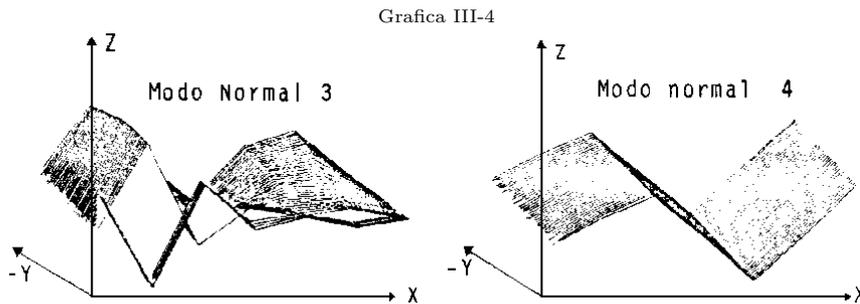
### III-2 Caso cuando la cadena tiene partículas de masa grande en los extremos

Este caso se obtiene intercambiando los valores de los parámetros  $XMP$  y  $XMG$  del caso anterior.

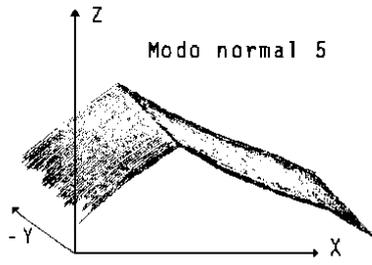
En las gráficas (III-3) y (III-4) tenemos el comportamiento para este caso, en donde se puede observar que la influencia de las partículas en los extremos vuelve a ser determinante, ya que de nuevo marginan el movimiento como se ve en los modos normales 3, 4 y 5.



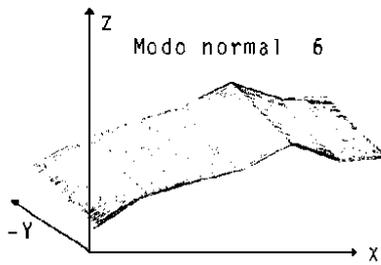
Espectro de frecuencias del punto de convergencia de la rama óptica cuando las partículas de los extremos son de masa grande, el número de partículas es igual a 7, aquí sólo se puede observar una degeneración entre las frecuencias 1 y 2.



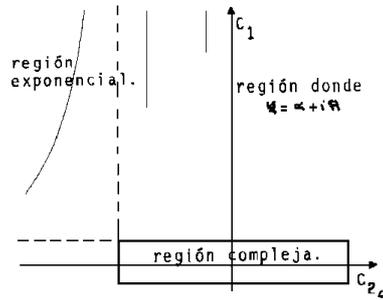
Existen nodos en las partículas 2, 4 y 6



Las partículas 3, 4, 5, 6 y 7 no tienen movimiento



Las partículas de los extremos vuelven a marginar el movimiento



### III-3 Conclusiones

- 1.- El movimiento de la cadena diatómica es de forma exponencial, en el punto de convergencia de la rama óptica para ciertos valores de los parámetros  $A_1$  y  $A_2$ .
- 2.- Cuando las partículas de los extremos son de masa grande, el movimiento de la cadena es marginado por los extremos sin importar las condiciones a la frontera a que este sujeta la cadena.
- 3.- Cuando el ó los extremos de la cadena son libres las partículas de los extremos tienen mayor amplitud que las del centro.

### III-4 Gráfica para diferentes valores de los parámetros

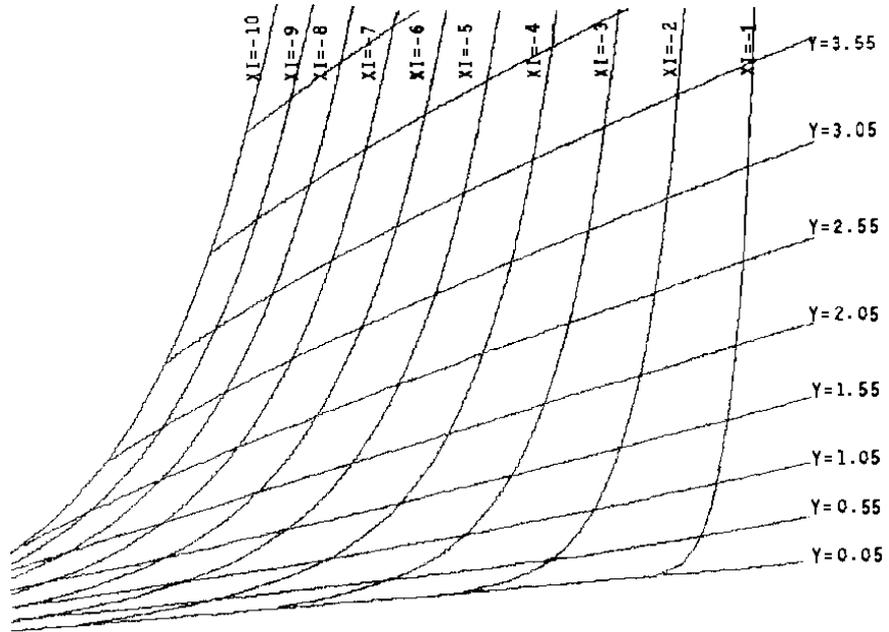
En la gráfica (III-5) tenemos dos clases de curvas diferentes esto es: con el fin de tener un conjunto de gráficas representativo que nos sirva para saber donde se encuentra gráficamente cualquier eigenvalor o frecuencia de resonancia  $XI$  sujeta a ciertos valores de los parámetros  $Y$  y  $RHO$  que son el cociente de las constantes elásticas y la relación de masas respectivamente.

La primera clase de gráficas se obtuvo para diferentes valores fijos del parámetro  $XI$ , haciendo variar el parámetro  $Y$ .

La segunda clase de gráficas se obtuvo, ahora para diferentes valores fijos del parámetro  $Y$ , haciendo variar el parámetro  $XI$ , conservando constantes al parámetro  $RHO$  en ambas clases de gráficas.

Este tipo de gráficas fueron obtenidas con la ayuda de la subrutina `PENCG` cuyo listado se encuentra en el apéndice E.

Grafica III-5



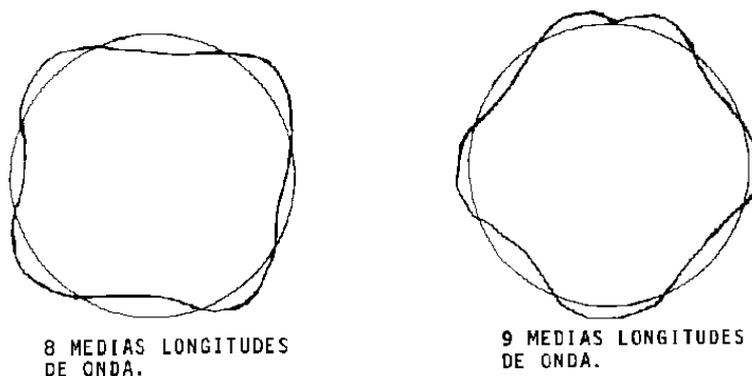
## Tercera Parte

Caso especial del modelo de  
la cadena diatómica (anillo)

# Capítulo I

El caso de la cadena diatómica cuando es cíclica (también se le conoce como anillo diatómico), es muy especial ya que las condiciones a la frontera son, unir mediante un resorte las partículas de los extremos, por lo tanto su estudio se hizo por separado.

Se sabe por (4) que cuando el anillo es homogéneo el número de frecuencias permitidas es  $N/2$ , ya que no es posible que existan modos normales con un número par de nodos, es decir con un número impar de medias longitudes de onda, como se ve en la siguiente figura. En donde se muestran dos circunferencias, una con un número par de medias longitudes de onda y la otra con un número impar.



Ya que el caso impar presenta una discontinuidad que le impide la existencia de un nodo estacionario en ese punto, por lo que bajo esa condición no es posible tener un modo normal, resultando entonces que los modos normales de vibración serán degenerados por parejas.

Otra propiedad que existe en la solución del anillo homogéneo, es que la relación de dispersión, se puede representar por una serie de senos y cosenos siendo esta una serie de Fourier, por lo tanto desde el punto de vista ondulatorio el movimiento será de tipo oscilatorio, ya que la amplitud de las partículas no puede aumentar ni disminuir, por que no hay aumento de energía ni disminución por rozamiento. Además cuando empezamos un determinado ciclo, la amplitud



Entonces el método que se escogió fue el Jacobi, pues en la práctica resulta ser el más seguro, aunque utiliza mucho tiempo de computadora. Este método está desarrollado en la subrutina PENJA cuyo listado esta en el apéndice E junto con el programa principal PENTA, ya modificado para este caso particular.

La gráfica (I-1) nos muestra el espectro de frecuencias permitidas por el sistema, en donde con la letra D denotamos que dos frecuencias resultan ser iguales, implicando así que los dos modos normales correspondientes son degenerados.

