



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**EL MOVIMIENTO CLÁSICO DE UNA PARTÍCULA
EN TORNO A DOS CENTROS COULOMBIANOS
CON CARGAS ELÉCTRICAS Y MAGNÉTICAS**

TESIS PROFESIONAL

RODOLFO REYES SANCHEZ

MÉXICO, D. F.

1971

FACULTAD DE CIENCIAS
U. N. A. M

EL MOVIMIENTO CLÁSICO DE UNA PARTÍCULA EN TORNO A DOS
CENTROS COULOMBIANOS CON CARGAS ELÉCTRICAS Y MAGNÉTICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

p r e s e n t a

RODOLFO REYES SANCHEZ

México, D. F.

1971

A MI MADRE

A G R A D E C I M I E N T O

Deseo expresar mi agradecimiento al Profesor Harold V. McIntosh por su valiosa ayuda en la elaboración de este trabajo ya que sin sus innumerables sugerencias no hubiera sido posible. A la Comisión Nacional de Energía Nuclear y en particular al Profesor Juan José Ortiz Amézcuca por las facilidades que me ha proporcionado al hacer uso del sistema PDP-10. Asimismo, agradezco al Dr. Enrique Melrose el haberme permitido hacer uso del equipo del Centro Nacional de Cálculo en el Instituto Politécnico Nacional donde fue iniciada esta tesis. A la Sra. Ma. Eugenia S. de Romero expreso mi gratitud por su trabajo mecanográfico y al compañero Alejandro Salgado por haber realizado los dibujos. Así como a las diferentes personas que de diversas maneras me brindaron alguna ayuda o sugerencia.

Contenido

1	Introducción	1
1.1	Planteamiento del problema	2
1.2	Ecuaciones de movimiento	3
1.3	Interacción con el campo electromagnético	5
1.4	Potencial electrostático	8
1.5	Puntos de retorno	11
1.5.1	Otro método	14
1.6	Potencial repulsivo	21
1.7	Generalidades sobre el monopolio magnético	22
2	Solución numérica de las ecuaciones de movimiento, varios métodos Runge-Kutta	27
3	Descripción del programa	37
3.1	Subrutinas que usa el programa	38
3.1.1	Subrutina AUGV	38
3.1.2	Subrutina CPYV	38
3.1.3	Subrutina ZERV	39
3.1.4	Subrutina INDI	39
3.1.5	Subrutina INDO	40
3.1.6	Subrutina GRAF	40
3.1.7	Subrutina PAGE	44
3.1.8	Subrutina PLOT	46
3.1.9	Subrutina GRAD	47
3.1.10	Subrutina RUKU	48
3.1.11	Subrutina TURN	49
3.1.12	Subrutina CNTU	52
3.1.13	Subrutina PRYPO	53
3.1.14	Discusión del programa general	54
4	Algunos ejemplos de configuraciones que pueden estudiarse con el método que estamos usando	59
4.1	Dos cargas magnéticas	61

4.2	Energías negativas	63
4.3	Estudio del movimiento considerando únicamente cargas eléctricas.	66
5	Conclusiones.	71
A	Discusión del programa PRYPO	73
A.1	Subrutina POLN	74
A.2	Subrutina CALCA	75
A.3	Subrutina REGP	77
A.4	Programa principal	79
B	Consideraciones para ver los efectos de omitir el potencial repulsivo	83
C	Interpretación de algunos resultados obtenidos con la computadora	87
C.1	Discusión de los diferentes tipos de graficas.	87
	a) Gráficas de las coordenadas como funciones del tiempo	87
	b) Representación espacial del movimiento	88
	c) Puntos de retorno	88
	d) Gráficas para la región permitida	89
	e) Gráficas de las funciones: $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $s_1(\eta)$ y $s_2(\eta)$	89
	f) Curvas de energía potencial constante	90
C.2	Algunos ejemplos	97
	Bibliografía	116

Se generó este documento a partir de una tesis original, por lo que puede contener errores de transcripción. Se corrigieron algunos errores tipográficos evidentes.

Capítulo 1

Introducción

Poincaré demostró que el movimiento de una partícula cargada en el campo de un monopolo magnético está siempre confinado a la superficie de un cono cuyo ángulo medio depende de la intensidad de la carga magnética y cuyo eje coincide con la dirección del momento que se conserva en el sistema.

Consecuentemente, las características del movimiento en el campo de un monopolo son diferentes a las de un campo de fuerzas ordinario para el cual la órbita siempre está contenida en un plano ortogonal al momento angular.

Una combinación de cargas eléctricas y magnéticas que obedece a la ley de Coulomb no da lugar a un campo de fuerzas especialmente simétrico, en el sentido de que las órbitas acotadas no son cerradas y no hay un vector constante de movimiento tal como el vector de Runge, siendo sólo aparente la simetría de las fuerzas centrales.

Sin embargo, por la adición de un potencial centrífugo repulsivo proporcional al cuadrado de la carga magnética, el sistema se vuelve altamente simétrico, comparable al que se encuentra en el problema de Kepler o en el oscilador armónico. Se encuentra que las órbitas acotadas son planas. En cualquier caso, las órbitas son secciones cónicas como en el problema de Kepler, con la diferencia de que el centro fijo donde está la carga no ocupa los focos de la órbita ni está contenido en el plano de la misma.

Después del problema de un centro, quizás la posibilidad más simple es la de considerar el movimiento de una partícula en el campo de dos centros fijos. Tal configuración es el punto de partida para el estudio de moléculas diatómicas u otros sistemas binarios. Las ecuaciones de movimiento no son particularmente simples, a no ser que se incluya el potencial centrífugo repulsivo. Procediendo así, la ecuación de Hamilton-Jacobi para el sistema resulta separable y en efecto, las ecuaciones separadas se asemejan mucho a las que ocurren sin carga magnética. Aunque las ecuaciones de movimiento resultan matemáticamente simples, es dudoso que el término correspondiente al potencial centrífugo sea debido a un campo central de fuerzas, aún suponiendo la existencia de cargas magnéticas aisladas.

A pesar de éso, el procedimiento empleado permite el estudio de las propiedades de un sistema altamente simétrico, y subsecuentemente puede examinarse el efecto que resulta en el movimiento por el hecho de remover el término centrífugo no natural introducido en el problema, en tanto que su importancia sólo depende de la masa de la partícula.

1.1 Planteamiento del problema

En general, el propósito de nuestro trabajo consiste en determinar el movimiento de una partícula en el campo de dos centros coulombianos en los términos que hemos propuesto en páginas anteriores. Los casos correspondientes a monopolos magnéticos, problema de Kepler, dipolos, etc., son diferentes posibilidades del problema. Entonces, las ecuaciones de movimiento se plantean para dos centros y en cada caso se harán las consideraciones necesarias. La naturaleza del problema nos sugiere utilizar coordenadas elipsoidales y el método más adecuado para realizar nuestro estudio es el uso de una formulación hamiltoniana.

La definición de coordenadas elipsoidales es la siguiente: Se tienen dos focos separados por una distancia de $2d$, en ellos vamos a colocar los centros de fuerza mencionados. Las distancias de dichos centros a un punto P (donde colocamos la carga de prueba) están representadas por r_1 y r_2 . Las coordenadas se toman como:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{r_1 + r_2}{2d} \\ \eta &= \frac{r_1 - r_2}{2d}\end{aligned}\tag{I-1-1}$$

La línea de los centros se toma como eje Z , alrededor de dicho eje se considera un ángulo ϕ como tercera coordenada. La interpretación de dichas coordenadas es la siguiente. Los valores constantes de ξ definen elipses cuyos focos son precisamente los dos centros y los valores de η determinan hipérbolas con los mismos focos. En tres dimensiones se tendrán figuras de revolución alrededor del eje Z . En seguida mostramos el caso bidimensional.

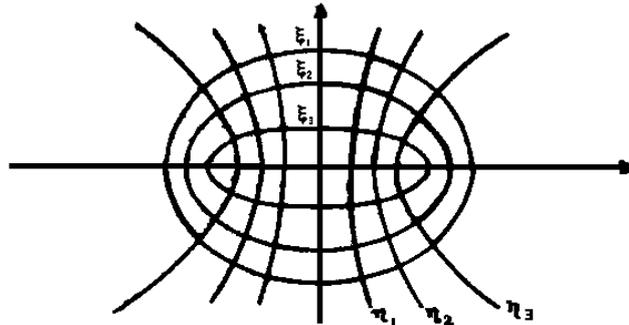


Figura 1.1: coordenadas elípticas

Además, se ve fácilmente que

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2} \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}\end{aligned}\tag{I-1-2}$$

Se tienen algunas relaciones que nos serán útiles:

$$\begin{aligned}
 \xi^2 + \eta^2 &= \frac{r_1^2 + r_2^2}{2d^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + d^2}{d^2} \\
 \xi^2 - \eta^2 &= \frac{r_1 r_2}{d^2} \\
 \xi \eta &= \frac{z}{d} \implies z = \xi \eta d
 \end{aligned}
 \tag{I-1-3}$$

$$\begin{aligned}
 r^2 &= x^2 + y^2 = d^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \quad (\text{radio cilíndrico}) \\
 x &= r \cos \phi = d\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \phi \\
 y &= r \sin \phi = d\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \phi
 \end{aligned}$$

Estas relaciones permiten en cualquier momento escribir en coordenadas elipsoidales cantidades expresadas en coordenadas cartesianas.

1.2 Ecuaciones de movimiento

Una vez planteada la naturaleza del problema el siguiente paso consiste en establecer las ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana, primero vamos a ver como se escribe la energía cinética en términos de las nuevas coordenadas. Recordemos que en coordenadas cartesianas y en ausencia de potencial vectorial la energía cinética está dada como:

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \tag{I-2-1}$$

Si deseamos expresar nuestras ecuaciones en coordenadas elipsoidales conviene formar una función generadora de transformaciones canónicas del tipo F_2 [1] de la manera siguiente:

$$F_2 = \sum_i Q_i(q_j) P_i \tag{I-2-2}$$

donde las q_j son las viejas coordenadas y las Q_i y las P_i son las nuevas coordenadas y los nuevos momentos respectivamente. Ya sabemos de la teoría que

$$\begin{aligned}
 Q_i &= -\frac{\partial F}{\partial p_i} \\
 P_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i}
 \end{aligned}$$

con estas relaciones podemos encontrar los viejos momentos y coordenadas en función de los nuevos.

En nuestro caso y de acuerdo con (I-2-2) se tiene:

$$F_2 = \xi p_\xi + \eta p_\eta + \phi p_\phi$$

y

$$p_x = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} p_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x} p_\eta + \frac{\partial \phi}{\partial x} p_\phi$$

Para p_y y p_z se obtienen relaciones semejantes. Una vez efectuadas las operaciones, los resultados son:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{x\xi p_\xi}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} - \frac{x\eta p_\eta}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} - \frac{y p_\phi}{(x^2 + y^2)} \\ p_y &= \frac{y\xi p_\xi}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} - \frac{y\eta p_\eta}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} + \frac{x p_\phi}{(x^2 + y^2)} \\ p_z &= \frac{z\xi - d\eta}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} p_\xi - \frac{z\eta - d\xi}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} p_\eta \end{aligned} \quad (\text{I-2-3})$$

Teniendo ahora los viejos momentos se substituye en la expresión para la energía cinética resultando lo siguiente:

$$2mdT = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right) p_\phi^2 \right\} \quad (\text{I-2-4})$$

con lo cual tenemos la energía cinética expresada en coordenadas elipsoidales como era nuestro deseo. Una vez hecho lo anterior debemos observar ciertas propiedades: Nótese que cuando el valor de ξ se acerca a la unidad, las elipses van siendo cada vez más cerradas hasta llegar al límite en que se tiene una elipse degenerada en el segmento rectilíneo que une los dos centros. También al llegar a la unidad del valor de η las hipérbolas se cierran hasta que se llega a una hipérbola degenerada que corresponde a la parte comprendida fuera del segmento que une los centros.

Cuando una de las dos variables vale uno, la otra puede tomar cualquier valor diferente de la unidad, en esos casos no hay singularidades, pero sí cuando las dos variables toman el mencionado valor y que es equivalente a estar colocado en uno de los dos centros, como puede verse de (I-1-1) ya que r_1 y r_2 no pueden anularse simultáneamente. También puede verse en (I-2-4) que la energía cinética va a ser distorsionada por el factor $1/(\xi^2 - \eta^2)$ y que corresponde al recíproco del producto $r_1 r_2$. Cuando dicho producto es muy pequeño su recíproco es muy grande lo cual significa estar en la vecindad de uno de los dos centros. Se observa también que cuando $\xi \rightarrow 1$ el factor que multiplica a p_ξ^2 es muy pequeño lo que va a ser compensado con el crecimiento de $1/(\xi^2 - \eta^2)$ de tal modo que el producto de los dos se mantiene fijo y lo mismo se tiene con la parte correspondiente a la variable η . Entonces, esos dos momentos pueden tomar valores muy grandes, pero debe señalarse que dichos momentos no son únicamente de la forma mv sino que hay un factor de peso que toma en cuenta el cambio de coordenadas rectangulares a curvilíneas provocando que aparezcan distorsiones en la vecindad de los puntos ya mencionados. Por lo que respecta al coeficiente del momento p_ϕ este tienen singularidades en torno al eje Z .

Hay que señalar que a excepción del factor $1/(\xi^2 - \eta^2)$ en la energía cinética se tiene una suma de funciones con variables separadas, por lo menos cuando tenemos a p_ϕ como constante. En ese caso se tendrá la suma de una función sólo de ξ y una sólo de η . Puede decirse entonces que la energía cinética en este tipo de coordenadas está casi separada; se verá que es separable en un sentido que es útil.

Que la hamiltoniana sea o no separable va a depender de si lo es la energía potencial, que es de la forma $\frac{a}{r_1} + \frac{b}{r_2}$ que equivale a

$$\frac{1}{\xi + \eta} + \frac{1}{\xi - \eta}$$

y se verá que al menos para potencial coulombiano se puede separar. También hay separación cuando existe potencial vectorial debido a una carga magnética como veremos más adelante. El sistema de coordenadas empleado es uno de los pocos en que el problema es separable (en coordenadas cartesianas esto no es posible).

1.3 Interacción con el campo electromagnético

Se desarrollará ahora la energía cinética de la partícula, tomando en cuenta la presencia de un potencial vectorial \mathbf{A} . Como es bien sabido, hay que seleccionar \mathbf{A} de tal manera que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (\text{I-3-1})$$

Donde \mathbf{B} es el campo magnético. Además, la función hamiltoniana toma la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (\text{I-3-2})$$

Estamos considerando el caso en que el campo de fuerzas producido por la carga magnética es coulombiano, es decir que

$$\mathbf{B} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{I-3-3})$$

Lo que significa que al integrar el campo sobre una superficie esférica se tendrá:

$$\int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega = \frac{4}{3} \pi q \quad (\text{I-3-4})$$

Como el segundo miembro es constante, la expresión (I-3-4) indica que la disminución del campo con la distancia es compensada por el crecimiento del área.

Nuestro problema consiste ahora en encontrar la forma que debe tener \mathbf{A} para dar lugar a un campo magnético como el que se ha mencionado. Por el momento vamos a verificar que la función que nos interesa puede tomarse como

$$\mathbf{A} = g \left(\frac{yz}{r^3 \rho}, -\frac{xz}{r^3 \rho}, 0 \right) \quad (\text{I-3-5})$$

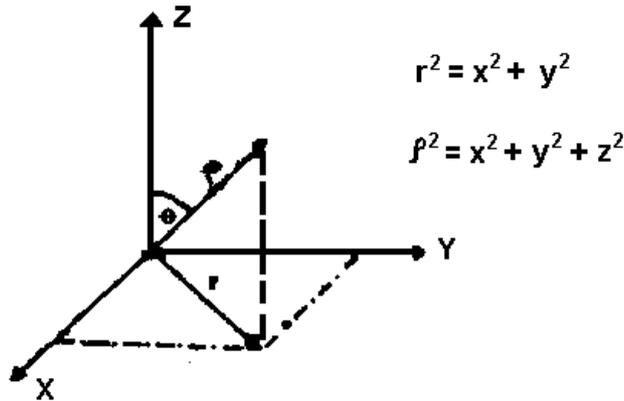


Figura 1.2: coordenadas r y ρ

donde g es la carga magnética, ρ es la posición de la carga de prueba, r es el radio cilíndrico, x , y y z son las componentes de ρ en coordenadas cartesianas.

Nótese que los coeficientes de ρ dentro del paréntesis son adimensionales, teniéndose por consiguiente un potencial de la forma $1/r$ que es también el caso del potencial electrostático, y su gradiente es de la forma $-1/r$.

Debe observarse también que cuando $r = 0$ (sobre el eje Z) el potencial \mathbf{A}_0 es infinito. Además, cuando X o Y valen cero, se anula dicha función lo que significa que tiene una dependencia angular, dependencia que por el momento no nos interesa. Una vez que se tiene \mathbf{A}_0 dada por (I-3-5) encontramos usando (I-3-1) que

$$B_x = (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y}$$

Como $\mathbf{A}_z = 0$ al desarrollar se tiene

$$\mathbf{B}_x = -\frac{gx}{\rho^2}$$

Para \mathbf{B}_y y \mathbf{B}_z las expresiones son semejantes aunque la derivación para la componente z es algo más complicada, así

$$\mathbf{B} = \left(\frac{gx}{\rho^2}, \frac{-gy}{\rho^2}, \frac{-gz}{\rho^2} \right) = -\frac{g}{\rho^2} \mathbf{r} \quad (\text{I-3-6})$$

Ese es precisamente el resultado que se buscaba para \mathbf{B} . Entonces da lugar al campo deseado. Es bien sabido que el rotacional de un gradiente es nulo por lo que nuestro potencial vectorial no está completamente determinado sino que puede sumársele el gradiente de una función Φ cualquiera, es decir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla \Phi \quad (\text{I-3-7})$$

Dicha operación se conoce como selección de norma, y se sabe que el potencial vectorial es ambiguo ante una operación de este tipo, de la misma manera que el potencial escalar es ambiguo ante el cero de energía potencial; por eso no se afecta un problema cuando se añade a V una constante. En el caso del campo eléctrico, la energía de una partícula con carga e en su posición actual viene expresada como el trabajo necesario para llevarla ahí desde una posición de referencia fijada de antemano; normalmente se fija el cero de energía en el infinito. Es claro que el cambiar el punto de referencia, el nuevo valor diferirá del antiguo solo por una constante; esa es la razón por la que únicamente interesa conocer diferencias de energía entre dos posiciones. Lo mismo pasa cuando se tiene un elemento de corriente, solo que por ser este un vector, debe asignarse a la posición de referencia un valor y una posición determinados; el momento que tiene un elemento de corriente en cualquier punto, en presencia de campos eléctricos y magnéticos es la diferencia de momentos entre las dos posiciones [2].

En la literatura corrientemente se trabaja con dos normas y aunque eso no afecta nuestro problema, es importante señalar que en mecánica cuántica, por ejemplo, hay aspectos que dependen de la elección de norma. La norma que usamos aquí difiere por $\arctan(y/x)$ de la usada tradicionalmente por la literatura y que en coordenadas polares se escribe como [3]

$$\mathbf{A}_r = 0, \quad \mathbf{A}_\theta = 0, \quad \mathbf{A}_\phi = \frac{g}{r} \tan \frac{\theta}{2}$$

Esta tiene singularidades en $\theta = \pi$ en la dirección negativa del eje Z . La otra norma tiene singularidades sólo en la parte negativa de dicho eje, pero el inconveniente que presenta en nuestros desarrollos es el hecho de que la separabilidad sí depende de la norma.

El problema que nos ocupa, como hemos dicho, consiste en dos centros coulombianos separados por una distancia $2d$ y en ese caso las dos partes del potencial vectorial son:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= g_1 \left(\frac{y(z+d)}{r^2 r_1}, \frac{-x(z+d)}{r^2 r_1}, 0 \right) \\ \mathbf{A}_2 &= g_2 \left(\frac{y(z-d)}{r^2 r_2}, \frac{-x(z-d)}{r^2 r_2}, 0 \right) \end{aligned}$$

Entonces el potencial en cualquier punto es la suma de \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 . Al desarrollar la suma se tiene:

$$\mathbf{A} = \frac{z(g_1 r_2 + g_2 r_1) + d(g_1 r_2 - g_2 r_1)}{r^2 r_1 r_2} (y, -x, 0) \quad (\text{I-3-8})$$

El hamiltoniano al desarrollarse queda así:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \quad (\text{I-3-9})$$

Sin tomar en cuenta el potencial electrostático podemos encontrar ahora el hamiltoniano en coordenadas elipsoidales. De acuerdo con (I-3-8). \mathbf{A} toma la forma:

$$\mathbf{A} = \frac{(g_1 + g_2)(\xi^2 - 1)\eta + (g_1 - g_2)(1 - \eta^2)\xi}{d^2(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2)} (y, -x, 0)$$

El primer término en (I-3-9) ya se calculó en (I-2-4), el segundo se encuentra fácilmente quedando expresado en coordenadas elipsoidales como:

$$\frac{e}{c} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = -\frac{p_\phi}{d^2} \left[\frac{(g_1 + g_2)(\xi^2 - 1)\eta + (g_1 - g_2)(1 - \eta^2)\xi}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2)} \right]$$

Para el tercer término se tiene:

$$\mathbf{A}^2 = \left[\frac{(g_1 + g_2)(\xi^2 - 1)\eta + (g_1 - g_2)(1 - \eta^2)\xi}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2)} \right]^2$$

1.4 Potencial electrostático

Hasta ahora no hemos tomado en cuenta el efecto de las cargas eléctricas (si es que hay) de los centros. A estas corresponde un potencial de la forma.

$$V = \frac{z_1 e}{r_1} + \frac{z_2 e}{r_2} = \frac{1}{2md^2(\xi^2 - \eta^2)} \{ 2mde\xi(z_1 + z_2) + 2md\eta(z_1 - z_2) \} \quad (\text{I-4-1})$$

z_1 y z_2 son las cargas eléctricas de los dos centros.

Cuando existe potencial eléctrico el hamiltoniano toma la forma:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right]^2 + V \quad (\text{I-4-2})$$

ya conocemos cada uno de los términos de esa expresión. Tomamos la convención:

$$2md^2 H = h$$

$$\frac{e}{c}(g_1 + g_2) = g_+ \quad (\text{I-4-3})$$

$$\frac{e}{c}(g_1 - g_2) = g_-$$

$$2e^2 \frac{g_1 g_2}{c^2} = \frac{g_+^2 - g_-^2}{2} = \kappa$$

Así logramos simplificar un poco nuestra álgebra. Para simplificar también los términos de origen electrostático vamos a definir:

$$2mde(z_1 + z_2) = \varepsilon_+ \quad (\text{I-4-4})$$

$$2mde(z_1 - z_2) = \varepsilon_-$$

Usando ahora (I-4-3) y (I-4-4), la hamiltoniana quedará como sigue:

$$h = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{(p_\phi + g - \xi)^2}{\xi^2 - 1} + \frac{(p_\phi + g + \eta)^2}{1 - \eta^2} + \varepsilon_+ \xi + \varepsilon_- \eta + \kappa \right\} + V_r \quad (\text{I-4-5})$$

Donde V_r representa a la expresión

$$V_r = -2mde \frac{(g_1^2 + g_2^2)(\xi^2 + \eta^2) - 2(g_1 - g_2)\xi\eta}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} = -2mde \left(\frac{g_1^2}{r_1^2} + \frac{g_2^2}{r_2^2} \right) \quad (\text{I-4-6})$$

La expresión (I-4-5) es la hamiltoniana que usamos en nuestras ecuaciones de movimiento, siendo dichas ecuaciones de la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (\text{I-4-7})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (\text{I-4-8})$$

donde las p_i y las q_i corresponden a las coordenadas y momentos generalizados. En nuestro caso las ecuaciones (I-4-8) quedaran así

$$\dot{\xi} = \frac{2p_\xi(\xi^2 - 1)}{\xi^2 - \eta^2} \quad (\text{I-4-9})$$

$$\dot{\eta} = \frac{2p_\eta(1 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2} \quad (\text{I-4-10})$$

$$\dot{\phi} = \frac{2}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ \frac{p_\phi + g - \xi}{\xi^2 - 1} + \frac{p_\phi + g + \eta}{1 - \eta^2} \right\} \quad (\text{I-4-11})$$

$$\dot{p}_\xi = -\frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ 2\xi \left[p_\xi^2 - h - \frac{(p_\phi + g - \xi)^2}{(\xi^2 - 1)^2} \right] + \frac{2g_-(p_\phi + g - \xi)}{\xi^2 - 1} + \varepsilon_+ \right\} \quad (\text{I-4-12})$$

$$\dot{p}_\eta = -\frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ 2\eta \left[h + p_\eta^2 - \frac{(p_\phi + g + \eta)^2}{(1 - \eta^2)^2} \right] - \frac{2g_+(p_\phi + g + \eta)}{\xi^2 - 1} - \varepsilon_- \right\} \quad (\text{I-4-13})$$

$$\dot{p}_\phi = 0 \quad (\text{I-4-14})$$

Las expresiones $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ (donde x_i representa coordenadas o momentos) difieren solamente por el factor $2md^2$, lo que significa que la escala de tiempos va a quedar multiplicada por dicha cantidad, por lo tanto debemos considerar ese factor si queremos ajustar dicha escala de tiempos.

La expresión (I-4-5) no contiene al tiempo explícitamente, por lo que h va a ser una constante de movimiento. Además debido a que la coordenada ϕ no aparece explícitamente en la expresión para la hamiltoniana, su momento conjugado p_ϕ va a ser también constante como se ve en la ecuación (I-4-14).

Que tanto h como p_ϕ sean constantes facilita la separación de variables en el caso de omitir el término V_r (cuando dicho término aparece no se puede separar) en la expresión

(I-4-5). En efecto, al multiplicar ambos miembros de (I-4-5) por el factor $(\xi^2 - \eta^2)$ y omitiendo V_r se obtiene

$$(\xi^2 - \eta^2)h = \left\{ (\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{\xi^2 - 1} + \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{1 - \eta^2} + \varepsilon_+ \xi + \varepsilon_- \eta + \frac{g_+^2 - g_-^2}{2} \right\}$$

rearrreglando términos se tiene

$$\xi^2 h - (\xi^2 - 1)p_\xi^2 - \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{\xi^2 - 1} - \varepsilon_+ \xi + g_-^2 = h\eta^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{1 - \eta^2} - \varepsilon_- \eta + g_+^2$$

El primer miembro es función sólo de ξ mientras que el segundo sólo depende de η ; la igualdad sólo podrá cumplirse si ambos miembros son iguales a una constante que llamaremos α ; en esa forma hemos logrado obtener dos expresiones separadas:

$$h\xi^2 - (\xi^2 - 1)p_\xi^2 - \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{\xi^2 - 1} - \varepsilon_+ \xi + g_-^2 = \alpha \quad (\text{I-4-15})$$

$$h\eta^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{1 - \eta^2} + \varepsilon_- \eta + g_+^2 = \alpha \quad (\text{I-4-16})$$

Una manera alternativa de presentar a (I-4-15) y (I-4-16) es usando el parámetro κ en vez de la cantidad $\frac{1}{2}(g_+^2 - g_-^2)$. Así vamos a usarlas también muchas veces. Las nuevas expresiones van a diferir únicamente en eso y serán.

$$h\xi^2 - (\xi^2 - 1)p_\xi^2 - \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{\xi^2 - 1} - \varepsilon_+ \xi = \alpha \quad (\text{I-4-17})$$

$$h\eta^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{1 - \eta^2} + \varepsilon_- \eta + \kappa = \alpha \quad (\text{I-4-18})$$

Despejando p_ξ^2 de (I-4-17) se tiene:

$$p_\xi^2 = \frac{1}{(\xi^2 - 1)^2} \left\{ h\xi^4 - \varepsilon_+ \xi^3 + (g_-^2 - h + \alpha)\xi^2 - (\varepsilon_+ + 2p_\phi g_-)\xi - (\alpha - p_\phi^2) \right\} \quad (\text{I-4-19})$$

Así mismo, despejando p_η^2 en (I-4-18) obtendremos:

$$p_\eta^2 = \frac{1}{(1 - \eta^2)^2} \left\{ h\eta^4 + \varepsilon_- \eta^3 - (\alpha + g_+^2 - \kappa + h)\eta^2 - (\varepsilon_- + 2p_\phi g_+)\eta + (\alpha - \kappa - p_\phi^2) \right\} \quad (\text{I-4-20})$$

Estas dos últimas expresiones serán discutidas con más detalle en la siguiente sección.

Las ecuaciones (I-4-9) a (I-4-14) pueden tomarse como las componentes de un vector en seis dimensiones. Dicho vector correspondería a un gradiente de h en el espacio fase; este aspecto lo discutiremos más adelante en la sección correspondiente a la parte numérica del problema.

1.5 Puntos de retorno

Otra cosa que debemos discutir es la determinación de los puntos clásicos de retorno. Esto lo podemos hacer utilizando las relaciones (I-4-14). Vemos que hay entonces dos potenciales efectivos, uno para la variable ξ y otro para la variable η , y ambos tienen la forma de polinomio de cuarto grado (en realidad es la raíz de un polinomio de ese grado pero es más conveniente quitar la raíz cuadrada y el denominador, porque estos no cambian las raíces de la función).

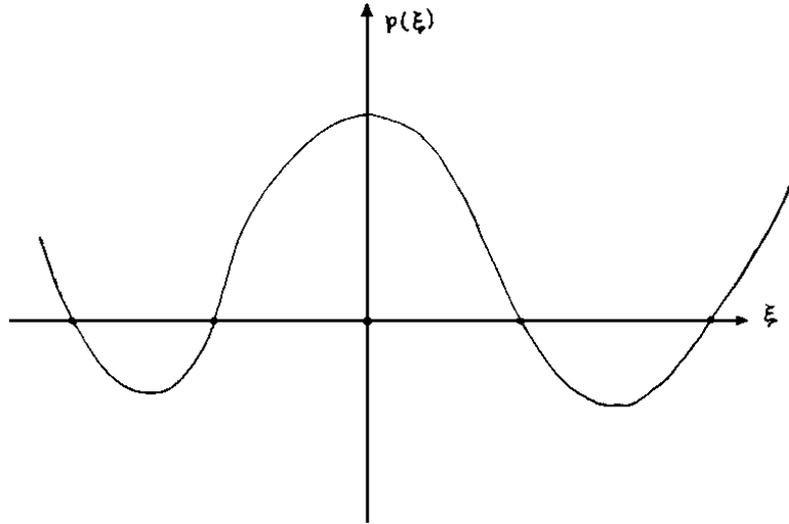


Figura 1.3: puntos de retorno

Un potencial de este tipo no es verdadero, sino que pasa algo semejante a lo que ocurre cuando se usan coordenadas polares para describir un potencial central de la forma $1/r$. Con el cambio a dichas coordenadas aparece además el potencial atractivo, una parte repulsiva de la forma $1/r^2$ y a la combinación de esos términos se le conoce como “potencial efectivo”. El término adicional es conocido como “potencial virtual”; la partícula se mueve bajo la influencia del potencial efectivo y el radio tendrá un valor mínimo y otro máximo, la órbita como es sabido, es una elipse con uno de sus focos en el centro de atracción (en general la curva es una cónica, dependiendo de la energía de la partícula). El radio toma valores entre el máximo y el mínimo. Se tiene lo que se llama una “barrera centrífuga” que consiste en que la partícula no puede acercarse al centro si tiene un momento angular diferente de cero.

Algo de esa naturaleza ocurre al separar el movimiento en coordenadas elipsoidales. ξ y η tienen potenciales efectivos que corresponden a curvas de cuarto grado:

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= h\xi^4 - \varepsilon_+\xi^3 + (g_-^2 - h + \alpha)\xi^2 - (\varepsilon_+ + 2p_\phi g_-)\xi - (\alpha - p_\phi^2) \\
 R(\eta) &= h\eta^4 + \varepsilon_-\eta^3 - (g_+^2 + h + \alpha - \kappa)\eta^2 - (\varepsilon_- + 2p_\phi g_+)\eta + (\alpha - p_\phi^2 - \kappa)
 \end{aligned}
 \tag{I-5-1}$$

puede pensarse que se tiene graficada la energía potencial en función de ξ y η en la Figura 1.4.

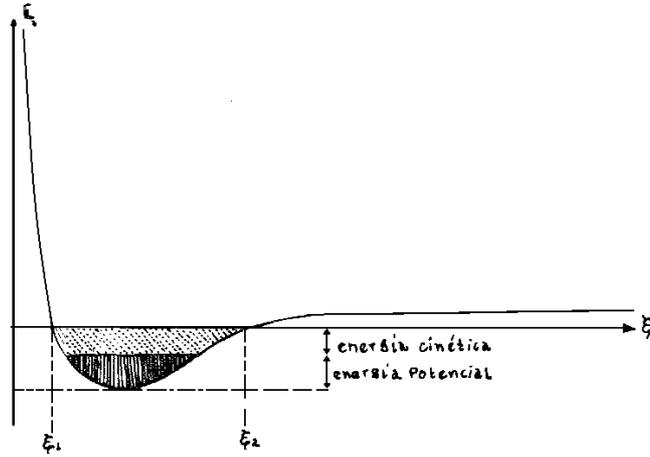


Figura 1.4: curva de potencial

En la región que hemos sombreado, la energía total es mayor que la energía potencial, eso quiere decir que la parte restante puede ser interpretada como la energía cinética. La dirección del movimiento sólo puede cambiar en los puntos donde la energía cinética en esta coordenada es nula. Esto ocurre en los puntos donde la curva interseca al eje horizontal, la partícula estará confinada a moverse entre dos elipses en el caso de ξ y entre dos hipérbolas para el caso de η .

