

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Sección Computación

ANÁLISIS DINÁMICO Y TOPOLÓGICO DE LOS  
AUTOMATAS CELULARES UNIDIMENSIONALES  
REVERSIBLES

TESIS

Para Obtener Grado de Doctor en Ciencias

en la Especialidad de Ingeniería Eléctrica

que presenta

M.C. JUAN CARLOS SECK TUOH MORA

DIRECTORES DE TESIS:

DR. HAROLD V. McINTOSH

DR. SERGIO V. CHAPA VERGARA

MEXICO D.F., JULIO DE 2002.

# Resumen

Esta tesis tiene por objetivo principal presentar una caracterización topológica al comportamiento dinámico de los autómatas celulares reversibles en una dimensión. Para dicha caracterización se consideran dos propiedades fundamentales que son la multiplicidad uniforme de los ancestros y los índices de Welch; estas propiedades se describen mediante los siguientes aspectos: 1) la representación que todo autómata celular unidimensional tiene por medio de otro autómata con solo dos vecinos 2) el uso de conjuntos centrados de cilindros para establecer una estructura en el espacio de configuraciones de un autómata celular unidimensional 3) la aplicación conceptos básicos de topología de conjuntos para caracterizar dicha estructura.

Se demuestra que los autómatas celulares unidimensionales reversibles son un subconjunto de las secuencias límite inversas definidas en el espacio de configuraciones de los autómatas celulares unidimensionales. En particular, se demuestra que los autómatas celulares unidimensionales reversibles cumplen con tener una distancia máxima de  $1/2$  entre ancestros. Utilizando los anteriores resultados teóricos y la caracterización combinatoria de los autómatas celulares reversibles en una dimensión por medio de permutaciones en bloque; se presenta un método matricial para detectar comportamientos periódicos. En base al comportamiento periódico, se establece una clasificación de los autómatas celulares reversibles en una dimensión por medio de relaciones de equivalencia y se demuestra que esta clasificación define una equivalencia fuerte con respecto al corrimiento entre los autómatas celulares unidimensionales reversibles.

El comportamiento local de este tipo de autómatas es también analizado para complementar la caracterización combinatoria de las permutaciones en bloque con la finalidad de encontrar y clasificar los comportamientos transitivos de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. Para esto se define una representación matricial de la regla de evolución asociada a un autómata celular unidimensional por medio de diagramas de de Bruijn. Se estudia la estructura espectral de estas matrices y se demuestra que son idempotentes y que tienen un único valor propio positivo igual a 1. Se prueba también que sus vectores propios determinan los subconjuntos de Welch lo cual permite conocer la regla de evolución inversa de un autómata reversible dado.

De esta manera, utilizando los resultados anteriores y la caracterización combinatoria por medio de permutaciones en bloque, se establecen una serie de resultados teóricos y procedimientos computacionales para analizar y clasificar el comportamiento transitivo de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. En particular, estos procedimientos son útiles para examinar puntos transitivos, conjuntos topológicamente transitivos y topológicamente mezclados en el espacio de configuraciones.



# Abstract

The main goal of this thesis is to present a topological characterization of the dynamical behavior of reversible one-dimensional cellular automata. For this reason, two important properties of these systems are considered: the uniform multiplicity of ancestors and Welch indices. These properties are explained by means of the following terms: 1) the representation of every one-dimensional cellular automaton by another automaton with only two neighbors 2) using centered cylinder sets for establishing an structure on the configuration set of a given one-dimensional cellular automaton 3) applying basic concepts of point set topology for analyzing such a structure.

It is proved that reversible one-dimensional cellular automata are a subset of the set of inverse limit sequences defined in the configuration space of one-dimensional cellular automata. In particular, for reversible one-dimensional cellular automata it is proved that the maximum distance between ancestors is  $1/2$ .

Using the previous theoretical results and the combinatorial characterization by means of block permutations of reversible one-dimensional cellular automata, a matrix method is presented for detecting periodical behaviors. Based on this behavior, a classification of reversible one-dimensional cellular automata is established by means of equivalence relations, and we prove that such a classification defines a strong shift equivalence between reversible one-dimensional cellular automata.

The local behavior of this kind of automata is also analyzed for complementing the combinatorial characterization given by block permutations, this is useful to find and classify the transitive behaviors of reversible one-dimensional cellular automata. For this reason we define a matrix representation of the evolution rule associated with a one-dimensional cellular automata by means of de Bruijn diagrams. We study the spectral structure of these matrices and we prove that they are idempotent and have a single positive eigenvalue equal to 1. We also prove that the eigenvectors define the Welch subsets, this is relevant because Welch subsets determine the inverse evolution rule of a given reversible one-dimensional cellular automaton.

In this way, using the previous results and the combinatorial characterization by block permutations, we establish some theoretical results and computational procedures for studying and classifying the transitive behavior of reversible one-dimensional cellular automata. In particular, these procedures are useful for examining transitive points, topologically transitive subsets and topologically mixing subsets of the configuration set.



# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Resumen . . . . .	1
1.2 Antecedentes . . . . .	1
1.3 Resumen histórico . . . . .	2
1.4 El caso reversible . . . . .	3
1.5 Organización del trabajo . . . . .	6
<b>2 Conceptos Básicos</b>	<b>9</b>
2.1 Resumen . . . . .	9
2.2 Definición de autómata celular unidimensional . . . . .	9
2.3 Diagramas de de Bruijn . . . . .	10
2.4 Transformación de un autómata celular unidimensional a otro de tamaño de vecindad 2 . . . . .	11
2.5 Multiplicidad uniforme e índices de Welch . . . . .	12
2.6 Permutaciones en bloque . . . . .	13
2.7 Conjuntos de cilindros centrados . . . . .	15
2.8 Observaciones finales . . . . .	17
<b>3 Topología de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles</b>	<b>19</b>
3.1 Resumen . . . . .	19
3.2 Topología de los conjuntos de cilindros centrados . . . . .	19
3.2.1 Sistemas de vecindades . . . . .	20
3.2.2 Conjuntos abiertos . . . . .	21
3.2.3 Conjuntos cerrados . . . . .	21
3.2.4 Espacios de Hausdorff . . . . .	22
3.2.5 Espacios compactos . . . . .	23
3.2.6 Propiedad de intersección finita . . . . .	24
3.2.7 Espacios métricos . . . . .	26
3.3 Secuencias límite inversas . . . . .	27

3.3.1	Concepto general . . . . .	27
3.3.2	Secuencias límite inversas en autómatas celulares unidimensionales . .	28
3.3.3	Existencia del conjunto $\mathcal{C}_{[\infty]}$ en el espacio de configuraciones . . . . .	28
3.3.4	Autómatas celulares unidimensionales sobreyectivos . . . . .	32
3.4	Multiplicidad uniforme . . . . .	32
3.4.1	Valores invariantes . . . . .	32
3.4.2	Clases de equivalencia de ancestros . . . . .	34
3.5	Distancia $1/2$ y comportamiento reversible . . . . .	36
3.5.1	Autómatas celulares unidimensionales reversibles . . . . .	36
3.5.2	Secuencias límite inversas en autómatas celulares unidimensionales re- versibles . . . . .	37
3.6	Un ejemplo ilustrativo . . . . .	38
3.6.1	Autómata $(2, 1)$ reglas 15 y 85 . . . . .	38
3.7	Observaciones finales . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Comportamiento Periódico de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles</b>	<b>43</b>
4.1	Resumen . . . . .	43
4.2	Conceptos básicos de sistemas dinámicos . . . . .	43
4.3	Comportamiento periódico de los autómatas celulares unidimensionales re- versibles . . . . .	44
4.3.1	Comportamiento dinámico . . . . .	45
4.3.2	Características del comportamiento periódico en autómatas reversibles $(k, 1/2)$ . . . . .	46
4.3.3	Representación matricial del comportamiento periódico . . . . .	46
4.4	Clasificación de los autómatas reversibles $(k, 1/2)$ por medio de sus compor- tamientos periódicos . . . . .	48
4.5	Ejemplos ilustrativos . . . . .	49
4.5.1	Autómata celular unidimensional reversible $(4, 1/2)$ , regla FFAA5500	50
4.5.2	Autómata celular unidimensional reversible $(4, 1/2)$ , regla 5F0A5F0A	53
4.5.3	Autómata celular unidimensional reversible $(4, 1/2)$ , regla AA5500FF	56
4.5.4	Autómata celular unidimensional reversible $(4, 1/2)$ , regla BB991133 .	59
4.6	Observaciones finales . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Estudio Matricial de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles</b>	<b>63</b>
5.1	Resumen . . . . .	63
5.2	Características de los diagramas de de Bruijn . . . . .	64
5.3	Matrices de conectividad en autómatas celulares unidimensionales reversibles	64
5.4	Propiedades espectrales de las matrices de conectividad en autómatas celulares unidimensionales reversibles. . . . .	65
5.4.1	Componentes irreducibles y $\lambda = 1$ . . . . .	66
5.4.2	Subgráficas lineales dirigidas y comportamiento idempotente . . . . .	67

5.5	Vectores propios y regla inversa . . . . .	69
5.5.1	Calculando los vectores propios de las matrices de conectividad . . . . .	69
5.5.2	Encontrando la regla inversa . . . . .	71
5.6	Equivalencia fuerte con respecto al corrimiento en el comportamiento periódico global . . . . .	71
5.7	Ejemplos ilustrativos . . . . .	73
5.7.1	Comportamiento local . . . . .	73
5.7.2	Comportamiento global . . . . .	74
5.8	Observaciones finales . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Comportamiento Transitivo de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles</b>	<b>79</b>
6.1	Resumen . . . . .	79
6.2	Definiciones básicas de comportamientos transitivos . . . . .	79
6.3	Transiciones entre conjuntos de cilindros centrados . . . . .	80
6.4	Representación matricial del comportamiento dinámico . . . . .	81
6.5	Propiedades transitivas de los autómatas celulares unidimensionales reversibles	81
6.6	Autómatas reversibles con un índice de Welch igual a 1 . . . . .	83
6.6.1	Comportamiento topológicamente transitivo y configuraciones transitivas . . . . .	85
6.6.2	Conjuntos de cilindros centrados recurrentes . . . . .	87
6.6.3	Comportamiento topológicamente mezclado . . . . .	87
6.7	Autómatas reversibles con índices de Welch diferentes de 1 . . . . .	88
6.7.1	Comportamiento topológicamente transitivo y configuraciones transitivas . . . . .	90
6.8	Ejemplos ilustrativos . . . . .	93
6.8.1	Autómatas reversibles con un índice de Welch igual a 1 . . . . .	93
6.8.2	Autómatas reversibles con índices de Welch diferentes de 1 . . . . .	97
6.8.3	Autómata reversible no topológicamente transitivo . . . . .	101
6.9	Observaciones finales . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>107</b>
7.1	Contribuciones y limitaciones del trabajo . . . . .	108
7.2	Trabajo futuro . . . . .	109
	<b>Lista de símbolos</b>	<b>111</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Resumen

El propósito de este capítulo es dar una introducción general al trabajo, exponiendo la motivación y relevancia del problema a tratar en la tesis, así como el objetivo a alcanzar y la metodología aplicada para lograrlo. Para esto se expone primero un resumen del desarrollo histórico de la teoría de autómatas celulares, haciendo especial énfasis en el caso reversible en una dimensión. En base a esto, se presenta el origen y las características del problema a tratar en la tesis. En seguida se expone el objetivo a alcanzar por el trabajo, es decir, en que forma y extensión se busca resolver el problema planteado. Finalmente se explica la metodología para lograr dicho objetivo y la organización del escrito.