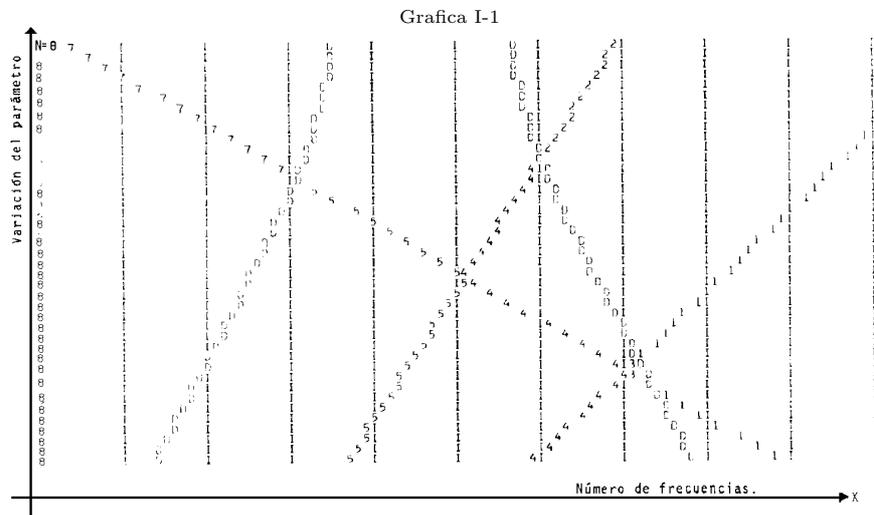
Observando esta gráfica vemos que el comportamiento del anillo diatómico es muy especial, ya que las frecuencias del espectro se dividen de la siguiente manera: La frecuencia alta, dos frecuencias libres, dos degeneraciones y la frecuencia baja que siempre es cero.

Además se puede ver que las dos degeneraciones, se van cambiando entre las frecuencias del centro.

La gráfica (I-2) nos muestra a los modos normales, en donde las discontinuidades, son reflejo de los cruzamientos y del cambio de las dos degeneraciones en las frecuencias del espectro.

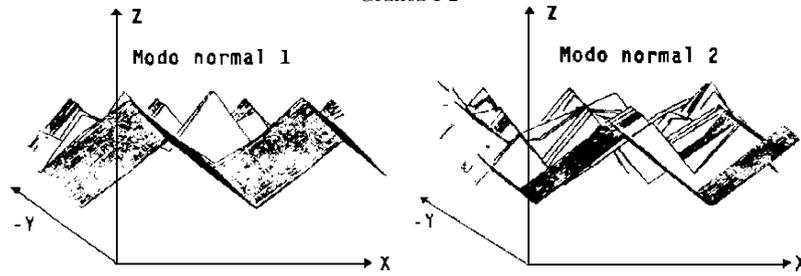
Los números de onda están definidos en la región 2, lo cual implica que el movimiento de la cadena será oscilatorio, esto se debe a la simetría del modelo.

Por lo tanto la diferencia mas importante, entre la cadena cíclica y la cadena líneal es que, el comportamiento exponencial de los números de onda correspondientes a las frecuencias de la rama óptica de la cadena líneal, se suprime en la cadena cíclica debido a la simetría, existiendo dos degeneraciones.



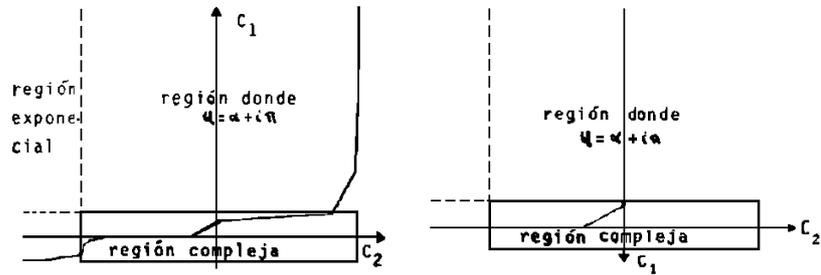
Espectro de frecuencias de la cadena diatómica cíclica de ocho partículas, cuya estructura es la siguiente; una frecuencia alta, dos frecuencias libres, una frecuencia baja que siempre es cero y lo más importante son las dos degeneraciones. Que están denotadas por la letra D.

Grafica I-2

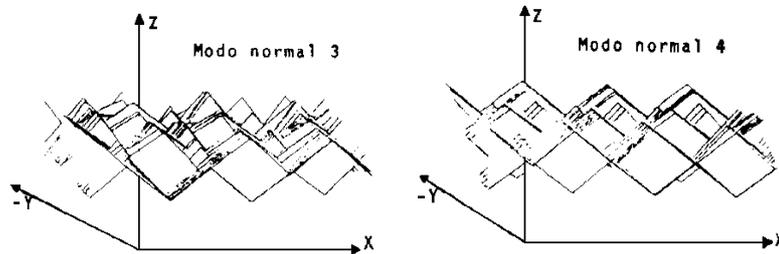


Estas gráficas también están definidas en la región compleja, y en la región donde hay inversiones de fase es decir donde  $\varphi$  es de la forma  $\varphi = \alpha + i\pi$

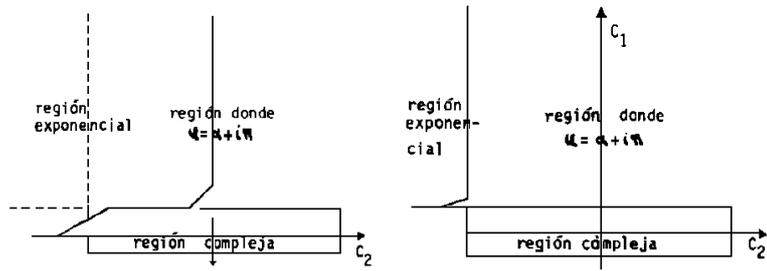
Grafica III-3



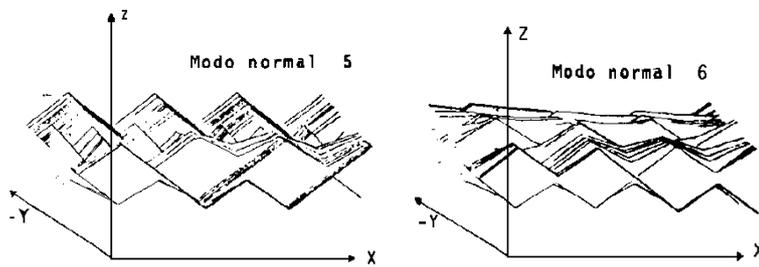
Se puede ver que las gráficas de los números de onda están definidos en la región compleja.



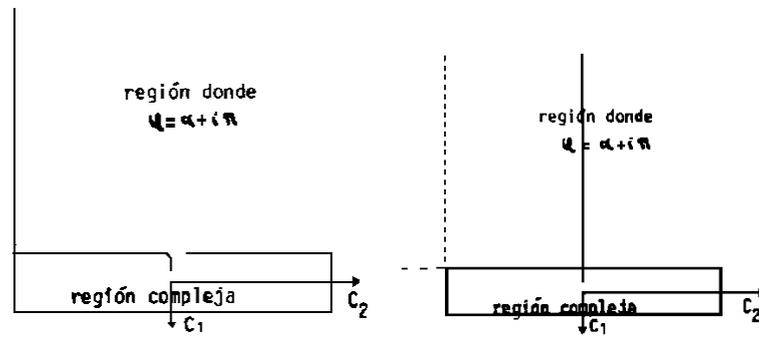
Como se puede apreciar los modos normales de vibración tienen muchas discontinuidades en su gráficas

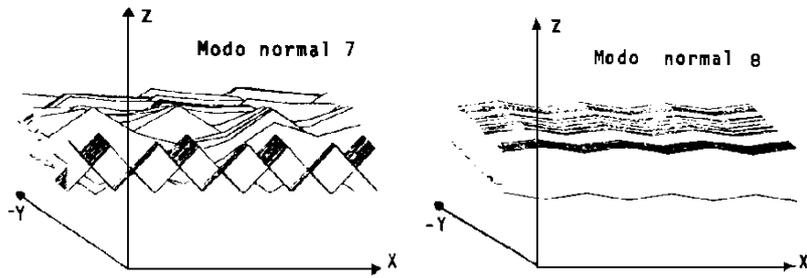


Estas gráficas también están definidas en la región compleja, y en la región donde hay inversiones de fase es decir donde  $\varphi$  es de la forma  $\varphi\alpha + i\pi$

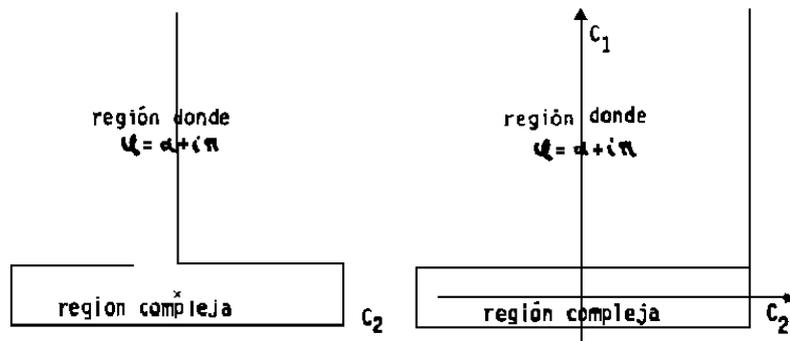


Aquí se observan menos discontinuidades que en los modos anteriores debido a que las frecuencias 5 y 6 no tienen muchos cruzamientos





El modo normal 7 presenta muchas discontinuidades, esto se debe a que la frecuencia 7 resulta ser degenerada con la frecuencia 6 como se puede ver en la gráfica (1-1).