En tres dimensiones el movimiento será posible en la región comprendida en la intersección de dos elipsoides y dos hiperboloides de revolución. En la Figura 1.5 mostramos una sección transversal del caso más general.

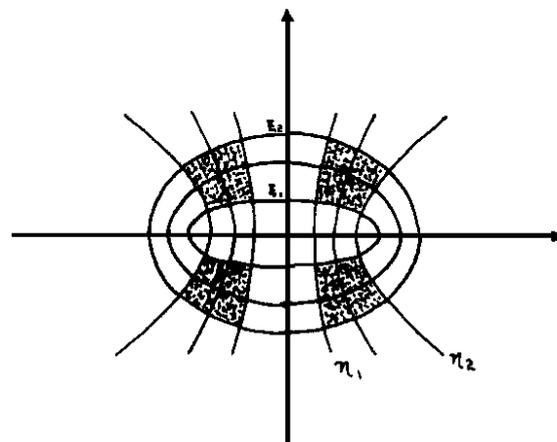


Figura 1.5: regiones prohibidas

Si nosotros consideramos el potencial producido por las cargas eléctricas y magnéticas de nuestros centros, se tendrá una superficie en el espacio de (x, y, z) . Si se toman las curvas de nivel de dicha función entonces tendremos una manera de calcular la región permitida y la región prohibida del movimiento, más adelante veremos la manera de hacerlo. El potencial efectivo va a ser:

$$V = \frac{z_1 e}{r_1} + \frac{z_2 e}{r_2} + \frac{g_1^2}{r_1^2} + \frac{g_2^2}{r_2^2} + \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{r_1 r_2 (\xi^2 - 1)} + \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{r_1 r_2 (1 - \eta^2)}$$

Podemos considerar muchas posibilidades, por ejemplo, el caso:

$$z_1 = a \quad g_1 = b \quad z_2 = 0 \quad g_2 = 0$$

que es el problema de un solo centro, aún mas, podemos reducirlo al problema de Kepler haciendo $g_1 = 0$ lo que nos daría secciones cónicas con cierta excentricidad, como es bien sabido.

Veamos lo que ocurrirá en general para dos centros, sin tomar en cuenta la carga magnética. Si la energía es muy pequeña en el sentido de ser muy negativa, cuando el movimiento ocurre cerca de un centro, podemos esperar que la trayectoria de la partícula sea aproximadamente una elipse alrededor de dicho centro y fuera de toda influencia del otro. Debido a que dicha influencia no es nula habrá precesión. En Astronomía este fenómeno es bien conocido, por ejemplo el movimiento de un satélite alrededor de un planeta (la Luna alrededor de la Tierra) dada la influencia del Sol; hay dos centros atractivos pero el satélite se mueve más cerca del planeta y el movimiento es casi kepleriano, de no ser por la perturbación debida al Sol. Lo mismo ocurre con un satélite alrededor de la Tierra si se considera el efecto por la Luna e ignorando la influencia del Sol. En toda esta discusión se considera que los dos centros permanecen fijos y sólo en éste caso es válido nuestro razonamiento. Para una energía un poco mayor, la partícula puede girar en torno a los dos centros dando lugar a varios tipos de trayectorias como se ilustra en la Figura 1.6. Con energías cada vez mayores pueden observarse diversas fases de trayectorias hiperbólicas, para las cuales escapa la partícula.

En las gráficas que se anexan pueden verse diferentes casos.

Otro caso que nos interesa es aquel en que hacemos las cargas eléctricas de un centro iguales a cero, variamos la carga magnética en el otro. Como dijimos anteriormente, va a ocurrir una precesión de la trayectoria sobre un cono, en ausencia de potencial repulsivo, pero, si éste último es incluido para que el movimiento sea separable, entonces, curiosamente se tiene un plano que interseca al cono dando una elipse u otra cónica dependiendo de la energía de nuestra partícula y la única diferencia de este movimiento no contiene al centro de atracción, ésto se debe a la desviación que se provoca por la fuerza magnética sobre el movimiento de la partícula.

Podemos ver otras posibilidades tales como poner cargas eléctricas y magnéticas juntas, un lado con carga eléctrica y el otro con carga magnética etc., al final pueden verse diferentes ejemplos.

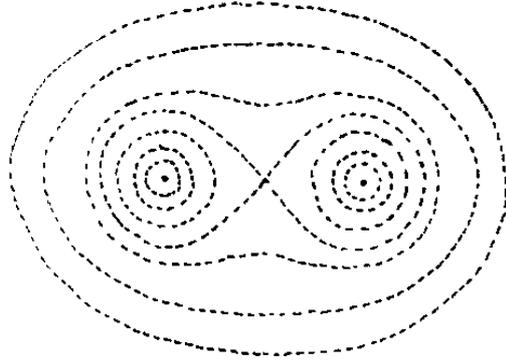


Figura 1.6: contornos de energía

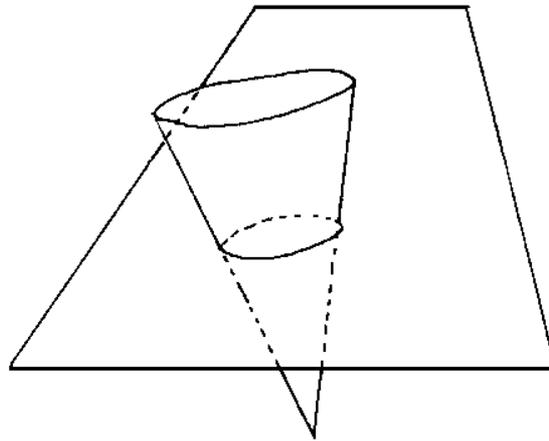


Figura 1.7: cono de Poincaré

1.5.1 Otro método

El tratamiento anterior sobre los puntos clásicos de libración consiste como hemos visto, en graficar polinomios de cuarto grado y encontrar sus raíces que corresponden a los puntos clásicos de retorno. Si se escribe la ecuación separada de manera un poco diferente podran apreciarse los efectos de variar ligeramente los diferentes parámetros que intervienen en el problema.

Reescribáanse las ecuaciones (I-4-15) y (I-4-16) como sigue:

$$\left. \begin{aligned} h\xi^2 - (\xi^2 - 1)p_\xi^2 - \frac{(p_\phi + g - \xi)^2}{\xi^2 - 1} - \varepsilon_+ \xi + \frac{g_+^2}{2} - \alpha &= 0 \\ h\eta^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 + \frac{(p_\phi + g + \eta)^2}{1 - \eta^2} + \varepsilon_- \eta + \frac{g_-^2}{2} - \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Para los puntos de libración los momentos se anulan, en ese caso las ecuaciones (1) quedarán en la forma:

$$\left. \begin{aligned} h\xi^2 - \varepsilon_+\xi + \left(\frac{g_-^2}{2} - \alpha\right) &= \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{\xi^2 - 1} \\ h\eta^2 + \varepsilon_-\eta + \left(\frac{g_+^2}{2} - \alpha\right) &= \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{\eta^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Las expresiones (2) permiten definir un conjunto de funciones f_1 , f_2 , s_1 y s_2 de la manera siguiente:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= h\xi^2 - \varepsilon_+\xi + \left(\frac{g_-^2}{2} - \alpha\right) \\ f_2(\xi) &= \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{\xi^2 - 1} \\ s_1(\eta) &= h\eta^2 + \varepsilon_-\eta + \left(\frac{g_+^2}{2} - \alpha\right) \\ s_2(\eta) &= \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{\eta^2 - 1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Es decir, hay un par de funciones para ξ y otro para η , su forma es la misma para cada variable con la diferencia de que las funciones de ξ están determinadas por los parámetros: h , ε_+ , g_- , α y p_ϕ en tanto que las funciones de η dependen del conjunto: h , ε_- , g_+ , α y p_ϕ de manera que es suficiente hacer el análisis para las curvas que se obtienen con una variable y adaptan los resultados del análisis a las funciones de la otra utilizando sus propios parámetros haciendo también las consideraciones en que cada variable tiene sentido físico.

En base a lo anterior vamos a estudiar las curvas para la variable ξ . Hemos quedado en que para los puntos de libración se satisface la igualdad

$$f_1(\xi) = f_2(\xi)$$

Es decir, dichos puntos corresponden a las intersecciones de las curvas dadas por f_1 y f_2 . Analizaremos entonces con algún detalle dichas funciones.

Análisis de la Función f_1 . Esta función corresponde a una parábola vertical que interseca al eje de las abscisas en los puntos.

$$\xi = \frac{\varepsilon_+ \pm \sqrt{\varepsilon_+^2 + 4h \left(\frac{g_-^2}{2} - \alpha\right)}}{2h} \quad (4)$$

La intersección de la curva con el eje vertical tiene el valor $\left(\frac{g_-^2}{2} - \alpha\right)$ y no depende directamente de h , lo que indica que si se hace variar la energía en nuestra función manteniendo fijos los demás parámetros resultará una familia de parábolas con un punto en común que

es precisamente la intersección con el eje vertical. Debe observarse también que cuando la energía vale cero la parábola degenera en la recta:

$$-\varepsilon_- \xi + \left(\frac{g^2}{2} - \alpha \right)$$

con la misma intersección que la familia de parábolas, siendo también un miembro de dicha familia. La recta tiene como pendiente el valor $-\varepsilon_-$ y de acuerdo con el signo del parámetro ε_- habrá tres configuraciones posibles para la familia de parábolas. Eso se ilustra en las siguientes figuras:

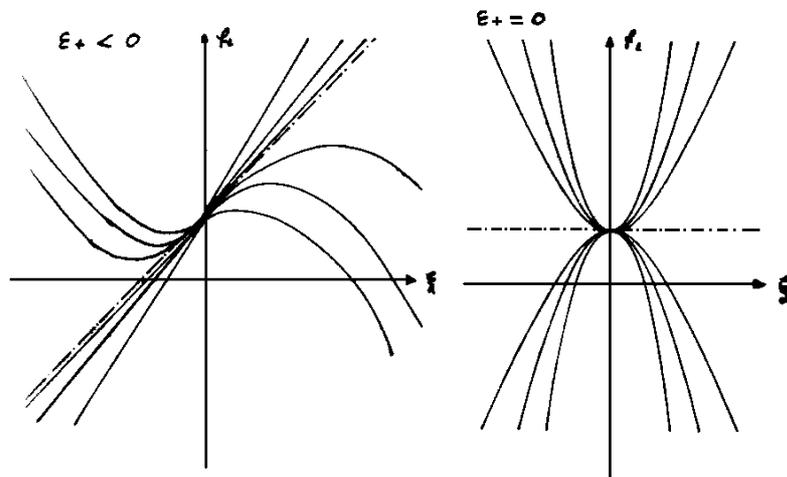


Figura 1.8: unas curvas

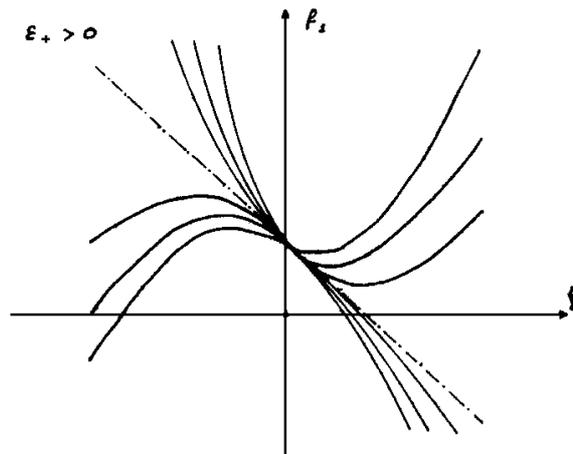


Figura 1.9: más curvas

Es posible obtener todavía mayor información si escribimos la primera ecuación de (3) en la siguiente forma.

$$h \left(\xi - \frac{\varepsilon_+}{2h} \right)^2 = f_1 + (\alpha - g_-^2) + \frac{\varepsilon_+^2}{4h}$$

o bien

$$\left(\xi + \frac{\varepsilon_+}{2h} \right)^2 = \frac{1}{h} \left[f_1 + \left(\alpha - g_-^2 + \frac{\varepsilon_+^2}{4h} \right) \right] \quad (5)$$

La expresión (5) corresponde a la ecuación de una parábola [22] con vértice en el punto $(\varepsilon_+/2h, \alpha - g_-^2/2 + \varepsilon_+^2/4h)$ y cuyo lado recto es $1/h$. Esto permite ver cómo h influye en la anchura de la curva, por ejemplo, si h es muy grande se tendrá una parábola muy aguda y muy ancha cuando h es pequeña, degenerando en una recta cuando dicho parámetro se anula. El signo de h determina si la curva se extiende hacia arriba o hacia abajo, cuando h es negativa la curva se extiende hacia abajo siendo su vértice un máximo y para h positiva la curva se extiende hacia arriba siendo entonces su vértice un mínimo.

El valor del radicando en la expresión (4) determina si la función cruza o no al eje horizontal. Si dicha cantidad es negativa las raíces de la ecuación son imaginarias y la curva no tiene ningún punto en común con el eje. Cuando el radicando es igual a cero hay una raíz doble que corresponde a tener el vértice de la curva sobre el eje y cuando el radicando es positivo la parábola corta al eje en dos puntos.

El parámetro ε_+ influye en el desplazamiento horizontal de la curva pero dicho desplazamiento depende también de h , y como para una configuración de las cargas este último parámetro puede variar con mayor facilidad podrá decirse que es el que más influye en el corrimiento lateral del vértice. Por lo que respecta al movimiento vertical del vértice este depende de los parámetros g_- , α , ε_+ y h , pero h y α varían con mayor libertad, y variar estos dos parámetros significa cambiar las condiciones iniciales del movimiento en tanto que variar ε_+ y g_- implica una alteración de las cargas en los dos centros del sistema que estamos estudiando.

En la Figura 1.10 mostramos cualitativamente los diferentes puntos de la curva que pueden tener algún interés. En otra sección serán presentados varios ejemplos sobre diferentes posibilidades que tiene el problema donde se aprovechan las ventajas que tiene el usar computadoras para realizar todos los cálculos.

Análisis de la Función f_2 . Se vió ya qué posibilidades existen para la función f_1 ; enseguida veremos cómo se comporta f_2 . Lo primero que puede verse es que dicha función tiene singularidades en los puntos $\xi = \pm 1$ excepto en el caso: $p_\phi = \pm g_-$ para el que se elimina una de ellas.

Fuera del rango $(-1, +1)$ la función no puede ser negativa, teniendo además como asíntota horizontal a la recta dada por g_-^2 . Dentro de ese rango la función toma valores negativos y su intersección con el eje vertical tiene el valor $-p_\phi^2$.

Igualando a cero el numerador de la función se encuentra que la curva toca el eje horizontal en el punto $-p_\phi/g_-$ y sólo en ese punto teniéndose por lo tanto un valor extremo

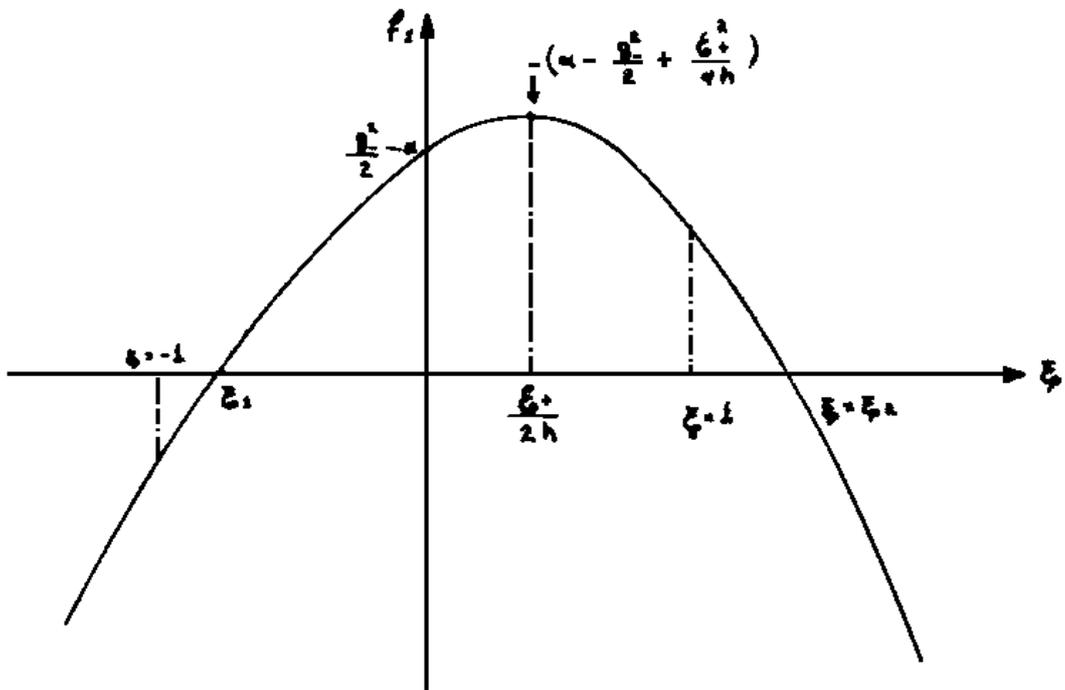


Figura 1.10: parábola

en esa posición. Hay otro valor extremo en $\xi = -g_-/p_\phi$, siendo entonces recíprocos ambos valores, eso significa que uno de ellos está dentro del intervalo $(-1, 1)$ y el otro fuera de él. Si la curva toca o no al eje dentro de ese intervalo depende de la relación que haya entre p_ϕ y g_- ; además, los dos puntos mencionados están situados del mismo lado, a la izquierda si p_ϕ y g_- tienen el mismo signo y a la derecha si tienen signo contrario. En caso de que los dos parámetros en cuestión tengan el mismo valor los puntos extremos coinciden dando lugar a un punto de inflexión que puede estar en $\xi = \pm 1$, según los signos de p_ϕ y g_- .

La discusión anterior permite que se tenga una idea acerca de los tipos de curvas que pueden resultar. Eso se ilustra en las figuras 1.11.

La función no es simétrica en general, lo es sólo en el caso de que el parámetro g_- sea nulo y en esas condiciones la forma de las curvas es como la de la Figura 1.12.

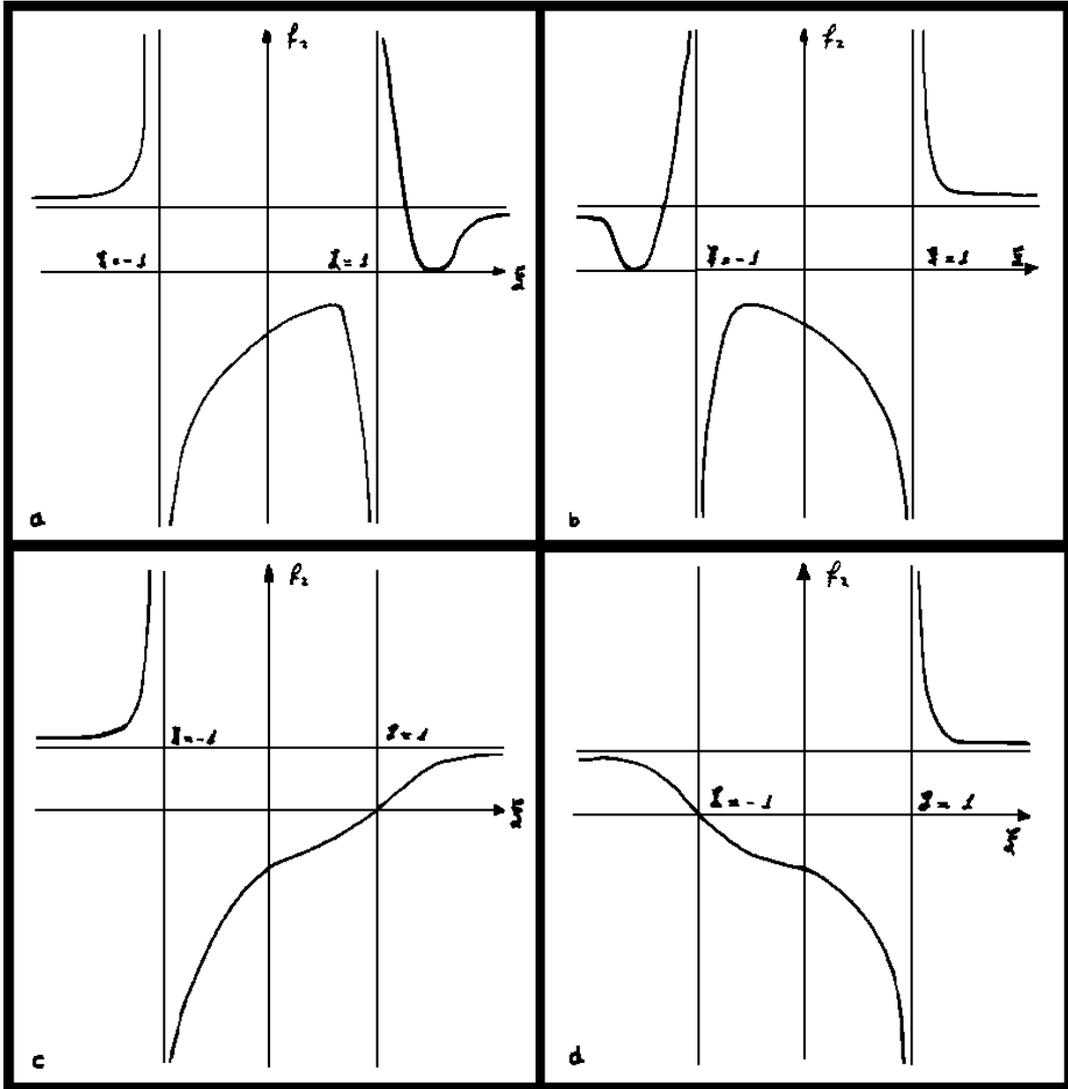


Figura 1.11:

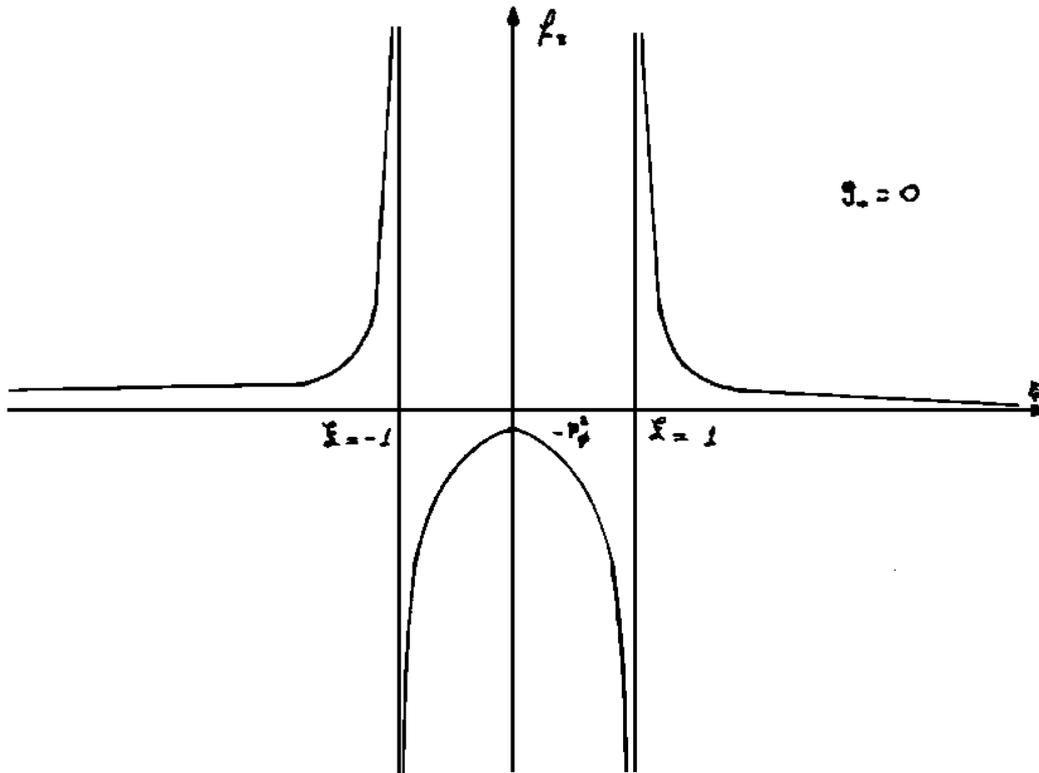


Figura 1.12:

Los parámetros p_ϕ y g_- son los únicos que caracterizan a la función f_2 y la manera en que afectan a las curvas es más fácil de precisar que en el caso de f_1 ; g_- determina la posición de la asíntota horizontal y p_ϕ la intersección de la curva con el eje vertical. Además, combinados dichos parámetros permiten localizar en qué posiciones se encuentran los valores extremos. Al variar nuestros parámetros resultarán familias de curvas, pudiendo haber transiciones entre los diferentes tipos que hemos mostrado en las figuras anteriores.

Por lo que respecta a las funciones para la variable η hay bastante simetría, lo único que debe hacerse es cambiar los sufijos de las cantidades ε y g por el signo opuesto, fuera de eso, el tratamiento que hay que dar a las curvas es exactamente el mismo. En el capítulo IV se verán algunos detalles más sobre estas funciones, para casos especiales y en el apéndice C hay algunos ejemplos realizados haciendo uso de una computadora digital; posiblemente algunos detalles sobre las curvas no sean muy pronunciados en los ejemplos, pero nuestras figuras fueron construidas así para ilustrar diferentes posibilidades, además, el tamaño de las hojas de papel en la computadora no permite graficar rangos muy grandes.

1.6 Potencial repulsivo

Vamos a considerar ahora el efecto de omitir los términos:

$$\frac{g_1^2}{r_1^2} + \frac{g_2^2}{r_2^2}$$

éstos se deben al paso de coordenadas cartesianas a elipsoidales, podemos ilustrar este hecho para el caso de un centro usando coordenadas polares. Se tiene para ese caso:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \cos \theta &= \frac{z}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

En esas coordenadas, se tiene para p lo siguiente:

$$p^2 = p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Entonces si aparece un término de la forma $\frac{\alpha^2}{r^2}$, escribimos:

$$p^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = p_r^2 + \frac{p_\theta^2 + \alpha^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Un cambio en el potencial por una cantidad $\frac{1}{r^2}$ produce un efecto equivalente a cambiar el momento angular efectivo. Cuando se considera una trayectoria sin el término $\frac{1}{r^2}$ en el potencial, el movimiento ocurre en un plano, lo que indica que el momento angular se conserva. Con el nuevo término, veremos que el incremento del ángulo barrido por el radio vector de la partícula va a ser modificado en todo momento por una cantidad dependiente de α , la trayectoria precederá alrededor de un centro; este fenómeno se presenta independientemente del plano donde ocurra el movimiento. Dicho resultado es muy antiguo y se conoce como “Teorema de Newton” [23].

Es necesario considerar estos hechos tratándose del monopolo magnético por la razón de que la trayectoria se desarrolla sobre la superficie de un cono. Se ha visto que un cono al desenvolverse sobre la superficie de un plano da lugar a un sector circular cuyo arco tiene una longitud igual a la circunferencia de una sección recta del cono. Una trayectoria elíptica sobre el cono al desenvolverse dará lugar a curvas como la que indicamos en la Figura 1.13.

No se va a tener una visión completa del movimiento porque éste, aunque es continuo sobre el cono no lo es sobre el plano. Se tendrá además una precesión de la órbita (que puede ser una elipse) de tal manera que el máximo acercamiento ocurre en diferentes puntos.

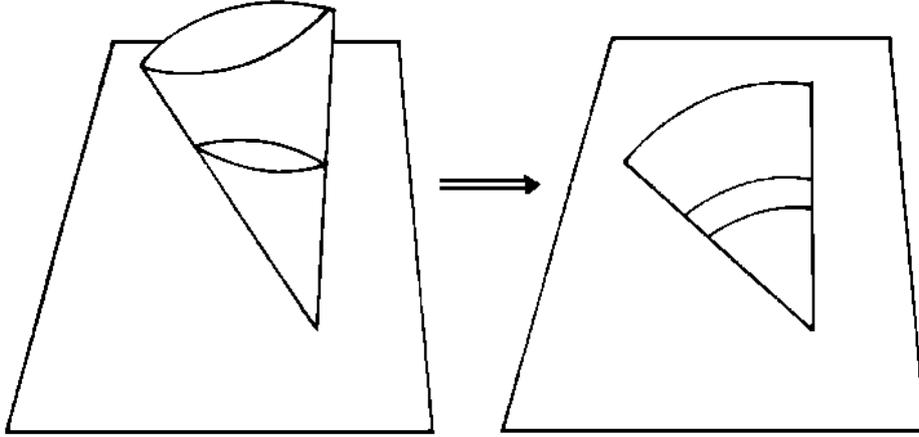


Figura 1.13: cono desenrollado

Sin entrar en todos los detalles diremos que esa es la motivación para considerar los términos que hemos mencionado en la energía cinética. Realmente, al desarrollar (I-3-9) se tenía en la hamiltoniana un término de la forma:

$$-\frac{(g_1^2 + g_2^2)(\xi^2 + \eta^2) - 2(g_1^2 - g_2^2)\xi\eta}{d^2(\xi^2 - \eta^2)} = -\left(\frac{g_1^2}{r_1^2} + \frac{g_2^2}{r_2^2}\right)$$

Este término se omitió para poder separar variables. Dicha omisión corresponde a sumar a la ecuación (I-4-5) un potencial centrífugo de la forma $-V_r$, eso significa que los resultados van a incluir el efecto producido por dicho potencial, que como se ha dicho, produce una precesión de las órbitas, vease la referencia [23].

1.7 Generalidades sobre el monopolo magnético

Es bien sabido que en la práctica no se han encontrado monopolos magnéticos, aunque se han realizado múltiples investigaciones para observarlos experimentalmente [24].

Macroscópicamente puede tenerse una aproximación tomando como campo de monopolo el producido por una barra imantada muy larga pero esa es solamente una aproximación, porque acercándonos mucho hasta llegar al nivel atómico lo que en realidad se observa son pequeños dipolos. Se han buscado una gran cantidad de sistemas (átomos, moléculas, partículas elementales, lodo del fondo del mar, piedras de la Luna, imanes de aceleradores viejos etc.).

Se sabe también que los campos magnéticos son producidos por cargas en movimiento y lo más elemental que puede producirse son dipolos; el espín del electrón y de otras partículas elementales tienen propiedades que pueden interpretarse en ese sentido. Sin embargo, en la teoría no hay nada en contra de la posibilidad de que existan esta clase de monopolos.

Las ecuaciones de Maxwell no lo impiden. No hay ninguna evidencia de que no existan aparte del hecho de que no han sido observados.

El primer trabajo que se conoce sobre el movimiento en un campo monopolar es un artículo del físico Noruego Birkeland (1890) [4]. Su investigación estaba orientada con el objeto de estudiar el efecto conocido como “aurora boreal.” En dicho estudio se construyó un aparato que describimos a continuación:

Se tiene una caja de hierro con ventanas laterales y en cuyo interior pueden introducirse gases a muy baja presión, la idea es que puedan colocarse objetos magnéticos en el interior de la caja, suspendiéndolos de alguna manera. Entre los objetos que se introducían se tenía una esfera de Fe_3O_4 material que tiene propiedades magnéticas. Dicha esfera constituye un modelo de la Tierra con todo y su campo magnético, y es conocido como “Terrella”. En una de las paredes se coloca un cañón de electrones que son disparados hacia la esfera; debido a que hay un gas a baja presión pueden observarse las trayectorias de dichos electrones. El efecto es semejante al que se tiene cuando llegan partículas desde el sol y entran al campo magnético terrestre produciendo auroras boreales.

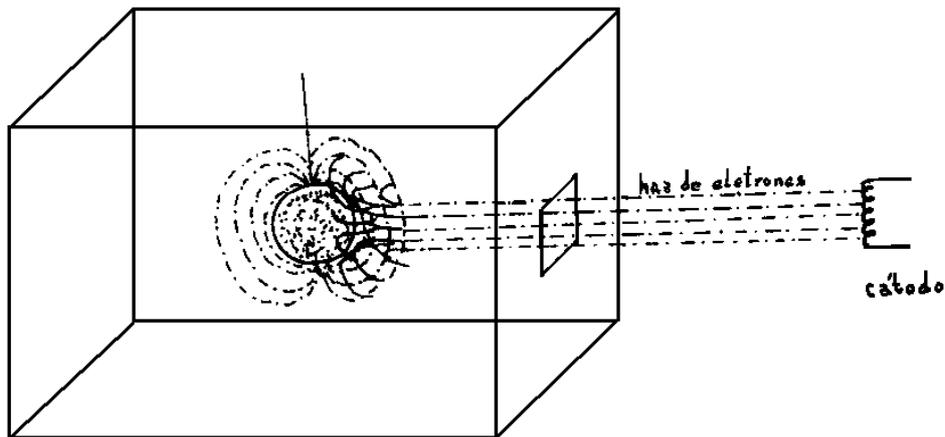


Figura 1.14: Terrella

Entre otras cosas, se introdujo uno de los extremos de cierta barra magnetizada muy larga, observándose que los rayos catódicos (no se hablaba todavía de electrones) eran atraídos hacia ese extremo, estrellándose en él.

Birkeland escribió una breve nota en su artículo diciendo que había encontrado un nuevo tipo de fuerza entre imanes y rayos catódicos.

Hubo una respuesta de Poincaré (1898) señalando que el fenómeno observado por Birkeland no se debe a ninguna fuerza desconocida si no que es precisamente lo que debe esperarse si se supone que los rayos catódicos están formados por partículas cargadas o por corrientes, que como sabemos, se mueven de acuerdo con la ley de Lorentz.