### 1.2 Antecedentes

Un sistema se define con una tupla  $(X, f)$ , donde  $X$  representa un conjunto de elementos y  $f$  es un observable o una medición particular del estado en el que se encuentran los elementos de  $S$  en un instante dado [Cas89]. Entender el comportamiento del sistema a través del tiempo es una de las tareas más importantes del hombre que se redituan en el conocimiento de la naturaleza. En este proceso se conocen o establecen ciertas reglas locales que a través del tiempo derivan en un comportamiento global del sistema. Así, el entendimiento del comportamiento global consiste en saber cuales fueron las condiciones locales que lo originaron, obteniendo una relacion que debe ser analizada.

En el modelado de sistemas una de las metas es plantear reglas sencillas las cuales puedan describir todos los comportamientos, inclusive los complejos. Los autómatas celulares son modelos de sistemas discretos los cuales mediante la determinación de interacciones sencillas entre componentes idénticos determinan el comportamiento global el cual en algunas ocasiones es muy interesante o complejo. De esta forma, el comportamiento complejo que se encuentra en fenómenos de la física, química o biología puede ser modelado y simulado dinámicamente con autómatas celulares tomando su lugar como sistemas dinámicos discretos en el tiempo y en sus estados. Por otro lado, en ciencias de la computación los autómatas celulares son modelos muy interesantes por derecho propio, ya que ofrecen un paradigma para implementar operaciones computables paralelas, al mismo tiempo que presentan una serie de cuestiones teóricas a resolver, por lo cual su estudio ha recibido una atención especial.

En la teoría de autómatas celulares un problema principal es: “Determinar el comportamiento a largo plazo para cualquier autómatas celular”. Este es uno de los objetivos de esta tesis para el caso reversible. En particular, este escrito presentará un entorno basado en topología de conjuntos y una serie de procedimientos computacionales para analizar el comportamiento dinámico global de un autómatas celular unidimensional reversible.

### 1.3 Resumen histórico

El estudio de los autómatas celulares ha prosperado de manera importante debido a dos razones. Primero por el interés en sus posibilidades para simular sistemas reales como se mencionó anteriormente. La disponibilidad actual de cada vez más rápidos equipos computacionales ha permitido experimentar y aplicar los autómatas celulares para estos fines.

La segunda razón es más teórica y tiene sus orígenes tanto en los trabajos elaborados por Emil L. Post y Alan Turing entre otros que establecen las condiciones y restricciones presentes en un dispositivo que realiza procesos computables como en el modelo del sistema nervioso de Warren S. McCulloch y Walter Pitts el cual está basado en interacciones locales de unidades elementales o neuronas, dicho modelo muestra que las interacciones locales de unidades simples son capaces de generar un comportamiento global complejo. Así, una pregunta que surge es si existe un sistema en el cual las interacciones locales de sus partes induzcan un comportamiento global que cumpla con las condiciones para realizar ciertos procesos computables interesantes, ya sea simular cualquier otro dispositivo que haga computación o generar copias de sí mismo.

Con esta cuestión en mente, surge en John von Neumann la idea de probar la existencia de sistemas universales autorreproductivos por medio de autómatas celulares. Esta problema presentaba muchos problemas prácticos en su desarrollo pero que teóricamente no eran esenciales. Entonces, siguiendo los consejos de su amigo Stanislaw Ulam, von Neumann propuso un autómatas celular para probar la factibilidad de construir un sistema universal autorreproductivo. Este autómatas celular es sumamente complicado, consiste de una cuadrícula bidimensional donde en un principio cada celda puede tomar un estado de veintinueve posibles. De un instante a otro, cada celda o célula actualiza su estado dependiendo de su estado actual y el de sus vecinos ortogonales. Así, las diferentes combinaciones de estados determinaban el comportamiento global del todo el sistema. Usando este autómatas celular, von Neumann modeló un sistema autorreproductivo universal que solamente muestra las partes fundamentales del problema.

Con la propuesta anterior inicia la teoría de autómatas celulares, en donde los trabajos fundamentales de von Neumann pueden encontrarse en las publicaciones de Burks [vN66] y Codd [Cod68].

La segunda época relevante en el desarrollo de la teoría de los autómatas celulares se da con el trabajo elaborado por John H. Conway sobre el autómatas celular “The Game of Life” [Gar70]. Conway buscaba por un autómatas que tuviera la complejidad del constructor universal elaborado por von Neumann, pero con un número mucho menor de estados, quizás con solo dos [McI91c]. En su trabajo, Conway toma la misma cuadrícula bidimensional y propone un autómatas con solo dos estados, pero cada célula evolucionaba de acuerdo con su estado actual y el de sus vecinos ortogonales y diagonales. Por medio de Life, Conway modela también un sistema universal autorreproductivo. Los trabajos de von Neumann y

de Conway son testimoniales de que operaciones matemáticas arbitrariamente complicadas pueden ser realizadas por sistemas cuya organización básica es muy sencilla.

Análisis comparativos de autómatas celulares no fueron llevados a cabo hasta que los medios computacionales necesarios estuvieron disponibles y ya que el estudio de sistemas caóticos ganó cierta popularidad. Fue por esta combinación que surge el trabajo de Stephen Wolfram [Wol86] que clasifica a todos los posibles autómatas celulares en cuatro categorías dependiendo de su comportamiento:

- Clase I: Autómatas con comportamientos constantes.
- Clase II: Autómatas con comportamientos periódicos.
- Clase III: Autómatas que muestran comportamientos caóticos.
- Clase IV: Autómatas que muestran comportamientos complejos.

El trabajo de Wolfram es importante por proponer una clasificación de los autómatas celulares dependiendo de sus comportamientos a largo plazo. Las descripciones anteriores de los trabajos fundamentales sugieren de manera no muy clara tanto la composición como el funcionamiento de un autómata celular, por lo cual es conveniente presentar a continuación una definición precisa de estos conceptos. Se puede definir a un autómata celular como un sistema dinámico discreto cuyo comportamiento es completamente determinado por una relación local. El espacio es representado por una red uniforme, con cada célula de la red tomando un estado en particular. El tiempo avanza en pasos discretos y las interacciones locales del autómata se expresan en una tabla. Cada célula usa esta tabla para computar su nuevo estado tomando como base su estado actual y el de sus vecinos cercanos. Así, las leyes que gobiernan el comportamiento del autómata son locales y homogéneas.

La definición anterior indica que otra teoría importante que enriquece el estudio de los autómatas celulares es la teoría de sistemas dinámicos. Esta empezó su desarrollo con los trabajos y resultados de Henri Poincaré y George D. Birkhoff y ha sido ampliamente desarrollada. Un tipo particular de sistema dinámico es aquel donde los estados del sistema y el tiempo son discretos. Los estados pueden ser representados por secuencias de símbolos y la dinámica del sistema esta dada por mapeos entre estas secuencias. Por lo tanto, los autómatas celulares son un caso particular de sistemas dinámicos discretos.

En este sentido, un artículo fundamental fue realizado por Gustav A. Hedlund. Presumiblemente la motivación de su trabajo fue la codificación y el cifrado de datos. Aunque Hedlund nunca usó el término “autómata celular”, él aplico el concepto para representar mapeos continuos o morfismos entre secuencias de símbolos [Hed69].

## 1.4 El caso reversible

Un tipo interesante de autómata celular es aquel cuyo comportamiento global es invertible, en otras palabras, cada uno de estos autómatas puede regresar a todos los estados globales que produjo anteriormente. Los autómatas celulares con estas características son llamados *reversibles* y su estudio matemático resulta relevante por la convergencia que tienen diversos campos de investigación: como computación concurrente, procesos que preservan

información, computación cuántica, modelado de sistemas granulares, codificación y cifrado de datos entre otros [TM87], [Wol86], [Ty101] y [KPD84].

Los autómatas celulares fueron inicialmente estudiados por biólogos, físicos y computólogos y tuvieron muy poca atención por parte de matemáticos. Esto puede ser el motivo de que el tema de reversibilidad, que en la teoría de sistemas matemáticos es obviamente relevante, fuera lentamente analizado. Por muchos años, los autómatas celulares reversibles parecían ser muy raros y lo que se sabía de ellos era fácilmente resumido. Sin embargo, esta falta de interés desaparece. En 1962, Edward F. Moore [Moo70] examina autómatas celulares con estados globales sin ancestros, este trabajo es continuado por John Myhill [Myh63]. El tema de reversibilidad es directamente abordado hasta 1972 por los artículos de Daniel Richardson [Ric72] y Serafino Amoroso y Yale N. Patt [AP72], que presentan un procedimiento sistemático para decidir si un autómata celular unidimensional es reversible o no. Pero parte de los resultados de estos artículos ya habían sido anticipados en un contexto matemático más abstracto por Hedlund.

En 1977, Toffoli prueba la existencia de autómatas reversibles que son también constructores universales o realizan computación universal. Independientemente, Fredkin había estudiado recurrencias invertibles por medio de primitivas booleanas [Fre91]. Tomando como base el trabajo de Hedlund, Masakazu Nasu define propiedades fundamentales de los autómatas reversibles usando herramientas gráficas [Nas78], [Nas79] y [Nas80].

A finales de los 80's, aparecen trabajos muy interesantes acerca de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. Usando la técnica de estados particionados, Kenichi Morita prueba la existencia de autómatas reversibles que hacen computación universal y que son autorreproductivos [Mor92] y [Mor95]. David Hillman [Hil91] y Hendrik Moraal [Mor00] presentan nuevos algoritmos para detectar autómatas celulares unidimensionales reversibles. Tim Boykett da un esquema algebraico para construir autómatas celulares reversibles [Boy94].

Aunque los diagramas de de Bruijn habían sido utilizados por Nasu, estos se vuelven populares para analizar el comportamiento local de los autómatas celulares unidimensionales reversibles gracias a los artículos de:

- Erica Jen quien los utiliza para calcular los ancestros de una secuencia de estados dada [Jen89].
- Harold V. McIntosh que establece procedimientos para verificar si un autómata celular es reversible [McI91a] y [McI91b].
- Burton H. Voorhees para obtener algunas propiedades para autómatas reversibles y sobrejectivos [Voo96].
- Klaus Sutner para definir una cota máxima del comportamiento inverso de una autómata reversible [Sut99a] y [Sut99b].

Surgen también diferentes formas de simular un autómata celular unidimensional con otro con tamaño de vecindad menor. En este sentido destacan los trabajos de Karel Culik II [II87] y de Christopher Moore y Tim Boykett [MB97, Boy97], el resultado de este último será muy importante para el desarrollo de esta tesis.

Hasta ahora, no existe una caracterización determinística completa del comportamiento local para todo autómata celular. Sin embargo, para el caso reversible, dicha caracterización

existe. En este sentido un artículo fundamental es desarrollado por Jarkko Kari [Kar96], en donde se explica como se conserva la información inicial de un autómata celular reversible durante su evolución. Este trabajo presenta una caracterización determinística basada en permutaciones en bloque y corrimientos, y posteriormente es generalizado en [Sec99] para todo autómata celular unidimensional reversible.

El estudio en dinámica simbólica está en relación estrecha con entender el comportamiento a largo plazo de los autómatas celulares. En dinámica simbólica, los autómatas reversibles son mapeos invertibles entre sistemas de corrimiento. En 1973 Robert F. Williams establece resultados matriciales importantes para comparar sistemas de corrimiento, incluyendo mapeos que coinciden con autómatas celulares unidimensionales reversibles [Wil73]. Esta investigación en base a matrices continúa con el trabajo de Mike Boyle [Boy93]. Excelentes referencias sobre este tema se encuentran en los libros de Douglas Lind y Bryan Marcus [LM95] y Bruce Kitchens [Kit98].