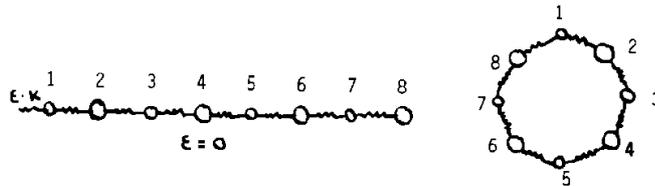
La gráfica de los números de onda que corresponden a la frecuencia 8 es una recta esto se debe a que la frecuencia siempre es cero, además el modo normal 8 no tiene puntos nodales.

## Capítulo II

Para finalizar este trabajo, es conveniente mostrar gráficamente la transición entre la cadena diatómica líneal y la cadena diatómica cíclica, en el punto de convergencia de la rama óptica.

Por tal motivo el parámetro que ahora consideramos será un factor que multiplique a la constante de resorte que unen a la primera partícula con la última, ya que cuando este parámetro sea igual a cero es el caso de la cadena líneal, y cuando sea igual a uno es el caso de la cadena cíclica. Entonces la variación de este parámetro será entre cero y uno por medio de incrementos  $F$  igual a 0.025, esquemáticamente tenemos:

FIGURA 2



ESQUEMA DE LA TRANSICION DE LA CADENA LINEAL A LA CADENA CICLICA.

Siendo la matriz de movimiento para este caso de la siguiente forma:

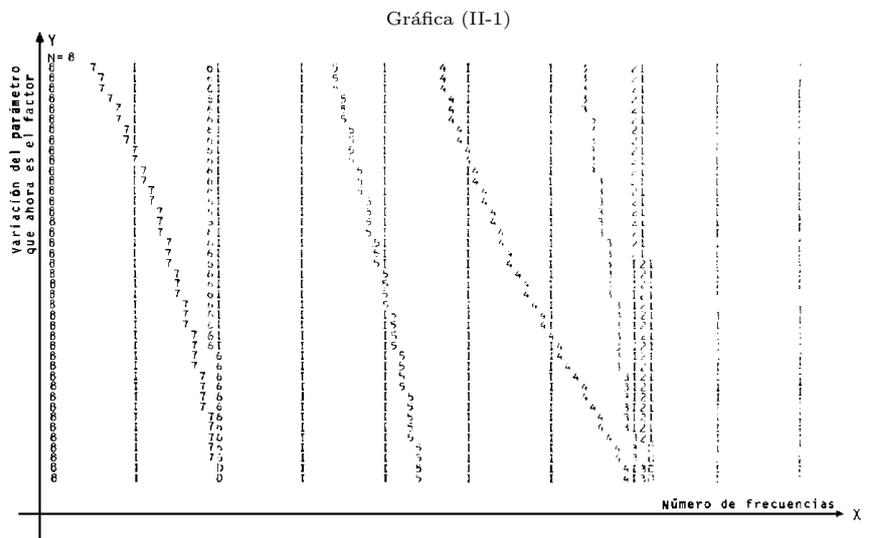
$$A = \begin{bmatrix} \frac{-(\varepsilon+1)(A_1+A_2)}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{m} & 0 & & \frac{\varepsilon \cdot A_2}{m} & \frac{\varepsilon \cdot A_1}{\sqrt{mM}} \\ \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{-2A_1-(1+\varepsilon)A_2}{M} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{M} & & 0 & \frac{\varepsilon \cdot A_2}{M} \\ \frac{A_2}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_0}{m} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{m} & & 0 \\ 0 & & & \frac{A_2}{M} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_0}{M} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{A_2}{M} \\ \frac{\varepsilon \cdot A_2}{m} & 0 & & & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{-2A_1-(1+\varepsilon)A_2}{2} & \frac{A_2}{\sqrt{mM}} & \\ \frac{\varepsilon \cdot A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{\varepsilon \cdot A_2}{M} & & & \frac{A_2}{M} & \frac{A_1}{\sqrt{mM}} & \frac{(1+\varepsilon)(A_1+A_2)}{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II-1})$$

La gráfica ( II-1) nos muestra el espectro de frecuencias para este caso, en donde se puede observar la transición entre la cadena líneal y la cadena cíclica,

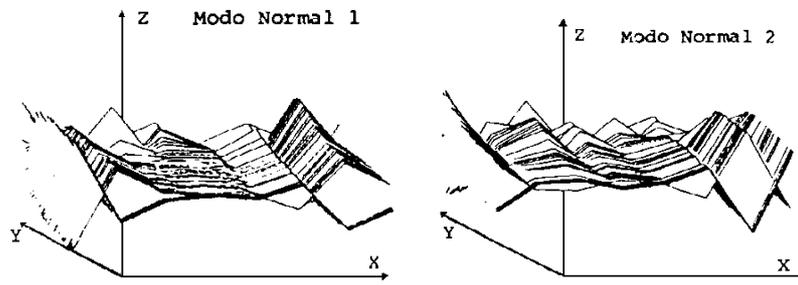
ya que al principio de la gráfica se ve que todas las frecuencias son libres, y la forma en que se van uniendo, hasta el momento en que aparecen las dos degeneraciones correspondientes a la cadena cíclica, que se pueden ver al final de esta gráfica.

Por razones de estética se varió el orden de las partículas, al graficar los modos normales de vibración, ya que nos interesa ver la amplitud en los extremos, por lo tanto las partículas inicial y final son ahora las del centro. En donde se puede observar la mayor amplitud al principio de las gráficas

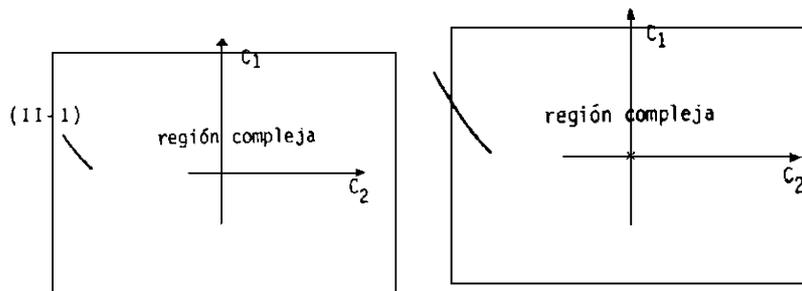
Una manera de comprobar la transición, es ver las gráficas de los números de onda correspondientes, en donde se observa que el último punto de la cuarta subgráfica, esta definido en la región donde no es exponencial, que es el caso cuando la cadena se ha cerrado por completo. Ver la gráfica (II-2). Y todas las demás gráficas de los números de onda están definidas en la región donde  $\varphi = \alpha + i\pi$ .



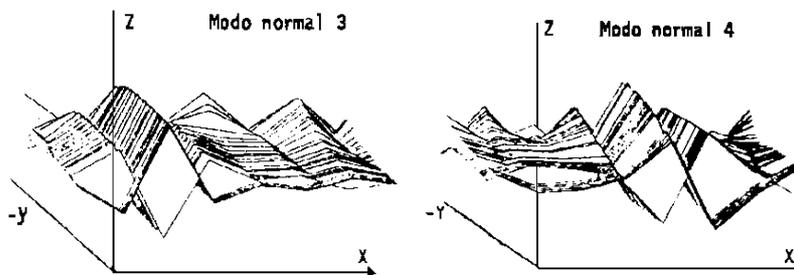
Espectro de frecuencias cuando se hace la transición de la cadena diatómica lineal a la cadena diatómica cíclica. Es interesante observar como al principio de la gráfica todas las frecuencias son libres ya que el caso cuando la cadena lineal y como al final de la gráfica ocurren las dos degeneraciones correspondientes a la cadena cíclica.

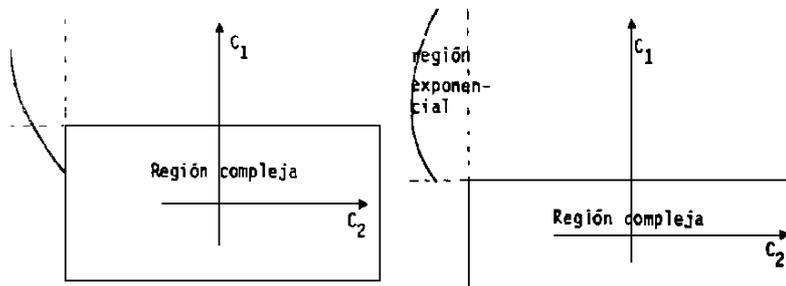


Por razones de estetica en todas estas gráficas se cambio el orden de las partículas, ya que ahora las partículas del centro son la 1 y 8.