Fue Poincaré quien solucionó las ecuaciones de movimiento para una partícula sometida a la influencia de un monopolo magnético. El resultado es interesante, la partícula se mueve

sobre la superficie de un cono circular recto cuyo vértice está colocado precisamente en el monopolo y su eje queda determinado por las condiciones iniciales del movimiento. Cada partícula tiene su propio cono, de modo que su movimiento ocurre siempre sobre dicha superficie.

La región de convergencia de las trayectorias va a depender de las condiciones iniciales, (velocidad, carga, etc.). Si la velocidad es muy grande, la partícula va a girar muy poco siguiendo trayectorias casi rectas hasta llegar muy cerca del polo, regresando para alejarse nuevamente. Algo de ese estilo observó Birkeland sin tener oportunidad de observar las diferentes posibilidades. Lo importante es que los electrones siempre se acercan al centro, no importando que éste sea norte o sur; entonces parece tenerse un potencial atractivo independiente del signo que tenga el polo.

Desarrollando las ecuaciones de movimiento, se encuentra que la trayectoria es una geodésica; sabemos que el cono es una superficie que rueda perfectamente sobre un plano, entonces puede ser desenvuelto en una superficie plana, de tal modo que una línea sobre el cono se convierte en una línea sobre el plano, solo que la circunferencia del cono no va a ser precisamente una circunferencia sobre el plano. Así, la trayectoria de una partícula sobre la superficie del cono, al desenvolverse sobre un plano se convierte en una recta. La partícula llega, se acerca hasta cierto límite y después se aleja nuevamente; a este efecto se le conoce como *espejo magnético* [25]. Este efecto es precisamente para el monopolo pero tiene validez para cualquier otro tipo de campo magnético en el sentido de que siempre que la partícula entra en una región en que las líneas del campo convergen se presenta un movimiento de este tipo. Cuando existe un dipolo, a primera aproximación giran las partículas alrededor de las líneas de fuerza; en realidad; hay tres posibilidades: la primera es aquella en que la partícula llega muy lejos del sistema, forma una espiral con mínimo acercamiento y se aleja nuevamente; este acercamiento puede o no ser mayor que el radio terrestre (cuando se trata del campo magnético de la Tierra) y permite saber si un rayo cósmico alcanzará la superficie de la Tierra o si llega a chocar con algunos átomos de la atmósfera dando lugar a fenómenos como el de las auroras.

La segunda consiste en que las partículas al reflejarse en un polo se dirigen hacia el otro, volviendo a reflejarse, resultando por consiguiente un movimiento oscilatorio entre los dos polos; esto da lugar a cinturones de radiación (bandas de Van Allen). El fenómeno es complicado porque esas trayectorias son típicas de partículas cargadas de origen solar, lo que se conoce precisamente como “viento solar”. El viento solar distorsiona de diversas maneras el campo magnético terrestre. Las partículas permanecen atrapadas durante algún tiempo en dicho campo y después escapan de su influencia. Cuando este fenómeno se presenta con gran intensidad ocurren cosas muy extrañas tales como la perturbación (o interrupción) de las señales de radio.

La tercera posibilidad consiste en una precesión del movimiento, con ciertas constantes características (carga de la partícula, campo magnético de la tierra, etc.).

El tiempo en que se desarrolla cada uno de los procesos que hemos descrito se conoce como “tiempo característico”. En la Figura 1.15, ilustramos los tres casos anteriores.

Cuando se consideran velocidades relativistas, el tiempo característico es de fracciones

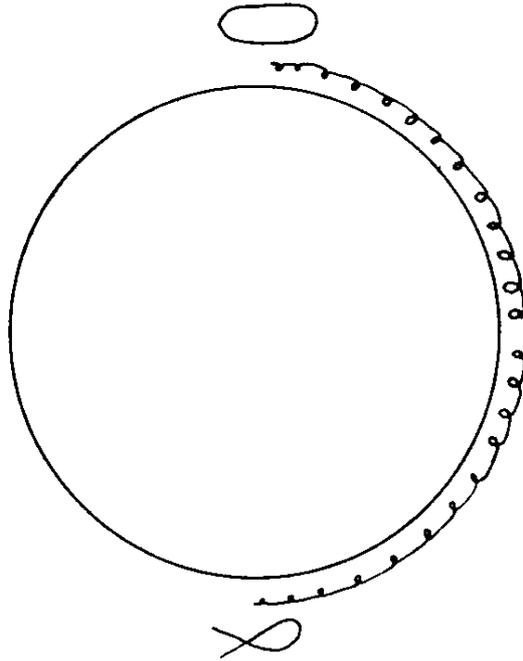


Figura 1.15: subido

de segundo en el primer caso y de horas para el segundo caso. En el tercer caso este tiempo puede ser de semanas y aún de meses.

Un estudio bastante amplio acerca del movimiento de partículas cargadas en el campo magnético terrestre fué elaborado por Störmer [5] quien discute con todo detalle las diferentes posibilidades. sin embargo, para dicho problema, las ecuaciones diferenciales tampoco son resueltas en general. Hay tambien contribuciones de Sandoval Vallarta, Alfvén y otros pero el problema no ha llegado a resolverse completamente. Casi todos los tratamientos han sido hechos utilizando coordenadas cartesianas y recientemente Martin Brown [6] ha publicado un artículo donde utiliza coordenadas cilíndricas y usando una formulación hamiltoniana, casi todos los tratamientos abordan el problema partiendo de las ecuaciones de Newton.

Acerca del problema de dos centros, podemos decir que ha sido tratado por diferentes autores, puede verse el libro de Whittaker [7], para el caso gravitacional; hay una discusión en el libro de Max Born [14], pero en el libro de L. A. Pars [8] hay un tratamiento más amplio sobre este problema; pero el estudio más completo de que tenemos noticia, lo constituyen los trabajos de Tallqvist [9], donde se aborda con todo detalle las diferentes posibilidades. Sin embargo, el problema hasta cierto punto queda explicado cualitativamente porque casi siempre se necesita resolver un polinomio de cuarto grado y no hay una teoría que nos pueda prestar información completa sobre la naturaleza de sus raíces.

Nosotros también hemos tenido que dar la vuelta al problema por las mismas razones, a eso se debe el método que se discute a partir de la página 14; más adelante se estudia

con mayor cuidado ese método.

Hemos discutido el problema, se han encontrado expresiones para la energía, los momentos, además, se tienen las ecuaciones diferenciales para el movimiento. Nos corresponde ahora integrar dichas ecuaciones y en el siguiente capítulo discutiremos el método de integración.

Capítulo 2

Solución numérica de las ecuaciones de movimiento, varios métodos Runge-Kutta

En este capítulo vamos a discutir el método usado en nuestro trabajo para resolver las ecuaciones de movimiento. Hay muchos métodos numéricos para integrar ecuaciones diferenciales y su aplicabilidad depende del tipo de ecuación que se esté tratando. Uno de los métodos más simples y que es muy confiable, es el de Runge-Kutta en varias versiones como explicaremos a continuación.

2.1

Supóngase una ecuación (trataremos por el momento con una sola variable) de la forma

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t) \quad (\text{II-1-1})$$

donde F es del tipo

$$F(y, t) = m(t) \cdot y + g(t)$$

La gráfica de la función se representará como en la Figura 2.1. Las derivadas de dicha función se conocen en todo punto, ya que vienen especificadas por la ecuación diferencial. Si h es el incremento de tiempo, entonces, a primera aproximación, se tendrá como valor de la función después de un tiempo h , la cantidad

$$y(t_0 + h) = y_0 + y' \cdot h \quad (\text{II-1-2})$$

esto puede representarse en la Figura 2.1

En el caso no lineal que es el que nos interesa se escribe

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h \cdot F(y, t) \quad (\text{II-1-3})$$

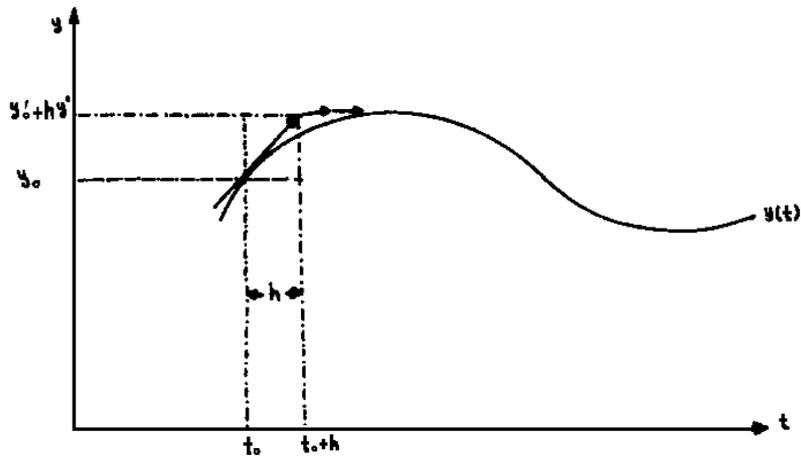


Figura 2.1: derivada

aunque eso no es precisamente correcto debido a la no linealidad. Como se ve, este método consiste en tomar una nueva derivada después de cierto tiempo, y así sucesivamente, porque la tangente a la curva está cambiando constantemente su dirección. Puede entenderse a la función $F(y, t)$ como una superficie en tres dimensiones de la cual nos trasladamos a un campo de tangentes como indica el siguiente dibujo.

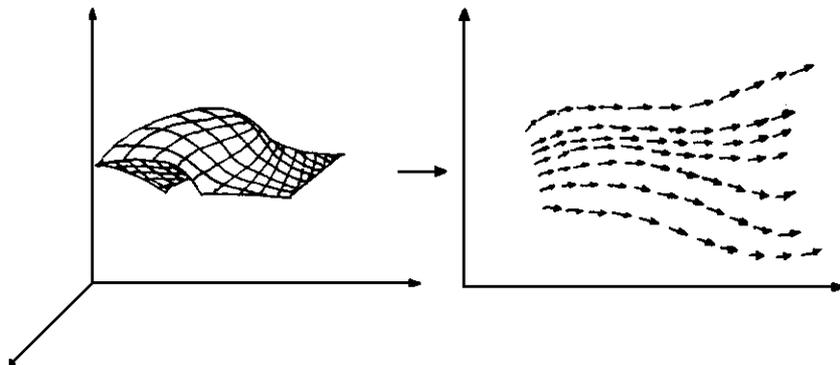


Figura 2.2: flechas

En cada punto habrá una flecha indicando en que dirección hay que moverse. Con este procedimiento no se sigue exactamente a la curva pero se puede confiar en que escogiendo h suficientemente pequeño habrá un error ε , de tal manera que el resultado final diferirá del valor real por una cantidad del orden de ε .

El método que acabamos de exponer se conoce como “Método de Euler” y no es nuestro propósito discutirlo aquí con todo su detalle. La técnica puede mejorarse si en vez de una recta se toma por ejemplo una parábola tangente a cada punto de la curva.

2.2

Considere ahora la ecuación $y' = -y$, si se toma $y = 1$ en $t = 0$, al desarrollar la función en serie de potencias alrededor de $t_0 = 0$ se tiene:

$$y = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \dots = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \dots = e^{-h}$$

eso debido a que

$$\begin{aligned} y'_0 &= -1 \\ y''_0 &= (y'_0)' = -(y_0)' = -(-1) = 1 \\ y'''_0 &= (y''_0)' = -1 \\ \dots &\dots \dots \end{aligned}$$

No hay ningún argumento que impida desarrollar “ y ” en serie de potencias pero si se toma la función en toda su generalidad se tendrá

$$\begin{aligned} y' &= F(y, t) \\ y'' &= \frac{d}{dt}F(y, t) = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot F + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= F_y \cdot F + F_t \\ y''' &= \frac{d}{dt}(F_y \cdot F + F_t) \end{aligned}$$

Los subíndices significan derivación parcial con respecto a la variable indicada; entonces, para F'' se tendrá

$$y''' = \frac{d}{dt}F_y \cdot F + F_y \cdot \frac{dF}{dt} + \frac{d}{dt}F_t = \left(\frac{\partial}{\partial y}F'\right) \cdot F + F_y \cdot F' + \frac{\partial}{\partial t}F'$$

Se cambió el orden de la derivación. Sustituyendo F' resulta lo siguiente:

$$y''' = \frac{\partial}{\partial y}(F_y \cdot F + F_t) \cdot F + F_y \cdot (F_y \cdot F + F_t) + \frac{\partial}{\partial t}(F_y \cdot F + F_t)$$

Resumiendo, se tiene para las tres primeras derivadas:

$$\begin{aligned} y' &= F(y, t) \\ y'' &= F_y \cdot F + F_t \\ y''' &= F_{yy}F^2 + F_y^2F + F_{yt}F + F_y^2F + F_yF_t + F_{yt}F + F_yF_t + F_{tt} \\ &= F_{yy}F^2 + 2F_y^2F + 2F_{yt}F + 2F_yF_t + F_{tt} \end{aligned} \tag{II-2-1}$$

Por el mismo procedimiento pueden ser encontradas las derivadas de orden superior. Simbólicamente se resuelve la ecuación diferencial tomando todas las derivadas formando

así una serie de Taylor lo que no es práctico porque hay que efectuar una cantidad de cálculos muy grande y tediosa, y eso para cada ecuación diferencial que se presente.

2.3

Nuestro deseo es conocer una técnica más general que permita resolver cualquier ecuación diferencial, sin necesidad de conocer su forma precisa, para obtener las derivadas; el método que emplearemos permite calcularlas de otra manera. La base de este concepto es que existen muchas funciones lineales, por ejemplo, los polinomios forman un espacio vectorial (espacio dual) y por lo tanto puede formarse una base en ese espacio de manera que toda función analítica puede expresarse como una combinación lineal de elementos de dicha base. Los polinomios tiene propiedades muy interesantes, por ejemplo, en un polinomio de segundo grado basta conocer tres valores diferentes de la función para conocer su comportamiento en cualquier otro punto y de esa manera puede encontrarse su derivada como combinación de los tres valores conocidos.

Es bien sabido que tres puntos determinan una parábola, de la manera siguiente:

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Esta expresión puede también escribirse como un determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ x^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Esta situación se representa en la Figura 2.3:

Al hacer operaciones se obtiene un polinomio de segundo grado, así, puede calcularse fácilmente dy/dt porque es una suma de productos y diferencias. Con el objeto de evitar una gran cantidad de pasos algebraicos se procede en una forma equivalente pero más sencilla como veremos en seguida:

Se toma un punto, definido por $(y_0 + \lambda y', t_0 + \mu h)$, donde la función expresa la derivada de cualquier curva que pase por ese punto; posiblemente no la curva que nos interesa sino alguna que pase precisamente por ahí con esa derivada, Figura 2.4.

Esperamos obtener las derivadas de F en diversos de tales puntos. Dibujemos esta función en tres dimensiones, representando un cambio como el que acabamos de mencionar, Figura 2.5.

Desarróllese la función en serie de potencias alrededor del punto escogido de la manera anterior y utilizando los parámetros indicados, eso es

$$F(y_0 + \lambda h F_0, t_0 + \mu h) = F(y_0, t_0) + \lambda h F \frac{\partial F}{\partial y} + \mu h \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\lambda^2 F^2 h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\lambda\mu h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} + \mu^2 h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \dots \right) \quad (\text{II-3-1})$$

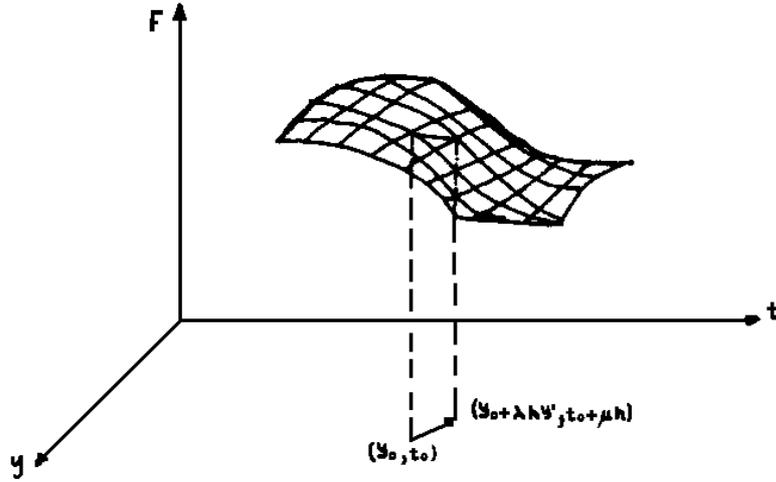


Figura 2.5: superficie

donde α_0 y α_1 , son coeficientes, mientras que κ_0 y κ_1 se definen como

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= hF(y_0, t_0) = hF \\ \kappa_1 &= hF(y_0 + \lambda\kappa_0, t_0 + \mu h)\end{aligned}$$

se tienen dos valores de F , uno en cada punto; puede identificarse a κ_0 como el término h , y' que se introdujo en (II-1-2). Al expresar y en términos de esas dos cantidades se evita el problema de trabajar con las derivadas; el procedimiento es tan legítimo como lo es el obtener la función, la derivada y la segunda derivada usando tres puntos de la curva. Que dicho procedimiento sea o no correcto depende de qué tanto coinciden las series (II-3-2) y (II-3-3). Entonces, en lugar de tener que invertir el desarrollo (II-3-1) se supone que y puede expresarse en la forma que hemos indicado y se verá que error resulta al hacer esa consideración. El error es, naturalmente, la diferencia entre las expresiones (II-3-2) y (II-3-3).

Al substituir κ_0 y κ_1 , en la segunda de estas series se tiene

$$y = y_0 + \alpha_0 Fh + \alpha_1 h(F + \lambda h F F_y + \mu h F_t) + oh^3 + \dots \quad (\text{II-3-4})$$

haciendo también una substitución en (II-3-2) y usando (II-3-1) resulta

$$y = y_0 + hF + \frac{h^2}{2}(FF_y + F_t) + oh^3 + \dots \quad (\text{II-3-5})$$

Por comparación de (II-3-4) y (II-3-5) se observa que son muy próximas una de otra si los coeficientes de las mismas potencias de h son aproximadamente iguales, o sea, que

$$\begin{aligned}Fh\alpha_0 + Fh\alpha_1 &\approx hF \\ h^2(\lambda\alpha_1 F F_y + \alpha_1 \mu F_t) &\approx (FF_y + F_t)h^2\end{aligned}$$

Si la aproximación no representa a y , por lo menos, la diferencia entre aquella y el caso real tiende a cero a tercer orden en h . Como deseamos que el método tenga validez general, debemos pedir que se cumplan las relaciones

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1 \quad , \quad \lambda\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad \mu\alpha_1 = \frac{1}{2}$$

Si esto se cumple, podemos confiar en nuestro método. Como tenemos cuatro incógnitas y sólo tres ecuaciones, el sistema está indeterminado, pero si se toma $\alpha_1 = c$ por ejemplo, entonces todas las soluciones quedan en términos del parámetro c y se tendrá por consiguiente

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= c & \lambda &= \frac{1}{2c} \\ \alpha_0 &= 1 - c & \mu &= \frac{1}{2c} \end{aligned}$$

un valor muy favorecido para c es $\frac{1}{2}$ porque de esa manera se tiene

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} & \lambda &= 1 \\ \alpha_0 &= \frac{1}{2} & \mu &= 1 \end{aligned}$$

La selección de c de ninguna manera aumenta el orden de aproximación (igualar términos en h^3) sino que simplifica el cómputo si se toma un valor adecuado.

La técnica que acabamos de exponer es conocida como “Método de Runge-Kutta” y puede extenderse para incluir aproximaciones de orden mayor en las potencias de h .

Escribiendo la fórmula de Runge-Kutta para cualquier punto se tiene

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_0\kappa_0 + \alpha_1\kappa_1$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= hF(y_n, t_n) \\ \kappa_1 &= hF(y_n + \lambda\kappa_0, t_n + \mu h) \end{aligned}$$

Al usar el valor convenido anteriormente para c , resulta

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}\kappa_0 + \frac{1}{2}\kappa_1 \\ \kappa_0 &= hF(y_n, t_n) \\ \kappa_1 &= hF(y_n + \kappa_0, t_n + h) \end{aligned} \tag{II-3-6}$$

Gráficamente, el proceso puede extenderse de la manera siguiente: Primero hay que formar κ_0 que es el incremento vertical de la figura; con κ_1 se realiza el segundo paso de

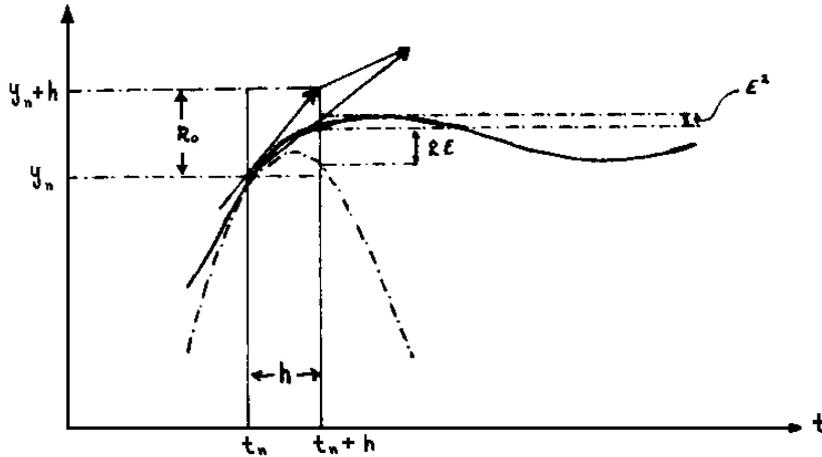


Figura 2.6:

Euler en el punto $(y_n + \kappa, t_n + h)$. La fórmula (II-3-6) dice que hay que sumar los dos incrementos y el error obtenido es del orden de ε^2 cuando hay un error de 2ε al ajustar nuestro elemento de arco con la parábola.

Cuando se hacen los cálculos a tercer orden el error irá como ε^3 y el punto resultante se toma como el peso de tres incrementos.

Existen varios métodos de Runge-Kutta y su elaboración es más o menos la misma. Hay otros métodos y todos ellos suponen que son conocidas las derivadas. La ventaja de los métodos de Runge-Kutta está en que no hay que calcular derivadas, además, es posible modificar el intervalo (se aumenta o se reduce el incremento) de acuerdo con la variación de la tangente. El inconveniente que representan estos métodos es el de que hay que realizar un gran número de cálculos para obtener F y cada paso está basado en los anteriores.

En general, supóngase que y es un punto sobre la curva y que puede escribirse en términos de uno de sus valores anteriores más múltiplos de F en diferentes puntos. Se expresa y en serie de potencias y se comparan los dos desarrollos. En otras palabras, suponemos que:

$$y = y_0 + \alpha F(y_1, t_1) + \beta F(y_2, t_2) + \gamma F(y_3, t_3) + \dots$$

Aquí, la aproximación (el orden) depende del número de puntos que se consideren, uno para la primera aproximación, dos para la segunda, etc. Además, se supone, como hemos mencionado, que

$$y = y_0 + h y_0' \frac{h^2}{2!} y_0'' + \frac{h^3}{3!} y_0''' + \dots \quad (\text{II-3-7})$$

El plan es el mismo que en caso anterior; hay que expresar $y(t)$ en términos de (y_0, t_0) y elaborar F en varios puntos para obtener una serie; los valores de F se obtienen con ayuda

de la ecuación diferencial. Hecho todo lo anterior, la tarea consiste en seleccionar los coeficientes de tal manera que haya una correspondencia, válida hasta la potencia deseada.

2.4

Presentamos ahora varios resultados sin entrar en más detalles, ya que el procedimiento es el mismo que se discutió en páginas anteriores. En (II-3-7) se escribe la fórmula hasta tener orden, lo que significa que el error es a cuarto orden en h . En ese caso se tiene

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(\kappa_0 + 4\kappa_1 + \kappa_2) \\
 \kappa_0 &= hF(y_n, t_n) \\
 \kappa_1 &= hF(y_n + \frac{1}{5}\kappa_0, t_n + \frac{1}{3}h) \\
 \kappa_2 &= hF(y_n + \frac{3}{2}\kappa_0, t_n + \frac{3}{2}h)
 \end{aligned}
 \tag{II-4-1}$$

Esta fórmula se atribuye a Kutta. Hay otra que se atribuye a Heun y es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}(\kappa_0 + 3\kappa_2) \\
 \kappa_0 &= hF(y_n, t_n) \\
 \kappa_1 &= hF(y_n + \frac{1}{5}\kappa_0, t_n + \frac{3}{2}h) \\
 \kappa_2 &= hF(y_n + \frac{3}{2}\kappa_1, t_n + \frac{3}{2}h)
 \end{aligned}
 \tag{II-4-2}$$

Nótese que en el incremento de la función no aparece κ_1 . Este sólo se usa como un paso intermedio.

Con un método de Runge-Kutta a cuarto orden se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(\kappa_0 + 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + \kappa_3) + o(h^4)
 \tag{II-4-3}$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_0 &= hF(y_n, t_n) \\
 \kappa_1 &= hF(y_n + \frac{1}{2}\kappa_0, t_n + \frac{1}{2}h) \\
 \kappa_2 &= hF(y_n + \frac{1}{2}\kappa_1, t_n + \frac{1}{2}h) \\
 \kappa_3 &= hF(y_n + \kappa_2, t_n + h)
 \end{aligned}
 \tag{II-4-4}$$

Este es el método que usaremos para integrar nuestras ecuaciones diferenciales. Cuando F no depende del tiempo se reduce al método de Simpson. Puede hacerse un diagrama semejante a los que se han hecho anteriormente pero resulta muy complicado, de modo que con los que ya se tienen dan una idea acerca del tipo de gráfica que se obtendría aquí.

El único problema que nos queda es el de introducir las extrapolaciones convenientes. En nuestro caso resultan ecuaciones de movimiento vectoriales, lo que significa que existe un vector que depende del tiempo según la ecuación.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= F_1(y_1, y_2, y_3, \dots, y_6, t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= F_2(y_1, y_2, y_3, \dots, y_6, t) \\ &\vdots \\ \frac{dy_6}{dt} &= F_6(y_1, y_2, y_3, \dots, y_6, t) \end{aligned}$$

Las componentes de \mathbf{y} son tres momentos, tres coordenadas y el tiempo.

Este es un sistema de ecuaciones con seis variables y el tiempo. Además, aquí las derivadas son parciales porque se tienen seis variables y el tiempo en cada ecuación; el hecho es que tenemos el mismo problema repetido seis veces; ahora bien, si se evita la derivación en todo su detalle, pueden considerarse las cosas de tal modo que las ecuaciones salgan exactamente iguales, tomando en cuenta que las κ son vectores, las \mathbf{y} son vectores.

Se tiene un argumento vectorial \mathbf{y} ; \mathbf{F} indica que existen seis funciones que dependen de seis variables. Si se considera que los seis argumentos son vectores y que la función es un vector, es entonces correcto pensar que las fórmulas para una variable expuestas en hojas anteriores tiene también validez aquí. Teniendo en cuenta la naturaleza vectorial de nuestra función, podemos ahora traducirla convenientemente.

Otra cosa que puede verse, aunque no influye, es que en este problema, la función hamiltoniana no depende del tiempo. Nuestras ecuaciones, por consiguiente, sólo son dependientes de las y_i , por lo que no se escribirá explícitamente al tiempo como argumento.

La discusión de los métodos que hemos presentado es solamente descriptiva. Para una presentación rigurosa puede consultarse cualquier libro de Análisis Numérico, por ejemplo, el de Kunz [10] y Hildebrand [11].

Capítulo 3

Descripción del programa

Una vez expuesta la naturaleza del problema y del método de integración para las ecuaciones del movimiento, el siguiente paso es discutir la parte computacional; todos los procesos de cálculo que requiere el problema han sido elaborados mediante el uso de un programa en FORTRAN para una computadora IBM 1130 (actualmente se tiene también en gran parte dicho programa en ALGOL para una máquina Burroughs-5500) existe también una versión para la computadora PDP-10.

La manera más cómoda y práctica de elaborar un programa con una serie de opciones y diversidad de cálculos, es la de dividirlo en subrutinas para realizar las diferentes tareas; algunas de las subrutinas usan variables comunes a todas ellas; para eso, hay que declararlas en común, por medio de la instrucción COMMON. En seguida daremos una lista de dichas variables:

T	Representa al tiempo
DT	Representa al incremento de tiempo
H	Contiene a la hamiltoniana (energía)
ALFA	Es la constante α , que ya discutimos
IPR	Indica el número de pasos de integración que hay que efectuar antes de imprimir un renglón
IPO	Es el número de renglones deseados para cada gráfica
G1, G2	Representan las cargas magnéticas que hemos colocado en los dos centros
Z1, Z2	Son las cargas eléctricas. En las fórmulas que usa el programa, las cargas no aparecen aisladas sino que formando diferentes combinaciones tales como:
GPL = G1 + G2	correspondiente a g_+
GMI = G1 - G2	correspondiente a g_-
EPP = Z1 + Z2	correspondiente a ε_+
EPM = Z1 - Z2	correspondiente a ε_-
XK = 2 · G1 · G2	correspondiente a κ . Hemos visto que $\kappa = \frac{1}{2}(g_+^2 - g_-^2)$
MO	Ya no se usa en este programa y puede omitirse
IC, IP, IT, IG	Son indicadores que tienen la función de comunicar al programa si se desea o no realizar determinadas gráficas

El programa utiliza, además, en varias subrutinas, los arreglos **III**, y **X**; el primero contiene la imagen de una línea y el segundo contiene las coordenadas (posición y momento) de la partícula en el espacio fase.

Antes de ver cómo funciona el programa, es conveniente discutir por separado cada una de las diferentes subrutinas, y después estudiar cómo van ensambladas en lo que es el programa mismo.

3.1 Subrutinas que usa el programa

3.1.1 Subrutina AUGV

Esta subrutina tiene los argumentos (**Z**, **X**, **F**, **Y**) y su función consiste en realizar la operación:

$$Z = X + F * Y$$

donde **X**, **Y** y **Z** son vectores de dimensión seis y **F** es un número en punto flotante.

```
SUBROUTINE AUGV (Z,X,F,Y)
DIMENSION Z(6), X(6), Y(6)
DO 10 I=1,6
10 Z(I)=X(I)+F*Y(I)
RETURN
END
```

Veremos la utilidad de este subprograma cuando discutamos la subrutina **RUKU**.

3.1.2 Subrutina CPYV

Los argumentos de esta subrutina son (**X**, **Z**) y realiza la operación,

$$X = Z$$

Debido a que **X** es un vector, no puede usarse como argumento de una expresión aritmética en **FORTRAN**, por eso hay que llamar a la subrutina siempre que deseamos realizar una operación de ese tipo. Más adelante veremos la utilidad de dicha subrutina.

```
SUBROUTINE CPYV (Z,X)
DIMENSION Z(6), X(6)
DO 10 I=1, 6
10 Z(I)=X(I)
RETURN
END
```

3.1.3 Subrutina ZERV

Esta subrutina tiene sólo un argumento (Z), realiza la operación:

```

                                Z = 0
C
SUBROUTINE ZERV (Z)
DIMENSION Z(6)
DO 10 I=1,6
10 Z(I) = 0.0
RETURN
END
```

No necesita más comentarios.

Aunque los procesos anteriores son muy simples, se ha optado por el uso de subrutinas para realizarlas porque se usan muchas veces en diferentes partes del programa; las demás subrutinas son un poco más complicadas, En primer lugar, tenemos dos que son de entrada respectivamente.

3.1.4 Subrutina INDI

Con esta subrutina preparamos los datos de entrada. Sirve para leer las cargas eléctricas y magnéticas, así como los valores iniciales de coordenadas y momentos. A través de ciertos indicadores especifica también el programa si queremos obtener ciertas gráficas, cuántas líneas por gráfica, etc.

```

SUBROUTINE INDI (X)
DIMESNION X(6)
COMMON T,DT,H,ALFA,IPR,IPO,G1,G2,Z1,Z2,GPL,GMI,EPP,EPM,XK,MO
COMMON IC,IT,IG,IP
200 FORMAT (F5.0,7I3)
204 FORMAT (4F5.0)
205 FORMAT (6F10.0)
READ (2,200) DT,IPO,IPR,IC,IT,IG,IP
IF (IPO) 2,3,4
2 MO=2
RETURN
3 CALL EXIT
4 READ (2,204) G1,G2,Z1,Z2
READ (2,205) X
RETURN
END
```

Los datos que especifican los diferentes casos se leen en bloques de tres tarjetas; ya hemos explicado el papel de los diferentes parámetros. Con la variable IPO empleamos un truco que consiste en hacer cero el valor de dicha variable cuando queremos que el

programa deje de trabajar; si la tarjeta en que debe aparecer perforada dicha variable, está en blanco, entonces el programa termina. Como puede observarse, el programa general no tiene opción de salida; es por medio de INDI como salimos siempre que lo deseamos. El valor negativo de IPO ya no se usa; originalmente servía para tener la facilidad de leer datos por medio del teletipo además de hacerlo con la lectora de tarjetas.