Los trabajos de Douglas Lind [Lin84], Wentian Li [LPL91], Karel Culik II et al. [IHY91a] [IHY91b] y el libro sobresaliente de Andrew Wuensche y Mike Lesser [WL92] presentan algunos de los primeros análisis dinámicos de los autómatas celulares. Estos trabajos han inspirado estudios más detallados. Nasu [Nas95], Gianpiero Cattaneo y Luciano Margara [CM98], Cattaneo et al. [CFMM99], Francois Blanchard et al. [BFK97, BKM97] y Mike Boyle y Alejandro Maass [BM00] entre otros presentan resultados teóricos sobre la dinámica topológica para algunas clases de autómatas reversibles.

Haciendo una revisión de los trabajos en autómatas celulares reversibles, uno puede pensar que estos ofrecen un conjunto de resultados no muy relacionados en cuatro direcciones:

- Estudios topológicos (trabajo de Hedlund).
- Estudios combinatorios (trabajos de Hedlund y Kari).
- Estudios en base a matrices y herramientas gráficas (trabajos de Nasu, Jen, McIntosh y otros).
- Análisis del comportamiento dinámico global (trabajos de Williams, Culik II, Nasu y otros).

De todo lo anterior se tienen dos problemas fundamentales los cuales fueron el motor de motivación de esta tesis. El primero consiste en encontrar la relación que existe entre estos puntos de vista, entrelazándolos para ofrecer una formalización de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. El segundo es definir una clasificación de este tipo de autómatas que tome en cuenta su comportamiento dinámico. En este sentido no se pretende presentar un conjunto de resultados teóricos que otros trabajos ya han producido, sino dar algunos procedimientos computacionales para conocer las características del comportamiento dinámico.

De esta manera, el objetivo es utilizar los estudios combinatorios y matriciales para explicar el comportamiento dinámico a largo plazo de este tipo de autómatas. El inicio es proporcionar o brindar a los autómatas celulares unidimensionales reversibles de una estructura natural y general que nos permita incursionar en los diferentes puntos de vista. Dicha estructura se determina mediante la introducción de una topología de conjuntos en el espacio de configuraciones, con el fin de analizar los autómatas celulares unidimensionales reversibles y estudiar su comportamiento.

En base a esta estructura se pueden definir y aplicar una serie de conceptos útiles tales como la cercanía entre configuraciones, las vecindades que una configuración tienen y los puntos límite para diferentes secuencias de configuraciones. Estos conceptos nos servirán para aplicar de la mejor forma los resultados matriciales y combinatorios que caracterizarán el comportamiento dinámico global de un autómata reversible. Así la topología de conjuntos nos permitirá el uso conjunto de la caracterización determinística de los autómatas celulares unidimensionales reversibles con resultados importantes relacionados con sistemas dinámicos discretos.

Algunos de los comportamientos dinámicos globales, en particular el periódico, pueden ser fácilmente caracterizados por medio de las permutaciones en bloque. Con el comportamiento periódico se presentará una clasificación de los autómatas celulares unidimensionales reversibles, la cual se implementará en un sistema computacional denominado RLCAU ofreciendo así una manera rápida y adecuada de comparar distintos autómatas reversibles.

Los resultados teóricos y métodos utilizados para entender el comportamiento periódico serán también aplicados para discutir otro tipo de comportamientos dinámicos, en particular los comportamientos transitivos. Se definirán métodos matriciales para encontrar y estudiar puntos transitivos, conjuntos topológicamente transitivos y topológicamente mezclados. Dado que se manejará una caracterización determinística, no se aplicarán herramientas probabilísticas y por lo tanto cuestiones acerca de medidas no serán examinadas en este trabajo.

## 1.5 Organización del trabajo

En la sección uno se presentó Este capítulo ha presentado los orígenes de la teoría de autómatas celulares, revisando particularmente la investigación en el caso reversible. Se ha explicado también la motivación y los alcances de esta tesis. Ahora la organización de la misma será presentada.

- El capítulo 2 presenta los conceptos básicos y la terminología usada en la teoría de autómatas celulares unidimensionales reversibles. Además se introducen los diagramas de de Bruijn como herramientas para analizar estos sistemas. Se explica también como simular un autómata celular unidimensional con otro de tamaño de vecindad 2. Se expone la caracterización de los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de permutaciones en bloque. Finalmente, se presenta el concepto de conjuntos de cilindros centrados y como estos representan subconjuntos del conjunto de configuraciones. Los conjuntos de cilindros son esenciales para definir la topología de estos sistemas.
- El capítulo 3 presenta los aspectos topológicos del conjunto de configuraciones. Se hace un análisis topológico de los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de los conjuntos de cilindros centrados. Se prueba que el conjunto de configuraciones es un espacio compacto y de Hausdorff por la topología inducida por los conjuntos de cilindros centrados. Con estas propiedades, se muestra que estos sistemas pertenecen al conjunto de secuencias límite inversas definidas sobre el conjunto de configuraciones. Se prueba también que la máxima distancia entre los ancestros de una configuración es  $1/2$ .

- El capítulo 4 describe los aspectos básicos de un sistema dinámico, en particular sobre su comportamiento periódico. Usando permutaciones en bloque y conjuntos de cilindros centrados, se da un procedimiento matricial para detectar algunas propiedades de este comportamiento. Con este proceso, se presenta una clasificación de los autómatas celulares unidimensionales reversibles.
- El capítulo 5 analiza la representación matricial de la regla de evolución por diagramas de de Bruijn. Se caracteriza la estructura espectral de estas matrices. Esta caracterización será útil para mostrar la multiplicidad uniforme de ancestros y para obtener la regla inversa de un autómata reversible. Finalmente, retomando el análisis del comportamiento global, se utiliza la matriz que representa el comportamiento periódico global para establecer una equivalencia fuerte con respecto al corrimiento entre autómatas reversibles de la misma clase periódica.
- Con una metodología similar, el capítulo 6 revisa algunas propiedades relacionadas con la dinámica topológica de los conjuntos de cilindros centrados en los autómatas reversibles. Se considera a la familia de conjuntos de cilindros centrados como un espacio métrico, ignorando cuestiones referentes a medidas. Se dan definiciones de puntos transitivos, conjuntos topológicamente transitivos y topológicamente mezclados. Se presenta una representación matricial y procedimientos computacionales para calcular algunos ejemplos de estos comportamientos.
- Finalmente, el capítulo 7 muestra las conclusiones y sugerencias para trabajos futuros relacionados al tema.

Al principio de cada capítulo aparece un resumen que expone sus motivaciones y los objetivos a desarrollar en este, y en la parte final de cada capítulo se dan una serie de observaciones en las cuales se discuten sus resultados y la relación que tienen con otros trabajos desarrollados por distintos investigadores en el área.

En la parte final de este escrito se tiene una lista de símbolos, una lista de figuras y una lista de las tablas presentadas a través de la tesis. Se da también un glosario con los términos mas importantes utilizados en la tesis. El sistema NXLCAU es ampliamente usado para obtener ejemplos ilustrativos de los resultados teóricos. Este sistema fue desarrollado por Harold V. McIntosh principalmente para análisis probabilístico y gráfico de los autómatas celulares unidimensionales, y esta disponible en su página en Internet: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>. Inspirado en este sistema, esta tesis presenta el sistema RLCAU el cual ofrece un ambiente experimental para analizar autómatas celulares unidimensionales reversibles con tamaño de vecindad 2.



# Capítulo 2

## Conceptos Básicos

### 2.1 Resumen

Este capítulo contiene: la notación, la terminología, la operación y las herramientas que se utilizan para el análisis de los autómatas celulares unidimensionales. Cabe mencionar que no existe una notación ni una nomenclatura uniforme en esta teoría. Diversos autores han utilizado formas diferentes de definir los componentes y herramientas utilizadas en el análisis de un autómata celular, un ejemplo es que algunos autores incluyen la dimensión en la definición del autómata o le dan diferente nombre al diagrama de de Bruijn. En este sentido, este capítulo tiene como objetivo exponer los conceptos más comunes en el análisis de los autómatas celulares y que son utilizados a través de esta tesis.

El funcionamiento de un autómata celular unidimensional se puede describir con un número pequeño de elementos. Las herramientas para el análisis de estos sistemas son aplicaciones básicas de la teoría de gráficas, combinatoria y topología de conjuntos. Los conceptos presentados en este capítulo serán el marco de trabajo general para el desarrollo de esta tesis. Otros conceptos más específicos se definirán en cada capítulo cuando esto sea necesario.

### 2.2 Definición de autómata celular unidimensional

Un autómata celular unidimensional consiste de un conjunto  $K$  de *estados*, cuya cardinalidad es  $k$ ; un arreglo (usualmente infinito)  $c$  de células indexadas por el conjunto  $\mathbb{Z}$  de enteros, donde cada célula toma un valor del conjunto  $K$ . Cada arreglo con una particular asignación de estados es una *configuración* del autómata. El conjunto de todas las posibles configuraciones se representa por  $C$ . De esta manera, el conjunto  $C$  es el conjunto de todas las funciones de  $\mathbb{Z}$  a  $K$ , tales funciones son solo secuencias infinitas en ambas direcciones de elementos de  $K$  [LM95].

En esta tesis un aspecto relevante es exponer las características topológicas del conjunto de configuraciones  $C$ , en donde se consideran dos propiedades básicas que resultan fundamentales para la construcción topológica. La primera consiste en definir los elementos mismos del conjunto, los cuales son secuencias de estados infinitas a ambos lados. La segunda estriba en la definición de los mapeos entre tales secuencias. En el proceso de la definición de los mapeos en un autómata celular unidimensional podemos establecer un sin número de ellos,

sin embargo se analizarán solamente aquellos definidos de la siguiente manera:

Para cada configuración  $c \in C$ , cada célula evoluciona a partir de su estado actual y el de sus  $r$  vecinos a cada lado, por lo que la dupla  $\mathcal{A} = (k, r)$  describe el autómata celular unidimensional. De esta forma la evolución depende de una *vecindad* determinada por cada célula y sus  $2r$  vecinos. De esta manera si  $K$  es el conjunto de valores que puede tomar cada célula, el mapeo del conjunto  $K^{2r+1}$  al conjunto  $K$  es una *regla de evolución*  $\varphi : K^{2r+1} \rightarrow K$ .

A cada célula de una configuración le corresponde un índice el cual es un elemento del conjunto de números entero  $\mathbb{Z}$ , tomando una posición central arbitraria con índice 0. Para cada célula  $x_i$  de cualquier configuración  $c_t$  se aplica la regla de evolución  $\varphi(x_{i-r}^t \dots x_i^t \dots x_{i+r}^t) = x_i^{t+1}$  donde el superíndice de cada célula significa tiempo, y esto se hace para cada  $x_i \in c_t$ . El resultado es una nueva configuración  $c_{t+1}$  donde los estados de cada célula son actualizados simultáneamente por la regla de evolución. De esta manera el mapeo local de la regla de evolución induce un mapeo global  $\Phi : C \rightarrow C$  entre configuraciones. Si consideramos una configuración inicial  $c_0$ , aplicando la regla de evolución a todas las células procederemos a obtener la configuración  $c_1$  y este proceso continúa de forma consecutiva para tiempos subsecuentes.

De lo anterior se desprende uno de los objetivos principales en el estudio de los autómatas celulares, si de la determinación de una regla local es posible predecir el comportamiento global. O bien si de un estado actual podemos decir cuales fueron los estados anteriores que lo originaron.