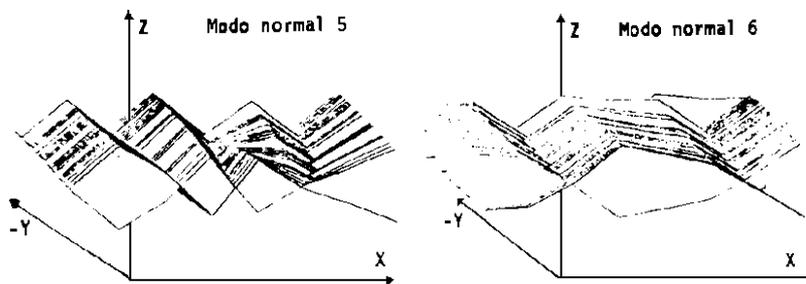


Los números de onda correspondientes estan definidos en la región compleja, como era de esperarse pues el único movimiento posible es oscilatorio.

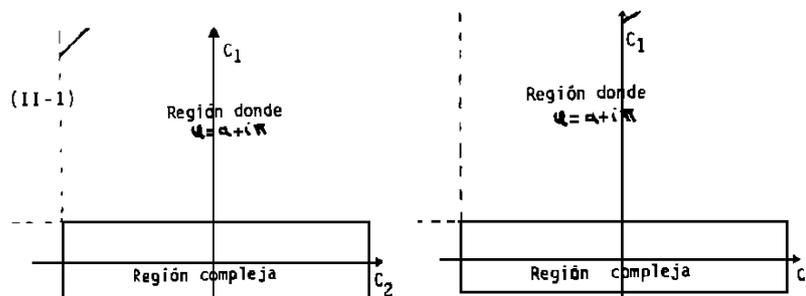


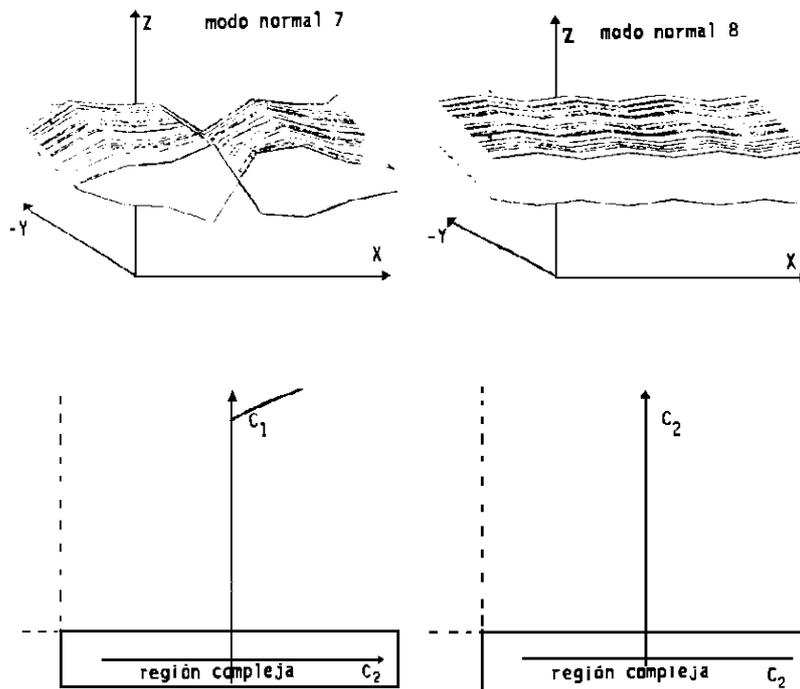


Lo interesante de esta gráfica es que el último punto está en la región compleja, como era de esperarse ya que es el caso de la cadena cíclica.



Los modos normales tienen mayor amplitud cuando corresponden a la cadena lineal que cuando corresponden a la cadena cíclica.





## II-1 Conclusiones

La conclusión más importante de este estudio es, que en la cadena lineal se puede observar un comportamiento exponencial el cual se suprime debido a la simetría de la cadena cíclica, existiendo dos degeneraciones.

Por lo tanto, esta conclusión así como las anteriores pueden ser tomadas en cuenta, al tratar de investigar el comportamiento de modelos más reales.



# APENDICE A

Debido a la importancia de las gráficas que se presentan en esta tesis, es conveniente dar una explicación más detallada de ellas, ya que así se podrán entender mejor los resultados que se presentan en el desarrollo de este trabajo.

Las gráficas se han dividido en tres clases, en donde cada clase nos representa a una parte del comportamiento total de la cadena diatómica. Obteniéndose para cada uno de los diferentes casos que se analizan, sus correspondientes tres clases de gráficas.

La primera clase nos representa a los eigenvalores de la matriz de movimiento que físicamente nos representan al cuadrado de las frecuencias características o temporales.

La segunda clase nos representa a los eigenvectores de la matriz de movimiento que físicamente nos representan a los modos normales de vibración.

La tercera clase nos representa a los números de onda o frecuencias espaciales de acuerdo a la siguiente relación de dispersión.

$$C = \frac{2[\rho\varepsilon + (K + 2)] \pm \sqrt{4[(\rho\varepsilon + (K + 2))^2 + 2\rho\varepsilon(K + 1) + 2(K^2 + 2K + 2)]}}{8}$$

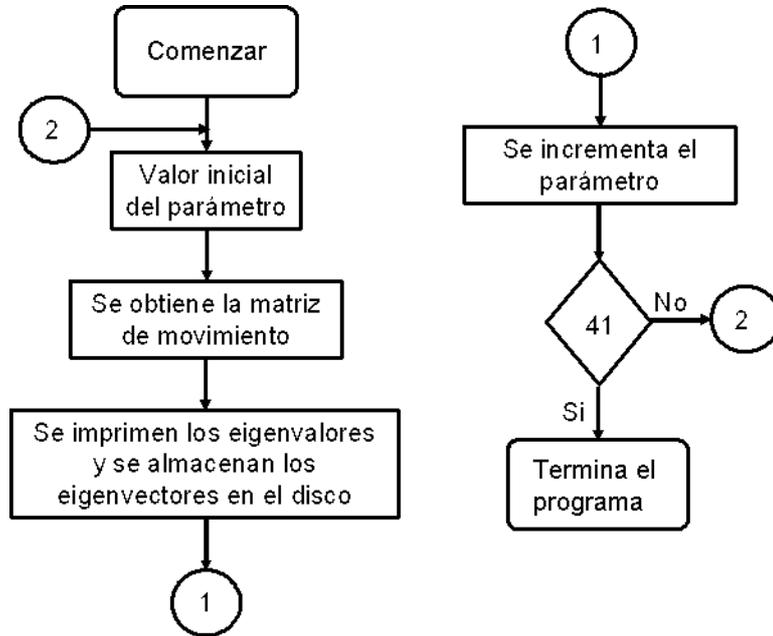
Por lo tanto explicaremos cada clase por separado.

## PRIMERA CLASE

Se sabe que el rango donde ocurren los eigenvalores de la matriz de movimiento es  $-4(A_1 + A_2) \leq \lambda \leq 0$ . Por lo que la subrutina PENGGR que es con la que se grafica a los eigenvalores de la matriz, está diseñada para que sólo aparezca este rango en la hoja de impresión.

Ahora bien, en el eje horizontal (eje X), se imprimen por medio de números 1, 2, 3 ..... N los valores de las diferentes frecuencias, correspondiendo el 1 a la primera frecuencia, el 2 a la segunda frecuencia, etc. En el eje vertical (Eje Y), se hace la variación del parámetro correspondiente, o sea el número de veces que se incrementará el parámetro; con el fin de obtener una buena información del caso de la cadena que se este analizando el número que se escogió de interacciones fué 41.

Diagrama de flujo del programa principal PENTA



## SEGUNDA CLASE

Con el fin de observar, en forma más clara los diferentes movimientos que sufra la cadena, se graficaron los modos normales de vibración, en tres dimensiones en la forma siguiente:

El número de partículas, quedará representado en el eje (X), la amplitud que sufran las partículas en el eje (Z) y en la parte negativa del eje (Y), se verá la variación del parámetro correspondiente. Las discontinuidades de estas gráficas, son reflejo de los cruzamientos que ocurren entre las frecuencias del espectro, y los nodos que se vean en los modos son los cruzamientos que existen con el eje (X) de estas mismas gráficas, siendo el modo de más alta frecuencia, el que tenga mayor número de nodos.

Estas gráficas se obtienen, por medio del programa principal PENHL, el cual está diseñado, para leer los valores que fueron almacenados en el disco, por el programa anterior, de los modos normales y graficarlos por medio del Plotter (graficador).

## TERCERA CLASE

En la primera parte de este trabajo fué deducida, de la matriz de recurrencia, la siguiente relación de dispersión.

$$\mu^4 - \mu^3[K^2 + 8(\rho + 1/\rho) + 4(K + 1)] + \mu^2[4(K + 1)^2 - 2K^2 + 2 + 2(K + 1)\varepsilon(\rho + 1/\rho) + \varepsilon^2] - \mu[\kappa^2 + \varepsilon(\rho + 1/\rho) + 4(K + 1)] + 1 = 0 \quad (A-1)$$

donde  $\varepsilon = \lambda\sqrt{Mm}/A_2$

De (A-1) se puede ver que los coeficientes resultan ser simétricos.