3.1.5 Subrutina INDO

Para escribir los datos iniciales usamos la subrutina INDO; es la subrutina que prepara los encabezados de las gráficas (vea los ejemplos). Su funcionamiento es muy simple y no requiere mayor discusión.

```

SUBROUTINE INDO (X)
DIMENSION X(6)
COMMON T,DT,H,ALFA,IPR,IPO,G1,G2,Z1,Z2,GPL,GMI,EPP,EPM,XK,MO
COMMON IC,IT,IG,IP
300 FORMAT (' XI (+) =',F8.3,', ETA (*) =',F8.3,', PHI (,) =',F8.3,
*          ', PXI =',F8.3,', PETA =',F8.3,', PPHI =',F8.3)
301 FORMAT (' H=',F10.3,', ALPHA =',F10.3)
302 FORMAT (' LOS VALORES INICIALES SON ')
303 FORMAT (' INCREMENTO =',F5.2,', NUMERO DE PUNTOS = ',
*          I3,', IMPRIME INTERVALO =',I3)
304 FORMAT (' CARGA MAGNETICA 1= ',F5.2,', 2= ',F5.2,/
*          ' CARGA ELECTRICA 1= ',F5.2,', 2= ',F5.2)
WRITE (3,303) DT,IPO,IPR
WRITE (3,304) G1,G2,Z1,Z2
WRITE (3,302)
WRITE (3,300) X
WRITE (3,301) H,ALFA
RETURN
END

```

Las subrutinas restantes constituyen la parte central del programa y las discutiremos con cierto detalle, recuérdese que estamos usando la notación de la computadora 1130.

3.1.6 Subrutina GRAF

La subrutina GRAF tiene varias funciones pero principalmente sirve para graficar las coordenadas como funciones del tiempo.

Se escribe en una serie de hojas los valores de ξ , η , ϕ ; eso ocupa veinte columnas, en las cien restantes, se imprime, bien, una estrella, un signo más o bien, un punto (o posiblemente varios como veremos luego) en posiciones que indican los valores que van tomando dichas variables.

La idea consiste simplemente en que una columna nos representa en cifras los valores de tales variables, de tal manera que podemos escribir los resultados hasta el número

de cifras deseado aunque muchas veces resulta difícil descifrar una columna de signos de números. Sabemos que en cien columnas no hay mucha precisión (existe bastante ruido) y puede haber un error hasta de 1%, lo que impide que se tenga una buena resolución en las gráficas. Entonces, conviene ajustar la escala, centrar el intervalo y colocar un símbolo en la columna deseada. Para guardar un símbolo en una palabra lo que hay que hacer es guardar ahí el código de dicho símbolo (código EBCDIC). La manera de pasar información entre la computadora y el equipo periférico para este tipo de datos es por medio del formato A, por ejemplo:

```

                READ (2,200) III
            200  FORMAT (100 A1)
    
```

nos dice que vamos a leer cien números, uno en cada elemento del arreglo III. Son esos números precisamente los códigos de los símbolos o letras que deseamos guardar. Aquí, lo único que nos interesa es saber que los números tratados con formato A dan lugar a ciertos símbolos. Eso es lo fundamental para colocar un símbolo en una línea que deseamos imprimir.

Los argumentos de GRAF son (III, Y, N).

III es la imagen de la línea que se va a conservar en el programa principal.

Y es el vector que contiene las coordenadas.

N es un número que indica de que manera vamos a tratar la línea; esta variable puede tomar valores de uno a cuatro, los cuales explicaremos enseguida:

N=1: Limpiamos la línea colocando la letra I en la columna para representar el eje.

N=2: Posiciona los símbolos: +, *, . de acuerdo con el valor de ξ , η , ϕ .

N=3: Imprimimos la línea. Se procede en esta forma porque es posible que haya que colocar varios valores de la variable en una línea antes de imprimirla.

N=4: Sirve para escribir una línea final y cambiar de página retornando luego al programa.

Todas estas tareas son controladas mediante un GO TO computado como puede verse en el listado. Esta subrutina es realmente una colección de subrutinas en parte independientes y en parte en común, independientemente por que realizan diferentes tareas y regresan al programa sin afectar a las otras partes, en común porque usan las mismas variables.

A continuación mostramos el listado de esta subrutina:

```

SUBROUTINE GRAF (III,Y,N)
DIMENSION III(100),X(6),Y(6)
COMMON T,DT,H,ALFA,IPR,IPO,G1,G2,Z1,Z2,GPL,GMI,EPP,EPM,XK,MO
COMMON IC,IT,IG,IP
EQUIVALENCE (XI,X(1)),(ETA,X(2)),(PHI,X(3))
    
```

C

```

        CALL CPYV (X,Y)
        GO TO (1,2,3,4),N
C
    1 CONTINUE
      DO 12 ID=1,100
    12 III(ID)=1H
      III(50)=1HI
C
      RETURN
    2 CONTINUE
      IF(XI-10)30,30,31
    30 IXI=IFIX(XI*10.)
      GO TO 32
    31 IXI=IFIX(XI)
      IF (100-IXI) 17,32,32
    17 IXI=100
      III(10)=1HI
    32 III(IXI)=1H+
      IETA=IFIX(ETA*50.)+50
      III(IETA)=1H*
      IF(PHI-3.141592)34,34,33
    33 PHI=PHI-6.283184
    34 IF(PHI+3.141592)35,35,36
    35 PHI=PHI+6.283184
    36 IPHI=IFIX(PHI/.06283184)+50
      III(IPHI)=1H.
      CALL CPYV (Y,X)
      RETURN
C
    3 CONTINUE
      WRITE(3,311)XI,ETA,PHI,III
    311 FORMAT (1X,F6.3,2F7.3,100A1)
C
      RETURN
    4 CONTINUE
      WRITE (3,301) H,ALFA
    301 FORMAT (' FINAL H =',F10.3,',', ALPHA =',F10.3)
      WRITE(3,305)
    305 FORMAT (1H1)
      RETURN
      END

```

Debe notarse que la tarea esencial de GRAF está controlada por el valor $N=2$ y es esta parte la que merece más discusión.

Existen cien columnas para graficar y hay que decidir (calcular) en qué columna se va a imprimir un símbolo. Sabemos que ξ es mayor que la unidad pero no existe ninguna restricción sobre su cota superior; para η se tiene: $-1 \leq \eta \leq 1$, ϕ es una variable angular, entonces: $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Hay que reducir la variable a esos rangos; para ξ se toma una

convención que explicamos enseguida; en el intervalo que mostramos en la figura va a representarse desde cero hasta diez, como ξ es mayor que la unidad nunca se usará para esta variable el rango $(0, 1)$ que viene representando por la parte sombreada.



Figura 3.1: rango de ξ

Pero como es frecuente encontrar problemas donde $10 \leq \xi \leq 100$ entonces se recurre a un truco: cuando eso ocurre colocamos una letra I en la columna 10 y se usa una escala que vaya hasta cien, eso es, se reduce por un factor de diez la escala original. Si el valor de ξ es mayor que cien, se coloca únicamente un símbolo en el margen indicando que se tiene un valor fuera de rango. Estas precauciones son necesarias, porque si se tiene un índice que rebasa los límites del arreglo el dato es depositado en otra localidad de las usadas por el programa, lo que causa serios problemas en los resultados. Entonces, de acuerdo con lo convenido, si $\xi \leq 10$, usamos 0.1 por columna (son cien columnas), para $10 < \xi \leq 100$ se toma 1.0 por columna, y para $\xi > 100$ sólo se coloca un símbolo en el margen.

La variable η está comprendida entre -1 y 1 , entonces tenemos un rango de 2 en cien columnas. Por lo tanto se tendrá 0.02 por columna; como η puede ser negativa hay que tomar el cero de dicha variable hasta la columna cincuenta, haciéndose por lo tanto 1 la conversión necesaria:

$$\frac{\eta}{0.02} + 50 = \eta \times 50 + 50.$$

Para tratar a la variable ϕ lo primero que debe hacerse es checar si no es demasiado grande, si ese es el caso le restamos 2π pues se supone que se ha iniciado en el rango $(-2\pi, 2\pi)$, graficamos con una frecuencia adecuada de modo que no pase por 4π ó algo por el estilo. Igualmente hay que checar que ϕ no sea demasiado negativa sumándole 2π cuando ese caso se presente. Esas operaciones mantienen a ϕ dentro de su rango y al graficar se va a representar $2\pi/100 = 0.0628314$ por columna. En la columna 50 pondremos el cero de dicha variable y por lo tanto hay que darle el mismo tratamiento que se dio a η . Debido a que ajustamos a ϕ en este programa hay que hacer también un reajuste en el programa principal porque debe recordarse que estamos trabajando con una copia del vector y no con el vector mismo por eso copiamos X en Y al regresar el programa.

Los símbolos que se toman para ξ , η , y ϕ son: +, * y . respectivamente y sus códigos son 20032, 23616 y 19624. En otras máquinas (3150 y PDP-10, por ejemplo) se usa la instrucción:

ARREGLO(J) = 1 H SIMBOLO

así lo usamos en algunos de nuestro listados.

Con esto ya sabemos como funciona una subrutina para graficar un conjunto de variables su generalización a otros sistemas de coordenadas es más o menos clara: hay que

determinar el rango de cada variable y garantizar que no se salga de dicho rango; después, hay que buscar un factor adecuado para graficar dicha variable en el intervalo disponible (en este caso es de uno a cien). También podemos subdividir una subrutina de ese tipo varias partes, por ejemplo, si queremos: preparar una línea nueva, insertar un dato en una línea, imprimir una línea etc. También podemos imprimir en el margen algunos datos importantes, en fin hay muchas posibilidades; pero la técnica es esencialmente la que hemos descrito.

Otra cosa importante que debe señalarse es la razón de haber separado la inserción de símbolos de la impresión de datos: debido a la poca resolución que se tiene al graficar es a veces conveniente (cuando hay variaciones muy rápidas) poner más de un punto al imprimir una línea porque no se puede saber precisamente cuál es la transición entre un punto y otro en dos líneas contiguas, aunque no siempre se logra una resolución completa (ver los ejemplos) pero las curvas se suavizan un poco, siendo más fáciles de entender. El número de puntos lo indica la variable *IPR* como ya se dijo antes, mientras que *IPO* es el número de líneas deseado.

Cuando hay variaciones rápidas es también conveniente reducir el incremento de tiempo, cambiar intervalo de impresión o cosas por el estilo. Se ha convenido también en que cuando una curva cruza el eje, la letra *I* que existe originalmente en esa posición es reemplazada por el símbolo que representa a la curva. Ya sabemos como graficar; pero hay todavía muchas cosas que discutir. Eso corresponde a otras subrutinas.

3.1.7 Subrutina PAGE

Con la subrutina *PAGE* se preparan dos hojas, en una de ellas se graficarán las variables (*X*, *Y*) y en la otra (*R*, *Z*) dadas por (I-1-3) donde *R* es el radio cilíndrico. Estas gráficas están contenidas en los archivos 10 y 20 que tienen reservada un área del disco; cada archivo está formado por cincuenta registros de ciento veinte palabras cada uno, lo que es equivalente a una página de cincuenta renglones y ciento veinte columnas.

Los argumentos de *PAGE* son (*X*, *N*) donde *X* es un vector que contiene las coordenadas, *N* es un número que indica el tipo de operación que se va a efectuar, y puede tomar cinco valores como vamos a explicar enseguida. Los valores 2 y 4 ya no se usan y pueden omitirse:

- 1 Indica que hay que limpiar una página para cada gráfica.
- 3 Es para colocar un símbolo en las gráficas.
- 5 Se usa para imprimir las dos gráficas.

Debido a que se va a usar una equivalencia (no puede usarse con una variable que está en la lista de argumentos), es necesario copiar *Y* en *X*. Recuérdese que aunque *Y* es un argumento, hay que dimensionarlo dentro de la subrutina.

El arreglo *JJJ* va a contener la imagen de una línea. Nótese que lo primero que se hace es limpiar el arreglo colocando también una letra *I* en la columna 60.

El eje horizontal para la gráfica (X, Y) se toma en la mitad de la página pero en las curvas (R, Z) dicho eje se escribe al pie de página porque R (que corresponde al eje vertical), no toma valores negativos.

```

SUBROUTINE PAGE ( Y,N )
DIMENSION X(6),Y(6),JJJ(120)
EQUIVALENCE (XI,X(1)),(ETA,X(2)),(PHI,X(3))
CALL CPYV (X,Y)
GO TO (10,20,30,40,50),N
10 CONTINUE
DO 11 I=1,120
11 JJJ(I)=16448
   JJJ(60)=-14016
DO 12 I=1,50
   WRITE (10@1) JJJ
   WRITE (20@I) JJJ
12 CONTINUE
DO 13 I=1,120
13 JJJ(I)=24640
   JJJ(60)=20032
   WRITE (10@50) JJJ
   WRITE (20@25) JJJ
   RETURN
20 CONTINUE
   RETURN
30 CONTINUE
   R=SQRT((XI*XI-1.0)*(1.0-ETA*ETA))
   XX=R*COS(PHI)
   YY=R*SIN(PHI)
   CALL PLOT (IFIX(20.0*XI*ETA)+60,50-IFIX(12.13*R),10,23616)
   CALL PLOT (IFIX(20.0*XX)+60,25-IFIX(12.13*YY),20,23616)
   RETURN
40 CONTINUE
   RETURN
50 CONTINUE
   WRITE (3,350)
DO 51 I=1,50
   READ (10@I) JJJ
   WRITE (3,351) JJJ
51 CONTINUE
   WRITE (3,350)
   WRITE (3,352)
   WRITE (3,350)
DO 52 I=1,50
   READ (20@I) JJJ
   WRITE (3,351) JJJ
52 CONTINUE
   WRITE (3,350)
   WRITE (3,352)

```

```

RETURN
350 FORMAT (1X,12(@ESFM*IPN**@))
351 FORMAT (1X,120A1)
352 FORMAT (1H1)
END

```

Los dos centros del problema se colocaron en las posiciones -1 y $+1$, y van a corresponder según nuestra escala a las columnas 40 y 80. Entonces se va a graficar el intervalo $(-3, 3)$ sobre el eje.

Recuérdese también que para guardar un arreglo en el disco se usa la instrucción:

```
WRITE ( ARCHIVO, @ I ) ARREGLO
```

@ indica que se trata del disco en tanto que I señala el registro (que corresponde al renglón) donde va a guardarse un arreglo. Para la lectura en disco el criterio es el mismo.

Como X y Y están declarados como vectores no pueden usarse como nombres de variables por eso en este programa los representamos por XX y YY respectivamente. El radio cilíndrico se representará por R.

Complementaria a PAGE se tiene la subrutina PLOT la cual discutiremos más adelante.

Nótese que al imprimir, renglones y columnas no crecen en la misma proporción sino que hay una razón de crecimiento de 20 : 12.13.

Teniendo en cuenta ese hecho, se hacen en el programa las correcciones de escala; de no hacerlo así, se obtendrían gráficas distorsionadas. Siempre que se grafica en esta forma deben tomarse esas precauciones.

Eso es todo lo que se necesita para discutir la subrutina y nos detendremos más en la misma.

3.1.8 Subrutina PLOT

Como ya se dijo, esta subrutina es complementaria de PAGE y sirve para colocar un símbolo en una u otra de las gráficas en el renglón y columna especificados, todo eso viene explicado por sus argumentos que son: IA, IB, K, ICH que corresponden a columna, renglón, archivo y símbolo.

Se toma el cuidado de colocar un símbolo en el margen cuando el valor de la función es muy positivo o muy negativo por razones que ya vimos con anterioridad.

Resumiendo, la técnica para obtener este tipo de gráficas es la siguiente: hay tres tipos de pasos que son: borrar la página, introducir el punto e imprimir.

```

SUBROUTINE PLOT (IA,IB,K,ICH)
DIMENSION III(120)

```

C

```

      IF (IA) 1,1,2
1     IA = 1
2     IF (120-IA) 3,3,4
3     IA = 120
4     IF (IB) 5,5,6
5     IB = 1
6     IF (50-IB) 7,7,8
7     IB = 50
8     READ (K@IB) III
      III(IA) = ICH
      WRITE (K@IB) III
      RETURN
      END

```

Por lo demás, el funcionamiento de este programa es muy simple y no requiere mayor discusión.

3.1.9 Subrutina GRAD

Aquí es donde se calculan las diferentes expresiones para las ecuaciones de movimiento dadas por (I-4-9) a (I-4-14); se encuentra el valor del hamiltoniano (con potencial repulsivo o sin él) así como la constante de separación. En las expresiones que aparecen en el listado los cálculos están hechos sin considerar el potencial repulsivo. Cuando se quieran ver los efectos del potencial repulsivo habrá que modificar ligeramente las expresiones pero esencialmente la subrutina conserva su estructura.

```

SUBROUTINE GRAD (Y,DY)
DIMENSION X(6),DX(6),Y(6),DY(6)
COMMON T,DT,H,ALFA,IPR,IPO,G1,G2,Z1,Z2,GPL,GMI,EPP,EPM,XK,MO
COMMON IC,IT,IG,IP
EQUIVALENCE (XI,X(1)),(ETA,X(2)),(PHI,X(3))
EQUIVALENCE (PXI,X(4)),(PETA,X(5)),(PPHI,X(6))
EQUIVALENCE (DXI,DX(1)),(DETA,DX(2)),(DPHI,DX(3))
EQUIVALENCE (DPXI,DX(4)),(DPETA,DX(5)),(DPPHI,DX(6))
C
CALL CPYV (X,Y)
D = XI*XI-ETA*ETA
XXI =XI*XI-1
EETA=1.-ETA*ETA
PPHX=(PPHI+GMI*XI)/XXI
PPHE=(PPHI+GPL*ETA)/EETA
HX =PXI*PXI+PPHX*PPHX
HE =PETA*PETA+PPHE*PPHE
H =(XXI*HX+EETA*HE+EPP*XI-EPM*ETA+XK)/D
ALFA=XI*XI*H-XXI*HX-EPP*XI
DXI =PXI*XXI/D
DETA=PETA*EETA/D

```

```

DPHI=(PPHX+PPHE)/D
DPXI=(XI*H-XI*PXI*PXI-PPHX*(GMI-PPHX*XI)-EPP/2.)/D
DPETA=(ETA*PETA*PETA-PPHE*(GPL+PPHE*ETA)+EPM/2.-ETA*H)/D
DPPHI=0.0

```

C

```

CALL CPYV (DY,DX)
RETURN
END

```

Los argumentos de GRAD son (Y, DX) y su funcionamiento es muy simple después de haber visto la parte analítica del problema. Esta subrutina como hemos dicho, prepara las ecuaciones de movimiento que son resueltas numéricamente por otra subrutina que discutiremos enseguida.

3.1.10 Subrutina RUKU

Ya se vió en que consiste el método de Runge-Kutta; ahora nos corresponde discutir como se realiza el cálculo en FORTRAN.

La subrutina que realiza esta tarea es RUKU, con argumentos (Z, DZ), donde Z es el punto en que se inicia la integración y DZ corresponde a $y_{n+1} - y_n$; este no es precisamente el incremento sino la derivada. Podríamos entonces, escribir DZ/h siendo entonces el incremento dado por hDZ , pero no tiene caso escribir h . DZ, es la derivada efectiva, no es realmente la derivada de la función en el punto Z; posiblemente sea más correcto hablar de una secante (en vez de una tangente a la curva) que multiplicada por el tiempo, nos da la función en un tiempo DT después, teniéndose con eso una aproximación a cuarto orden.

```

SUBROUTINE RUKU (Z,DZ)
DIMENSION Z(6),X(6),DZ(6),DX(6)
COMMON T,DT,H,ALFA,IPR,IPO,G1,G2,Z1,Z2,GPL,GMI,EPP,EPM,XK,MO
COMMON IC,IT,IG,IP
CALL ZERV (DZ)
CALL GRAD (Z,DX)
CALL AUGV (DZ,DZ,1.0/6.0,DX)
CALL AUGV (X,Z,DT/2.0,DX)
CALL GRAD (X,DX)
CALL AUGV (DZ,DZ,1.0/3.0,DX)
CALL AUGV (X,Z,DT/2.0,DX)
CALL GRAD (X,DX)
CALL AUGV (DZ,DZ,1.0/3.0,DX)
CALL AUGV (X,Z,DT,DX)
CALL GRAD (X,DX)
CALL AUGV (DZ,DZ,1.0/6.0,DX)
RETURN
END

```

Esta subrutina sí la vamos a discutir con todo detalle, tanto por su importancia como por estar formada con llamadas a otras subrutinas.

Se comienza propiamente con la instrucción `CALL ZERV(DZ)` que realiza la operación $DZ=0$. Luego, con `CALL GRAD(Z,DX)` se está indicando la operación $DX = F(Z) \cdot k_0$ que es la tangente a la curva en el punto X_0 . No se escribe T en F porque para nuestro caso, la derivada no va a depender de esa variable. De la misma manera, vamos obteniendo

`CALL AUGV(DZ,DZ,1/6,DX)` para obtener $DZ=DZ+DX/6=DZ+k_0/6$
`CALL AUGV(X,Z,DT/2,DX)` que es lo mismo que
 $X=Z+(DT/2)*DX=Z+(DT/2)k_0 = hF(y_n + k_0/2)$

Se ha estado tomando $Y=Z$, además no se está usando H en el cálculo de X. Ahora ya podemos calcular k_1 :

`CALL GRAD(X,DX)` o sea $DX = F(X) = k_1$

Así tenemos el siguiente paso:

`CALL AUGV(X,Z,1/3,DX)` es decir $X=Z+DX/3$.

Y ya tenemos dos términos del argumento de k_2 .

`CALL AUGV(X,Z,DT/2,DX)` equivalente a $X = Z + DT/2(DX) = Z + (DT/2) k_1$

Con eso ya podemos obtener k_2 :

`CALL GRAD(X,DX)` y tendremos así $DX = F(X) = k_2$

Para calcular k_3 que es la última k que nos falta damos los siguientes pasos.

`CALL AUGV(DZ,DZ,1/3,DX)` para calcular $DZ = DZ+DX/3 = DZ+ k_2/3$

`CALL AUGV(X,Z,DT,DX)` $X = Z+DT*DX = Z+DT*k_2$

`CALL GRAD(X,DX)` con esto tendremos k_3
 $DX = F(X) = F(y_n + k_2) = k_3$

Y por último:

`CALL AUGV(DZ,DZ,1/6,DX)` para obtener $DZ=DZ+DX/6$

Con lo cual queda completo un paso de la integración de Runge-Kutta en FORTRAN. Hay que observar que este método de Runge-Kutta a cuarto orden se reduce al de Simpson. Cuando hay dependencias del tiempo debe incluirse el argumento, calculando en términos de más múltiplos de DT.

3.1.11 Subrutina TURN

Ya se discutió en otro lado de dónde surge el concepto de puntos de retorno y se encontró que existen dos potenciales efectivos, uno en ξ y otro en η . Dichos potenciales venían expresados como polinomios de cuarto grado, ecuaciones (I-5-1).

Se ha construido un programa para graficar dichos polinomios, se trata de la subrutina TURN que vamos a discutir ahora. Tal vez sería más conveniente elaborar una subrutina

que evalúe las raíces de los polinomios a que nos estamos refiriendo, dichas raíces corresponderían a los puntos clásicos de retorno pero se optó mejor por construir gráficas. El listado de TURN es el siguiente:

```

SUBROUTINE TURN (H,ALFA,PPHI,EPP,EPM,GPL,GMI,XK)
DIMENSION A(5),B(5),III(100)
A(1)=H
A(2)=-EPP
A(3)=- (ALFA+H+GMI*GMI)
A(4)=EPP-2.0*PPHI*GMI
A(5)=ALFA-PPHI*PPHI
B(1)=H
B(2)=-EPM
B(3)=- (ALFA+H+GPL*GPL-XK)
B(4)=EPM-2.0*PPHI*GPL
B(5)=ALFA-PPHI*PPHI-XK
WRITE (3,350) A
350 FORMAT ('COEFICIENTES EN PXI (+) ARE ',5F10.4)
WRITE (3,351) B
351 FORMAT (' COEFICIENTE EN PETA (*) ARE ',5F10.4)
WRITE (3,352) H,ALFA,PPHI
352 FORMAT (' H= ',F10.4,', ALFA = ',F10.4,', PPHI = ',F10.4)
X=-1.0
DO 20 J=1,50
DO 2 I=1,100
2 III(I)=1H
III(50)=1HI
Z=A(1)
DO 4 I=2,5
4 Z=Z*X+A(I)
W=B(1)
DO 6 I=2,5
6 W=W*X+B(I)
IW=5.0*W/ABS(H)+50
IZ=5.0*Z/ABS(H)+50
IF (IZ) 30,30,31
30 IZ=1
31 IF (IW) 32,32,33
32 IW=1
33 IF (100-IZ) 34, 35,35
34 IZ=100
35 IF (100-IW) 36,37,37
36 IW=100
37 CONTINUE
III(IZ)=1H+
III(W)=1H*
WRITE (3,300) X,Z,W,III
300 FORMAT (1X,F6.2,2F7.2,100A1)
X=X+0.1

```

```

20  CONTINUE
    WRITE (3,301)
301  FORMAT (1H1)
    RETURN
    END

```

Los argumentos de la subrutina son:

H, ALFA, PFI, EPM, GPL, GMI Y XK

que corresponden a las constantes que componen los coeficientes de polinomios. Dichos polinomios tienen la forma

$$A_4\xi^4 + A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0 = P(\xi)$$

$$B_4\eta^4 + B_3\eta^3 + B_2\eta^2 + B_1\eta + B_0 = P(\eta)$$

que como hemos visto, corresponden a las ecuaciones (I-5-1). Dichos coeficientes se van a guardar en dos arreglos de cinco elementos cada uno como sigue:

$$B_4 \longrightarrow B(1), \quad B_3 \longrightarrow B(2), \quad B_2 \longrightarrow B(3), \quad B_1 \longrightarrow B(4), \quad B_0 \longrightarrow B(5).$$

En la misma forma se procede con el arreglo A. La forma de dichos coeficientes puede verse en las ecuaciones (I-5-1) y van a permanecer constantes durante todo el cálculo.

Antes de graficar se imprimen algunas constantes de interés como puede verse en los ejemplos.

Se tiene presente el rango de validéz que tiene η que en este programa representamos por la variable X.

La técnica de graficación es la misma que ya se explicó por lo que no tiene caso explicarla aquí. Lo que si es importante señalar aquí, es que desde el punto de vista computacional, la manera más adecuada de escribir un polinomio es la siguiente:

$$(((a_4\xi + a_3)\xi + a_2)\xi + a_1)\xi + a_0$$

y para calcular, usamos una variable Z que va cambiando sucesivamente su valor partiendo desde el paréntesis más interno hasta tener calculado todo el polinomio. Esa manera de hacer el cálculo reduce al mínimo el número de operaciones.

Como la función toma valores positivos y negativos, se escribe el eje en la mitad del arreglo. Además se va a utilizar una escala de 1:5 (factor de IW o IZ) lo que nos indica que tendremos 5 unidades por columna. Además como los valores de A_4 y B_4 son dados por H, la escala es dependiente de la energía si no dividimos toda la función por H. Al calcular $P(\xi)/H$ se toma el valor absoluto de H porque nos interesa conservar el signo de la función; ya hemos visto que los ceros de un polinomio no cambian si lo multiplicamos o dividimos por una constante; así es que no hemos hecho nada malo.

Al igual que en otras gráficas, se procura que la curva permanezca siempre en el intervalo de graficación.

3.1.12 Subrutina CNTU

Con la subrutina CNTU se grafica la región donde puede moverse la partícula. Pueden también graficarse los niveles de energía potencial constante; esto se consigue sombreando las regiones donde la energía está comprendida dentro de ciertos rangos de valores y lo que se va a observar son franjas sombreadas y sin sombrear alternadas y los contornos de tales franjas corresponderán a diferentes niveles de energía potencial siendo constante la diferencia entre niveles sucesivos. La expresión del potencial que usaremos para nuestro programa es el potencial efectivo dado por:

$$V = \frac{z_1 e}{r_1} + \frac{z_2 e}{r_2} - \frac{g_1^2}{r_1^2} - \frac{g_2^2}{r_2^2} + \frac{(p_\phi + g - \xi)^2}{\xi^2 - 1} + \frac{(p_\phi + g + \eta)^2}{1 - \eta^2}$$

Pueden hacerse todas las modificaciones necesarias tales como eliminar los términos correspondientes al potencial repulsivo o solo considerar esos términos, etc. Se usará una hoja completa para esta gráfica, es decir, se tendrán cincuenta renglones de ciento veinte columnas.

```
SUBROUTINE CNTU (G1,G2,Z1,Z2)
DIMENSION III (120)
DO 10 I=1,50
DO 2 J=1,120
2 III(J)=16448
Y=(50-I)*0.082
DO 11 J=1,120
X=J*0.05-3.0
S1=(X+1.0)**2+Y*Y
S2=(X-1.0)**2+Y*Y
U=(G1*G1)/S1+(G2*G2)/S2+Z1/SQRT(S1)+Z2/SQRT(S2)
U=10.0*U
IF (U-10.0) 20,20,43
20 IF (U+10.0) 41,21,21
21 IF (U) 30,30,33
30 IF (U+0.5) 31,31,41
31 IF (U+1.0) 32,32,11
32 U=U+1.
GO TO 32
33 IF (U-0.5) 11,11,34
34 IF (U-1.0) 43,43,35
35 U=U-1.0
GO TO 33
41 III (J)=24640
GO TO 11
43 III(J)=20032
11 CONTINUE
WRITE (3,320) III
320 FORMAT (1X,120A1)
10 CONTINUE
```

```

WRITE (3,321)
321 FORMAT (1H1)
RETURN
END

```

La técnica empleada es muy burda: Sobre la línea 50 se escribirá el eje Z y sobre el eje vertical representaremos al radio cilíndrico tomando en cuenta que:

$$r_1^2 = r^2 + (d + z)^2$$

$$r_2^2 = r^2 + (d - z)^2$$

como puede apreciarse en la Figura 3.2.

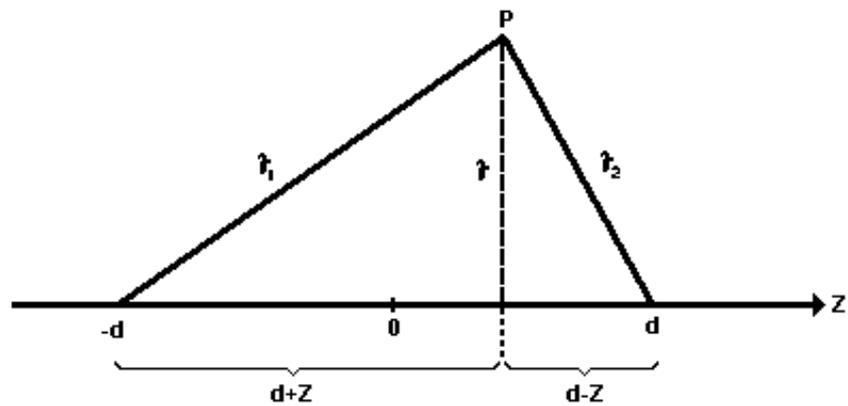


Figura 3.2: coordenadas

Las posiciones -1 y 1 en las que se han colocado los dos centros corresponden en nuestra gráfica a las columnas 40 y 80 respectivamente.

Al mapear R contra Z resultarán figuras de revolución alrededor de este último eje. Como todo estará en función de Z, entonces se calculará dicha variable en todo punto de la gráfica. Lo mismo que en programas que hemos discutido antes, aquí también se hacen los ajustes de escala adecuados, a los renglones se les representa como Y que en nuestro caso corresponden a r, se les da el valor $Y = (50 - I)(0.082)$, ya que tomaremos el cero en el renglón 50. Se ha convenido en dar a la columna 80 el valor 1, y entonces, la columna 120 valdrá 3; por lo que a las columnas las representaremos como $X = J \cdot 0.5 - 3.0$; de acuerdo con eso el potencial, al que representamos por U, será del tipo $U(X, Y)$ pudiendo tomar valores positivos tanto como negativos. Hemos discutido ya los detalles del programa que merecen discusión, el resto no difiere esencialmente de lo que se ha visto en otras gráficas.

3.1.13 Subrutina PRYPO

Esta subrutina consta de dos partes, a saber: lo que podría llamarse el programa principal y una subrutina auxiliar que hemos llamado CALCA la cual tiene como tarea calcular dos

funciones y cargar los símbolos que las representan, en los arreglos IARR y JARR, de acuerdo con lo indicado por ciertos parámetros que calcula el programa principal. Las funciones en cuestión son las discutidas en la sección (I.5.1). El programa principal decide bajo qué condiciones ha de operar la subrutina, con qué parámetros, en qué arreglo hay que cargar un símbolo, preve que en la vecindad de los puntos singulares no se calcule una función, esto es para evitar un sobreflujo por división por una cantidad cercana a cero.

PRYP0 tiene como argumentos (IR, K, GPL, GMI, H, ALFA, EPP, EPM) y la subrutina auxiliar CALCA utiliza esos mismos parámetros pero se les da nombres más generales porque deseamos obtener las curvas de la variable ξ y las de η mediante el mismo procedimiento. CALCA tiene tres parámetros adicionales: el primero es un número entero que toma dos valores, el valor 1 indica que hay que almacenar los puntos de la variable y el valor 2 va a indicar que los puntos que se almacenarán corresponden a la variable ?. El segundo argumento indica la columna donde se va a situar el símbolo, el renglón corresponde a la parte entera del valor de la función, habiendo un punto al pie de la gráfica o en la parte superior cuando la curva sale de la hoja. El tercer parámetro es también un número entero que puede tomar el valor 1 ó el valor 2, decide si hay que omitir o realizar el cálculo de las funciones f_2 y s_2 (página 15) en los puntos donde ocurren las singularidades para dichas funciones. Eso lo decide el programa PRYP0 al comparar p_ϕ con los parámetros $-g_+$ y $-g_-$.

La subrutina PRYP0 tiene un ciclo controlado por el índice k que permite variar ligeramente alguno de los parámetros que intervienen en el cálculo de nuestras funciones y obtener nuevamente las gráficas para cada variación; con ello se obtendrán las familias de curvas que discutimos en la sección (I.5.1).

Esta subrutina puede usarse independientemente del programa principal y se tiene una versión en fortran para la computadora 3150 y en algol para la B-5500, es más ventajoso usarla por separado por que hay mayor libertad en el manejo de los parámetros. El inconveniente es que al hacerlo así no se conocen los valores iniciales.