La solución del problema fundamental anterior requiere del uso de diversas teorías que permitan explicar el comportamiento de una autómata celular a partir de su regla de evolución  $\varphi$ . La teoría de gráficas es una de las más descriptivas que permiten llegar a análisis muy profundos. En el caso de los autómatas celulares unidimensionales los diagramas de de Bruijn son gráficas las cuales nos proporcionan descripciones simples y muy útiles para sus reglas de evolución.

Un primer paso para entender el comportamiento de un autómata celular es analizar su regla de evolución. Así, es deseable contar con una descripción simple y útil de la regla, esta descripción se obtiene en un sentido gráfico por medio de los diagramas de de Bruijn.

## 2.3 Diagramas de de Bruijn

Para entender la construcción y la utilidad de los diagramas de de Bruijn primero definiremos el concepto de gráfica dirigida. Una gráfica dirigida consiste de un conjunto finito de nodos junto con un conjunto finito de arcos donde cada arco empieza en un nodo y termina en otro (o posiblemente en el mismo nodo inicial). La dirección de cada arco está determinada por su nodo inicial y su nodo final, lo cual lo diferencia de otro arco que una a los mismo nodos pero en dirección contraria. Cada nodo y cada arco puede colorearse o etiquetarse con un símbolo.

Los diagramas de de Bruijn conforman un tipo especial de gráficas dirigidas, estos diagramas surgen debido a una serie de trabajos dedicados al estudio de registros de corrimientos de una secuencia de símbolos para la codificación de información. El nombre de estos diagramas se debe al trabajo desarrollado por N.G. de Bruijn como señala Golomb [Gol67].

En varios artículos (por ejemplo, los trabajos de McIntosh [McI91a] [McI91b] y Nasu [Nas78]) los diagramas de de Bruijn han sido utilizados para representar y analizar la regla

de evolución de un autómata celular unidimensional. Dada una regla de evolución, la construcción de su diagrama de de Bruijn asociado es la siguiente:

1. Los nodos son secuencias de  $2r$  estados, es decir el conjunto de nodos es  $K^{2r}$ .
2. Para  $w_1$  y  $w_2$  elementos de  $K^{2r}$ , existe un arco de  $w_1$  a  $w_2$  la secuencia final de  $2r - 1$  estados en  $w_1$  es igual a la secuencia inicial de  $2r - 1$  estados en  $w_2$ . Cada arco representa una secuencia de  $2r + 1$  estados o una vecindad completa del autómata, tomando en cuenta el estado inicial de  $w_1$ , la secuencia común de  $2r - 1$  estados en ambos nodos y el estado final de  $w_2$ .
3. Cada arco es etiquetado o coloreado con el estado en el cual evoluciona la vecindad que representa, según indique la regla de evolución  $\varphi$ .

De esta manera, las rutas del diagrama de de Bruijn son secuencias de estados que pueden formarse con la regla de evolución de un autómata celular unidimensional dado. Diferentes rutas que definen la misma secuencia de estados especifican diferentes ancestros de la misma.

Los diagramas de de Bruijn tienen su representación matricial que es importante por el uso de una gran cantidad de resultados que se tienen también en la teoría de matrices. Los ancestros de una secuencia particular tienen su representación matricial en donde los índices son los nodos del diagrama de de Bruijn. Si  $a, b$  es una pareja de nodos del diagrama y se tienen  $n$  rutas de  $a$  a  $b$  formando esta secuencia, entonces la entrada  $ab$  de la matriz es igual con  $n$ , en otro caso es cero.

El resultado de tener todas las entradas mayores o iguales a cero conduce a manejar la clase especial de matrices no negativas, que son las que representan los ancestros de una secuencia dada y se denominan “matrices de conectividad” de la secuencia. Inicialmente hay  $k$  matrices de conectividad, una para cada estado de  $K$ . Con el producto de estas matrices iniciales se obtienen las matrices de conectividad para secuencias más grandes. La suma de elementos de cada matriz de conectividad es igual al número de ancestros que esta matriz representa.

## 2.4 Transformación de un autómata celular unidimensional a otro de tamaño de vecindad 2

Para un autómata celular  $\mathcal{A} = (k, r)$  unidimensional, cada vecindad forma un estado aplicando la regla de evolución  $\varphi$ . Así, en general, cualquier ancestro de  $w \in K^n$  tiene  $n + 2r$  estados.

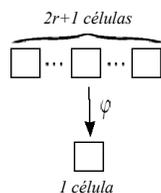


Figura 2.1: Cada ancestro de un estado dado tiene  $2r$  estados más.

Un ancestro de una secuencia de  $2r$  estados tendrá  $4r$  estados. Entonces, cada ancestro puede partitionarse en dos secuencias disjuntas de  $2r$  estados cada una.

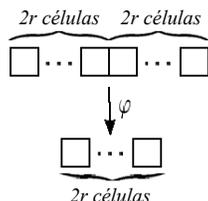


Figura 2.2: Ancestro de una secuencia de  $2r$  estados, este ancestro es dividido en dos secuencias de  $2r$  estados.

La idea es definir un nuevo conjunto  $S$  de estados con cardinalidad  $k^{2r}$ , en donde se representa cada secuencia de  $K^{2r}$  con un único estado de  $S$ . Sobre el conjunto  $S$  se define una nueva regla de evolución  $\tau$  que simula a la regla original  $\varphi$ . La regla  $\tau$  mapea elementos de  $S^2$  a  $S$ . Con esta transformación el autómata celular  $\mathcal{A} = (k, r)$  unidimensional puede ser simulado por otro autómata celular  $(k^{2r}, 1/2)$ .

Por supuesto, este proceso incrementa considerablemente el número de estados; esto es más notorio si originalmente el número de estados es grande. Sin embargo, la finalidad de llevar a cabo la transformación anterior es que si se define una propiedad particular en autómatas celulares  $(k, 1/2)$ , entonces esta propiedad se cumple también para todo el conjunto de autómatas celulares. A continuación se presentan las propiedades de los autómatas celulares unidimensionales reversibles.

## 2.5 Multiplicidad uniforme e índices de Welch

Antes de presentar las propiedades principales de los autómatas celulares unidimensionales reversibles, definiremos algunos conceptos que son útiles para el manejo de secuencias de estados y que facilitan el entendimiento del comportamiento reversible.  $K^n$  representa al conjunto de secuencias de longitud  $n$  formadas con elementos de  $K$ .  $K^*$  es el conjunto de todas las secuencias finitas de estados. Para  $w \in K^*$ ,  $w^*$  representa la secuencia de estados formada por la repetición indefinida de  $w$ . Una *extensión izquierda* de una secuencia es la concatenación de una o más células a la izquierda de la secuencia, análogamente se define una *extensión derecha*.

Para  $n \geq 2r + 1$  y  $w \in K^n$ ,  $\varphi(w) = w'$  significa aplicar la regla de evolución a todas las vecindades de la secuencia  $w$ , obteniendo una secuencia  $w' \in K^{n-2r}$ . Si  $\varphi(w) = w'$  entonces  $w$  es un *ancestro* de  $w'$ . Si la regla de evolución es tal que una secuencia  $w \in K^*$  nunca es producida durante la evolución del autómata no importando cual sea la configuración inicial, entonces se dice alegóricamente que  $w$  pertenece al Jardín del Edén de dicho autómata. En otras palabras,  $w$  no tiene ancestros y solo puede aparecer en la configuración inicial.

Un autómata celular es *reversible* si su mapeo global es invertible por la acción de una regla de evolución inversa a la original. El conjunto de estados del autómata permanece sin cambio, pero el tamaño de la vecindad en la regla inversa puede ser diferente al tamaño de la vecindad en la regla original. Cuando se tiene esta combinación, se dice que ambas reglas de evolución son invertibles.

La parte interesante de este comportamiento reversible es que la regla de evolución original mapea una vecindad de varias células a una sola; mientras que, la regla inversa necesita vecindades de varias células evolucionadas para generar una célula ancestral. Es decir, el comportamiento local en ambos casos no es reversible ya que el número de vecindades es más grande que el número de estados, sin embargo, este comportamiento local define un comportamiento global reversible. Así, primero se debe caracterizar el comportamiento local para entender la reversibilidad global.

Relativo a lo anterior Gustav A. Hedlund en un importante trabajo [Hed69], obtiene un resultado que es fundamental para la caracterización de los autómatas celulares unidimensionales reversibles.

**Propiedad 1 (Reversibilidad).** *Un autómata celular unidimensional es reversible si y sólo si cumple con lo siguiente:*

1. *[Multiplicidad Uniforme] Cada secuencia finita de estados en  $K^*$  tiene  $k^{2r}$  ancestros.*
2. *[Índices de Welch] Para un  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  y cada  $n \geq n_0$ , los ancestros de cada secuencia en  $K^n$  tienen  $L$  estados izquierdos distintos, una secuencia central única y  $R$  estados derechos distintos, cumpliendo con  $LR = k^{2r}$ .*

El primer enunciado de la propiedad 1 se denomina la multiplicidad uniforme de ancestros [McI91b]; y los valores de  $L$  y  $R$  en el segundo enunciado son conocidos como los índices de Welch [Hed69]. Así, en un autómata celular unidimensional reversible cada secuencia de estados tiene el mismo número de ancestros que todas las demás, sin importar su longitud o los estados que la conformen. Para  $n_0 \in \mathbb{Z}$  y para cada  $n \geq n_0$ , se tiene que los ancestros de cada secuencia en  $K^n$  tienen una parte central común y sus diferencias aparecen en los extremos. De lo anterior se desprende que los ancestros de cada  $w \in K^{n_0}$  definen una única forma en la cual  $w$  puede regresar en la evolución del autómata.

Si bien la propiedad 1 expone las condiciones locales presentes en un autómata celular unidimensional reversible, estas condiciones no explican de manera directa el comportamiento global reversible del autómata celular. En este sentido tenemos otro resultado notable desarrollado por Jarkko Kari [Kar96], quien define una caracterización determinística del comportamiento global de los autómatas celulares reversibles.

## 2.6 Permutaciones en bloque

El trabajo de Kari describe el mapeo entre configuraciones de un autómata celular reversible como la aplicación de dos permutaciones en bloque y un corrimiento entre ellas, lo cual también aclara la forma en que la información se conserva durante la evolución del autómata. A continuación especificaremos un procedimiento utilizando la propiedad de multiplicidad uniforme y los índices de Welch para conocer cuales son las permutaciones en bloque asociadas a un autómata celular  $\mathcal{A} = (k, r)$  unidimensional reversible.

Sean  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  las reglas invertibles asociadas con  $\mathcal{A} = (k, r)$ , tome el mayor tamaño de vecindad entre ambas reglas, y represente ambas con este tamaño de vecindad. Una secuencia de  $2r + 1$  células tiene  $k^{2r}$  ancestros con la regla  $\varphi$ , pero la misma secuencia evoluciona en una única célula aplicando la regla inversa  $\varphi^{-1}$ . De esta forma, cualquier secuencia con  $2r + 1$  células tiene  $k^{2r}$  ancestros que comparten la misma célula central (Figura 2.3).

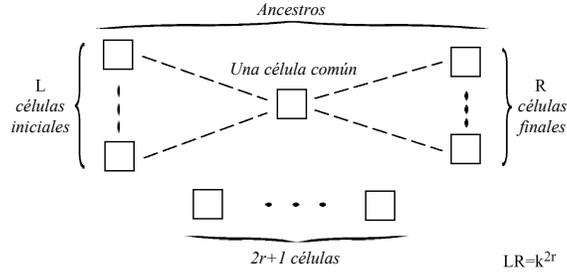


Figura 2.3: Ancestros de una vecindad en un autómata celular unidimensional reversible.