Como se sabe que las raíces, de esta relación de dispersión ocurren en parejas recíprocas, entonces definimos:

$$r_1 + \frac{1}{r_1} = a \quad r_2 + \frac{1}{r_2} = b$$

por lo que en forma factorizada resulta:

$$(\mu^2 - a\mu + 1)(\mu^2 - b\mu + 1) = 0$$

desarrollando

$$\mu^4 - (a+b)\mu^3 + (2+ab)\mu^2 - (a+b)\mu + 1 = 0 \quad (\text{A-2})$$

comparando (A-1) y (A-2), obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+b &= K^2 + \varepsilon(\rho + 1/\rho) + 4(K+1) \\ 2+ab &= 4(K+1)^2 - 2K^2 + 2 + 2(K+1)\varepsilon(\rho + 1/\rho) + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

denotando por  $\rho = \rho + \frac{1}{\rho}$ , las ecuaciones anteriores quedan:

$$\begin{aligned} a+b &= K^2 + \varepsilon \rho + 4(K+1) \\ 2+ab &= 2(K^2 + 4K + 3) + 2(K+1)\varepsilon \rho + K^2 \end{aligned}$$

Donde la solución, de estas ecuaciones determinan, los números de onda en función de  $\kappa, \rho, \varepsilon$ . Sin embargo podemos resolver, la relación de dispersión para  $\varepsilon$ , por lo que despejamos  $\varepsilon$  de (A-1) resultando:

$$\varepsilon^2 + 2\rho \varepsilon [K+1 - C] + 4C^2 - 2C[K^2 + 4(K+1)] + 4(K+1)^2 - 2K^2 = 0 \quad (\text{A-3})$$

donde  $2C = \mu + \frac{1}{\mu} \Rightarrow C = \frac{\mu + \frac{1}{\mu}}{2} = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} = \cos h \varphi$

cuya solución para  $\varepsilon$  es:

$$\varepsilon = \frac{-2\rho(K+1-K) \pm \sqrt{4\rho^2(C-K+1) - 4\{4C^2 - 2\varepsilon[K^2 + 4(K+1)] + 2K^2 + 6K + 4\}}}{2}$$

Finalmente nos interesa encontrar, la relación de dispersión en función del parámetro C, por lo que de (A-3) obtenemos, C en función de los parámetros  $\varepsilon, \rho$  y  $\kappa$ .

$$4C^2 - 2C(\rho\varepsilon + K^2 + 4K + 4) + \varepsilon^2 + 2\rho\varepsilon(K + 1) + 2(K^2 + 4(K + 2)) = 0 \quad (\text{A-4})$$

cuya solución es:

$$C = \frac{2(\rho\varepsilon + (K + 2)^2) \pm \sqrt{4[\rho\varepsilon + (K + 2)^2]^2 - 4 : 4[\varepsilon^2 + 2\rho\varepsilon(K + 1) + 2(K^2 + 4K + 2)]}}{8} \quad (\text{A-5})$$

Estas soluciones son los números de onda, que graficaremos para ver el comportamiento, desde el punto de vista ondulatorio, de la cadena.

Existiendo cuatro regiones de importancia, para los valores del coseno hiperbólico C, cuya interpretación física fue hecha en la primera parte de esta tesis.

**REGION 1** Es cuando  $\varphi$  es real,  $\cos h\varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} > 1$  entonces un valor de C es  $> 1$  y otro es  $< -1$ , siendo en esta región el comportamiento de la cadena, en forma de una exponencial creciente o decreciente, dependiendo que  $\varphi > 1$  ó  $\varphi < 1$ .

**REGION 2** Es cuando es de la forma,  $\varphi = i\beta$  lo cual implica que

$$\cos h\varphi = \cos hi\beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} = \frac{\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta + \cos\beta - i\operatorname{sen}\beta}{2} = \frac{2\cos\beta}{2} \leq 1$$

entonces los valores de C, estan en el rectángulo  $-1 \leq C \leq 1$ , y el comportamiento de la cadena, correspondera a un *seno* ó *coseno*, es decir de tipo ondulatorio.

**REGION 3** Cuando  $\varphi$  es de la forma  $\varphi = \alpha + i\pi$  lo cual implica que

$$\cos h(\alpha + i\pi) = \frac{e^\alpha(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) + e^{-\alpha}(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)}{2} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = -\cos h\alpha,$$

entonces los valores de C estarán en el intervalo  $-2.0 \leq C \leq 0.5$ , en este caso se observarán oscilaciones con inversiones de fase, producidas por un desfaseamiento de  $180^\circ$ .

**REGION 4** Es cuando  $\varphi = \alpha + i\beta$  esto implica que

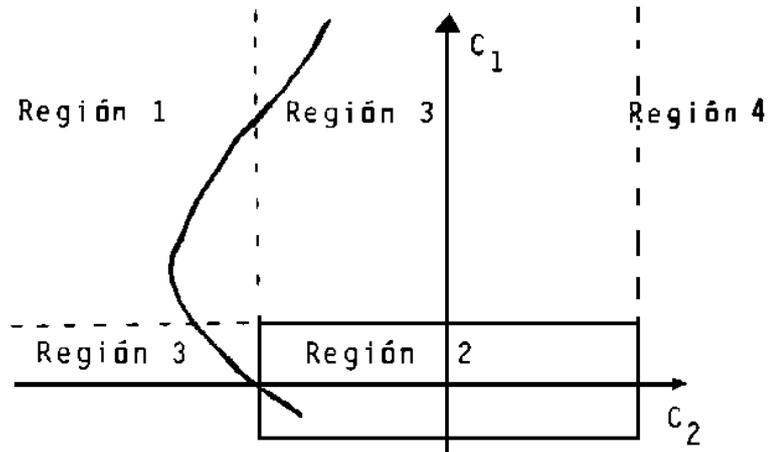
$$\cos h(\alpha + i\beta) = \frac{e^\alpha(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) + e^{-\alpha}(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)}{2}$$

Por lo que en este caso el comportamiento de la cadena será en forma, cosenoidal o senoidal modulada por el factor exponencial  $e^\alpha$ , que depende de la parte real de  $\varphi$ .

Ahora bien, las gráficas de los números de onda, serán obtenidas por medio del programa principal Pencc, el cual esta diseñado para imprimir marcas (X), que definen la región 2 o sea el rectángulo cuyos vertices son:

$(-1,-1)$ ,  $(1,-1)$ ,  $(1,1)$ ,  $(-1,1)$  y el origen  $(0,0)$ , quedando así definidas las demas regiones. Esto se hace para cada gráfica.

Hagamos un ejemplo, de una gráfica que corresponda a los números de onda, de los valores de alguna frecuencia del espectro.



Se puede observar, que una parte de la gráfica anterior está definida en la región 2, por lo tanto el comportamiento de la cadena, será en forma senoidal o cosenoidal y se reflejará en alguna parte de la gráfica del modo normal correspondiente, también se ve que en otra parte de la gráfica está definida en la región 1, por lo que el comportamiento de la cadena será en forma exponencial.





```

DEFINE FILE 113(41,96,U,K13)
DEFINE FILE 114(41,96,U,K14)
DEFINE FILE 115(41,96,U,K15)
DEFINE FILE 116(41,96,U,K16)
DEFINE FILE 117(41,96,U,K17)
DEFINE FILE 118(41,96,U,K18)
DEFINE FILE 119(41,96,U,K19)
DEFINE FILE 120(41,96,U,K20)
C
C INSTRUCCIONES DE ENTRADA PARA LEER LA DIMENSION (N)
C QUE DESEAMOS ANALIZAR
C
    LI=8
    LO=5
    READ (LI,20) N
20 FORMAT(I2)
    IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 WRITE (LO,300) N
300 FORMAT ('1N','I2)
C
C GENERACION DE LOS ELEMENTOS MATRICIALES .-LLENAMOS LA MATRIZ
C TENIENDO EN CUENTA SU FORMA PENTADIAGONAL (DIAGONALES A,B,C,
C D,E) LO CUAL NOS PERMITE UTILIZAR MENOS MEMORIA DE LA MAQUINA,
C ESTA PARTE ES LA QUE GENERALMENTE DIFIERE DE MODELO A MODELO
C
    F=0.045
    XMG=1,4
    XMP=0.875
    A1=0.1
    A2=1.9
    A0=-2.0*(A1+A2)
    DO 30 K=1,41
    X1=A1/SQRT(XMP*XMG)
    X2=A2/XMP
    X0=A0/XMP
    Y2=A2/XMG
    Y0=A0/XMG
    DO 15 I=1,N,2
    A(I)=X2
    B(I)=X1
    C(I)=X0
    D(I)=X1
15 E(I)=X2
    DO 16 I=2,N,2
    A(I)=Y2