Actualmente, sabiendo que los valores de los momentos estan tratados por las expresiones (I-4-19) y (I-4-20) se ha elaborado una subrutina auxiliar de PRYP0 que calcula el valor de dichas expresiones en cualquier punto dado, eso permite invertir el proceso de derivación de los diferentes parámetros del problema y establecer así condiciones iniciales para valores de las constantes seleccionadas de antemano.

La versión más completa de PRYP0 está escrita en FORTRAN para la computadora PDP-10; en el Apéndice 1, se discute con más detalle.

3.1.14 Discusión del programa general

El programa consiste en llamados a las diferentes subrutinas que ya hemos discutido y además, realiza algunos cálculos auxiliares, por lo cual no hay ninguna dificultad en comprender su funcionamiento. Es en el programa principal donde se declaran los archivos de disco y las variables comunes.

Ya se indicó el papel que desempeñan algunos índices como IT, IC, IG en el sentido de señalar al programa si deben realizarse determinados cálculos o de qué manera deben tra-

bajar las subrutinas cuando existen varias opciones. En la siguiente hoja se podrá ver todo el proceso de cálculo mediante un diagrama de flujo y un listado del programa principal. No hemos incluido el programa PRYPO porque preferimos discutirlo en un apéndice aparte.

No se ha atendido aquí nada con respecto a los detalles del lenguaje FORTRAN, se ha discutido lo que se consideró necesario para entender los algoritmos mediante los cuales obtenemos los diferentes aspectos del problema. Los detalles de FORTRAN pueden verse en los libros de Bork [12] y Louden [13].

Todas las subrutinas en FORTRAN discutidas en este capítulo están escritas en la versión de la 1130 para la cual fueron planeadas originalmente, aunque a últimas fechas se adaptó el programa para la computadora PDP-10.

Más adelante se presentan otros programas para la PDP-10 y se aclara en cada caso como han sido planeados.

```
//DELETE                                TWOC
// FOR
* IOCS(CARD,1132 PRINTER,TYPEWRITER,KEYBOARD,DISK)
* ONE WORD INTEGERS
* LIST ALL
* NAME TWOC
C
C     PROGRAMA PRINCIPAL
C
      DIMENSION  X(6),DX(6)
      DIMENSION  III(100)
      COMMON     T,DT,H,ALFA,IPR,IPO,G1,G2,Z1,Z2,GPL,GMI,EPP,EPM,XK,MO
      COMMON     IC,IT,IG,IP
      EQUIVALENCE (PPHI,X(6))
      DEFINE FILE 10(50,120,U,K10)
      DEFINE FILE 20(50,120,U,K20)
      MO=1
1 CONTINUE
  CALL INDI (X)
  IC=IC+1
  IT=IT+1
  IG=IG+1
  IP=IP+1
  GPL=G1+G2
  GMI=G1-G2
  EPP=Z1+Z2
  EPM=Z1-Z2
  XK=2.0*G1*G2
  CALL GRAD (X,DX)
  GO TO (2,3),IT
2 CONTINUE
  CALL TURN (H,ALFA,PPHI,EPP,EPM,GPL,GMI,XK)
3 CONTINUE
  GO TO (4,5),IC
```

```
4 CONTINUE
  CALL CNTU (G1,G2,Z1,Z2)
5 CONTINUE
  CALL INDO (X)
  CALL PAGE (X,1)
  DO 20 J=1,IPO
    CALL GRAF (III,X,1)
  DO 10 I=1,IPR
    CALL RUKU (X,DX)
    CALL AUGV (X,X,DT,DX)
  GO TO (6,7),IG
6 CONTINUE
  CALL GRAF (III,X,2)
7 CONTINUE
10 CONTINUE
  CALL GRAF (III,X,3)
  CALL PAGE (X,3)
20 CONTINUE
  CALL GRAF (III,X,4)
  CALL PAGE (X,5)
  GO TO 1
  END
```

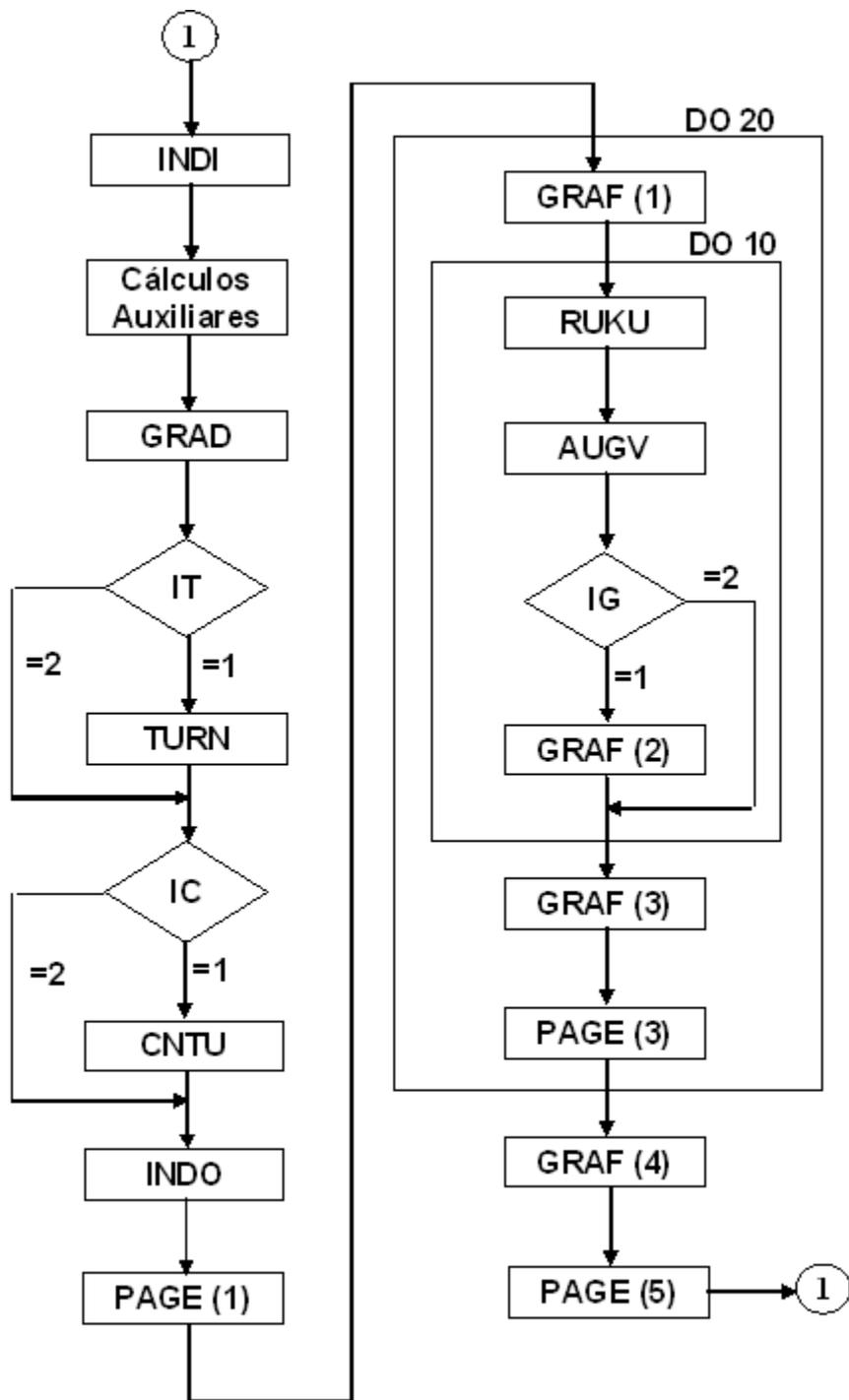


Diagrama de flujo del programa principal

Capítulo 4

Algunos ejemplos de configuraciones que pueden estudiarse con el método que estamos usando

En secciones anteriores hemos discutido el problema de dos centros de una manera muy general, ahora deseamos ver algunos casos concretos. El análisis se ha realizado en su mayor parte según los resultados de las curvas discutidas en la sección (I.5.1). Entre los ejemplos que más llaman la atención están los dipolos eléctrico y magnético. El primer caso, en ausencia de cargas magnéticas es completamente separable pero su solución completa no es muy clara en general, normalmente se estudian órbitas en un plano y aun así las soluciones no resultan particularmente simples; para tres dimensiones es un poco más complicado el problema y la mayoría de los tratamientos solamente llegan a establecer las expresiones para las integrales del movimiento, ese es el caso, por ejemplo del libro de Whittaker [7]. Hay un tratamiento más completo en el libro de Pars [9] usando mecánica lagrangiana, pero las soluciones tampoco son lo suficientemente simples. Max Born [14] y Corben [15] estudian el problema usando mecánica hamiltoniana y utilizando coordenadas elipsoidales. El tratamiento de Pauli discutido en el libro de Max Born es bastante cualitativo mientras que Corben resuelve las integrales para casos en que el problema se reduce a sistemas más simples; también, para dos centros, hay un estudio muy completo, posiblemente el trabajo más completo en ese problema y corresponde a una serie de artículos publicados por Tallqvist [9].

Actualmente existe poco interés en este problema desde un punto de vista clásico, debido a que en mecánica cuántica es demasiada complicada la teoría de integrales de acción y ángulo. El libro de Max Born fue escrito en la época de la mecánica cuántica vieja, y estaba conectado con las reglas de cuantificación de Sommerfeld-Wilson pero debido a que la teoría de Bohr no explica ciertos efectos en las líneas espectrales se abandonó ese tipo de tratamientos. La dificultad es que a ese nivel no puede despreciarse la interacción

de un electrón con los restantes en la nube electrónica.

En astronomía, posiblemente haya algún interés, en conexión con el estudio de las estrellas dobles, pero como para tales sistemas los dos centros no están fijos sino que giran alrededor de un centro común (centro de masas) el problema no es tan simple; sin embargo, con una buena aproximación y para tiempos cortos, puede tratarse el caso de satélites alrededor de un planeta, tomando como centros al sol y al planeta mismo.

En el caso de dos cargas magnéticas podemos hablar aproximadamente de un dipolo magnético aunque tal configuración no es posible, debido a que dos monopolos nunca se atraen. Sin embargo, si nos olvidamos de nuestra fuerza repulsiva entre monopolos, podemos tratar el caso del dipolo magnético. Tómese en cuenta siempre que, para separar el hamiltoniano, se le adicionó a éste un potencial centrífugo repulsivo, así que nuestros resultados no serán precisamente iguales a los que se obtienen sin recurrir a dicho truco, aunque para grandes distancias del origen este término va perdiendo importancia y puede considerarse como una perturbación, cuyo efecto consiste en dar una trayectoria que atenúa en cierto modo las formas rizadas típicas de las partículas que se mueven en campos magnéticos, aunque eso no lo hemos demostrado, pero puede verse en los ejemplos la diferencia que existe entre las curvas cuando se incluye el potencial repulsivo y cuando no se le considera.

Los tratamientos comunes sobre el dipolo magnético son motivados fundamentalmente por el estudio de partículas cargadas en el campo magnético de la Tierra. En ese sentido están orientados los trabajos de Störmer, Sandoval Vallarta y otros sobre dicho problema. En esos trabajos no se usa una formulación hamiltoniana, sino que se emplean métodos vectoriales. El estudio analítico del problema llega siempre a un punto en que se requieren métodos numéricos debido a la complejidad de las ecuaciones diferenciales; en general nunca se ha resuelto el problema completamente, sino que se le separa en diferentes casos particulares. Hay un trabajo reciente publicado por Martín Brown de la Universidad de New York [6] donde se ataca el problema del movimiento de partículas en campo magnético, y se incluye como un caso particular el problema de Störmer. Este es uno de los trabajos donde se usa mecánica hamiltoniana y las coordenadas que se emplean son las cilíndricas.

Sobre los trabajos de Störmer, aún cuando hay numerosos artículos, en su libro “The Polar Aurora” [5] resume lo más importante de su estudio, el libro incluye también fotografías de experimentos realizados con su Terrella. Por lo que respecta a los trabajos de Sandoval Vallarta, hay un resumen en un volumen *Handbuch der Physik* [16].

Como casos reducidos del problema de dos centros se tiene también el problema de Kepler y el problema del monopolo magnético. El primero es bastante conocido y puede consultarse cualquier libro de mecánica clásica, por ejemplo, el libro de Goldstein [1]. Acerca del monopolo magnético, la literatura no es muy abundante por lo que respecta al tratamiento del problema desde un punto de vista clásico; hemos hablado ya en otra parte del trabajo de Poincaré [17]; hay también un artículo de Darboux [18]; hay una discusión breve en el libro de B. Lehnert [19]. Como caso particular el problema de un centro en el que colocamos una combinación de carga eléctrica y magnética, como ya hemos dicho en otra sección.

4.1 Dos cargas magnéticas

Partículas Atrapadas (Energías Positivas)

Deseamos saber si es posible que existan estados ligados con energías positivas en el caso del dipolo magnético. Para eso encontramos que hay dos configuraciones posibles de las curvas que dependen de ξ ; lo que debe tenerse en ambos casos es que la recta para energía nula deber estar comprendida entre la asíntota horizontal tangente al mínimo de la curva. Una configuración es la siguiente:

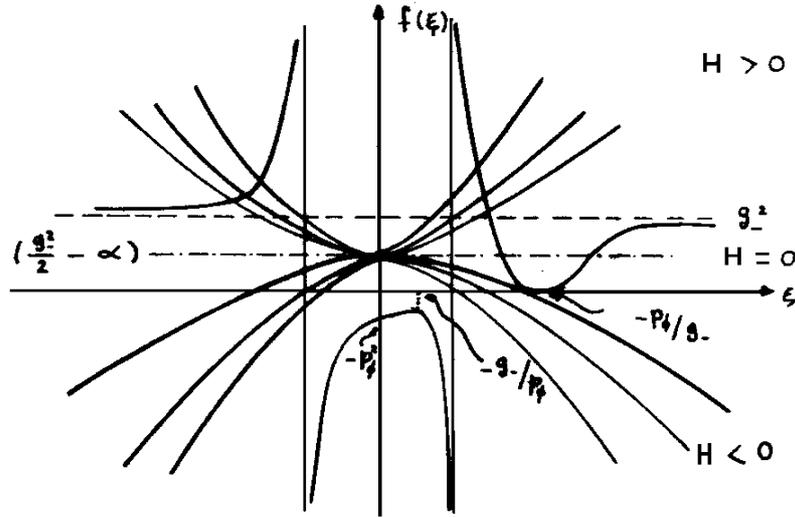


Figura 4.1:

Para esta configuración debe cumplirse que

$$-\frac{p_\phi}{g_-} > 1 \quad \rightarrow \quad p_\phi^2 > g_-^2 \quad \rightarrow \quad p_\phi^2 > \frac{g_-^2}{2}$$

Esta es la condición para que el cero de la función esté localizado en algún valor $\xi > 1$.

La recta que define el cero de la energía debe satisfacer la condición

$$0 \leq \frac{g_+^2}{2} - \alpha \leq g_-^2 \quad \rightarrow \quad -\frac{g_-^2}{2} \leq -\alpha \leq \frac{g_-^2}{2}$$

Para la variable η cualquier solución con sentido físico debe cumplir con la condición de que la recta que define el cero de la energía interseca la rama inferior de la otra curva. Entonces, siempre se debe exigir que se cumpla la desigualdad:

$$\frac{g_+^2}{2} - \alpha \leq p_\phi^2$$

Para el dipolo magnético g vale cero, entonces

$$-\alpha \leq -p_\phi^2 \quad \rightarrow \quad \alpha \geq p_\phi^2$$

Las condiciones para ξ y para η deberán cumplirse simultáneamente. Es decir, que para la configuración de las curvas de que estamos considerando debemos tener:

$$p_\phi^2 > \frac{g^2}{2} \tag{1}$$

$$|\alpha| \leq \frac{g^2}{2} \tag{2}$$

$$\alpha \geq p_\phi^2 \tag{3}$$

Con (1), (2) y (3) podemos formar otra desigualdad:

$$\alpha \geq p_\phi^2 > \frac{g^2}{2} \geq \alpha \tag{4}$$

(4) resulta ser una contradicción, de donde concluimos que para la configuración que hemos elegido no puede haber partículas atrapadas.

Nos queda todavía ver la otra configuración, la cual consiste en que el cero de la función está en el intervalo $(-1, 1)$ y que el mínimo esta situado del lado derecho. La configuración de las curvas se ilustra en la siguiente figura

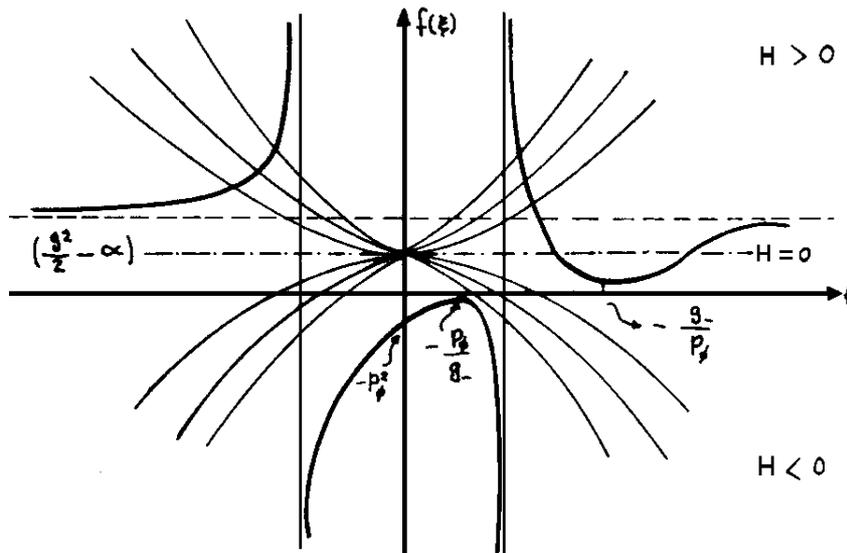


Figura 4.2:

El valor de la función en el punto $-\frac{g_-}{-p_\phi}$ es

$$\frac{(p_\phi + g_- \xi_{ext})^2}{\xi_{ext}^2 - 1} = \frac{(p_\phi + g_- [-\frac{g_-}{p_\phi}])^2}{\frac{g_-^2}{p_\phi^2} - 1} = g_-^2 - p_\phi^2$$

Entonces, para $H = 0$, deberá cumplirse la desigualdad

$$g_-^2 - P_\phi^2 \leq \frac{g_-^2}{2} - \alpha \leq g_-^2$$

por lo tanto

$$\frac{g_-^2}{2} - p_\phi^2 \leq -\alpha \leq \frac{g_-^2}{2}$$

Además, debe cumplirse que

$$-\frac{g_-}{p_\phi} > 1 \quad \longrightarrow \quad g_-^2 > p_\phi^2$$

Por lo tanto se tienen tres condiciones para la configuración que hemos tomado:

1. $\frac{g_-^2}{2} - p_\phi^2 \leq -\alpha \leq \frac{g_-^2}{2}$
2. $g_-^2 > p_\phi^2$
3. $\alpha \geq p_\phi^2 \quad \text{ó} \quad -\alpha \leq -p_\phi^2$

Podemos formar la desigualdad

$$\frac{g_-^2}{2} - p_\phi^2 \leq -\alpha \leq -p_\phi^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{g_-^2}{2} \leq p_\phi^2 - \alpha \leq 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{g_-^2}{2} \leq 0$$

Nuevamente hemos llegado a una contradicción por lo que concluimos que en ningún caso la separación de las variables nos lleva a partículas atrapadas con energía positiva. Debemos recordar que la separación se consiguió sumando un potencial repulsivo a la hamiltoniana. Podemos decir que por lo menos, la adición de un potencial de ese estilo conduce a que no haya el tipo de trayectorias como las que hemos buscado.

4.2 Energías negativas

Para energías positivas no hemos encontrado partículas atrapadas, veamos las condiciones que deben cumplirse para que haya trayectorias ligadas (si las hay) con energías negativas, escribiremos la forma que deben tener las ecuaciones (3) de la página 15.

$$h\xi + \left(\frac{g_-^2}{2} - \alpha \right) = \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{\xi^2 - 1}$$

$$h\eta^2 + \left(\frac{g_+^2}{2} - \alpha\right) = \frac{(p_\phi + g_+\eta)^2}{\eta^2 - 1}$$

para las curvas de ξ hay dos posibilidades, dependiendo de si $-p_\phi/g_- > 1$ ó $-p_\phi/g_- < 1$. Sabemos que dicha cantidad corresponde al cero de la función y que su valor determina si la curva toca al eje horizontal dentro del intervalo $(-1, 1)$ o fuera de él. El estudio del movimiento se hace de la misma manera que se ha hecho anteriormente.

Caso 1.- consideramos primero para ξ la posibilidad $-p_\phi/g_- > 1$. Tendremos entonces $p_\phi^2 > g_-^2$. Debe pedirse como en casos anteriores, que la intersección de la parábola con el eje vertical sea positiva o cero, es decir:

$$\frac{g_-^2}{2} - \alpha \geq 0 \quad \longrightarrow \quad g_-^2 \geq 2\alpha$$

Las condiciones para η son del mismo tipo, hay dos posibilidades: $-p_\phi/g_+ > 1$ y $-p_\phi/g_+ < 1$ veremos enseguida la primera, es decir $-p_\phi/g_+ > 1$, que es equivalente a $p_\phi^2 > g_+^2$.

El valor de la función S_2 en el punto $-g_+/p_\phi$ (valor extremo) es $g_+^2 - p_\phi^2$ y ese valor debe ser menor o igual a la intersección de la parábola con el eje vertical, es decir:

$$\frac{g_+^2}{2} - \alpha \leq g_+^2 - p_\phi^2 \quad \rightarrow \quad p_\phi^2 \leq \alpha + \frac{g_+^2}{2} \quad \rightarrow \quad 2\alpha \geq 2p_\phi^2 - g_+^2 = p_\phi^2 + p_\phi^2 - g_+^2 > p_\phi^2$$

Así, tenemos que

$$2\alpha > p_\phi^2$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} p_\phi^2 &> g_-^2 \\ g_-^2 &\geq 2\alpha \\ p_\phi^2 &> g_+^2 \\ p_\phi^2 &< 2\alpha \end{aligned}$$

En estas relaciones, tomando la segunda y la cuarta tendremos:

$$g_-^2 \geq 2\alpha > p_\phi^2$$

Es decir:

$$g_-^2 > p_\phi^2$$

Esta es una contradicción con la primera y por lo tanto descartamos el caso 1.

Caso 2.- Tomemos ahora la segunda posibilidad para η a saber: $-p_\phi/g_+ < 1$ es decir $p_\phi^2 < g_+^2$. Tomaremos aquí para la variable ξ las mismas posibilidades que en el caso anterior. La intersección de la parábola con el eje vertical debe ser ahora negativa o cero:

$$\frac{g_+^2}{2} - \alpha \leq 0 \quad \longrightarrow \quad g_+^2 \leq 2\alpha$$

Resumiendo, se tiene

$$\left. \begin{array}{l} p_\phi^2 > g_-^2 \\ p_\phi^2 < g_+^2 \end{array} \right\} \quad g_-^2 < p_\phi^2 < g_+^2 \quad \rightarrow \quad g_-^2 < g_+^2$$

$$\left. \begin{array}{l} g_-^2 \geq 2\alpha \\ g_+^2 \leq 2\alpha \end{array} \right\} \quad g_-^2 \geq 2\alpha \geq g_+^2 \quad \rightarrow \quad g_-^2 > g_+^2$$

Llegamos a una contradicción y por lo tanto descartamos el caso 2.

Caso 3.- Combinaremos ahora la segunda posibilidad para ξ con la primera para η .

Para ξ se tiene: $-p/g_- < 1 \rightarrow p_\phi^2 < g_-^2$

El valor de la función en el punto $-g_-/p_\phi$ es $g_-^2 - p_\phi^2$

Debemos tener por consiguiente:

$$\frac{g_-^2}{2} - \alpha \geq g_-^2 - p_\phi^2 \quad \rightarrow \quad p_\phi^2 \geq \alpha + \frac{g_+^2}{2}$$

$$2\alpha \leq 2p_\phi^2 - g_+^2 = p_\phi^2 + p_\phi^2 - g_+^2$$

$$2\alpha \leq p_\phi^2 + p_\phi^2 - g_+^2 < p_\phi^2$$

$$2\alpha < p_\phi^2$$

Eso porque $p_\phi^2 - g_+^2 < 0$

Las condiciones para η ya se encontraron en el caso 1, entonces tendremos:

$$\begin{aligned} p_\phi^2 &< g_-^2 \\ p_\phi^2 &< g_+^2 \\ p_\phi^2 &< 2\alpha \\ 2\alpha &< p_\phi^2 \end{aligned}$$

llegamos a una contradicción y tenemos descartado el caso 3.

Caso 4.- Nos queda el último caso que consiste en tomar la segunda posibilidad para ξ con la segunda para η . Hemos encontrado en los casos 2 y 3 las condiciones que deben cumplirse para las dos posibilidades mencionadas (en el 2 para η y en 3 para ξ); las relaciones que mencionamos son:

$$\begin{aligned} p_\phi^2 &< g_-^2 \\ p_\phi^2 &< g_+^2 \\ p_\phi^2 &> 2\alpha \\ g_+^2 &\leq 2\alpha \end{aligned}$$

combinando la segunda con la cuarta se tiene:

$$p_\phi^2 < g_+^2 \leq 2\alpha \quad \rightarrow \quad p_\phi^2 < 2\alpha$$

Esto está en conflicto con la tercera relación, entonces lo que encontramos que también hay que descartar el cuarto caso.

Conclusión de todo lo anterior:

No se puede encontrar trayectorias ligadas cuando la carga en los dos centros es puramente magnética.

4.3 Estudio del movimiento considerando únicamente cargas eléctricas.

Ya vimos lo que ocurre cuando se consideran cargas magnéticas únicamente, ahora vamos a ver el movimiento cuando existen solamente cargas eléctricas en nuestro problema. La forma de nuestras funciones será la misma, pero ahora los términos que contienen factores de g_+ y g_- son cero, tendremos por consiguiente

$$\begin{aligned} f_1 &= h\xi^2 - \varepsilon_+\xi - \alpha \\ f_2 &= \frac{p_\phi^2}{\xi^2 - 1} \\ s_1 &= h\eta^2 + \varepsilon_-\eta - \alpha \\ s_2 &= \frac{p_\phi^2}{\eta^2 - 1} \end{aligned}$$

Como no hay términos de origen magnético las curvas correspondientes a f_2 y s_2 serán exactamente iguales y además se tendrá simetría completa por tener sólo términos cuadráticos en sus variables correspondientes. Lo que hay que hacer en cada caso es un estudio de las raíces dentro de los rangos en que cada variable tiene significado físico, como lo hemos venido haciendo en otros casos.

Ahora, el parámetro α nos da las intersecciones con el eje vertical de las parábolas f_1 y s_1 con el eje vertical, aunque ambas familias no son idénticas por la presencia de los parámetros ε_+ y ε_- .

Las intersecciones de f_2 y s_2 con el eje horizontal vendrán dadas por

$$\frac{\varepsilon_+ \pm \sqrt{\varepsilon_+^2 + 4h\alpha}}{2h}$$

y por

$$\frac{-\varepsilon_- \pm \sqrt{\varepsilon_-^2 + 4h\alpha}}{2h}$$

respectivamente y la posición de los vértices será en cada caso

$$\left(\frac{\varepsilon_+}{2h}, -\frac{\varepsilon_+^2}{4h} - \alpha \right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{\varepsilon_-}{2h}, \frac{\varepsilon_-^2}{4h} - \alpha \right)$$

En este caso nos damos cuenta rápidamente que los estados ligados corresponden siempre a energías negativas, además para tener soluciones con significado físico en — debemos tener que — debe ser negativa, otra cosa que debemos pedir para esta variable es que la pendiente de la energía cero debe ser positiva, es decir

$$-\varepsilon_+ > 0$$

o sea

$$-(z_1 + z_2) > 0$$

Eso implica que al menos uno de los dos centros debe ser atractivo y además predominante; si los dos centros son atractivos la desigualdad anterior se cumple siempre y entonces hay problema, no importará mucho que valores tengamos para z_1 y z_2 .

Por lo que respecta a las curvas para η sólo nos interesan intersecciones que esten dentro del rango $(-1, 1)$ y serán posibles las siguientes configuraciones Figura 4.3.

El análisis posterior para dicha variable podemos basarlo en ver lo que pasa con la Figura 4.3 b) para lo cual se requiere que el vértice de la parábola coincida con un punto de la curva s_2 dentro del intervalo $(-1, 1)$. Como el valor de η para el vértice viene dado como $-\varepsilon_-/2h$, entonces el valor de s_1 en ese punto será

$$h \left(-\frac{\varepsilon_-}{2h} \right)^2 + \varepsilon_- \left(-\frac{\varepsilon_-}{2h} \right) - \alpha = \frac{\varepsilon_-^2}{4h} - \frac{\varepsilon_-^2}{2h} - \alpha = -\frac{\varepsilon_-^2}{4h} - \alpha$$

por lo tanto

$$s_1 \left(-\frac{\varepsilon_-}{2h} \right) = -\frac{\varepsilon_-^2}{4h} - \alpha$$

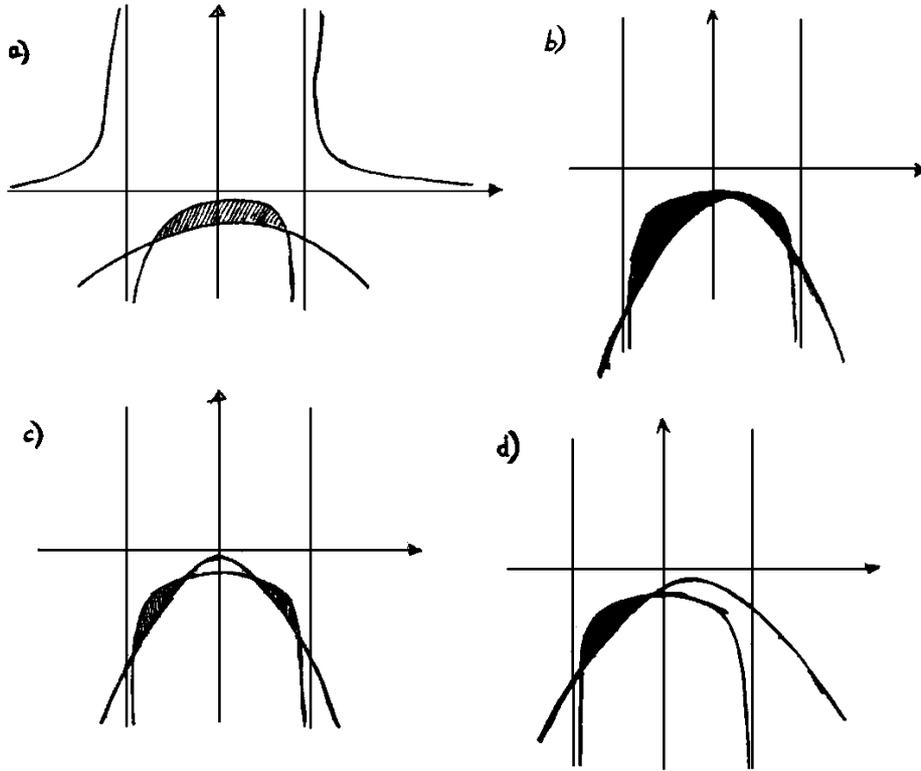


Figura 4.3:

Quedamos entonces en que la condición de tangencia es que se igualen los valores de s_1 y s_2 en el punto que estamos considerando, por lo tanto calcularemos ahora el valor de s_2

$$s_2 \left(-\frac{\varepsilon_-}{2h} \right) = \frac{p_\phi^2}{\varepsilon_-^2/4h^2 - 1} = \frac{p_\phi^2 4h^2}{\varepsilon_-^2 - 4h^2} = \frac{(2p_\phi h)^2}{\varepsilon_-^2 - 4h^2}$$

Para asegurarnos de que se trata del intervalo $(-1, 1)$ debemos pedir que el denominador sea negativo, es decir

$$\varepsilon_-^2 < 4h^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\varepsilon_-}{2h} \right)^2 < 1$$

por consiguiente

$$-1 < \frac{\varepsilon_-}{2h} < 1$$

eso es lo que deseamos, que el vértice de la parábola esté entre las rectas $\eta = -1$ y $\eta = 1$. Además, no se olvide que necesitamos que h tome valores negativos.

Hemos pedido mas arriba que se cumpla la igualdad $s_1 = s_2$ sin embargo, tendremos otros casos para las relaciones $s_1 < s_2$ y $s_1 > s_2$, tendremos por consiguiente, tres posibi-

lidades, a saber:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_-^2}{4h} - \alpha &< \frac{(2p_\phi h)^2}{\varepsilon_-^2 - 4h^2} \\ -\frac{\varepsilon_-^2}{4h} - \alpha &= \frac{(2p_\phi h)^2}{\varepsilon_-^2 - 4h^2} \\ -\frac{\varepsilon_-^2}{4h} - \alpha &> \frac{(2p_\phi h)^2}{\varepsilon_-^2 - 4h^2} \end{aligned}$$

La primera relación corresponde a los casos que representamos por la Figura 4.3 a) y vale para órbitas que comprenden a los dos centros.

La segunda relación es para partículas que pueden girar alternadamente en uno o en el otro centro describiendo trayectorias en forma de ocho o algo por el estilo, eso depende del valor que tenga.