El procedimiento anterior puede extenderse para secuencias de tamaño mayor que  $2r + 1$ , una secuencia más grande es tomada como el traslape sucesivo de secuencias con longitud  $2r + 1$ . Para  $n \geq 2r + 1$ , una secuencia de longitud  $n$  tiene  $k^{2r}$  ancestros, cada uno con  $n + 2r$  células, donde estos ancestros tienen una secuencia central común de  $n - 2r$  células (Figura 2.4).

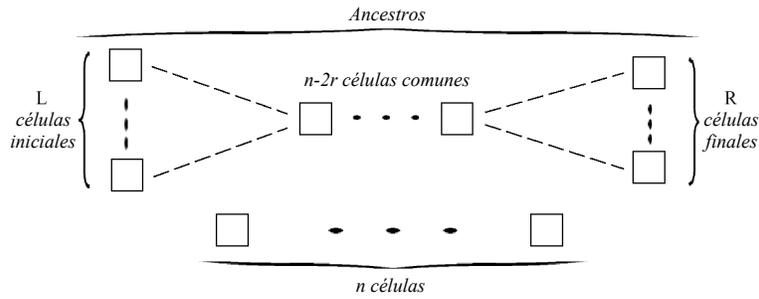


Figura 2.4: Ancestros de una secuencia de  $n$  células en un autómata reversible.

Para explicar como se definen las permutaciones en bloque, tomemos una secuencia de  $4r$  células la cual tiene  $k^{2r}$  ancestros de  $6r$  células cada una, estos ancestros tienen una secuencia central común de  $2r$  células (Figura 2.5).

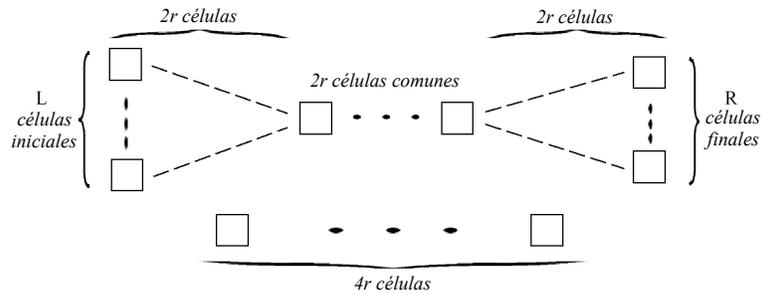


Figura 2.5: Ancestros de una secuencia de  $4r$  células.

El mismo comportamiento se presenta en la regla  $\varphi^{-1}$  pero en la dirección inversa y con valores intercambiados de los índices de Welch. Es decir, el índice  $L$  en la regla inversa es igual al índice  $R$  de la regla original, y el índice  $R$  en  $\varphi^{-1}$  es igual al índice  $L$  en  $\varphi$ . En base a la construcción de la Figura 2.5, se definen dos conjuntos  $L_\varphi$  y  $R_\varphi$  para una regla  $\varphi$  dada, donde un elemento de  $L_\varphi$  es una secuencia de  $2r$  células y la parte izquierda de uno de sus ancestros también con  $2r$  células. Esta situación es análoga para los elementos de  $R_\varphi$ .

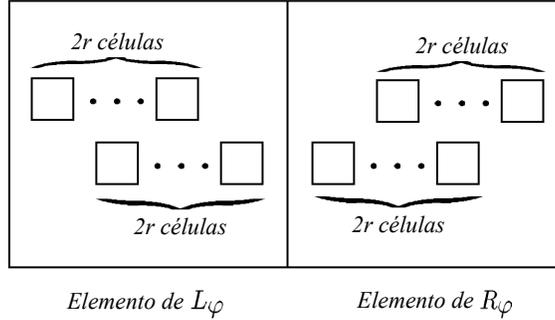


Figura 2.6: Elementos de  $L_\varphi$  y  $R_\varphi$ .

Si denotamos  $|A|$  la cardinalidad de cualquier conjunto  $A$ , entonces las cardinalidades de los conjuntos  $L_\varphi$  y  $R_\varphi$  están dadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 |L_\varphi| &= Lk^{2r} \\
 |R_\varphi| &= Rk^{2r}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Defina ahora dos conjuntos  $X$  y  $Y$  tales que  $|X| = |L_\varphi|$  y  $|Y| = |R_\varphi|$ , entonces podemos determinar dos biyecciones, una donde cada elemento de  $L_\varphi$  esté asociado con un único elemento de  $X$  y otra donde a cada elemento de  $R_\varphi$  le corresponda un único elemento de  $Y$ . Con esto se pueden definir dos permutaciones en bloque  $p_1$  y  $p_2$ .

La permutación  $p_1$  va del conjunto  $K^{6r}$  al conjunto de secuencias de la forma  $x_i y_j$ , donde  $x_i \in X$  y  $y_j \in Y$ , para  $0 \leq i < Lk^{2r}$  y  $0 \leq j < Rk^{2r}$ . La segunda permutación  $p_2$  va del conjunto  $K^{6r}$  al conjunto de secuencias de la forma  $y_j x_i$ . Con estas permutaciones, la evolución de cualquier autómata celular unidimensional reversible se puede expresar con la composición  $p_1 \circ p_2^{-1}$  y un corrimiento de  $3r$  células entre ambas permutaciones (Figura 2.7).

Esta caracterización determinística se utilizará en el análisis del comportamiento dinámico para autómatas  $\mathcal{A} = (k, 1/2)$  reversibles. Por este motivo, se necesitarán algunos conceptos adicionales los cuales proporcionen la noción de cercanía y distancia entre configuraciones, para esto utilizaremos los conjuntos de cilindros centrados.

## 2.7 Conjuntos de cilindros centrados

En la definición de los sistemas dinámicos es necesario precisar la estructura determinada por el conjunto de elementos y una métrica la cual establezca una distancia entre dichos elementos. A partir de esta definición estructural es posible llevar a cabo análisis acerca de que tan cercanos están los elementos del conjunto. En el caso de configuraciones de un

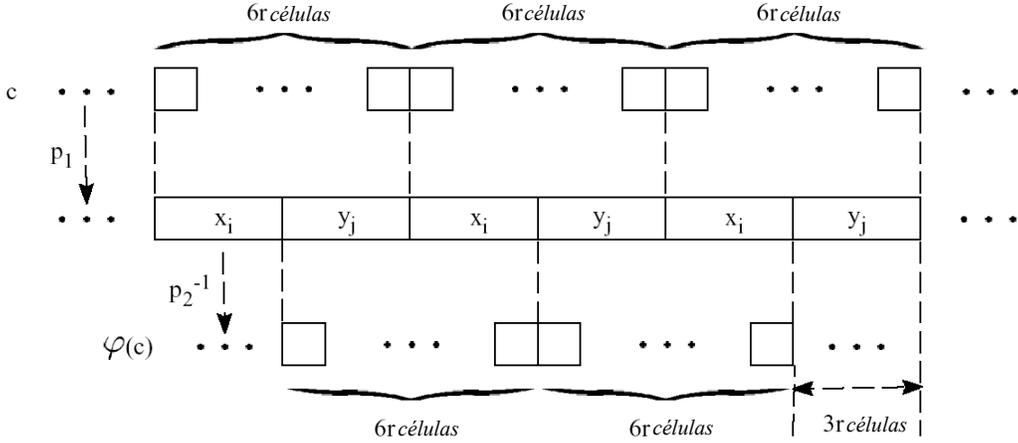


Figura 2.7: Evolución de un autómata celular unidimensional reversible representada por  $p_1 \circ p_2$ .

autómata celular unidimensional (que son un caso particular de secuencias de símbolos), a cada célula de una configuración le corresponde un índice entero, de tal forma que cada configuración tiene una posición central 0 con la cual podemos comparar que tan similar es con respecto a otras configuraciones. Este proceso nos conduce a la definición de conjunto de cilindros centrados.

**Definición 1.** *Un conjunto de cilindros centrados es un conjunto de configuraciones que tienen determinada la misma secuencia central finita de coordenadas contiguas con la misma secuencia finita de estados.*

No es esencial usar coordenadas contiguas pero esta condición simplificará los análisis posteriores. Con la Definición 1, para  $n \in \mathbb{N}$  y  $w \in K^{2n+1}$ , un conjunto de cilindros centrados está representado de la siguiente manera:

$$\mathcal{C}_{[w]} = \{c \in C \mid c_{[-n,n]} = w\} \quad (2.2)$$

Así, un conjunto de cilindros centrados es el conjunto infinito de configuraciones con sus partes centrales definidas por la misma secuencia  $w \in K^{2n+1}$  (Figura 2.8).

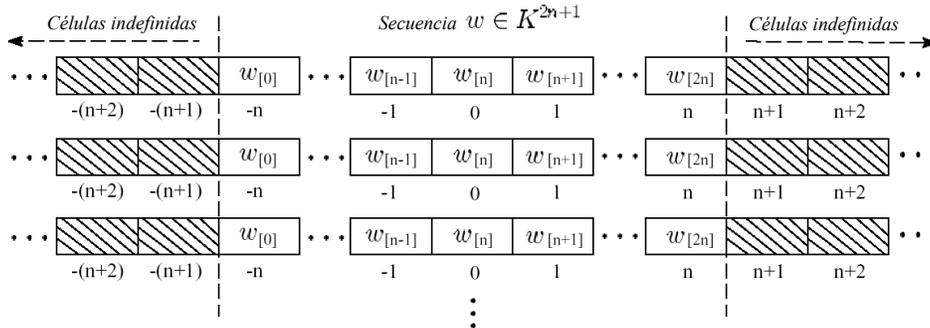


Figura 2.8: Un conjunto de cilindros centrados.

Sea  $pl \in K^n$ . Como las configuraciones están centradas en una posición 0, es conveniente usar un valor impar para  $n$ . Quizá el término “conjunto de cilindros centrados” no sea tan claro para especificar un conjunto de configuraciones con la misma parte central, pero solo se necesita algo de costumbre para recordarlo. Para una configuración  $c \in C$  y para  $i \in \mathbb{N}$ , el conjunto de cilindros centrados:

$$\mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}}] = \{c' \in C \mid c'_{[-i,i]} = c_{[-i,i]}\} \quad (2.3)$$

es el conjunto de configuraciones que coinciden con la configuración  $c$  en las  $2i + 1$  posiciones centrales. La definición de un conjunto de cilindros centrados solo toma en cuenta una parte finita de la configuración, no importando los estados del resto de las células en ésta. Sea  $K^n \subseteq K^*$  el conjunto completo de secuencias de  $n$  estados, con esto se define una familia de conjuntos de cilindros centrados de la siguiente manera:

$$\mathfrak{C}_{K^n} = \{\mathcal{C}_{[w]} \mid w \in K^n\} \quad (2.4)$$

Así, la familia  $\mathfrak{C}_{K^n}$  es una partición del conjunto  $C$ , pues cada configuración  $c \in C$  está en uno y sólo un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]} \in \mathfrak{C}_{K^n}$ . Para  $w_1, w_2$  elementos de  $K^*$ , si  $w_1$  es una subsecuencia central de  $w_2$ , entonces cualquier configuración en  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  está en  $\mathcal{C}_{[w_1]}$ .

$$\mathcal{C}_{[w_2]} \subset \mathcal{C}_{[w_1]} \quad (2.5)$$

De otra manera, si  $w_1$  no es una subsecuencia central de  $w_2$ , entonces:

$$\mathcal{C}_{[w_1]} \cap \mathcal{C}_{[w_2]} = \emptyset \quad (2.6)$$

ya que cada configuración en  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  es diferente de cada configuración en  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ . Por lo tanto, dados dos conjuntos de cilindros centrados, si su intersección no es vacía entonces la intersección es igual a uno de los conjuntos.