```

```

        B(I)=X1
        C(I)=Y0
        D(I)=X1
    16 E(I)=Y2
C
C PENII CALCULA LOS LIMITES DE GERSHGORIN DE LOS EIGENVALORES Y
C FORMA LOS COEFICIENTES USADOS EN LA RELACION DE RECURSION COMO
C ELEMENTOS DE LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA (T)
C
        CALL PENII
C
C PENRO LOCALIZA LAS RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA,
C COLOCANDO A ELLAS EN CIERTO ARREGLO(V)
C
        CALL PENRO
        DO 23 J=1,N
    23 X(J,K)=V(J)
C
C PENG (W,Z1,Z2) GRAFICA LOS EIGENVALORES POR MEDIO DE NUMEROS
C IMPRIMIENDO EL NUMERO DEL EIGENVALOR CORRESPONDIENTE Y Z1,Z2
C SON LOS LIMITES DE DONDE SE QUIERE VER LA GRAFICA
C
        CALL PENG (V,0.0,8.0)
C
C        CALCULO DE LOS EIGENVECTORES
C
        DO 12 I=1,N
C
C PENEV CALCULA LAS COMPONENTES DEL I-ESIMO EIGENVECTOR DEJANDO
C LAS COMPONENTES EN EL ARREGLO Z
C
        CALL PENEV(Z,I)
C
C PENNO NORMALIZA LAS PRIMERAS N COMPONENTES DEL VECTOR DEL
C ARGUMENTO Z
C
        CALL PENNO(Z,N)
C
C PENST(Z,N,M,K,L)ALMACENA Y RECUPERA LOS VECTORES DEL DISCO
C DE ACUERDO CON LA OPCION L, EL ARGUMENTO ES UN VECTOR Z DE
C DIMENSION N K EL ARCHIVO DEL DISCO QUE SERA EMPLEADO Y M
C ES EL NUMERO DE REGISTRO
C
    12 CALL PENST (Z,N,100+I,K,3)
        A1=A1+F
    30 A2=A2-F

```

```

C      EN ESTA PARTE GRAFICAMOS LOS MODOS NORMALES DE VIBRACION
C LA OPCION ES QUE PUEDEN SER GRAFICADOS CON ESTRELLAS Y UNIDOS
C MANUALMENTE O GUARDADOS EN ALGUN REGISTRO PARA QUE DESPUES
C SEAN UNIDOS AUTOMATICAMENTE
C
C EN ESTA PARTE GUARDAMOS LOS EIGENVALORES EN EL REGISTRO 200
C PARA DESPUES GRAFICARLOS POR MEDIO DEL PLOTTER EN EL PLANO
C C2 Y C1
C
      DO 98 J=1,N
      WRITE (200,J)(X(J,K),K=1,41)
98 CONTINUE
      WRITE(LO,352)
352 FORMAT(1H1)
      DO 32 I=1,N
C
C      PENPG (Z,N,M,K,L) HACE UNA PAGINA DE GRAFICA DE LOS
C EIGENVECTORES, Z ES EL VECTOR QUE CONTIENE LAS COMPONENTES
C (NORMALIZADAS) DEL EIGENVECTOR DE DIMENSION N, M ES LO QUE
C DESEAMOS SACAR, K ES EL NUMERO DE ARCHIVO EN QUE LOS PUNTOS
C VAN HACER INTRODUCIDOS Y L ES LA OPCION
C
      CALL PENPG(Z,N,0,10,1)
      CALL PENPG(Z,N,0,10,2)
      CALL PENST(Z,N,100+I,41,4)
      DO 31 K=1,41
      CALL PENST (Z,N,100+I,K,5)
31 CALL PENPG (Z,N,K,10,3)
32 CALL PENPG (Z,N,I,10,5)
      CALL EXIT
      END

```

```

//FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
C
C SUBROUTINA PENGR GRAFICA LOS EIGENVALORES O FRECUENCIAS
C DEL ESPECTRO POR, MEDIO DE LA IMPRESORA.
C
      SUBROUTINE PENGR(Z,W1,W2)
      DIMENSION Z(1),III(120)
      COMMON      N,LI,LO
      S=100.0/(W2-W1)
      DO 11 I=1,120
11 III(I)=16448
      DO 12 I=1,101,10
12 III(I)=-14016
      L1=0
      IH=-3776
      II=256
      DO 27 I=1,N
      L=IFIX((-Z(I)-W1)*S+1)
      IF(L) 27,27,21
21 IF(L-120) 22,22,27
22 IF(L-L1)24,23,24
24 L1=L
      III(L)=IH
      GO TO 26
23 III(L)=-15292
26 IH= IH+II
27 CONTINUE
      WRITE (LO),300) III
300 FORMAT (1X,120A1)
      RETURN
      END

```



```

// FOR
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(1403 PRINTER,2501 READER)
*IOCS(DISK,PLOTTER,KEYBOARD,TYPEWRITER)
*LIST ALL
*NAME PENHL
C *****
C
C           APENDICE C
C
C           PROGRAMA PRINCIPAL
C
C           PENHL
C
C *****
C
C DESCRIPCION DEL PROGRAMA QUE GRAFICA LOS MODOS NORMALES DE
C VIBRACION POR MEDIO DEL GRAFICADOR

      DIMENSION  X(501),Y(501)
      DIMENSION  EX(101),WY(101)
      DIMENSION  XL(501),YL(501)
      DIMENSION  XU(501),YU(501)
      COMMON     X0,Y0,X1,Y1,XS,YS,OX,OY,EP
      DEFINE FILE 10(57,120,U,K1)
      DEFINE FILE 101(41,96,U,K01)
      DEFINE FILE 102(41,96,U,K02)
      DEFINE FILE 103(41,96,U,K03)
      DEFINE FILE 104(41,96,U,K04)
      DEFINE FILE 105(41,96,U,K05)
      DEFINE FILE 106(41,96,U,K06)
      DEFINE FILE 107(41,96,U,K07)
      DEFINE FILE 108(41,96,U,K08)
      DEFINE FILE 109(41,96,U,K09)
      DEFINE FILE 110(41,96,U,K10)
      DEFINE FILE 111(41,96,U,K11)
      DEFINE FILE 112(41,96,U,K12)
      DEFINE FILE 113(41,96,U,K13)
      DEFINE FILE 114(41,96,U,K14)
      DEFINE FILE 115(41,96,U,K15)
      DEFINE FILE 116(41,96,U,K16)
      DEFINE FILE 117(41,96,U,K17)
      DEFINE FILE 118(41,96,U,K18)
      DEFINE FILE 119(41,96,U,K19)
      DEFINE FILE 120(41,96,U,K20)

```

```

N=8
HN=0.5*FLOAT(N)
MD=501
Y2=2.0
Y1=-2.0
X1=-5.0
X2=5.0
NX=N
NC=41
NX=MINO(NX,101)
NC=MINO(NC,101)
XO=-3.50
YO=-3.25
XS=8.0/(X2-X1)
YS=5.0/(Y2-Y1)
EP=1.0E-3
DX=-1.0/FLOAT(NC-1)
DY= 1.0/FLOAT(NC-1)
DO 10 I=1,NX
10 FX(I)=FLOAT(I-1)-HN
DO 40 K=1,N
NU=0
NL=0
OX=0.0
OY=0.0
CALL PHFVV(K)
DO 30 I=1,NC
K1=100+K
READ (K1,'I')(WY(J),J=1,NX)
CALL VISUB (X,Y,J,MD,EX,WY,NX,XU,YU,NU)
NU=J
CALL VISCY (XU,X,NU)
CALL VISCY (YU,Y,NU)
CALL VISLB (X,Y,,J,MD,EX,WY,NX,XL,YL,NL)
NL=J
CALL VISCY (XL,X,NL)
CALL VISCY (YL,Y,NL)
OX=OX+DX
30 OY=OY+DY
CALL PHFMV
40 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

```

//FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
C
C PHFVV SUBROUTINE QUE HACE LOS MARCOS INTERIOR Y EXTERIOR
C PARA LAS GRAFICAS PONIENDO EL NUMERO DEL EIGENVECTOR
C CORRESPONDIENTE

```

```

SUBROUTINE PHFVV(K)

```

```

    PI=3.1416
    CALL SCALF(9.8/11.,9.8/11.0,0.0,0.0)
    CALL FPLOT(2,0.0,11.0)
    CALL FPLOT(0,8,5,11.0)
    CALL FPLOT(0,8.5,0.0)
    CALL FPLOT(0,0.0,0.0)
    CALL FCHAR(0.39,2.0,0.07,0.07,-PI/2.0)
    WRITE(7,10)
10  FORMAT('U.A.P. V.V.N')
    CALL FCHAR(0.53,2.0,0.07,0.07,-PI/2.0)
    WRITE(7,11)
11  FORMAT('I.P.N E.S.F.M')
    CALL FPLOT(-2,1.0,1.0)
    CALL FPLOT(0,1.0,10.0)
    CALL FPLOT(0,7.5,10.0)
    CALL FPLOT(0,7.5,1.0)
    CALL FPLOT(0,1.0,1.0)
    CALL FCHAR(7.64,9.0,0.08,0.08,-PI/2.0)
    WRITE(7,13)K
13  FORMAT('MODO NORMAL ='I2)
    CALL FPLOT(1,4.25,5.5)
    CALL SCALF(9.8/11.,9.8/11.,0.0,0.0)
    RETURN
END

```