Finalmente, la tercera es para casos como los que representan en las Figuras 4.3 c) y d), estos dos últimos casos son fáciles de distinguir cuando el momento p_ϕ es nulo, lo cual es equivalente a tener el movimiento en un plano. La diferencia consistiría en que para un caso, las raíces de la parábola estuvieran dentro del rango $(-1, 1)$ y para el otro, una de esas raíces estaría fuera de dicho rango. En caso de que p_ϕ no sea cero, el procedimiento es semejante, pero es menos directo porque depende también de la energía que es la que determina el lado recto de la parábola y no lo haremos aquí porque nuevamente surge el problema de tratar con un polinomio de cuarto grado.

Capítulo 5

Conclusiones.

En esta tesis se logró separar variables recurriendo a un artificio matemático que consiste en sumar a la función Hamiltoniana un potencial repulsivo de la forma $1/r^2$. En principio el problema queda resuelto y puede hacerse un estudio sobre las órbitas en términos de variables de acción y ángulo; sin embargo, es necesario utilizar integrales elípticas para las que es preciso factorizar un polinomio de cuarto grado y ya se discutió qué dificultades presenta su tratamiento. Como consecuencia de éso, un estudio del movimiento en los términos que se hizo aquí, presenta algunas limitaciones. Además, el hecho de mantener fija la distancia entre los dos centros no permite reducir el problema a casos semejantes a los efectos Stark, Zeeman, etc., los cuales pueden resultar más simples.

Respecto a la parte numérica, debemos hacer la observación que en todos los ejemplos que obtuvimos se utilizaron diferentes valores para el incremento durante la integración numérica y no hubo nunca una diferencia notable en los resultados, por lo que no tuvimos problemas con la estabilidad, eso, por supuesto no significa que no sea necesario un estudio más a fondo sobre las ecuaciones diferenciales, no se hizo ningún estudio acerca de la estabilidad en las ecuaciones diferenciales. Esto es importante porque en todos los problemas resueltos numéricamente va implícito un error de truncamiento, la computadora introduce al mismo tiempo un error de redondeo en los cálculos. Sin embargo, eso no fue el propósito de nuestra tesis, aunque en un estudio más completo no pueden omitirse esos detalles.

En la referencia número 21 se hacen consideraciones acerca de cuáles son los incrementos óptimos en cada punto, tomando como criterio la curvatura de las trayectorias. A pesar de lo que hemos dicho, pueden estudiarse varias posibilidades de las que ya se habló a lo largo de la exposición; por ejemplo, el problema de Kepler, combinaciones de cargas eléctricas y magnéticas en un centro, etc.

La parte que nos da mayor información es el estudio de las funciones f_1 , f_2 , s_1 y s_2 , definidas en la sección I.5.1, y sobre las que se insistió bastante a lo largo de la exposición. El estudio de sus gráficas tiene la ventaja de que permite formarse una idea cualitativa acerca de la importancia de cada uno de los parámetros en el movimiento.

Aunque la separación de variables no es posible cuando se excluye el potencial repul-

sivo, existe la posibilidad de obtener diferentes trayectorias utilizando los mismos métodos numéricos que se emplearon en el presente trabajo. De hecho, hemos incluido un apéndice donde se modifican los programas para considerar dicha posibilidad.

Por otra parte, una de nuestras preocupaciones ha sido la de presentar el material de tal manera que pueda servir como ilustración de cómo atacar problemas en mecánica Hamiltoniana, utilizando como herramienta importante las computadoras.

Se espera que sea de utilidad.

Apéndice A

Discusión del programa PRYPO

En otra sección se habló ya de la subrutina PRYPO como parte del programa TWOC. Sin embargo, debido a la poca flexibilidad que se tiene al manejarla dentro de un programa con otras opciones, se ha preferido usarla como un programa independiente el cual tiene a su vez diferentes posibilidades.

Este programa calcula y grafica las funciones f_1 , f_2 , s_1 y s_2 discutidas en la página 15, en su versión más completa, está escrito en FORTRAN para la computadora PDP-10. Además se obtienen gráficas para la región permitida y la region excluida del movimiento. Otra cosa que se grafica aquí son los niveles de energía potencial constante usando el potencial completo, en tanto que en CNTU se ven los efectos del potencial electrostático y la parte centrífuga del potencial.

Entre los parámetros que usa PRYPO están algunos de los usados por TWOC y otros que iremos discutiendo a su tiempo.

Una cosa importante de este programa es el hecho de que pueden calcularse los valores de los momentos p_ξ y p_η como vienen expresados en las ecuaciones (I-4-15) y (1-4-16). Los valores de los coeficientes de dichos polinomios están determinados por los parámetros que usan.

Eso permite obtener valores iniciales para alguna región deseada según los resultados de PRYPO, valores que podrán usarse como datos del programa TWOC.

En diferentes partes del programa se hace uso de la subrutina PAG elaborada por Carlos García Jurado [20], la cual simula en cierto modo las instrucciones para usar el disco de la computadora 1130 que ya discutimos con anterioridad. El funcionamiento de PAG es muy simple pero requiere una explicación, las tareas de dicha subrutina son tres: limpiar una página, cargar un punto e imprimir una línea, para ese efecto la manera de llamarla es la siguiente:

```
CALL    PAG    (ARREGLO): para limpiar
CALL    GRAFI  (Columna, Renglon, IHSimbolo, Arreglo
                para cargar un punto.)
```

Como para imprimir la página lo hacemos línea por línea, es necesario hacerlo dentro de un ciclo definido por la instrucción DO por ejemplo.

```

DO 775 I=1,52
CALL IMPRE (I,III,JII)
775 PRINT 100,JII
100 FORMAT (1X,120A1)

```

III es un arreglo de 600 palabras y corresponde a la imagen completa de una página (60 renglones y 120 columnas); JII es el arreglo donde guardamos la imagen de una línea y tiene 120 palabras (120 columnas). Ambos arreglos se definen en el programa principal.

La ventaja de usar la subrutina PAG consiste en que almacena doce caracteres por palabra, lo que permite ahorrar gran cantidad de memoria. Otra ventaja es la de poder imprimir el número de renglones deseado, no necesariamente sesenta.

Ahora, de la misma manera que lo hicimos con TWOC discutiremos las diferentes subrutinas auxiliares de PRYPO y hasta el final vamos a discutir el programa principal.

A.1 Subrutina POLN

Esta subrutina es la más sencilla y su papel consiste en calcular un polinomio de cuarto grado para la variable ξ ó para η según que el valor del índice IP sea 1 ó 2; en AZ se guarda el valor del polinomio, en ξ y en BZ el de η .

```

C *****
C *
C * LA SUBROUTINA "POLN" CALCULA UN POLINOMIO DE CUARTO GRADO *
C * Y HACE UN INDICADOR IGUAL A UNO CUANDO ES NEGATIVO *
C * *
C *****
SUBROUTINE POLN (IP,Y,A,B,C,D,E,)
COMMON AZ,BZ,X,IXIN,IETN,III,(600),JJJ(600),H,ALFA,PFI,G1,G2,Z1,Z2,
@ EPP,EPM,GMI,GPL,JII(120)
DIMENSION AA(5)
AA(1)= A
AA(2)= B
AA(3)= C
AA(4)= D
AA(5)= E
POL= AA(1)
DO 3 I=2,5
POL=POL*Y+AA(I)
3 CONTINUE
GO TO (4,5),IP
4 AZ=POL
IF (AZ.LT.0.) IXIN=1

```

```

      AZ= ABS(AZ)
      AZ=SQRT(AZ)
      GO TO 6
5     BZ=POL
      IF (BZ.LT.0.) IETN=1
      BZ=ABS (BZ)
      BZ=SQRT(BZ)
6     RETURN
      END

```

Como las expresiones de los momentos son en términos de la raíz del polinomio entonces preguntamos por el signo de éste para saber si la expresión de p_ξ o p_η es imaginaria. En cualquier caso se toma el valor de la raíz para ser utilizado en otro lado. La manera de calcular un polinomio se discutió ya cuando vimos la subrutina TURN del programa TWOC y no insistiremos en ese método.

No hay más que explicar de esta subrutina.

A.2 Subrutina CALCA

Ya hablamos de esta subrutina también anteriormente y no difiere grandemente de la misma versión para la 1130, sólo que aquí está un poco más depurada. Sus argumentos son K, IR, A, B, C, D y E; en seguida veremos cual es el papel que les corresponde:

- IR: indica si se trata de las curvas para las funciones de ξ o de las de η , se toma los valores de 1 y 2 y según sea el caso sirve para decidir si se carga un símbolo en el arreglo III o en el JJJ los cuales son declarados en común.
- K: es un indicador que determina en que columna se carga el punto, el el renglón dependerá del valor que tenga la función si recordamos que las funciones que deseamos graficar son del tipo

$$Ax^2 + Bx + C$$

$$\frac{(D + Ex)^2}{x^2 - 1}$$

Entonces vemos porqué se definen los parametros mudos: A, B, C, D, E.

```

C *****
C *
C * LA SUBROUTINA CALCA CALCULA TRES FUNCIONES Y CARGA PUNTOS EN *
C * ARREGLOS RESPECTIVOS PARA FORMAR GRAFICAS *
C *
C *****

```

```

SUBROUTINE CALCA (IR,K,A,B,C,D,E,)
COMMON AZ,BZ,X,IXIN,IETN,III(600),JJJ(600),H,ALFA,PFI,G1,G2,Z1,Z2,
@ EPP,EPM,GMI,GPL,JII(120)
X2=X*X
XXI=X2-1.
F=B*X+C
F=2*F
IIF=25-IFIX (F)
IF (IIF.LT.1) IIF=1
IF (IIF.GT.50) IIF=50
GO TO (5,6) ,IR
5 CALL GRAFI (K,IIF,1H.,III)
GO TO 7
6 CALL GRAFI (K,IIF,1H.,JJJ)
7 F=F/2.+A*X2
F=2*F
IEF=25-IFIX (F)
IF (IEF.LT.1) IEF=1
IF (IEF.GT.50) IEF=50
GO TO (10,20),IR
10 CALL GRAFI (K,IEF,1H+,III)
GO TO 25
20 CALL GRAFI (K,IEF,1H+,JJJ)
25 G=(D+E*X)*(D+E*X)
IF (ABS(G).GT.(500.*(ABS(XXI)))) GO TO 40
G=G/XXI
G=2.*G
IG=25-IFIX(G)
IF (IG.LT.1) IG=1
IF (IG.GT.50) IG=50
GO TO (30,35),IR
30 CALL GRAFI (K,IG,1H-,III)
GO TO 40
35 CALL GRAFI (K,IG,1H-,JJJ)
40 RETURN
END

```

En esta subrutina, X es el valor de la variable, está en común y se hace variar desde el programa principal, después veremos cómo.

En seguida de eso, entender cómo funciona la subrutina ya no es difícil; primero se calcula el valor de la recta de energía cero y su símbolo en las gráficas corresponde a un punto. Ya vimos como se cargan los puntos usando la instrucción GRAFI de la subrutina de García Jurado. Después de cargar la recta, se le adiciona a la función el término Ax^2 y tendremos así una parábola a la que vamos a representar con el símbolo (+). Con la otra función, el procedimiento es el mismo pero preguntamos si el numerador no es mucho muy grande comparado con el denominador (aunque el número 500 no es precisamente grande

como para causar problemas pero no tiene caso usar uno mayor en nuestro problema) y evitar sobreflujo; esta función la representaremos con el signo menos (-).

Como siempre, se tiene la precaución de que el valor de la función no se salga del rango de graficación, para evitar problemas con los arreglos, aunque aquí no es obligatorio porque la subrutina PAG está protegida para evitar ese tipo de error. Con eso puede ya entenderse la subrutina CALCA.

A.3 Subrutina REGP

Esta subrutina es propiamente dos subrutinas fundidas en una sola, pero hemos preferido construirla así porque nos ahorra un poco de trabajo, una de sus tareas consiste en obtener una gráfica para ver cuál es la región donde puede moverse una partícula, según los valores que tengan los parámetros que definen su movimiento. La región permitida aparece en blanco; el área sombreada es prohibida. La manera de hacerlo es bastante simple (pero si no la explicamos no se entiende) y es la siguiente: Se calculan los valores de ξ y de η en cada punto y una vez hecho eso, calculamos el polinomio de cuarto grado que define al momento, eso para cada variable;

```

C *****
C *
C * LA SUBROUTINA "REGP" SIRVE PARA GRAFICAR LA REGION PERMITIDA Y LA *
C * REGION PROHIBIDA EN EL PROBLEMA DE DOS CENTROS, ADEMÁS PUEDE *
C * CALCULAR LOS NIVELES DE ENERGIA POTENCIAL CONSTANTE *
C *
C *****
C SUBROUTINE REGP (IX)
COMMON AZ,BZ,X,IXIN,IETN,III(600),JJJ(600),H,ALFA,PFI,G1,G2,Z1,Z2,
@ EPP,EPM,GMI,GPL,JII(120)
DIMENSION IJK(120)
DO 10 I=1,50
DO 1 J=1,120
1 IJK(J)=1H
Y=(50-I)*0.08333
DO 11 J=1,120
Z=J*0.05-3.
S1=(Z+1.0)**2+Y*Y
S2=(Z-1.0)**2+Y*Y
R1=SQRT (S1)
R2=SQRT (S2)
XI=(R1+R2)/2.
ETA=(R1-R2)/2.
GO TO (20,30) ,IX
20 CONTINUE
IXIN=0
IETN=0
CALL POLN (1,XI,H,-EPP,-(GMI,*GMI/2.+H+ALFA),EPP-2.*PFI*GMI,GMI*GMI

```

```

@/2.-ALFA-PFI2)
  CALL POLN (2,ETA,H,EPM,-(H+ALFA+GPL*GPL/2.),-(EPM+2.*PFI*GPL),ALFA
@-PFI2-GPL*GPL/2.)
  IF ((IXIN.NE.1) .AND. (IETN.NE.1)) GO TO 4
  IJK(J)=1H-
  GO TO 5
4 IJK(J)=1H
5 IJK (40)=1H:
  IJK (60)=1HI
  IJK (80)=1H:
  GO TO 11
30 CONTINUE
  XI2=XI*XI
  ETA2=ETA*ETA
  XXI=XI2-1.
  EETA=1.-ETA2
  D=XI2-ETA2
  C1=(2.*PFI*GMI*XI+GMI*GMI*XI2)/(D*XXI)
  C2=(2.*PFI*GPL*ETA+GPL*GPL*ETA2)/(D*EETA)
  C3=PFI*PFI/(D*XXI)
  C4=PFI*PFI/(D*EETA)
  V1=Z1*Z1/R1+Z2*Z2/R2-G1*G1/S1-G2*G2/S2
  U=V1+C1+C2+C3+C4
  U=10.*U
  IF (U-10.) 21,21,43
21 IF (U+10.) 41,22,22
22 IF (U) 29,29,33
29 IF (U+0.5) 31,31,41
31 IF (U+1.) 32,32,11
32 U=U+1.
  GO TO 29
33 IF (U-0.5) 11,11,34
34 IF (U-1.) 43,43,35
35 U=U-1.
  GO TO 33
41 IJK(J)=1H-
  GO TO 11
43 IJK(J)=1H+
  IF (ABS(U).LT.0.07) IJK(J)=1H*
11 CONTINUE
  WRITE (3,320) IJK
320 FORMAT (1X,120A1)
10 CONTINUE
  IF (IX.GT.1) GO TO 73
  WRITE (3,350)
350 FORMAT ('/,20X,' LA REGION PROHIBIDA ES LA SOMBREADA, LA PARTICULA
@ PUEDE MOVERSE EN LA PARTE EN BLANCO')
73 CONTINUE
  WRITE (3,321)
321 FORMAT (1H1)

```

RETURN

después preguntamos por el signo del polinomio, eso lo decide el valor de los indicadores **IXIN** e **IETA**; cuando simultáneamente ambos son diferentes de la unidad, eso significa que la raíz del polinomio no resulta imaginaria y los momentos son reales, por lo tanto, en ese punto va a quedar un espacio en blanco; si alguno de los indicadores tiene el valor 1 su respectivo momento es imaginario y quedamos en que los dos momentos deben ser reales, siendo así ponemos en esa posición el símbolo menos (-) o tal vez otro que nos gusta más. Este proceso se repite para todos los puntos. Cuando se termina de imprimir la gráfica, se escribe un texto al pie de página (vea las gráficas) y regresa al programa.

La otra tarea que puede realizar la subrutina que estamos discutiendo es la de obtener una gráfica semejante a las que se realiza con **CNTU** del programa **TWOC**. El potencial que se usa en este programa es:

$$V = \frac{Z_1^2}{r_1} + \frac{Z_2^2}{r_2} - \left(\frac{g_1^2}{r_1^2} + \frac{g_2^2}{r_2^2} \right) - \frac{(p_\phi + g_- \xi)^2}{(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} + \frac{(p_\phi + g_+ \eta)^2}{(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2)}$$

Cuando no hay cargas eléctricas debemos tener el potencial equivalente al usado por Störmer [5] en el caso de las partículas en el campo magnético terrestre, aunque la expresión no sea la misma por el camino que hemos seguido nosotros.

El criterio para formar los contornos de energía potencial constante lo vimos ya al discutir la subrutina **CNTU** y **TWOC** y no lo volveremos a discutir aquí.

La subrutina **REGP** tiene solamente un argumento (**IX**) que es el que indica el tipo de tarea deseada, ese truco lo hemos usado ya muchas veces y como es sabido, el control se realiza mediante un **GO TO** computado y con eso queda explicado el papel de nuestra subrutina.

A.4 Programa principal

Esencialmente, el programa principal sirve para realizar algunos cálculos para ser utilizados en las llamadas a subrutinas, la entrada de datos y la condición de salida determinada por la variable **NU**, se realizan desde el programa principal. Desde aquí se limpian también las páginas donde ha de graficarse, colocándose también todos los ejes, quedando aquellos, listos para cargar puntos. En la lectura de datos, además de los parámetros dinámicos se leen ciertos valores para ξ y η donde queremos calcular los valores de p_ξ y p_η . El criterio para escoger ξ y η consiste en tomar valores para esas variables dentro de los rangos en que el movimiento es permitido, valores que pueden buscarse analizando los resultados que dan los programas **REGP**, las mismas gráficas de **PRYPO** o bien, los resultados de **TURN** en el programa **TWOC**. Como se calculan los valores absolutos del polinomio de cuarto grado y obtener después el valor de un movimiento, siempre aparecerá impreso algún valor para esa cantidad pero pondremos un texto para indicar los casos en que resulta imaginario, eso porque estamos variando diferentes parámetros dentro del programa según nos interese y las regiones donde puede ocurrir el movimiento van a depender de aquellos.

El rango de graficación está entre los límites (-5,5) para la variable independiente y vamos moviendonos hacia la derecha sumando cada vez un incremento que llamamos XINCR hasta ciento veinte veces eso se hace con un DO pequeñito que termina en la etiqueta número 15; para cada valor de la variable llamamos a la subrutina CALCA para cargar un símbolo si el valor del primer argumento es 1 se trata de las gráficas para la variable ξ , si vale dos la variable será η y ya vimos cómo en CALCA se lleva el control de dichas variables.

Nosotros queremos variar un parámetro y ver como van cambiando las curvas, eso lo logramos encimando las gráficas por lo que no limpiamos la página sino hasta haber obtenido una familia de curvas en un número que nos parezca más adecuado, estamos usando cinco curvas por página, podemos colocar las que queramos, pero cinco, son suficientes; una vez calculada toda la familia imprimimos la página. Otra cosa que se hace aquí, es llamar a REGP para ver cómo cambia la región permitida al variar el parámetro que estamos variando.

```

C
C *****
C *
C * EL PROGRAMA PRYPO SIRVE PARA OBTENER GRAFICAS QUE PERMITEN CONOCER *
C * LA REGION EN QUE PUEDE MOVERSE UNA PARTICULA EN EL PROBLEMA DE DOS *
C * CENTROS COULOMBIANOS; SU PAPEL ES EN CIERTO MODO SEMEJANTE AL QUE *
C * DESEMPEÑAN LAS SUBROUTINAS "CNTU" Y "TURN" DEL PROGRAMA "TWOC" *
C *
C *****
COMMON AZ,BZ,X,IXIN,IETN,III(600),JJJ(600),H,ALFA,PFI,G1,G2,Z1,Z2,
@ EPP,EPM,GMI,GPL,JII(120)
5 READ (2,300) NU,H,ALFA,PFI,G1,G2,Z1,Z2,XI,ETA
300 FORMAT (I1,7F10.0,2F4.0)
PFI2=PFI*PFI
IF (NU.EQ.0) GO TO 19
CALL PAG (III)
CALL PAG (JJJ)
DO 10 I=1,60
CALL GRAFI (48,I,1H:,III)
CALL GRAFI (48,I,1H:,JJJ)
CALL GRAFI (60,I,1HI,III)
CALL GRAFI (60,I,1HI,JJJ)
CALL GRAFI (72,I,1H:,III)
CALL GRAFI (72,I,1H:,JJJ)
10 CONTINUE
DO 11 J=1,120
CALL GRAFI (J,25,1H-,III)
CALL GRAFI (J,25,1H-,JJJ)
11 CONTINUE
CALL GRAFI (48,25,1H+,III)
CALL GRAFI (48,25,1H+,JJJ)
CALL GRAFI (60,25,1H+,III)
CALL GRAFI (60,25,1H+,JJJ)
CALL GRAFI (72,25,1H+,III)

```

```

CALL GRAFI (72,25,1H+,JJJ)
GMI=G1-G2
GPL=G1+G2
EPM=Z1-Z2
EPP=Z1+Z2
DO 18 K=1,5
IXIN=0
IETN=0
WRITE (3,310) H,ALFA,PFI,GMI,GPL,EPM,EPP
310 FORMAT(1X,'H = ',F6.3,' ALFA = ',F6.3,' PFI = ',F6.3,' GMI = ',F5.
@2,' GPL = ',F5.2,' EPM = ',F5.2,' EPP = ',F5.2,///)
CALL POLN (1,XI,H,-EPP,-(GMI*GMI/2.+H+ALFA),EPP-2.*PFI*GMI,GMI*GMI
@/2.-ALFA-PFI2)
CALL POLN (2,ETA,H,EPM,-(H+ALFA+GPL*GPL/2.),-(EPM+2.*PFI*GPL),ALFA
@-PFI2-GPL*GPL/2.)
IF (IXIN.EQ.1) WRITE (3,350)
350 FORMAT (40X,' EL MOMENTO PXI ES IMAGINARIO ')
IF (IETN.EQ.1) WRITE (3,400)
400 FORMAT (40X,' EL MOMENTO PETA ES IMAGINARIO ',/)
PETA=BZ/(1.-ETA*ETA)
PXI=AZ/(XI*XI-1.)
XINCR=0.0833333
X=-5.
DO 15 I=1,120
X=X+XINCR
CALL CALCA (1,I,H,-EPP,GMI*GMI/2.-ALFA,PFI,GMI)
CALL CALCA (2,I,H,EPM,GPL*GPL/2.-ALFA,PFI,GPL)
15 CONTINUE
CALL REGP (1)
H=H+1.5
18 CONTINUE
CALL REGP (2)
WRITE (3,250)
250 FORMAT (40X,'CURVAS PARA LA VARIABLE XI')
DO 775 I=1,52
CALL IMPRE (I,III,JII)
775 PRINT 100,JII
WRITE (3,410)
WRITE (3,550) G1,G2,Z1,Z2,XI,ETA,PXI,PETA,PFI
550 FORMAT (' G1= ',F6.2,' G2 = ',F6.2,' Z1 = ',F6.2,' Z2 = ',F6.2,' XI =
@',F6.2,' ETA = ',F4.2,' PXI = ',F4.2,' PETA = ',F4.2,' PFI V ',F4.2
@,///)
WRITE (3,600)
600 FORMAT (40X,' CURVAS PARA LA VARIABLE ETA')
DO 776 I=1,52
CALL IMPRE (I,JJJ,JII)
776 PRINT 100,JII
410 FORMAT (1H1)
100 FORMAT (1X,120A1)
GO TO 5

```

```
19 CALL EXIT  
END
```

Todo el proceso descrito anteriormente se realiza por un DO que termina en la etiqueta número dieciocho, el índice K no forma parte del cómputo y solamente sirve para hacer la interacción.

Todas las gráficas llevan encabezados o notas al pie de página donde se especifica de qué variable se trata y cuáles son los valores de los parámetros que ahí intervienen. Se explicó al principio de qué manera se usa la subrutina PAG de García Jurado y con eso creemos haber explicado todo lo necesario para entender el programa.

Apéndice B

Consideraciones para ver los efectos de omitir el potencial repulsivo

Hemos dicho ya muchas veces que para poder separar la hamiltoniana se le suma un potencial repulsivo y ese ha sido el tema de casi todo lo que hemos hecho a lo largo de nuestro trabajo; pero como las ecuaciones diferenciales que resultan por el hecho de omitir dicho potencial no afectan el método de integración, podemos usar todavía el programa TWOC modificandolo, alternando las subrutinas que no sean convenientes y omitiendo las que no den ya ninguna información; viendo todo con calma, sólo hay que modificar la subrutina GRAD y hacer ajustes en el programa principal; podemos alterar CNTU lo que no tiene caso porque en REGP del programa PRYPO consideramos ya esos cambios; al fin de cuentas, nos importa ver cómo son las trayectorias y cómo resultan las curvas para las coordenadas en función del tiempo. No tenemos interés en los resultados de TURN porque los cálculos que realiza dependen de la separación, tampoco nos interesa la constante α por las mismas razones. Por fin de cuentas sólo hay que alterar la subrutina GRAD sumando al hamiltoniano el término

$$V_r = \frac{g_1^2}{r_1^2} + \frac{g_2^2}{r_2^2}$$

hay que modificar también las expresiones para las derivadas de los momentos (las derivadas de las coordenadas no se alteran) agregando las derivadas parciales con respecto a ξ o η según sea el caso.

```
SUBROUTINE GRAD (Y,DY)
DIMENSION X(6),DX(6),Y(6),DY(6)
COMMON T,DT,H,ALFA,IPR,IPO,G1,G2,Z1,Z2,GPL,GMI,EPP,EPM,XK,MO
COMMON IC,IT,IG,IP
EQUIVALENCE (XI,X((1)),(ETA,X(2)),(PHI,X(3))
EQUIVALENCE (PXI,X(4)),(PETA,X(5)),(PPHI,X(6))
```

```

EQUIVALENC (DXI,DX(1)),(DETA,DX(2)),(DPHI,DX(3))
EQUIVALENC (DPXI,DX(4)),(DPETA,DX(5)),(DPPHI,DX(6))
C
CALL CPYV (X, Y)
D=XI*XI-ETA*ETA
XXI=XI*XI-1.
EETA=1.-ETA*ETA
R1=XI+ETA
R2=XI-ETA
R12=R1*R1
R22=R2*R2
G12=G1*G1
G22=G2*G2
VR=- (G12/R12+G22/R22)
S1=G12/(R12*R12)
S2=G22/(R22*R22)
PPHX=(PPHI+GMI*XI)/XXI
PPHE=(PPHI+GPL*ETA)/EETA
HX=PXI*PXI+PPHX*PPHX
HE=PETA*PETA+PPHE*PPHE
U=(XXI*HX+EETA*HE+EPP*XI-EPM*ETA+XK)/D
H=U+VR
ALFA=XI*XI*U-XXI*HX-EPP*XI
DXI=PHI*XXI/D
DETA=PETA*EETA/D
DPHI=(PPHX*PPHE)/D
DEXI=(XI*U-XI*PXI*PXI-PPHX*(GMI-PPHX*XI)-EPP/2.)/D
DEETA=(ETA*PETA*PETA-PPHE*(GPL+PPHE*ETA)+EPM/2.-ETA*U)/D
DVRXI=S1+S2
DVERT=S1-S2
DPXI=DEXI+DVRXI
DPETA=DEETA+DVERT
DPPHI=0.0
C
CALL CPYV (DY,DX)
RETURN
END

```

Para no reescribir totalmente la subrutina es necesario hacer algunas definiciones y reajustar las expresiones que aquí se usan. Si recordamos que las expresiones para r_1 y r_2 son respectivamente $\xi + \eta$ y $\xi - \eta$, podemos entonces obtener las derivadas parciales de V_r , con respecto a ξ y a η y resultan muy simples. No hay mucho que discutir sobre estos cambios si hemos seguido los pasos que nos traen hasta aquí y no discutiremos más.

Hay que observar que de ninguna manera se va a alterar el proceso de integración de Runge-Kutta, por lo que RUKU no se enterará y seguirá funcionando como si nada ocurriera.

Otra cosa que esperamos ver es que las trayectorias de las partículas van a presentar efectos de rizamiento y lo que creemos es que aparecerán muchas pequeñas vueltas. Cuando haya solamente cargas magnéticas debemos tener resultados semejantes a los de Störmer.

En el programa principal solamente hay que hacer pequeños cambios, tales como excluir los llamados a ciertas subrutinas, escribir algunos textos o hacer un ciclo para variar alguna de las cargas y observar el efecto de dicha variación sobre las trayectorias.

Pueden hacerse otras modificaciones a TWOC, tales como cambiar la subrutina RUKU y ver las diferencias en los resultados según varios de los métodos: no vamos a ver aquí esos cambios, para ese efecto puede consultarse el trabajo de Manuel González [21]. Con esto terminamos la discusión de nuestro trabajo.

Apéndice C

Interpretación de algunos resultados obtenidos con la computadora

En esta parte vamos a discutir con cierto detalle algunos resultados obtenidos con los programas que hemos discutido en el capítulo 3 y en el apéndice A. Algunas de las cosas que diremos aquí ya se dijeron en otra parte pero aquí veremos todo directamente desde las diferentes gráficas. El orden que seguiremos, será el de explicar primeramente cómo interpretar las gráficas y después vendrá una serie de ejemplos que serán presentados sin mucho detalle. Serán vistas diferentes posibilidades del problema con una breve discusión acerca de algunos detalles de interés y no se hará mención sobre detalles que puedan ser interpretados directamente después de haber leído la primera parte.

C.1 Discusión de los diferentes tipos de graficas.

a) Gráficas de las coordenadas como funciones del tiempo.

En el capítulo 2 se discutió la subrutina GRAF que es la encargada de realizar estas gráficas y sobre las consideraciones de rangos de graficación, escalas, etc.

Veremos ahora con mayor cuidado un ejemplo: En el encabezado están listados los valores de algunas de las constantes que intervienen en el problema como son los valores iniciales, la energía, la constante α y los valores de las cargas, según los valores de estas últimas, lo que podemos esperar es que el movimiento tienda a desarrollarse del lado del segundo centro, eso será favorecido también por el valor inicial del momento asociado a la coordenada η cuyo valor cero está sobre el eje vertical que estamos representando por la letra I. Las variaciones de la coordenada ϕ nos van a indicar qué tan rápido es el giro de la partícula alrededor del eje Z, en el ejemplo que estamos presentando lo que se nota es que al final del intervalo que se considera aquí tiende a girar cada vez más rápido. Cuando el valor de una

de las coordenadas ξ o η es constante entenderemos que el movimiento ocurre sobre la superficie de un elipsoide o de un hiperboloide aunque puede haber pequeñas desviaciones como en la curva para la coordenada ξ del ejemplo. Teniendo presente todo lo que acaba de decirse, una vista rápida a la gráfica, nos dice, que la partícula se acerca rápidamente en espiral hacia el segundo centro que es lo que esperábamos; eso lo vamos a ver en la siguiente gráfica.

b) Representación espacial del movimiento.

Las gráficas II y III nos permiten observar las órbitas para los diferentes casos de interés en el problema. Mientras que las curvas del inciso a) nos dan solamente una idea de lo que está ocurriendo, aquí podemos tener una representación visual de las trayectorias. La gráfica II es una proyección del movimiento en el plano $X - Y$ y la gráfica III, la variación de las coordenadas $\rho - z$, donde ρ es el radio cilíndrico y el eje z , es la línea donde están colocados los dos centros, este último viene representado en la gráfica por el eje horizontal, estando los dos centros en las columnas 40 y 80 respectivamente; la variable ρ crece hacia arriba y no toma valores negativos, como ya se sabe, esa es la razón por la cual el cero para dicha variable se tomó al pie de la página. Al observar estas gráficas, podemos comprobar lo que se dijo en el inciso anterior; a medida que se desarrolla el movimiento se observa que al final la partícula se precipita hacia el segundo centro, eso se ve en la gráfica III, en la II se observa cómo la partícula gira alrededor del eje Z que corresponde al origen de $x - y$.

Un problema que se tiene con estas gráficas es que la escasa resolución no permite construir fácilmente las órbitas cuando aparecen muchos puntos, pero eso se corrige en parte si se escoge un número pequeño de puntos para tener sólo una porción pequeña de la trayectoria; desafortunadamente, el número adecuado de puntos para cada caso, sólo puede escogerse una vez que hemos obtenido una gráfica, así, cuando deseamos tener una porción mejor definida de ella, debemos correr por segunda vez el programa para ese ejemplo.

c) Puntos de Retorno.

Hemos discutido también ya en otro capítulo este tipo de gráficas. Recuérdese que los momentos p_ξ y p_η están expresados en función de raíces de polinomios de cuarto grado. Estas gráficas corresponden precisamente a los polinomios para ξ y para η , a la primera se le representa por el signo (+) y a la segunda por un asterisco. Como se ha listado, tanto los valores de la variable como los de los dos polinomios para cada punto de las gráficas es fácil determinar con cierta precisión para que valores de la variable las gráficas cruzan al eje (puntos de retorno) así como los valores que va tomando cada polinomio. Los únicos valores de la coordenada que tiene sentido considerar desde un punto de vista físico corresponden a aquellos para los cuales el correspondiente polinomio no es negativo, de esa manera podemos tener una idea de cuál es la región permitida, es decir, entre que valores de ξ y de η es posible tener confinada a una partícula. Ya hemos dicho muchas veces y lo decimos una vez más aquí, que sólo nos interesan los rangos en que puede variar cada coordenada; con eso en mente, observamos que el rango de valores permitido para la variable ξ

está comprendido aproximadamente entre 1.4 y 1.7, en tanto que para η hay dos rangos posibles: el primero está entre -0.9 y -0.4, mientras que el segundo está entre 0.0 y 0.9. Con eso tenemos una idea de cual es la región permitida: concluimos de nuestro análisis que hay dos porciones del espacio en las cuales puede desarrollarse el movimiento; todavía no tenemos una representación visual, nos sucede lo mismo que con las curvas de que hablamos en el inciso a) y de la misma manera que en aquel caso, pasaremos a ver como se resuelve el problema, pero eso corresponde al siguiente inciso.

d) Gráficas para la región permitida.