La definición de conjunto de cilindros centrados implica alguna confusión sobre la contención de los mismos. Para una secuencia  $w \in K^*$  que define el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$ , es natural pensar que las subsecuencias centrales de  $w$  definen conjuntos de cilindros centrados contenidos en  $\mathcal{C}_{[w]}$ . Pero en realidad se tiene el caso opuesto, la subsecuencia central más pequeña de  $w$  (que es un estado de  $K$ ) define un conjunto de cilindros centrados que contiene todos los otros conjuntos definidos por las otras subsecuencias centrales de  $w$ . Las subsecuencias centrales más pequeñas solo fijan unas pocas posiciones en las configuraciones, dejando el resto sin especificar. Así, secuencias más largas fijan más posiciones, dejando un menor número de posiciones libres y haciendo más restrictivos sus conjuntos de cilindros centrados correspondientes (Figura 2.9).

## 2.8 Observaciones finales

El funcionamiento local de un autómata celular unidimensional reversible es simple, sin embargo es algunas veces capaz de inducir un comportamiento global interesante como en el caso reversible. Autómatas celulares con un mapeo global sobreyectivo fueron también estudiados por Hedlund [Hed69], Nasu [Nas78] [Nas80] y Kari [Kar94]. Dos características fundamentales y muy sencillas de los autómatas celulares unidimensionales reversibles son la

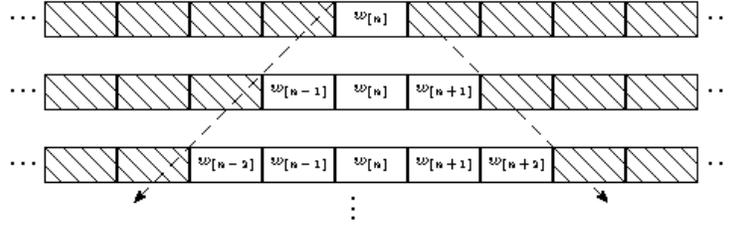


Figura 2.9: Conjuntos de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w[n]]}$ ,  $\mathcal{C}_{[w[n-1]w[n]w[n+1]]}$  y  $\mathcal{C}_{[w[n-2]w[n-1]w[n]w[n+1]w[n+2]]}$  definidos por las subsecuencias centrales de  $w \in K^{2n+1}$ .

multiplicidad uniforme de ancestros y los índices de Welch. Estas propiedades serán útiles para obtener otras propiedades importantes de los autómatas reversibles. Para más dimensiones, el caso reversible es más complicado y algunas cuestiones son indecidibles [Kar94]. Para más dimensiones solo unos cuantos tipos de autómatas reversibles han sido caracterizados, en particular los autómatas celulares aditivos han sido discutidos por Ito et al. [ION83], Barau y Ramakrishnan [BR96], Dow [Dow97] y Manzini y Margara [MM98] entre otros. Se han definido tres herramientas básicas las cuales son diagramas de de Bruijn, permutaciones en bloque y conjuntos de cilindros centrados. Estos conceptos serán de gran ayuda para entender el comportamiento dinámico de estos sistemas. Otras aplicaciones de los diagramas de de Bruijn se pueden encontrar en los trabajos de Jen [Jen89] y Voorhees [Voo96]. Permutaciones en bloque en más dimensiones han sido también analizadas por Durand-Lose [JL01].

# Capítulo 3

## Topología de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles

### 3.1 Resumen

Antes de investigar el comportamiento dinámico de un sistema, es necesario establecer una estructura que sea natural al sistema y con la cual fundamentar y formalizar su estudio dinámico. Este es precisamente el objetivo de utilizar la teoría de topología de conjuntos en el análisis de los autómatas celulares.

Con esta estructura se tendrá una manera formal de decidir cuando dos configuraciones están cercanas una de la otra, se podrán establecer conjuntos de configuraciones cercanas y en base a esto, caracterizar el comportamiento de las distintas secuencias de configuraciones establecidas por el mapeo global inducido por una regla de evolución dada.

Así, en este capítulo se explicará las características topológicas más importantes del conjunto de configuraciones de los autómatas celulares unidimensionales. Los autómatas reversibles serán discutidos por medio de conceptos básicos de topología de conjuntos, en particular se analizan las secuencias límite inversas formadas por estos autómatas. Se describe además la multiplicidad uniforme de ancestros en estas secuencias límite inversas y con esta propiedad se presenta una relación de equivalencia en el espacio de configuraciones. Finalmente, se prueba que cualquier pareja de ancestros en una clase de equivalencia tiene una máxima distancia igual a  $1/2$ .

### 3.2 Topología de los conjuntos de cilindros centrados

Aunque las propiedades de los autómatas celulares unidimensionales son bien conocidas, en muy pocos trabajos son completamente desarrolladas. Se dice usualmente que el espacio de configuraciones es un espacio topológico perfecto, totalmente desconexo, de Hausdorff, compacto, métrico y completo. A continuación se describirán las más importantes de estas características.

El objetivo principal en topología de conjuntos es encontrar una estructura natural en los elementos de un conjunto dado. Así, una primera meta es especificar la cercanía entre los elementos y sus límites [HY88] [Bau91]. Por lo tanto se requiere una manera formal

de definir que configuraciones son cercanas a una configuración dada, esto será establecido usando los conjuntos de cilindros centrados. Una manera inocente de dar una estructura al conjunto de configuraciones es definiendo un sistema de vecindades para cada configuración.

### 3.2.1 Sistemas de vecindades

#### 3.2.1.1 Concepto general

Sea  $X$  un conjunto y para cada  $x \in X$  sea  $\mathfrak{T}(x) = \{\mathcal{T}(x)\}$  una familia no vacía de subconjuntos de  $X$ ; entonces estos subconjuntos son vecindades de  $x$  si cumplen con las siguientes propiedades:

1.  $x$  pertenece a cada una de sus vecindades.
2. Si  $\mathcal{T}_1(x) \subseteq \mathcal{T}_2(x)$ , entonces  $\mathcal{T}_2(x)$  es también una vecindad de  $x$ , así, conjuntos más grandes cuentan como vecindades también.
3. La intersección finita de vecindades es también una vecindad.
4. Si  $\mathcal{T}_1(x) \subseteq \mathcal{T}_2(x)$  y  $x' \in \mathcal{T}_1(x)$  entonces  $\mathcal{T}_2(x)$  es también una vecindad de  $x'$ , es decir, conjuntos más grandes son vecindades de más elementos.

Así  $\mathfrak{T}(x)$  es un sistema de vecindades de  $x$  y la colección  $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{T}(x)\}$  es un sistema de vecindades de  $X$ . De esta forma, la pareja  $(X, \mathfrak{T})$  define un espacio topológico con topología  $\mathfrak{T}$ , en otras palabras, un sistema de vecindades define un conjunto de puntos cercanos a un elemento  $x \in X$ .

#### 3.2.1.2 Sistemas de vecindades en autómatas celulares unidimensionales

En autómatas celulares, una configuración  $c$  define la siguiente familia de conjuntos de cilindros centrados:

$$\mathfrak{C}_c = \left\{ \mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \quad (3.1)$$

Esta familia cumple las mismas propiedades que un sistema de vecindades en un espacio topológico.

1.  $c$  pertenece a cada  $\mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]}$  en  $\mathfrak{C}_c$ .
2. Para  $0 \leq j \leq i$ , se cumple tanto que  $\mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]} \subseteq \mathcal{C}_{[c_{[-j,j]}]}$  como que la configuración  $c$  pertenece a cada  $\mathcal{C}_{[c_{[-j,j]}]}$ .
3. Para  $0 \leq j \leq i$ , se cumple que  $\mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]} \cap \mathcal{C}_{[c_{[-j,j]}]} = \mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]}$  por las propiedades de la intersección de conjuntos de cilindros centrados presentadas en la sección 2.7.
4. Para  $0 \leq j \leq i$ ,  $c$  y  $c'$  elementos de  $C$  con  $c \neq c'$ , y  $\mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]} \subseteq \mathcal{C}_{[c_{[-j,j]}]}$ , si  $c' \in \mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]}$  entonces  $c'_{[-i,i]} = c_{[-i,i]}$ , así  $c'_{[-j,j]} = c_{[-j,j]}$  y por lo tanto  $\mathcal{C}_{[c_{[-j,j]}]}$  es una vecindad de  $c'$ .

De esta forma, la familia  $\mathfrak{C}_c$  es un sistema de vecindades para cada configuración  $c \in C$ .  
Sea

$$\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}_c \mid c \in C\} \tag{3.2}$$

la colección de sistemas de vecindades. Entonces la pareja  $(C, \mathfrak{C})$  define el espacio topológico de configuraciones de los autómatas celulares unidimensionales, y  $\mathfrak{C}$  es la topología asociada. Así, una topología en el conjunto de configuraciones está dada por la familia de conjuntos de cilindros centrados, ya cada conjunto de cilindros centrados define un conjunto de configuraciones cercanas entre si.

### 3.2.2 Conjuntos abiertos

Del concepto general de vecindades, se definirá ahora el concepto de conjuntos abiertos. Estos conjuntos son vecindades con propiedades más restrictivas.

#### 3.2.2.1 Concepto general

Sea  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio topológico, un subconjunto  $\mathcal{O} \subseteq X$  es abierto si  $\mathcal{O}$  es una vecindad de cada uno de sus elementos. De esta manera, un conjunto abierto posee una cercanía más fuerte entre sus elementos.

#### 3.2.2.2 Conjuntos abiertos en autómatas celulares unidimensionales

Para el espacio topológico de configuraciones  $(C, \mathfrak{C})$ , cada conjunto de cilindros centrados es un conjunto abierto ya que es vecindad de cada una de sus configuraciones. La familia de conjuntos abiertos es igual a la familia  $\mathfrak{C}$  de conjuntos de cilindros centrados. Así, una familia dada de conjuntos de cilindros centrados cubriendo todo el conjunto de configuraciones es tanto un sistema de vecindades como un sistema de abiertos del espacio de configuraciones. Esta familia muestra que configuraciones están cercanas a una configuración dada. Con esta noción intuitiva de cercanía entre los puntos de un conjunto, ahora se definirá el concepto de punto límite.

**Definición 2.** *Dado un espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$  y un subconjunto  $A \subseteq X$ , el elemento  $x \in X$  es un punto límite de  $A$  si para cada vecindad  $\mathcal{T}(x) \in \mathfrak{T}(x)$  la intersección  $\mathcal{T}(x) \cap A$  tiene al menos un punto  $x' \neq x$ .*

Puntos límite juegan un rol central en topología de conjuntos, pues definen la cerradura de un conjunto en un espacio topológico.

### 3.2.3 Conjuntos cerrados

Algunas preguntas razonables acerca de espacios topológicos son si existen conjuntos que contienen a sus puntos límite y que propiedades tienen tales conjuntos.

### 3.2.3.1 Concepto general

Para un espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$ , la cerradura de un subconjunto  $A \subseteq X$  descrita por  $\overline{A}$  es la unión de  $A$  y de sus puntos límite. Un subconjunto  $A$  es cerrado si contiene todos sus puntos límite. Una propiedad relevante sobre conjuntos cerrados se muestra en el Teorema 1. Este será utilizado en la Sección 3.2.5 para caracterizar la intersección de subconjuntos en espacios compactos.