```

//FORTRAN
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
C
C   PHFMV SUBROUTINE QUE DA OPCION PARA ESCOGER LA REGION DE LA
C   PROXIMA GRAFICA
C
      SUBROUTINE PHFMV
10  FORMAT(' DAR EL CONTROL DE LA NUEVA PAGINA, COLOCAR EN ON ',//
      = 'SWITCH 0 SI SE GRAFICO EN LA PRIMERA REGION ',//
      = 'SWITCH 1 SI SE GRAFICO EN LA SEGUNDA REGION ',//
      = 'SWITCH 2 SI SE GRAFICO EN LA TERCERA REGION ',//
6   PAUSE
      DO 2 I=1,3
        J=I-1
        CALL DATSW(J,K)
        GO TO(3,2),K
3   GO TO(4,4,5),I
2   CONTINUE
      WRITE(1,11)
11  FORMAT(//,' AUN SIGO ESPERANDO ',//)
      GO TO 6
4   CALL FPLOT(1,-4.25,5.5)
      GO TO 7
5   CALL FPLOT(1,4.3,-27.5)
7   CALL SCALF(1.0,1.0,0.0,0.0)
      RETURN
      END

```

```

//FOR
*IOCS(1403PRINTER.2501READER,PLOTTER)
*IOCS(TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
*NAME
C
C *****
C
C                               APENDICE D
C
C                               PROGRAMA PRINCIPAL
C
C                               PENCC
C
C *****
C
C          DESCRIPCION DEL PROGRAMA QUE COMPRUEBA LOS RESULTADOS
C OBSERVADOS DE LOS MODOS NORMALES DE VIBRACION, GRAFICANDO LOS
C NUMEROS DE ONDA EN EL PLANO C1,C2, CORRESPONDIENTES A LAS
C DIFERENTES FRECUENCIAS
C
      DIMENSION X(12,41)
      DEFINE FILE(200(12,82,U,IK)
      N=8
      LO=5
      F=.045
      A2=1.9
      A1=0.1
      XMG=1.4
      XMP=0.875
      Y=A1/A2
      RHO=XMP/XMG
      IM=1
      CALL PHF00 (L)
      CALL PHFVE(IM)
      CALL PHFRI (-1.5,-1.5,1)
      CALL PHFRI (1.5,11.5,2)
      CALL PHFRI (0.0,0.0,3)
      CALL PHRFI (0.0,0.0,4)
      CALL POINT (1)
      CALL PHFRI (1.0,1.0,3)
      CALL PHFRI (1.0,1.0,4)
      CALL POINT (1)
      CALL PHFRI (1.0,-1.0,3)
      CALL PHFRI (1.0,-1.0,4)

```

```

CALL POINT (1)
CALL PHFRI (-1.0,1.0,3)
CALL PHFRI (-1.0,1.0,4)
CALL POINT (1)
CALL PHFRI (-1.0,-1.0,3)
CALL PHFRI (-1.0,-1.0,4)
CALL POINT (1)
DO 19 J=1,N
READ (200,J)(X(J,K),K=1,41)
19 CONTINUE
DO 10 I=1,N
CALL PENC G (X(I,1)/A2,Y,RHO,Y1,X1)
CALL PHFRI (X1,Y1,3)
DO 11 J=1,41
CALL PENC G (X(I,J)/A2,Y,RHO,YN,XN)
CALL PHFRI (XN,YN,4)
A1=A1+F
A2=A2-F
11 Y=A1/A2
WRITE (LO,400)
400 FORMAT (1X,/)
A2=1.9
A1=0.1
Y=A1/A2
10 CONTINUE
CALL PHFEJ (L)
CALL EXIT
END

```

```

//FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
C
C PHFVE SUBROUTINE QUE HACE LOS MARCOS INTERIOR Y EXTERIOR PARA
C LAS GRAFICAS PONIENDO EL NUMERO DEL EIGENVALOR POR GRAFICARSE
C EN EL PLANO C1 C2
C
      SUBROUTINE PHFVE(IM)
      PI=3.1416
      CALL SCALF(9.8/11.,9.8/11.0,0.0,0.0)
      CALL FPLOT(2,0.0,11.0)
      CALL FPLOT(0,8.5,11.0)
      CALL FPLOT(0,8.5,0.0)
      CALL FPLOT(0,0.0,0.0)
      CALL FCHAR(0.39,2.0,0.07,0.07,-PI/2.0)
      WRITE(7,10)
10  FORMAT('U.A.P  V.V.N')
      CALL FCHAR(0.53,2.0,0.07,0.07,-PI/2.0)
      WRITE(7,11)
11  FORMAT('I.P.N  E.S.F.M')
      CALL FPLOT(-2,1.0,1.0)
      CALL FPLOT(0,1.0,10.0)
      CALL FPLOT(0,7.5,10.0)
      CALL FPLOT(0,7.5,1.0)
      CALL FPLOT(0,1.0,1.0)
      CALL FCHAR(8.14,9.0,0.08,0.8,-PI/2.0)
      WRITE(7,12)IM
12  FORMAT('EIGENVALOR' I2)
      CALL FCHAR(7.78,9.0,0.08,0.08,-PI/2.0)
      WRITE(7,13)
13  FORMAT('EN EL PLANO C1,C2')
      CALL FPLOT(1,4.25,5.5)
      CALL SCALF(9.8/11.,9.8/11.,0.0,0.0)
      RETURN
      END

```

```

//FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
C  PENC ( Z1,Y,RHO,C1,C2) NOS DA LOS VALORES DE LAS COORDENADAS
C  C1,C2 PARA DESPUES GRAFICARLAS POR MEDIO DEL GRAFICADOR,
C  Z1=LAMBDA/A2, Y=A1/A2 Y RHO ES LA RELACION DE
C  MASAS=MASA CHICA/MASA GRANDE.
C
      SUBROUTINE PENC ( Z1,Y,RHO,C1,C2)
      CRHO=SQRT(RHO)
      CRHO=CRHO + 1.0/CRHO
      B=CRHC*Z1+(Y+2.0)**2
      AC=4.0*(Z1*Z1+2.0*CRHO*Z1*(Y+1.)+2.0*((Y+2.0)**2-2.0))
      IF(B*B-AC)32,33,34
32  SQ=SQRT(AC-B*B)
      C1=0.25*(B+SQ)
      C2=0.25*(B-SQ)
      WRITE(5,28)C1,C2
28  FORMAT(1X, ' C1P='F10.4, 3X,' C2P='F10.4)
      RETURN
33  B=B/4.0
      C1=B
      C2=B
      WRITE(5,24)B,B
24  FORMAT(1X, ' B = 'E14.6,3X, ' B = 'E14.6)
      RETURN
34  SQ=SQRT(B*B-AC)
      C1=0.25*(B+SQ)
      C2=0.25*(B-SQ)
      WRITE(5,23)C1,C2
23  FORMAT(1X,' C1= 'F10.4,3X,' C2= 'F10.4)
      RETURN
      END

```

```

//FOR
*IOCS(1403 PRINTER,2501READER,DISK)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
*NAME PENTA
C
C *****
C
C             APENDICE E
C
C             PROGRAMA PRINCIPAL
C
C             PENTA
C
C *****
C
C LA DESCRIPCION DE UNO DE LOS PROGRAMAS QUE SE EMPLEARON PARA
C CALCULAREL ESPECTRO DE FRECUENCIAS Y LOS MODOS NORMALES DE
C VIBRACION
C
C             PENTA ES EL PROGRAMA PRINCIPAL QUE NOS CALCULA LOS
C EIGENVALORES Y EIGENVECTORES DE UNA MATRIZ PENTADIAGONAL A LA
C CUAL SE LE PUEDEN HACER MODIFICACIONES EN LAS ESQUINAS DE SUS
C DIAGONALES
C
C INSTRUCCIONES DE ENTRADA QUE SIRVEN PARA DEFINIR ARREGLOS,
C NOMBRES DE VARIABLES Y PARA DEFINIR ARREGLOS EN EL DISCO
C
    DIMENSION    X(12,41)
    DIMENSION    Z(32)
    DIMENSION    V(31),U(10,10)
    DIMENSION    G(10,10)
    COMMON       N,LI,LO
    DEFINE FILE  200(12,82,U,IK)
    DEFINE FILE   10(57,120,U,K1)
    DEFINE FILE  101(41,96,U,K01)
    DEFINE FILE  102(41,96,U,K02)
    DEFINE FILE  103(41,96,U,K03)
    DEFINE FILE  104(41,96,U,K04)
    DEFINE FILE  105(41,96,U,K05)
    DEFINE FILE  106(41,96,U,K06)
    DEFINE FILE  107(41,96,U,K07)
    DEFINE FILE  108(41,96,U,K08)
    DEFINE FILE  109(41,96,U,K09)
    DEFINE FILE  110(41,96,U,K10)

```