Como ya se dijo, esta gráfica es complementaria de la que representa a los puntos de retorno, se vió en el apéndice (A) cómo obtener dichas gráficas, así es que no insistiremos más en eso. Lo que se tiene son una o varias zonas en blanco, que representan a la región permitida, eso es en dos dimensiones; para tres dimensiones basta con rotar la figura alrededor del eje horizontal.

Hay que señalar que se está considerando el mismo caso para explicar como hay que interpretar las gráficas, así es que en el ejemplo V se verá todo lo que habíamos encontrado en las gráficas del inciso c): existen dos zonas permitidas debido a que hay dos rangos para η , los valores de las coordenadas pueden encontrarse de la manera siguiente: en la misma gráfica se verá una serie de elipses y de hipérbolas las cuales corresponden a diferentes valores de ξ y η ; los valores de la primera están tomados en intervalos de 0.5 así que entre dos elipses sucesivas el valor de ξ difiere por 0.5 en tanto que para η la diferencia entre dos hipérbolas es de 0.2. Ya con eso, no hay dificultad en determinar los rangos de valores para ξ y para η y verificar estos resultados con los de las gráficas del inciso anterior, aunque aquí no es muy precisa la escala; el estudio de estas gráficas es mas bien cualitativo y sirve para visualizar los resultados de TURN.

Las gráficas tienen como encabezado los valores de algunas constantes que intervienen en el problema. Se dan los valores que tienen los momentos para ciertas ξ y η introducidas como valores iniciales. Hay casos en que algún momento resulta imaginario, apareciendo entonces un texto que así lo indica así como el valor de el polinomio de cuarto grado que le corresponde, aunque en ocasiones se da de todas maneras un valor para dicho momento pero eso es porque en el programa se trabaja con el valor absoluto del polinomio.

En estas gráficas se puede ver como el cambio de una cualquiera de esas constantes del problema afecta a la región permitida; en la serie de gráficas presentadas aquí, lo que se ha variado es la energía y puede verse claramente como se manifiesta eso en el movimiento.

Conociendo la región permitida lo que puede hacerse es seleccionar condiciones iniciales para el programa TWOC, calculando los momentos para datos iniciales en las coordenadas, previamente escogidos.

e) Gráficas de las funciones: $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $s_1(\eta)$ y $s_2(\eta)$.

Acerca de estas funciones ya se discutió bastante, conocemos ya todas sus variantes y en los ejemplos que vendrán después se pondrán a apreciar algunas de ellas. En la práctica no proporcionan ninguna información nueva, tal vez lo único interesante sería el visualizar para casos concretos de qué manera se comportan las curvas. Las funciones $f_1(\xi)$ y $s_1(\eta)$ son representadas por el signo (+) en tanto que para $f_2(\xi)$ y $s_2(\eta)$ se escogió el signo (-) también se grafica la recta de energía cero a la que se le representa por puntos; se grafican los hechos que corresponden a las posiciones -1 y +1, los cuales son las asíntotas de $f_2(\xi)$ y $s_2(\eta)$.

En los ejemplos que presentamos, se ha variado la energía de la misma manera que para las gráficas del inciso d), de modo que para cada gráfica de aquellas corresponde una parábola de estas dos gráficas, recuérdese como influye la energía en las características de las parábolas, así es que no es difícil determinar la correspondencia de cada una de estas curvas con cada una de las posibilidades de d). En los encabezados de las gráficas se escribe entre otras cosas los valores de las coordenadas para los que se han calculado los momentos en las gráficas para la región permitida. Al igual que en todos los ejemplos anteriores, es necesario tener presentes los rangos de validez para cada coordenada. Después de estas observaciones ya no es difícil entenderlas.

Así como se varió la energía, se puede variar también la constante α , o alguna de las que intervienen como parámetros en nuestras funciones. En nuestro ejemplo no se afectó la forma de $f_2(\xi)$ y $s_2(\eta)$ porque esas curvas no dependen directamente de la energía pero un cambio en las cargas magnéticas o en el momento p_ϕ sí las va a afectar; en el capítulo 1 se estudió qué papel desempeñan esas constantes con respecto a las posiciones de las curvas.

f) Curvas de Energía Potencial Constante.

En el capítulo 3 se habló de la subrutina CNTU y en el apéndice A, también se hizo mención a una subrutina semejante para el programa PRYPO, esas son las gráficas que presentaremos en nuestros ejemplos, es decir, las que se obtienen con la subrutina REGP. Se considera el potencial verdadero, o sea que no se incluye el potencial repulsivo mediante el que era posible separar variables. Se tiene una colección de franjas cuyos contornos corresponden a niveles de la misma energía potencial. Se grafican los ejes verticales en las posiciones -1 y 1 tanto para indicar la escala como para localizar en donde están colocados los dos centros.

En esencia, ya no hay más qué decir sobre cómo entender las gráficas. En seguida se tienen algunos ejemplos.

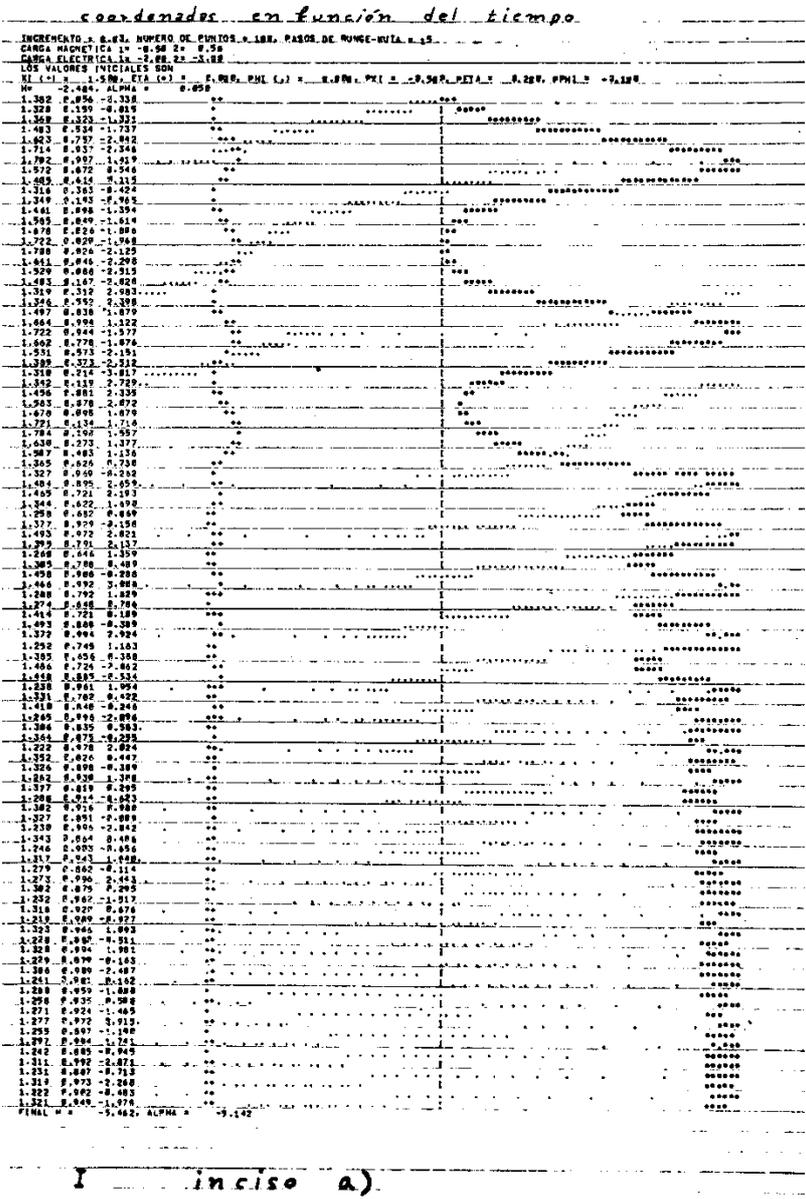


Figura C.1:

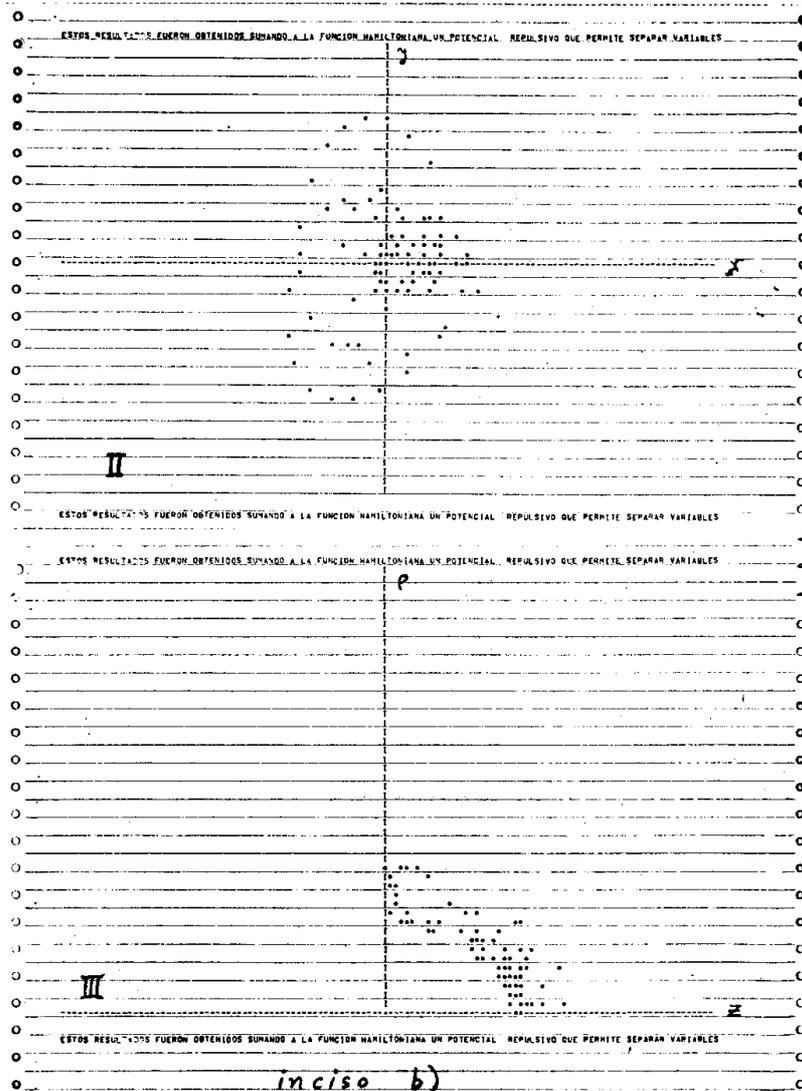


Figura C.2:

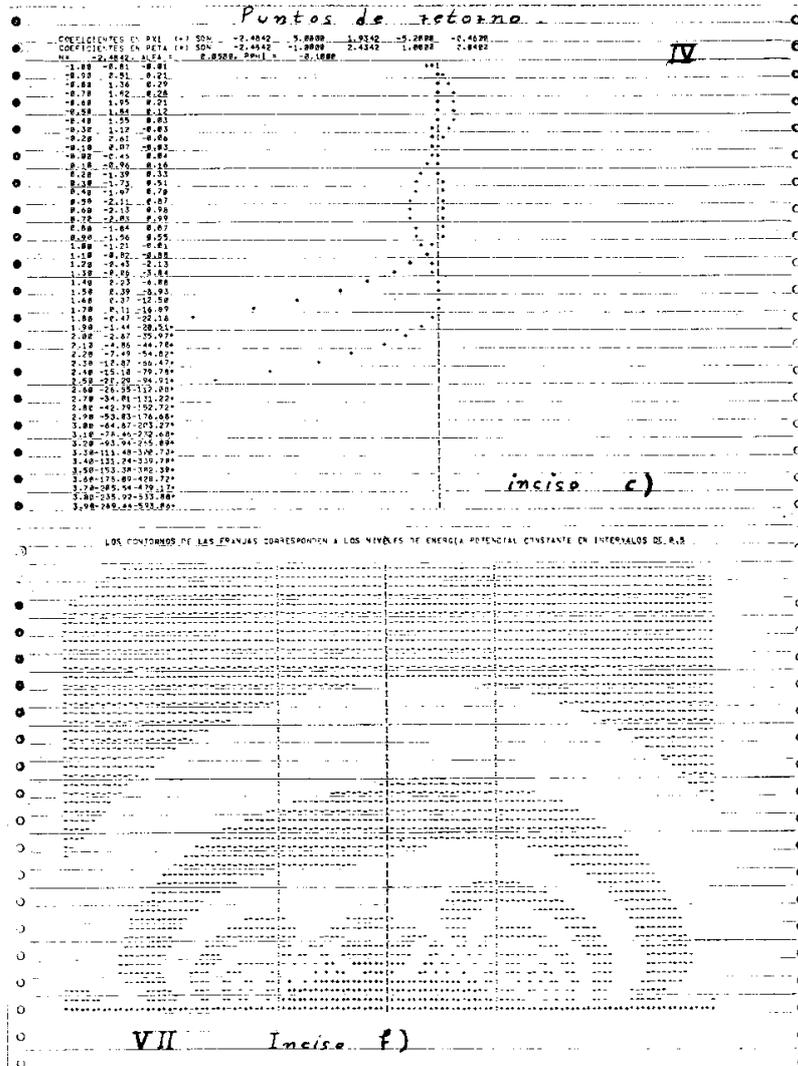


Figura C.3:

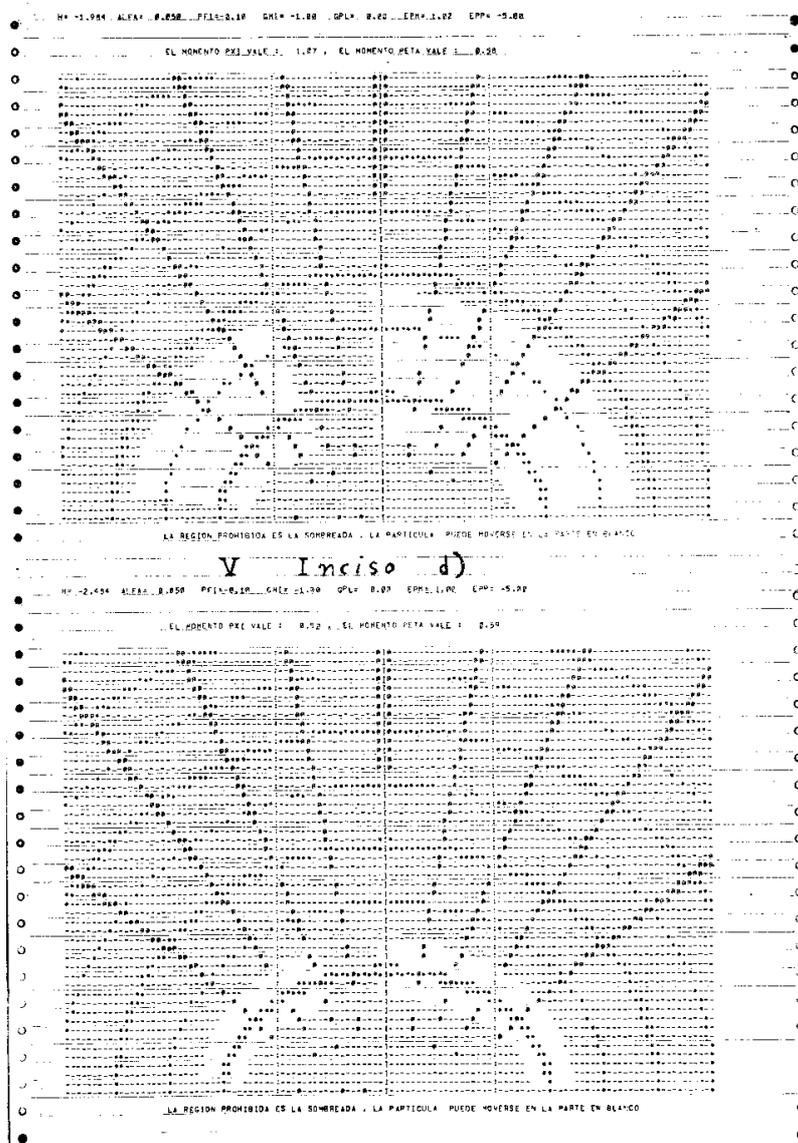


Figura C.4:

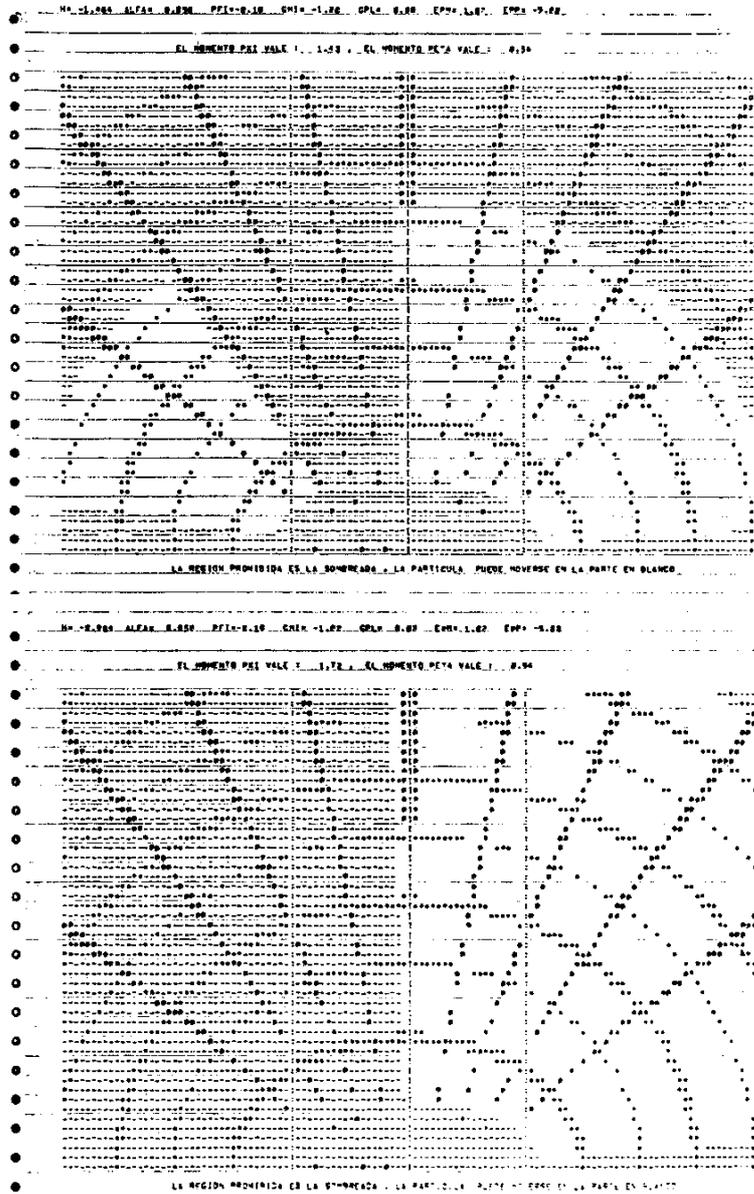


Figura C.5:

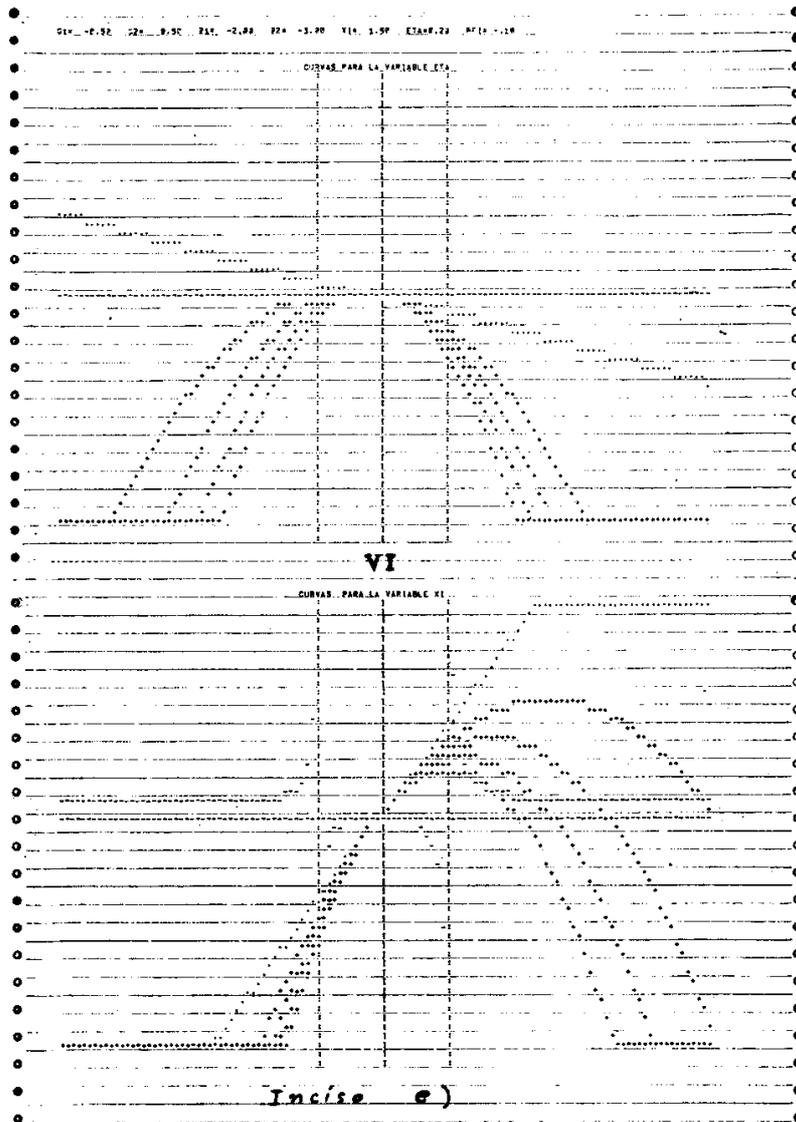


Figura C.6:

C.2 Algunos ejemplos

De hecho, en las páginas anteriores se presentó toda una serie de gráficas para un ejemplo particular, el tratamiento que habría que dar a los ejemplos que siguen es el mismo, a veces hay algunos detalles interesantes sobre los que haremos alguna mención breve, pero en general no hay mucho que decir acerca de los ejemplos.

El conjunto de gráficas del primer ejemplo corresponde a considerar dos cargas eléctricas opuestas, no se toma ninguna carga magnética, como puede verse en los encabezados. Las trayectorias son bastante claras, lo que se tiene a simple vista al observar la primera gráfica, es que el movimiento tiende a desarrollarse del lado del segundo centro, eso también para cualquier otro conjunto de valores iniciales (excepto los momentos) según lo indican las gráficas para la región permitida. El hecho de que la región permitida tienda a restringirse al variar H ilustra que ninguna de las constantes puede tomar valores arbitrariamente, sino que hay ciertas relaciones entre todas ellas, como se dijo en la sección (1.5.1).

La combinación de cargas en el segundo ejemplo es más complicada pero la lectura de las gráficas es muy simple. En este ejemplo la combinación de cargas es completamente simétrica y la manera en que el movimiento se desarrolle dependerá mucho de las condiciones iniciales.

Se observa también en las gráficas de $\rho - z$ que cuando la partícula se acerca a la línea de los dos centros, es repelida violentamente, mientras más cerca estemos de un centro, el efecto del potencial repulsivo es mayor; además entre los dos centros, el potencial electrostático no es muy grande cerca del eje como puede apreciarse en las curvas de energía potencial constante.

La gráfica por la función s_2 (o la de f_2) que pocas veces es clara, aparece muy bien definida en este ejemplo.

El tercer ejemplo presentado aquí, corresponde a una función periódica, hemos subrayado los valores que se repiten, aunque no hay una coincidencia completamente exacta debido a la precisión del cálculo. Puede verse también cómo son las trayectorias. No incluimos las restantes gráficas porque no proporcionan ninguna información especial, con este ejemplo terminaremos ese apéndice y la discusión de nuestro trabajo.

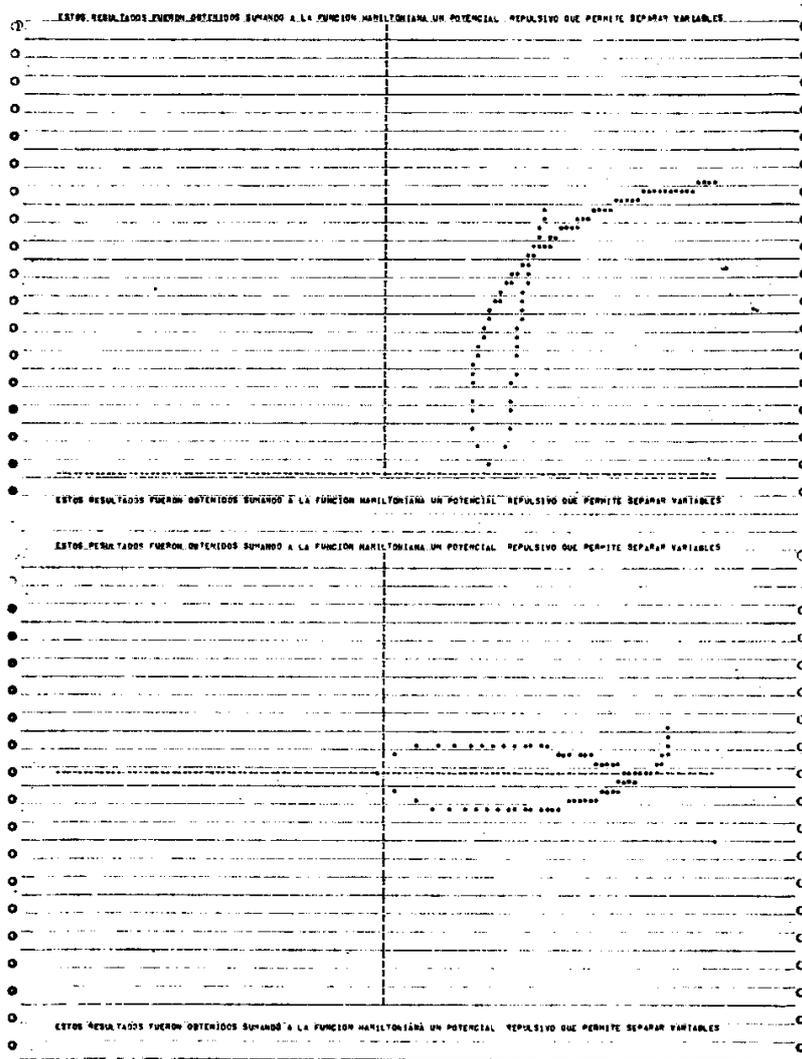
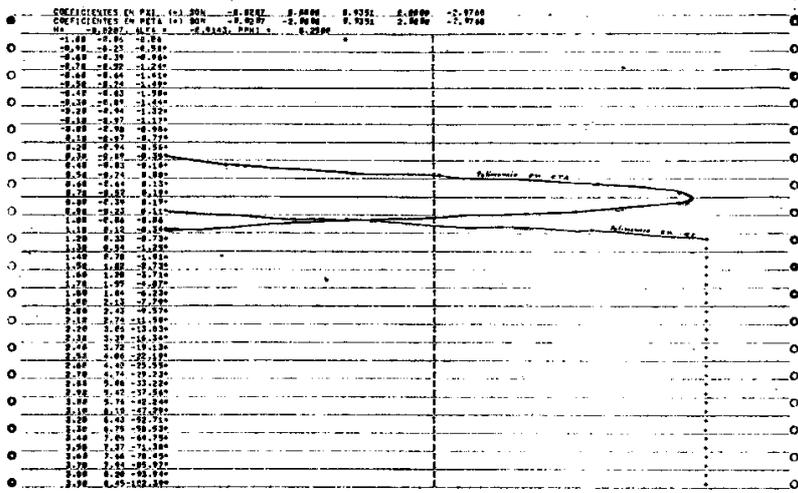


Figura C.8:



LOS CONTORNOS DE LAS FRANJAS CORRESPONDEN A LOS NIVELES DE ENERGIA POTENCIAL CONSTANTE EN INTERVALOS DE 0,5

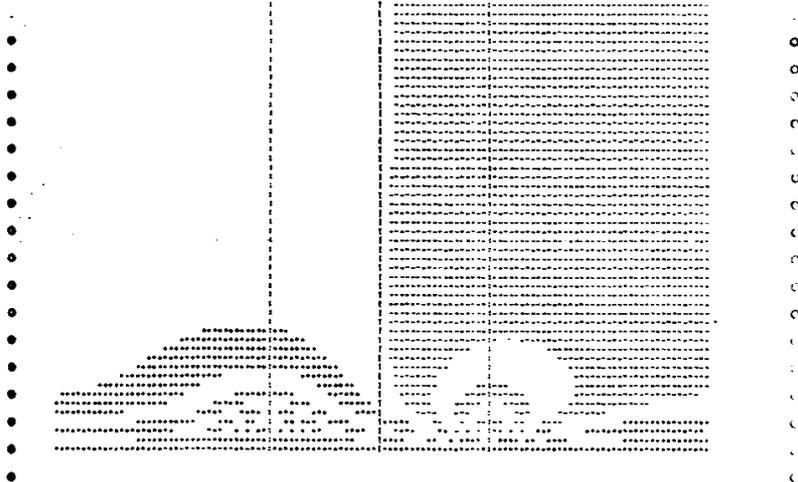


Figura C.9:

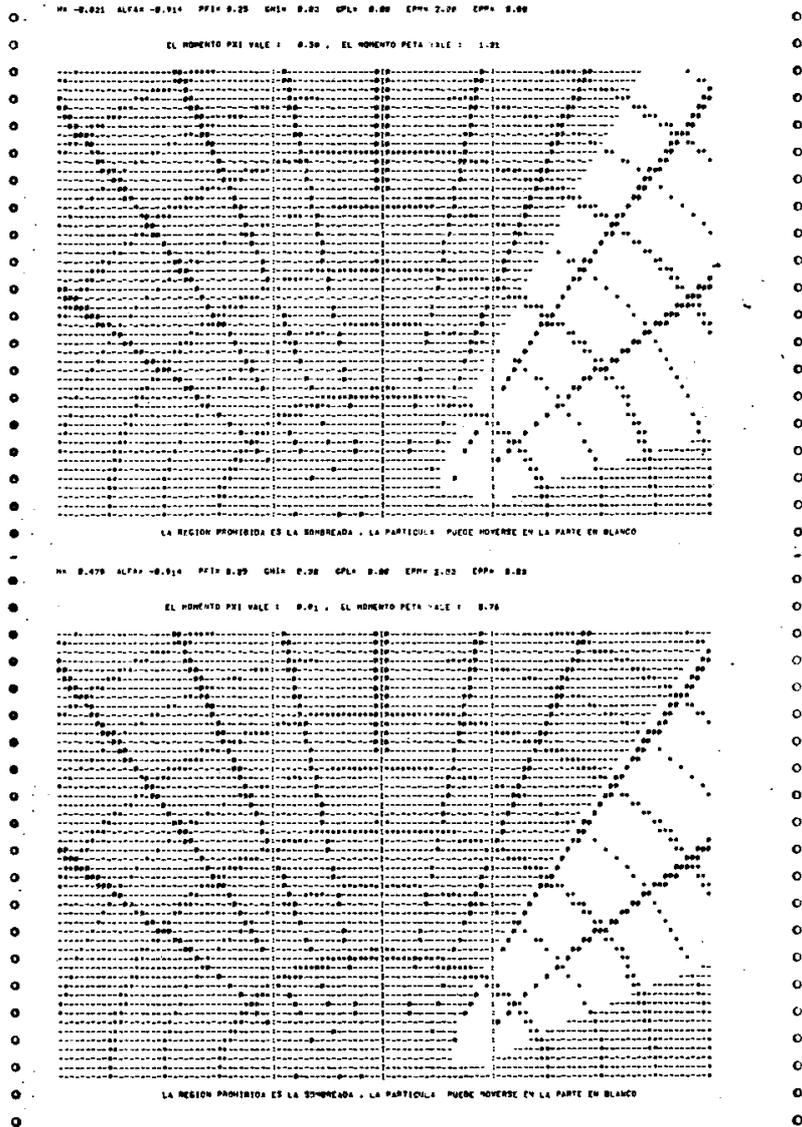


Figura C.10:

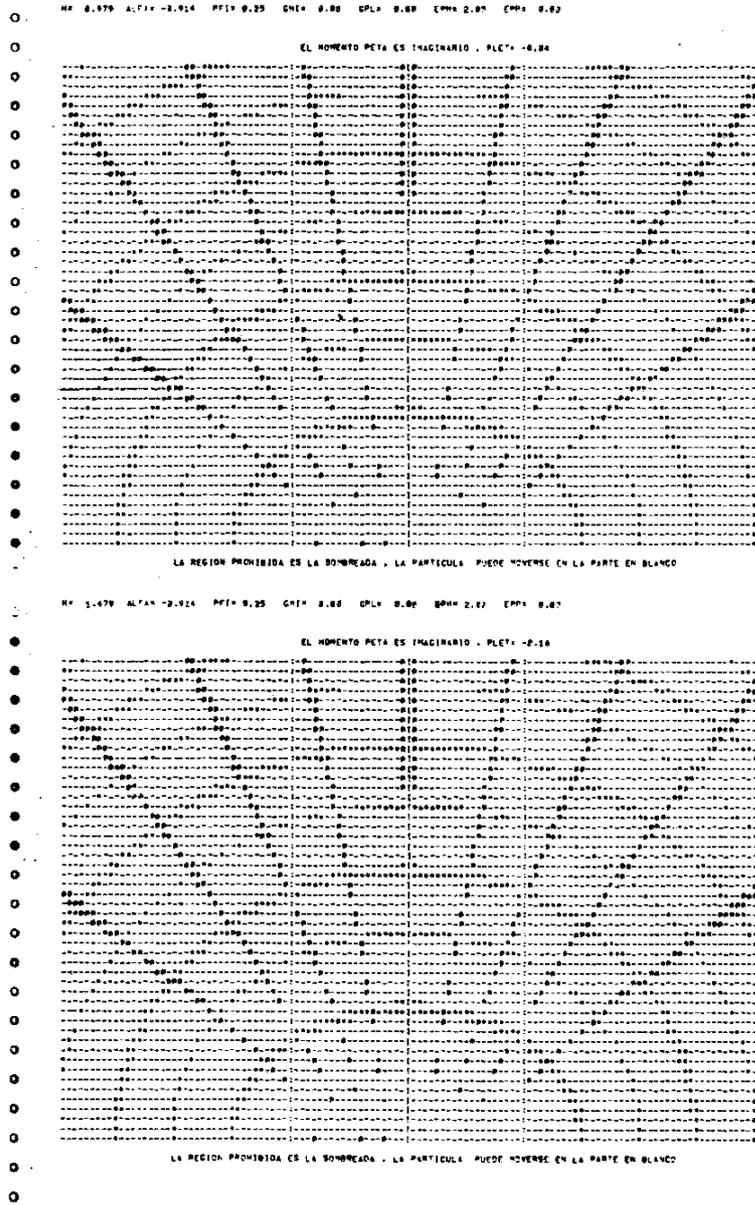


Figura C.11:

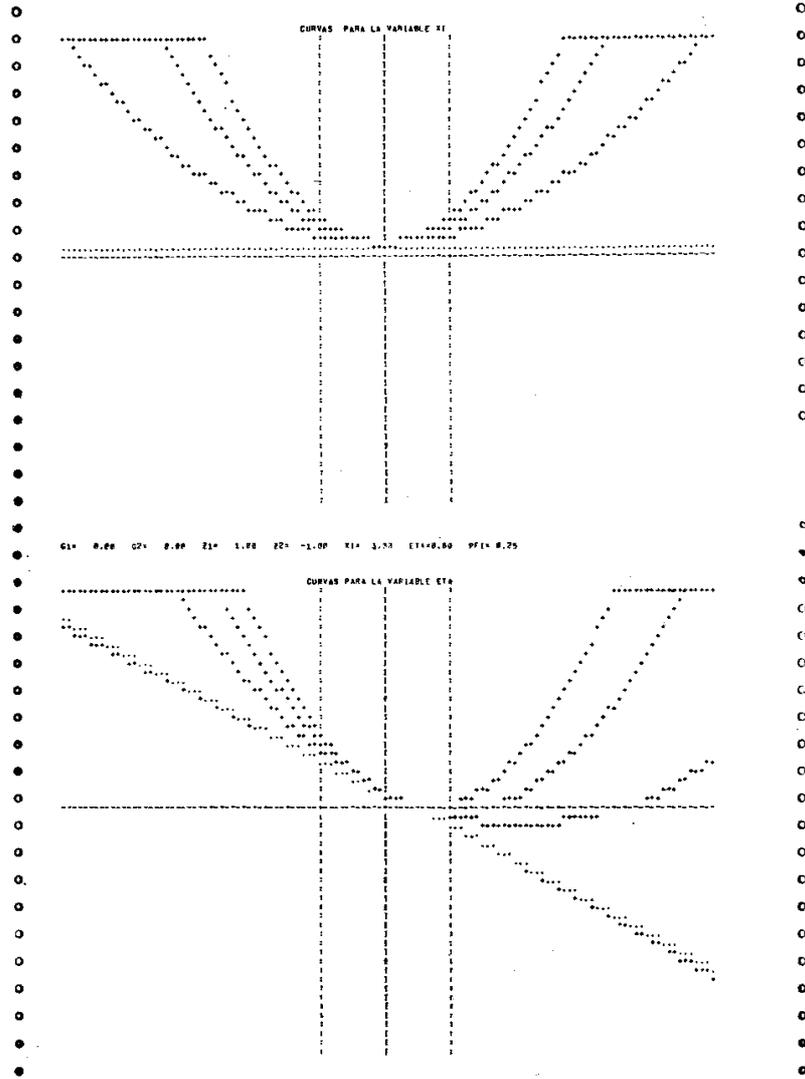
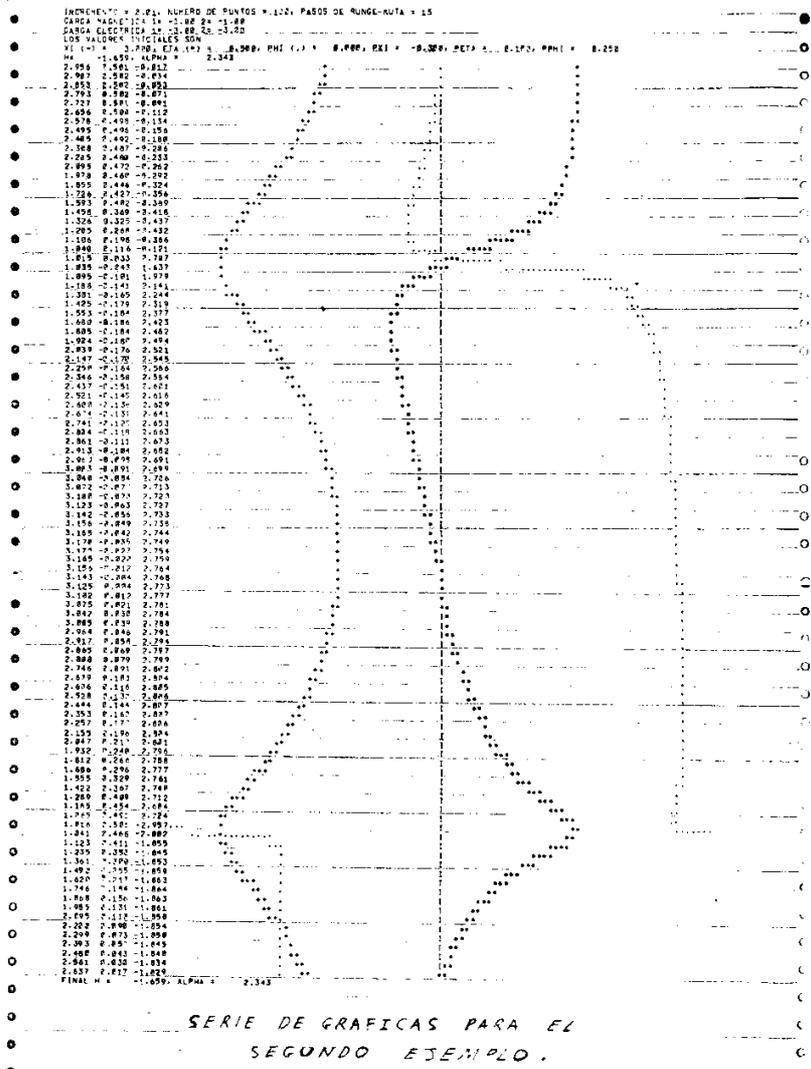


Figura C.12:



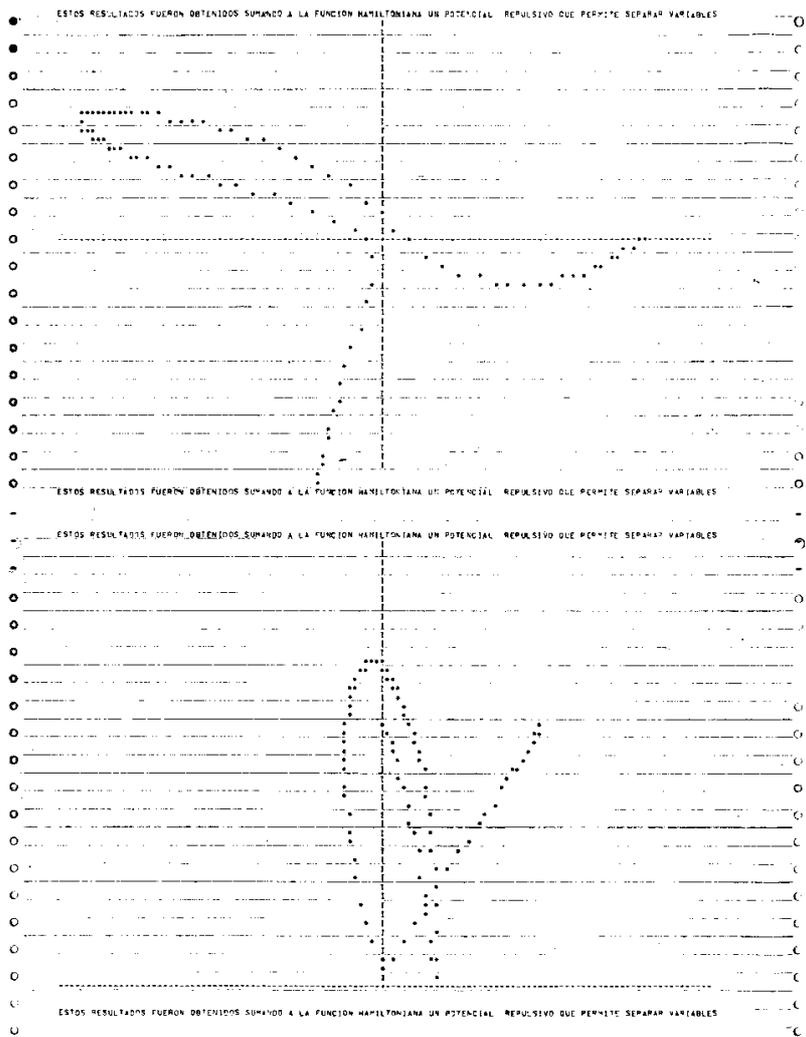


Figura C.14:

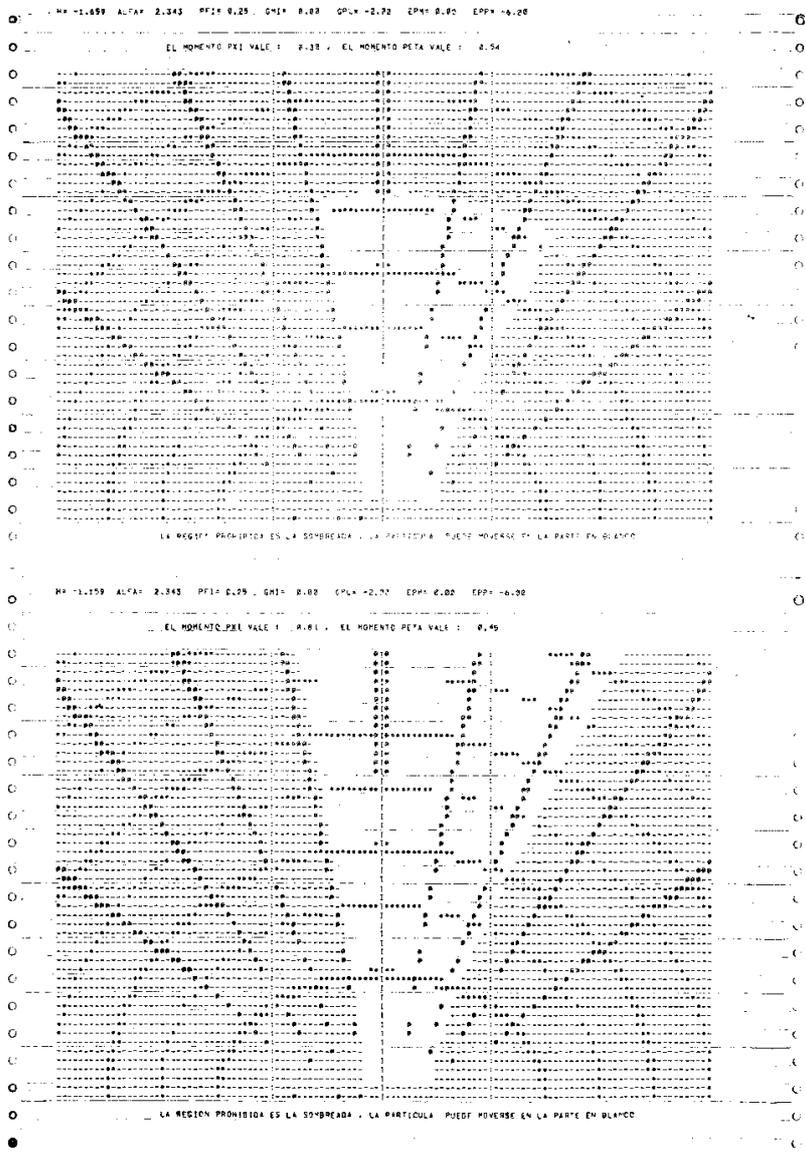


Figura C.16:

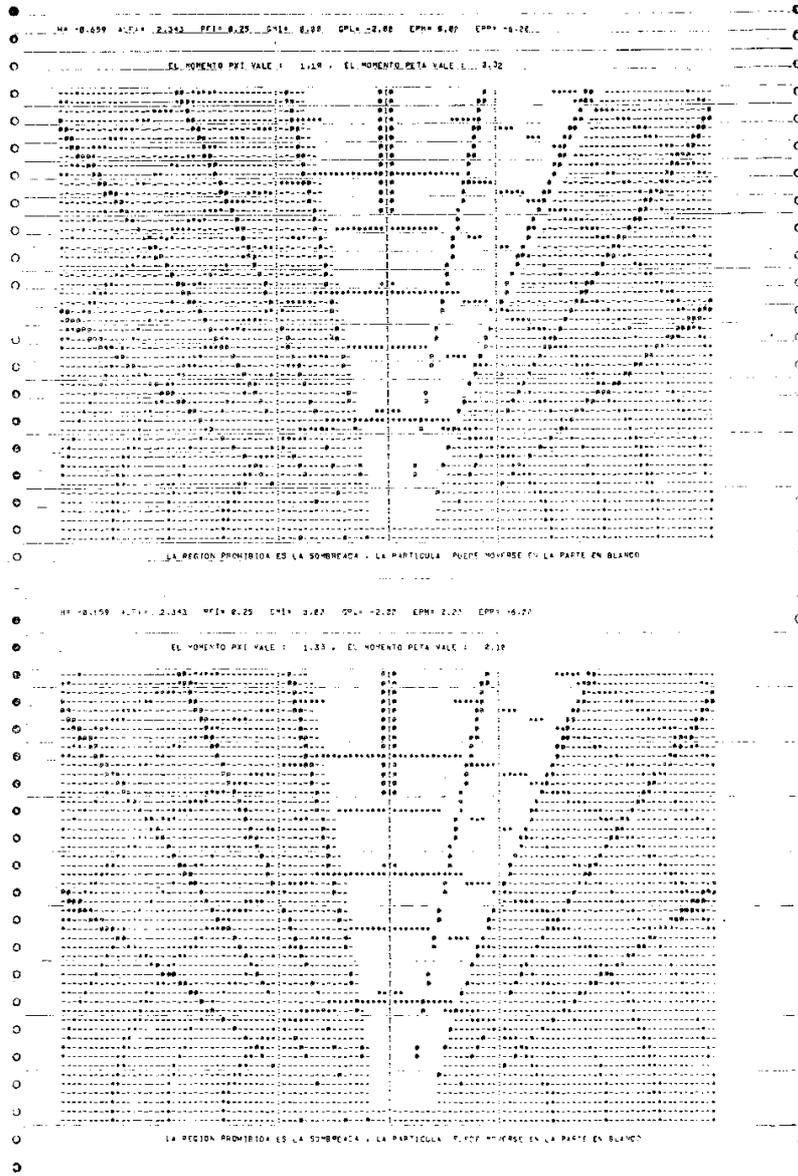


Figura C.17:

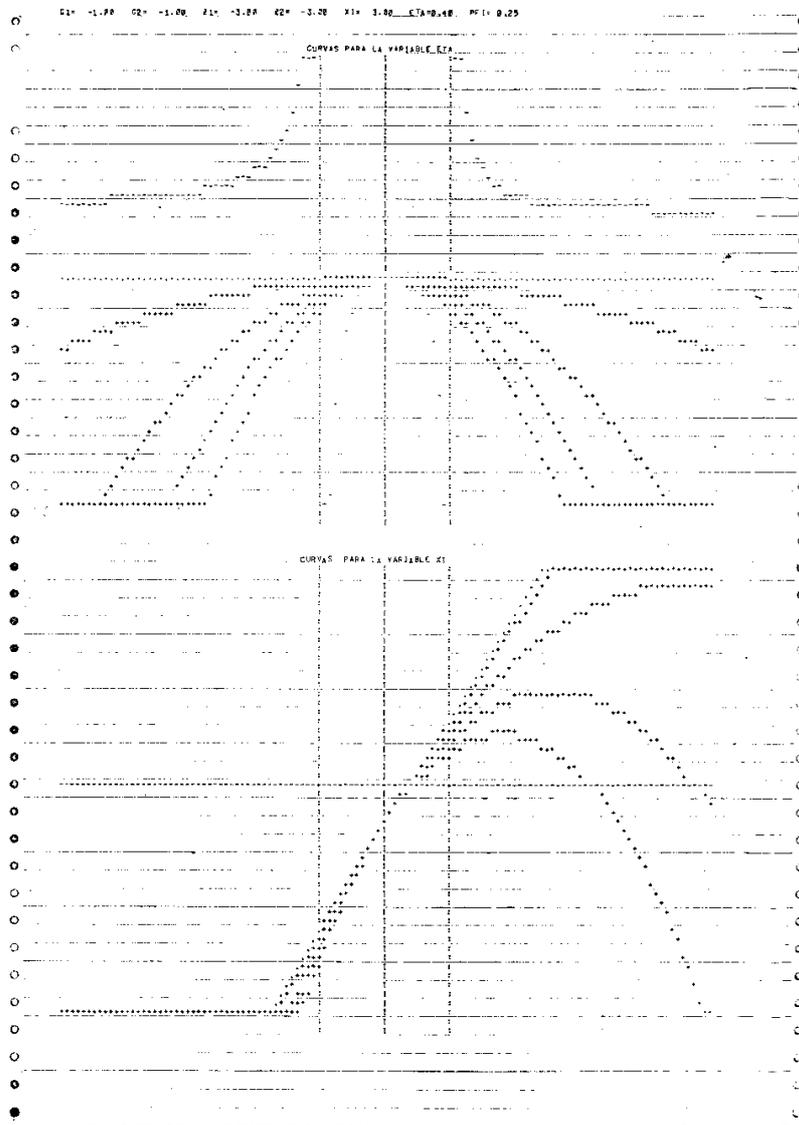


Figura C.18:

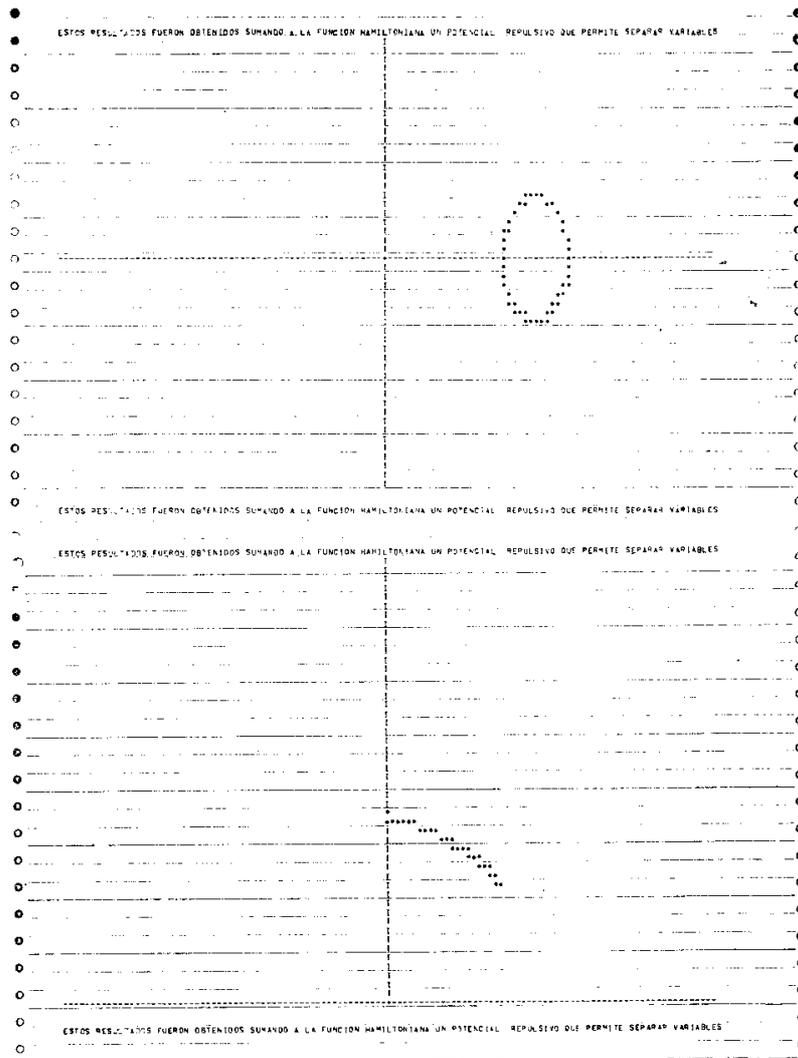


Figura C.20:

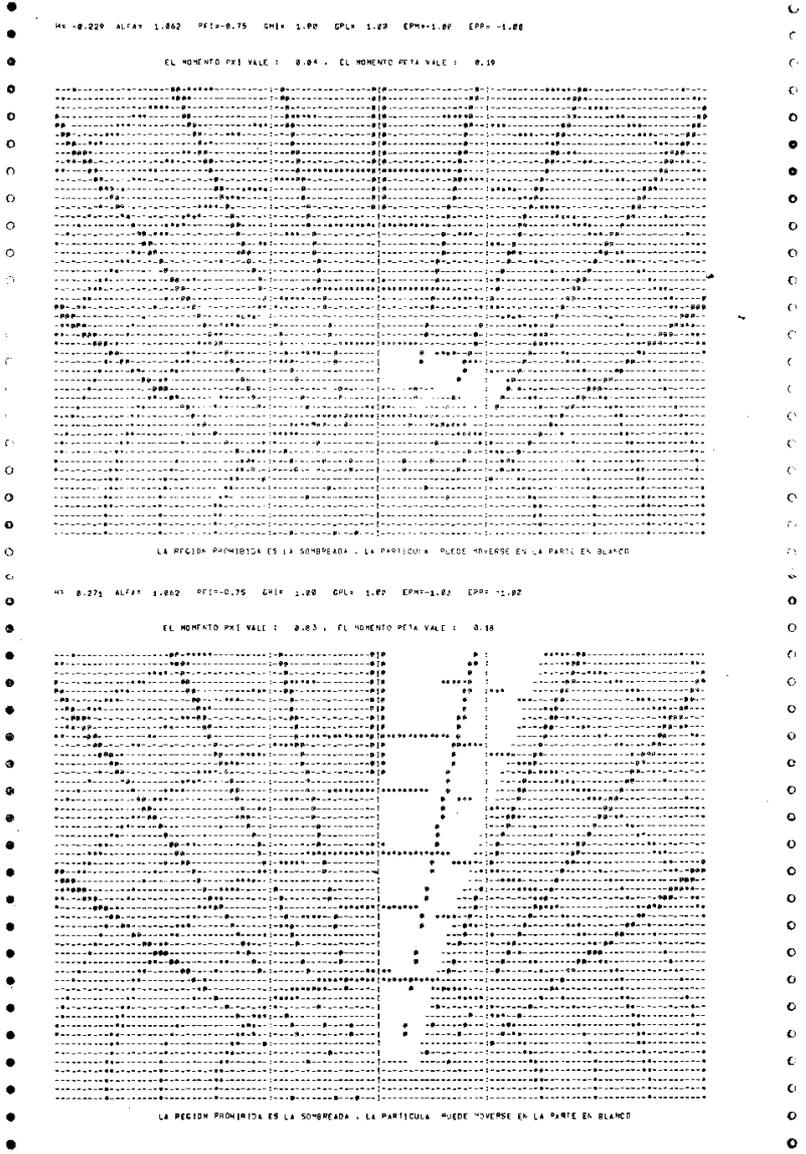


Figura C.22:

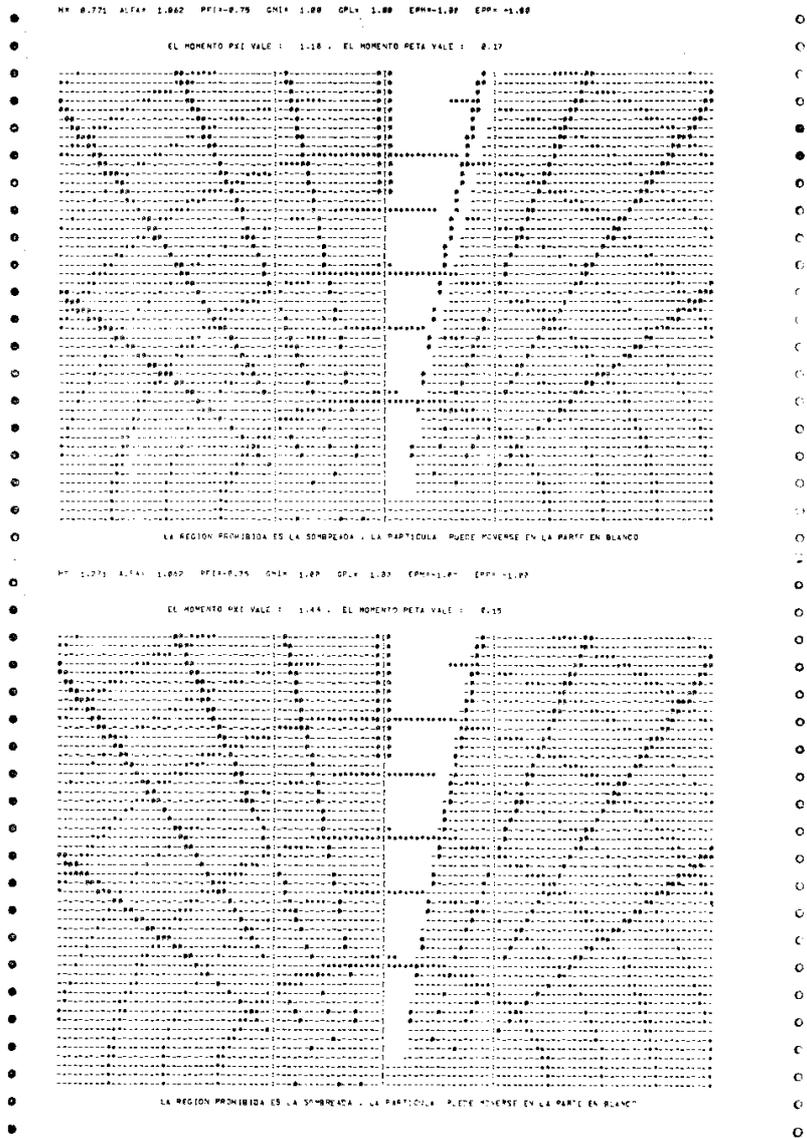


Figura C.23:

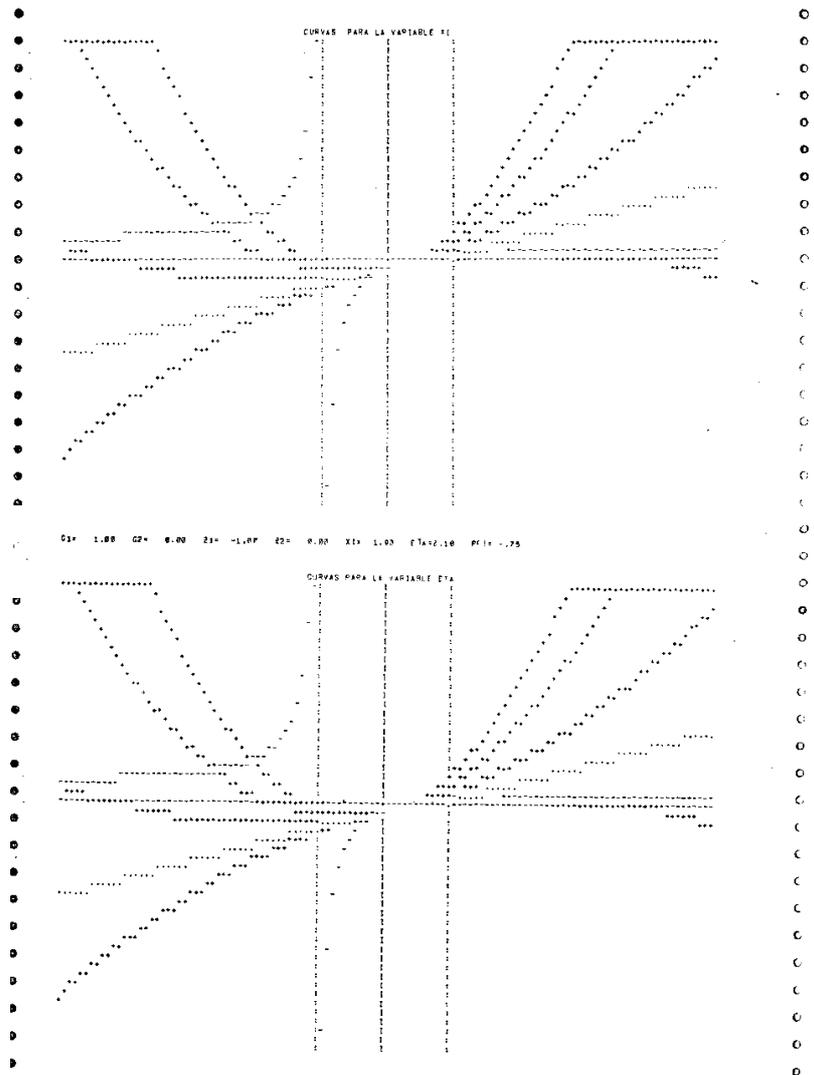


Figura C.24:

Bibliografía

- [1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co., Cambridge Mass., (1950).
- [2] V. A. Dulock, Ph. D. Thesis, Univ. of Florida, (1964).
- [3] H. V. McIntosh and A. Cisneros, *Journal of Mathematical Physics*, Vol. **11** 896-916, Marzo, (1970).
- [4] Birkeland, C. R., *Acad. Sci.*, Paris, 123, (1896)
- [5] C. Störmer, *The Polar Aurora*, Clarendon Press, Oxford, (1955).
- [6] Martin Brown, *Journal of Differential Equations*, Vol. 8, No. 2, Septiembre, (1970).
- [7] Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, 4th. ed., (1961).
- [8] Pars, L. A., *A Treatise on the Analytical Dynamics*, Heinemann Educational Books Ltd., Belfast (Ireland).
- [9] H. J. Tallquist, *Acta Soc. Scientiarum Fenicae*,
Nova Series A. Tom. 1 No. 1, Helsingfors (1927)
Nova Series A. Tom. 2 No. 2, Helsingfors (1927)
Nova Series A. Tom. 1 No. 4, Helsingfors (1928)
Nova Series A. Tom. 1 No. 5, Helsingfors (1928)
Nova Series A. Tom. 1 No. 6, Helsingfors (1929)
Nova Series A. Tom. 1 No. 8, Helsingfors (1929)
Nova Series A. Tom. 1 No. 1, Helsingfors (1933)
- [10] Kunz, K. S., *Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Company Inc., (1957).
- [11] Hildebrand, F. B., *Introduction To Numerical Analysis* McGraw - Hill Book Company Inc., (1956).
- [12] A. M. Bork *Using the IBM 1130*, Addison-Wesley, Reading Mass., (1966).

- [13] R. K. Louden, *Programing the IBM 1130 and 1800*, Prentice-Hall, (1967).
- [14] M. Born, *The Mechanics of the Atom*, Frederich Ungar Publising Co., (1960).
- [15] Corben, H. C. and P. Stehle, *Classical Mechanics*, 2nd. Edition, pp. 206-213, John Willey and Sons Inc., New York, (1960).
- [16] M. Sandoval Vallarta, *Theory of the Geomagnetic efects of Cosmic Radiation, Handbuch der Physik*, Vol. 46/1, Springer-Verlag, Berlin, (1961).
- [17] H. Poincaré, *Compt. Rend.*, 123 pp. 530-533, (1896).
- [18] Darboux, *Bull. des Sci. Math.*, ii, p. 433, (1878).
- [19] Lehnert B., *Dynamics of Charged Particles*, North Holand Publishing Co., Amsterdam, pp. 32-34, (1964).
- [20] Garcia, Jurado C., *Tesis*, I.P.N., (1971).
- [21] Gonzalez, H. M., *Tesis*, I.P.N., (1971).
- [22] C. Wexler, *Analytic geometry, a Vector Aproach*, pp. 166-169 Addison-Wesley Pub. Co., (1961).
- [23] Ref. 7, P. 83.
- [24] K. W. Ford, *Scientific American* 209, No. 6, pp. 122-131, (1963).
- [25] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, p. 149, John Wiley and Sons Inc., (1962).