**Teorema 1.** *En un espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$ , un conjunto  $A \subseteq X$  es cerrado sí y solo si el complemento de  $A$  descrito por  $A^c$  es abierto.*

*Demostración.* Sea  $A$  cerrado. Para cada  $x \in A^c$ ,  $x$  no es un punto límite de  $A$ . Entonces existe una vecindad  $\mathcal{T}(x) \in \mathfrak{T}(x)$  tal que  $\mathcal{T}(x) \cap A = \emptyset$ . Pero  $\mathcal{T}(x) \subseteq A^c$ , entonces  $A^c \in \mathfrak{T}(x)$  por las propiedades de los sistemas de vecindades. Así  $A^c$  es una vecindad de todos sus elementos y por lo tanto es abierto.

En el otro sentido, sea  $A^c$  abierto. Sea  $x \in \overline{A}$  y suponga que  $x \in A^c$ , entonces  $A^c$  es una vecindad de  $x$  y  $A^c \cap A \neq \emptyset$  por la Definición 2. Pero esto es una contradicción, así  $x \in A$  y  $\overline{A} \subseteq A$ . Lo contrario es también verdad, es decir  $A \subseteq \overline{A}$ , entonces  $A = \overline{A}$ , y  $A$  es cerrado.  $\square$

### 3.2.3.2 Conjuntos cerrados en autómatas celulares unidimensionales

En el espacio de configuraciones, cada conjunto de cilindros centrados contiene todos sus puntos límite. Si éste no fuera el caso, entonces existe una configuración tal que cada conjunto de cilindros centrados que lo contiene tiene una intersección no vacía con otro conjunto de cilindros centrados. Pero cada una de estas intersecciones es vacía lo cual no es posible, o un conjunto contiene al otro por sus propiedades de intersección. Entonces, la configuración está en ambos cilindros.

Cada configuración en un conjunto de cilindros centrados es un punto límite del mismo ya que para cada  $c \in \mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]}$  siempre existe otra  $c' \in \mathcal{C}_{[c_{[-i,i]}]}$  con  $c' \neq c$ . De esta forma, cada conjunto de cilindros centrados es abierto y cerrado al mismo tiempo.

## 3.2.4 Espacios de Hausdorff

Hasta ahora se han establecido algunas definiciones para encontrar que puntos están cercanos a uno dado en un espacio topológico. Se presentará a continuación la separación que existe entre estos puntos. Esta separación será útil para caracterizar un espacio topológico y tendrá aplicaciones relevantes. En algunos casos, puntos separados tiene vecindades disjuntas y el espacio es igualmente separado por puntos o por vecindades.

### 3.2.4.1 Concepto general

Sea  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio topológico, entonces  $\mathfrak{T}$  es una topología de Hausdorff (conocida formalmente como  $T_2$ ) si para cada pareja  $x, x'$  en  $X$  con  $x' \neq x$ , existen vecindades  $\mathcal{T}(x) \in \mathfrak{T}(x)$  y  $\mathcal{T}(x') \in \mathfrak{T}(x')$  tales que  $\mathcal{T}(x) \cap \mathcal{T}(x') = \emptyset$ .

Entonces en un espacio de Hausdorff siempre existe una forma de separar un punto de otro. Esto será importante para caracterizar los mapeos de un espacio topológico.

### 3.2.4.2 Espacio de Hausdorff en autómatas celulares unidimensionales

Tome dos configuraciones distintas  $c, c'$  de  $C$ , entonces existe un entero  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $c_{[i]} \neq c'_{[i]}$ . Para  $j = |i|$ , ambos conjuntos de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[c_{[-j,j]}]}$  y  $\mathcal{C}_{[c'_{[-j,j]}]}$  son disjuntos, por lo tanto el espacio de configuraciones  $(C, \mathfrak{C})$  es un espacio de Hausdorff. De esta manera, el espacio de configuraciones es la unión de vecindades disjuntas (es decir, de conjuntos de cilindros centrados disjuntos). Esta propiedad será utilizada en la sección siguiente.

## 3.2.5 Espacios compactos

Un espacio de Hausdorff es representado por la unión de vecindades disjuntas. Una pregunta interesante es si un número finito de vecindades es suficiente para cubrir y representar todo el espacio. Esta es la idea detrás de los espacios compactos. En algunas partes de esta tesis se manejarán varios conjuntos al mismo tiempo, por lo que se usará un conjunto de índices para ordenarlos.

### 3.2.5.1 Concepto general

Sean  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio topológico,  $B$  un conjunto de índices y  $\{A_\alpha \mid \alpha \in B\}$  una familia arbitraria de subconjuntos de  $X$  indexada por  $B$ . Entonces  $\{A_\alpha\}$  es un cubrimiento de  $X$  si:

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha \quad (3.3)$$

Si cada subconjunto  $A_\alpha$  es abierto entonces el cubrimiento  $\{A_\alpha\}$  es abierto también. El espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$  si cada cubrimiento abierto de  $X$  contiene un subcubrimiento abierto finito. Así, un espacio compacto puede ser analizado con un número finito de subconjuntos, lo cual facilita el estudio. El Teorema 2 presenta una propiedad importante sobre la intersección de subconjuntos en espacios compactos. Este teorema se aplicará en la siguiente sección para caracterizar este tipo de espacios.

**Teorema 2.** *Sea  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio topológico compacto y sea  $B$  un conjunto de índices. Cada familia de subconjuntos cerrados  $\{A_\alpha \mid \alpha \in B, A_\alpha \subseteq X\}$  cumple que  $\bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha = \emptyset$  si y solo si existe un subconjunto finito  $F \subseteq B$  tal que  $\bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha = \emptyset$ .*

*Demostración.* Tome el complemento de cada subconjunto cerrado:

$$\mathcal{O}_\alpha = (A_\alpha)^c$$

entonces cada conjunto  $\mathcal{O}_\alpha$  es abierto por el Teorema 1. Usando complementos, se obtiene lo siguiente:

$$\bigcup_{\alpha \in B} \mathcal{O}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in B} (A_\alpha)^c = \left[ \bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha \right]^c = \emptyset^c = X \quad (3.4)$$

Así la familia  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  es un cubrimiento de  $X$ . Por hipótesis, el espacio  $(X, \mathfrak{T})$  es compacto, entonces existe un subconjunto finito  $F \subseteq B$  tal que:

$$\bigcup_{\alpha \in F} \mathcal{O}_\alpha = X$$

la prueba se finaliza aplicando un proceso similar al mostrado en la Ecuación 3.4:

$$\emptyset = X^c = \left[ \bigcup_{\alpha \in F} \mathcal{O}_\alpha \right]^c = \bigcap_{\alpha \in F} (\mathcal{O}_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha$$

Por el otro lado, suponga que existe un  $F \subseteq B$  finito tal que:

$$\bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha = \emptyset$$

Entonces usando el complemento de cada  $A_\alpha$  se obtiene lo siguiente:

$$\emptyset^c = \left[ \bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha \right]^c = \bigcup_{\alpha \in F} (A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in F} \mathcal{O}_\alpha = X$$

La familia  $\{(A_\alpha)^c \mid \alpha \in F\}$  es un cubrimiento abierto finito de  $X$  y por lo tanto la familia completa  $\{(A_\alpha)^c \mid \alpha \in B\}$  es un cubrimiento abierto de  $X$ . De esta manera, se tiene que:

$$\bigcup_{\alpha \in B} (A_\alpha)^c = \left[ \bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha \right]^c = X$$

satisfaciendo además que:

$$\bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha = \emptyset$$

□

La conveniencia de trabajar con espacios compactos es que existen propiedades importantes acerca de familias finitas de subconjuntos, y además de que el espacio puede tratarse como si fuera finito.

### 3.2.5.2 Espacios compactos en autómatas celulares unidimensionales

La familia de conjuntos de cilindros centrados es un cubrimiento abierto del espacio de configuraciones. Pero esta familia puede representarse por una familia finita de conjuntos de cilindros centrados, en particular, por cualquier familia similar a la definida en la Ecuación 2.4. Por lo tanto, el espacio de configuraciones es compacto. Esta propiedad será muy útil para tratar a los mapeos continuos (Sección 3.3).

### 3.2.6 Propiedad de intersección finita

Otra propiedad importante en espacios topológicos referente a la intersección de subconjuntos se da a continuación.

### 3.2.6.1 Concepto general

Sean  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio topológico,  $B$  un conjunto contable de índices y  $\{A_\alpha \mid \alpha \in B\}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . La familia  $\{A_\alpha\}$  cumple con la propiedad de intersección finita si para cualquier subconjunto finito  $F \subseteq B$ , la intersección finita de subconjuntos de la familia no es vacía. La propiedad de intersección finita tiene considerable relevancia para caracterizar espacios compactos, como se muestra en el siguiente resultado:

**Teorema 3.** *Sea  $B$  un conjunto contable de índices. El espacio topológico  $(X, \mathfrak{T})$  es compacto si y solo si cada familia de subconjuntos cerrados  $\{A_\alpha \mid \alpha \in B, A_\alpha \subseteq X\}$  con la propiedad de intersección finita satisface que  $\bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Sea  $(X, \mathfrak{T})$  un espacio compacto y sea  $\{A_\alpha \mid \alpha \in B, A_\alpha \subseteq X\}$  una familia de subconjuntos cerrados de  $X$  con la propiedad de intersección finita. Suponga que:

$$\bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha = \emptyset$$

entonces por el Teorema 2, existe un subconjunto finito  $F \subseteq B$  tal que:

$$\bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha = \emptyset$$

pero esto contradice que  $\{A_\alpha\}$  cumpla con la propiedad de intersección finita, por esto:

$$\bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha \neq \emptyset$$

Por otro lado, sea la familia de subconjuntos abiertos  $\{\mathcal{O}_\alpha \mid \alpha \in B\}$  un cubrimiento abierto del conjunto  $X$  y suponga que para cada subconjunto finito  $F \subseteq B$ , la unión finita de conjuntos abiertos de la familia no cubra completamente el conjunto  $X$ . Entonces se tiene que:

$$\left[ \bigcup_{\alpha \in F} \mathcal{O}_\alpha \right]^c \neq \emptyset$$

Tome los complementos  $(\mathcal{O}_\alpha)^c = A_\alpha$ , así para cada subconjunto finito  $F \subseteq B$  se cumple lo siguiente:

$$\left[ \bigcup_{\alpha \in F} \mathcal{O}_\alpha \right]^c = \bigcap_{\alpha \in F} (\mathcal{O}_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in F} A_\alpha \neq \emptyset$$

En este caso  $\{A_\alpha\}$  cumple con la propiedad de intersección finita. Suponga que  $\{A_\alpha\}$  satisface que  $\bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha \neq \emptyset$ , entonces se obtiene que:

$$\emptyset \neq \bigcap_{\alpha \in B} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in B} (\mathcal{O}_\alpha)^c = \left[ \bigcup_{\alpha \in B} \mathcal{O}_\alpha \right]^c$$

Así, la familia  $\{\mathcal{O}_\alpha\}$  no es un cubrimiento abierto de  $X$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe un subconjunto finito  $F \subseteq A$  tal que  $\bigcup_{\alpha \in F} \mathcal{O}_\alpha = X$  y  $(X, \mathfrak{T})$  es un espacio compacto.

□

Este resultado es útil para generar espacios compactos por medio del producto topológico de espacios compactos. Una aplicación importante del Teorema 3 se da en el teorema de Tychonoff utilizando también la propiedad de intersección finita y el lema de Zorn. El teorema de Tychonoff será esencial cuando las secuencias límite inversas sean definidas y analizadas en la Sección 3.3. Los conceptos anteriores muestran tanto puntos cercanos como puntos lejanos a un punto o a un conjunto dado en un espacio topológico. Ahora es deseable mostrar que tan cerca o que tan lejos está un punto de otro.