```

DEFINE FILE 111(41,96,U,K11)
DEFINE FILE 112(41,96,U,K12)
DEFINE FILE 113(41,95,U,K13)
DEFINE FILE 114(41,96,U,K14)
DEFINE FILE 115(41,96,U,K15)
DEFINE FILE 116(41,96,U,K16)
DEFINE FILE 117(41,96,U,K17)
DEFINE FILE 118(41,96,U,K18)
DEFINE FILE 119(41,96,U,K19)
DEFINE FILE 120(41,96,U,K20)
C
C INSTRUCCIONES DE ENTRADA PARA LEER LA DIMENSION (N) QUE
C DESEAMOS ANALIZAR
C
    LI=8
    LO=5
    READ (LI,20) N
20 FORMAT(I2)
    IF(N) 2,2,3
    2 CALL EXIT
    3 WRITE (LO,300) N
300 FORMAT ('1N='I2)
C
C GENERACION DE LOS ELEMENTOS MATRICIALES .-LLENAMOS LA MATRIZ
C TENIENDO EN CUENTA SU FORMA PENTADIAGONAL (DIAGONALES A,B,C,
C D,E) LO CUAL NOS PERMITE UTILIZAR MENOS MEMORIA DE LA MAQUINA,
C ESTA PARTE ES LA QUE GENERALMENTE DIFIERE DE MODELO A MODELO
C
    F=0.045
    XMG=1.4
    XMP=0.875
    A1=0.1
    A2=1.9
    A0=-2.0*(A1+A2)
    EPSIL=0.01
    DO 30 K=1,41
    X1=A1/SQRT(XMP*XMG)
    X2=A2/XMP
    X0=A0/XMP
    Y2=A2/XMG
    Y0=A0/XMG
    DO 97 I=1,N
    DO 97 J=1,N
97 G(I,J)=0.0
    DO 10 I=1,N,2
10 G(I,I)=X0

```

```

      N11=N-1
      DO 13 I=1,N11
        J=I+1
        G(I,J)=X1
13    G(J,I)=G(I,J)
      N12=N-2
      DO 11 I=2,N,2
11    G(I,I)=Y0
      DO 14 I=1,N12,2
        J=I+2
        G(I,J)=X2
14    G(J,I)=G(I,J)
      DO 17 I=2,N12,2
        J=I+2
        G(I,J)=Y2
17    G(J,I)=G(I,J)
        G(2,N)=Y2
        G(1,N)=X1
        G(1,N-1)=X2
        G(N-1,1)=G(1,N-1)
        G(N,2)=G(2,N)
        G(N,1)=G(1,N)
        CALL PENJA (G,EPSIL,V,U)
      DO 23 J=1,N
23    X(J,K)=V(J)
C
C  PENGR (W,Z1,Z2)GRAFICA LOS EIGENVALORES POR MEDIO DE NUMEROS,
C  IMPRIMIENDO EL NUMERO DEL EIGENVALOR CORRESPONDIENTE Y Z1,Z2
C  SON LOS LIMITES DE DONDE SE QUIERE VER LA GRAFICA
C
      CALL PENGR (V,0.0,8.0)
C
C          CALCULO DE LOS EIGENVECTORES
C
      DO 18 J=1,N
      DO 12 I=1,N
12    Z(I)=U(I,J)
C
C  PENNO NORMALIZA LAS PRIMERAS N COMPONENTES DEL VECTOR DE
C  ARGUMENTO Z
C
      CALL PENNO(Z,N)
C
C  PENST (Z,N,M,K,L)ALMACENA Y RECUPERA LOS VECTORES DEL DISCO
C  DE ACUERDO CON LA OPCION L, EL ARGUMENTO ES UN VECTOR Z DE
C  DIMENSION N, K EL ARCHIVO DEL DISCO QUE SERA EMPLEADO Y M

```

```

C ES EL NUMERO DE REGISTRO
C
  18 CALL PENST (Z,N,100+J,K,3)
    A1=A1+F
  30 A2=A2-F
C
C     EN ESTA PARTE GRAFICAMOS LOS MODOS NORMALES DE VIBRACION
C LA OPCION ES QUE PUEDEN SER GRAFICADOS CON ESTRELLAS Y UNIDOS
C MANUALMENTE O GUARDADOS EN ALGUN REGISTRO PARA QUE DESPUES
C SEAN UNIDOS AUTOMATICAMENTE
C
C EN ESTA PARTE GUARDAMOS LOS EIGENVALORES EN EL REGISTRO 200
C PARA DESPUES GRAFICARLOS POR MEDIO DEL PLOTTER EN EL PLANO
C C2 Y C1
C
    DO 98 J=1,N
      WRITE (200,J)(X(J,K),K=1,41)
  98 CONTINUE
    WRITE(L0,352)
  352 FORMAT(1H1)
    DO 32 I=1,N
C
C     PENPG (Z,N,M,K,L) HACE UNA PAGINA DE GRAFICA DE LOS
C EIGENVECTORES, Z ES EL VECTOR QUE CONTIENE LAS COMPONENTES
C (NORMALIZADAS) DEL EIGENVECTOR DE DIMENSION N, M ES LO QUE
C DESEAMOS SACAR, K ES EL NUMERO DE ARCHIVO EN QUE LOS PUNTOS
C VAN HACER INTRODUCIDOS Y L ES LA OPCION
C
    CALL PENPG(Z,N,0,10,1)
    CALL PENPG(Z,N,0,10,2)
    CALL PENST(Z,N,100+I,41,4)
    DO 31 K=1,41
      CALL PENST (Z,N,100+I,K,5)
  31 CALL PENPG (Z,N,K,10,3)
  31 CALL PENPG (Z,N,I,10,5)
    CALL EXIT
    END

```

```

//FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
C
C SUBROUTINA PENOR ORDENA EN FORMA CRECIENTE CUALQUIER ARREGLO
C
SUBROUTINE PENOR (X,Y,V)
DIMENSION X(31),Y(31),V(10,10),H(10)
COMMON N,LI,LO
DO 15 I=1,N
XMIN=X(I)
DO 16 J=I,N
IF (XMIN-X(J))16,16,17
17 P=XMIN
XMIN=X(J)
X(J)=P
DO 10 L=1,N
H(L)=V(L,I)
V(L,I)=V(L,J)
10 V(L,J)=H(L)
16 CONTINUE
Y(I)=XMIN
15 CONTINUE
RETURN
END

```

```

//FOR
*ONE WORD INTEGERS
*LIST ALL
C
C SUBROUTINA PENJA SIRVE PARA CALCULAR POR EL METODO DE JACOBI
C LOS EIGENVALORES Y EIGENVECTORES DE LA MATRIZ DE MOVIMIENTO A
C
      SUBROTINE PENJA (A, EPSIL, L, V, U)
      DIMENSION A(10,10), B(10,10), C(10,10), R(10,10), RT(10,10)
      DIMENSION U1(10,10), U(10,10), V1(31), V(31)
      COMMON      N, LI, LO
      CALL MATUM(U)
25 CALL MATCY(B, A)
      CALL MATDS(B, 0)
      CALL MATAM(AM, L, M, B)
      IF(AM-EPSIL) 40, 40, 41
41 A1=B(L, M)
      A2=A(L, L)
      A3=A(M, L)
      A4=A(M, M)
      IF(A2-A4) 20, 20, 21
20 E=- (A2-A4)+SQRT((A2-A4)**2+A1**2)
      TAG=E/A1
      GO TO 22
21 W=- (A2-A4)-SQRT(A2-A4)**2+A1**2)
      TAG=W/A1
22 COS=1.0/SQRT(1.0+TAG**2)
      SEN=COS*TAG
      CALL MATUM(R)
      R(L, L)=COS
      R(L, M)=-SEN
      R(M, L)=SEN
      R(M, M)=COS
      CALL MATUM(RT)
      RT(L, L)=COS
      RT(L, M)=SEN
      RT(M, L)=-SEN
      RT(M, M)=COS
      CALL MATPR(C, RT, A)
      CALL MATPR(A, C, R)
      CALL MATCY (U1, U)
      CALL MATPR (U, U1, R)
      GO TO 25
40 DO 60 I=1, N
60 V1(I)=A(I, I)
      CALL PENQR (V1, V, U)

```

RETURN  
END



# Referencias

- [1] BERKELEY PHYSICS COURSE - Volume 3, "Waves", McGraw - Hill book company, New York, (1969)
- [2] L. BRILLOUIN, "Wave Propagation in Periodic Structures", McGraw - Hill, New York (1946) reprinted Dover Pub. (1963)
- [3] J. ORTEGA CAMPOS Y H.V. McINTOSH, "Estudio de vibraciones de redes lineales con interacciones a segundos vecinos", Instituto Mexicano del Petróleo, Pub. 71 EI/077. (1971)
- [4] L. RIVAUD ELFENBEIN Y J. TAGUEÑA P. "Tesis de la Cadena Unidimensional de Osciladores Armónicos", UNAM, (1972)
- [5] I. ROMERO MEDINA, "Vibraciones de redes Lineales con interacciones a Primeros Vecinos", Tesis Profesional, E.S.F.M. I.P.N. (1971)
- [6] J. H. WILKINSON, "The Algebraic Eigenvalue Problem", Clarendon Press Oxford, (1965)
- [7] A. KOTHARI, "An Introduction to lattice Dynamics", Addison - Wesley Publishing Company, London, (1972)
- [8] G. CALVILLO VIVES, "Los métodos de Jacobi, Givens y Primas para diagonalizar matrices", Tesis Profesional, E.S.F.M. - I.P.N., (1971)