### 3.2.7 Espacios métricos

La idea en espacios métricos es tener una función entre cada par de elementos del espacio tal que ésta defina una medida de la cercanía de estos elementos, conforme a una noción intuitiva de distancia.

#### 3.2.7.1 Concepto general

Tome el conjunto  $X$ , los elementos  $x_1, x_2, x_3$  de  $X$ ; y sea  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función que mapea elementos del producto cartesiano de  $X$  al conjunto de los reales positivos, tal que:

- La función es definida positiva, es decir  $d(x_1, x_2) \geq 0$  y  $d(x_1, x_2) = 0$  sí y sólo si  $x_1 = x_2$ .
- La función es simétrica,  $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ .
- La función cumple con la desigualdad triangular,  $d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \geq d(x_1, x_3)$ .

entonces el espacio topológico es métrico y la función  $d$  es una métrica sobre  $X$ . La métrica  $d$  debe coincidir con la topología  $\mathfrak{T}$  del conjunto  $X$ . Para cada elemento  $x \in X$  se define una esfera abierta  $S_\epsilon(x)$  como:

$$S_\epsilon(x) = \{x' \mid d(x, x') < \epsilon, x' \in X, \epsilon \in \mathbb{R}^+\} \quad (3.5)$$

con esto, una familia de esferas abiertas es también definida como sigue:

$$\{S_\epsilon(x) \mid x \in X, \epsilon \in \mathbb{R}^+\} \quad (3.6)$$

La Ecuación 3.6 define la familia de subconjuntos abiertos del espacio topológico  $X$ .

#### 3.2.7.2 Espacios métricos en autómatas celulares unidimensionales

En este caso, una métrica en el conjunto de configuraciones se establece tomando una posición central en cada configuración y comparando la similitud de sus secuencias centrales. Para cada pareja  $c, c'$  de configuraciones, la métrica  $d(c, c')$  se define como:

$$d(c, c') = \begin{cases} 0 & \text{if } c = c'. \\ \frac{1}{1+m}, & m \in \mathbb{N}, \quad m \text{ es el mínimo valor tal que} \\ & c_{[-m]} \neq c'_{[-m]} \text{ ó } c_{[m]} \neq c'_{[m]}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Para cualquier número natural  $m$ , se puede tomar el valor:

$$\epsilon = \frac{1}{1+m} \quad (3.8)$$

entonces una esfera abierta se define como:

$$S_\epsilon(c) = \{c' \mid c' \in C, d(c, c') < \epsilon\} \quad (3.9)$$

pero esta esfera abierta coincide con el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[c_{[-m,m]}]}$ , y el valor  $\epsilon$  toma sólo valores del intervalo real  $(0, 1]$ . De esta manera, la familia de esferas abiertas tiene la siguiente forma:

$$\{S_\epsilon(c) \mid c \in C, \epsilon \in (0, 1]\} = \left\{ \mathcal{C}_{[c_{[-m,m]}]} \mid c \in C, m \in \mathbb{N} \right\} \quad (3.10)$$

la familia así generada coincide con la familia de conjuntos de cilindros centrados y con la topología del conjunto de configuraciones. Usando esta métrica, se pueden analizar secuencias convergentes de configuraciones y sus límites.

Hasta ahora, se ha visto que la familia de conjuntos de cilindros centrados define una topología en el conjunto de configuraciones. Este conjunto es un espacio de Hausdorff, compacto y métrico. Estas propiedades topológicas serán utilizadas para caracterizar a los autómatas celulares unidimensionales reversibles.

### 3.3 Secuencias límite inversas

En su trabajo, Hedlund prueba que todos los mapeos continuos entre configuraciones que conmutan con el corrimiento son reglas de evolución de autómatas celulares unidimensionales [Hed69]. En esta sección se analizará un caso especial de estos mapeos, los de tipo reversible.

Cada una de estas reglas debe satisfacer tanto que cada configuración tenga al menos un ancestro, como que el mapeo global inducido por ésta sea un automorfismo en el conjunto de configuraciones. Estas reglas pertenecen a la clase de autómatas celulares unidimensionales sobreyectivos, los cuales serán primero examinados. A continuación, se define un tipo especial de secuencias sobre un espacio topológico por medio de mapeos continuos.

#### 3.3.1 Concepto general

**Definición 3.** Sea  $(X, \mathfrak{T})_0, (X, \mathfrak{T})_1, \dots$  una colección contable de espacios topológicos. Si existe un mapeo continuo  $\Psi : (X, \mathfrak{T})_i \rightarrow (X, \mathfrak{T})_{i-1}$  de cada espacio al que lo precede, entonces la secuencia de mapeos y espacios  $\{(X, \mathfrak{T})_i, \Psi_i\}$  se denomina una secuencia límite inversa y se representa como:

$$\dots \xrightarrow{\Psi_{i+1}} (X, \mathfrak{T})_i \xrightarrow{\Psi_i} (X, \mathfrak{T})_{i-1} \dots \xrightarrow{\Psi_2} (X, \mathfrak{T})_1 \xrightarrow{\Psi_1} (X, \mathfrak{T})_0 \quad (3.11)$$

La motivación detrás del estudio de las secuencias límite inversas es observar que tan atrás puede regresar un mapeo continuo en la historia pasada de un punto en un espacio topológico dado.

### 3.3.2 Secuencias límite inversas en autómatas celulares unidimensionales

Para cada  $i \in \mathbb{N}$  tome todos los espacios topológicos  $(X, \mathfrak{T})_i$  iguales al espacio de configuraciones, y todos los mapeos  $\Psi_i$  son iguales al mapeo global  $\Phi$  entre configuraciones inducido por una regla de evolución  $\varphi$ . Con estos elementos, una secuencia límite inversa es el mapeo entre conjuntos de cilindros centrados generado por el mapeo global del espacio de configuraciones.

Para un autómata celular unidimensional con un radio de vecindad  $r$  que no es entero, se define un nuevo mapeo global  $\Phi' = \Phi \circ \Phi$  con la composición  $\varphi' = \varphi \circ \varphi$  de la regla de evolución. De esta manera se produce un radio de vecindad entero  $r' = 2r$ . Así, la forma genérica de una secuencia límite inversa en el espacio de configuraciones es:

$$\cdots \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_{[w_i]} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_{[w_{i-1}]} \cdots \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_{[w_1]} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_{[w_0]} \quad (3.12)$$

donde cada secuencia de estados  $w_i$  es un elemento del conjunto:

$$\{w_i \mid w_i \in K^{(2r)^{i+1}}, i \in \mathbb{N}, \varphi(w_i) = w_{i-1} \text{ if } i > 0\} \quad (3.13)$$

Una pregunta razonable es si existe un conjunto  $\mathcal{C}_{[\infty]}$  de secuencias límite inversas de conjuntos de cilindros centrados tal que cada secuencia no tenga un límite, es decir, que existan mapeos globales donde cada una de sus secuencias límite inversas tenga siempre un conjunto de cilindros centrados que sea ancestro del último conjunto especificado en la secuencia.

Con las propiedades topológicas del espacio de configuraciones, se probará la existencia del conjunto  $\mathcal{C}_{[\infty]}$  y se mostrará además que cada autómata celular unidimensional sobreyectivo pertenece a  $\mathcal{C}_{[\infty]}$ .

### 3.3.3 Existencia del conjunto $\mathcal{C}_{[\infty]}$ en el espacio de configuraciones

En esta sección se hará un énfasis especial sobre las propiedades compactas y de Hausdorff del espacio de configuraciones. El desarrollo de la prueba de la existencia de  $\mathcal{C}_{[\infty]}$  seguirá el siguiente orden:

1. En base al teorema de Tychonoff, se probará que el producto topológico  $\mathfrak{F}$  del espacio de configuraciones  $(C, \mathfrak{C})$  es compacto.
2. Se definirá una familia  $\{\mathfrak{F}_i\}$  de conjuntos que contienen todas las secuencias límite inversas con la propiedad de intersección finita. Esta familia es parte del producto topológico  $\mathfrak{F}$ .
3. Finalmente, el Teorema 3 será aplicado para probar que la familia  $\{\mathfrak{F}_i\}$  tiene una intersección infinita no vacía y por lo tanto la existencia del conjunto  $\mathcal{C}_{[\infty]}$  quedará probada.

### 3.3.3.1 Compacidad del producto topológico del espacio de configuraciones

Para mostrar la compacidad del producto topológico del espacio de configuraciones, se necesita una forma adecuada de seleccionar elementos de un conjunto dado. Por tal motivo se utilizará el lema de Zorn:

**Lema 1 (Lema de Zorn).** *Sea  $X$  un conjunto parcialmente ordenado donde cada subconjunto simple ordenado de  $X$  tiene una cota superior en  $X$ . Entonces  $X$  tiene un elemento maximal. Es decir, si para cada  $A \subseteq X$  (donde  $A$  es un subconjunto simple ordenado) existe un  $x_m \in X$  tal que cualquier elemento  $x \in A$  satisface que  $x \leq x_m$ , entonces existe un elemento maximal  $x_M \in X$  tal que para cualquier  $x_m \in X$ ,  $x_m$  y  $x_M$  son incomparables o  $x_m \leq x_M$ .*

Por medio del Lema 1 se probará que, dado un conjunto  $X$  cuyos subconjuntos tengan la propiedad de intersección finita, existe una familia maximal de subconjuntos con dicha propiedad.

**Lema 2.** *Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathfrak{A} = \{A_i\}$  una familia de subconjuntos de  $X$  con la propiedad de intersección finita, entonces existe una familia  $\mathfrak{G}'$  de subconjuntos de  $X$  con las siguientes propiedades:*

1. *La familia  $\mathfrak{G}'$  tiene la propiedad de intersección finita.*
2. *La familia  $\mathfrak{G}'$  contiene a la familia  $\mathfrak{A}$ .*
3.  *$\mathfrak{G}'$  es maximal con respecto a las propiedades 1 y 2.*
4. *Cualquier intersección de subconjuntos de  $\mathfrak{G}'$  es un subconjunto de  $\mathfrak{G}'$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{D}$  la colección completa de familias de subconjuntos de  $X$ , donde cada familia en  $\mathfrak{D}$  contiene a  $\mathfrak{A}$  y cumple con la propiedad de intersección finita. Se definirá un orden parcial en  $\mathfrak{D}$ . Sean  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$  dos familias en  $\mathfrak{D}$ , entonces  $\mathfrak{G}_1 \leq \mathfrak{G}_2$  significa que  $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2$ . De esta forma, se usará un conjunto contable de índices  $B$  para ordenar las familias de  $\mathfrak{D}$ . Sea  $\mathfrak{G}'$  la familia que es unión de todas las familias en  $\mathfrak{D}$ :

$$\mathfrak{G}' = \bigcup_{\alpha \in B} \mathfrak{G}_\alpha$$

Cada familia  $\mathfrak{G}_\alpha$  contiene a  $\mathfrak{A}$ , y lo mismo ocurre con  $\mathfrak{G}'$ . Ya que cada familia  $\mathfrak{G}_\alpha$  cumple con la propiedad de intersección finita, entonces  $\mathfrak{G}'$  tiene también dicha propiedad. Por lo tanto esta familia pertenece a  $\mathfrak{D}$  y cada  $\mathfrak{G}_\alpha$  es un subconjunto de  $\mathfrak{G}'$ . Así,  $\mathfrak{G}'$  es la cota superior de  $\mathfrak{D}$ .

La familia  $\mathfrak{G}'$  es el elemento maximal de  $\mathfrak{D}$  por el Lema 1 y se quedan demostradas las propiedades 1 y 2. Si existe una familia  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}$  cumple con la propiedad de intersección finita, entonces  $\mathfrak{M} \in \mathfrak{D}$ , pero esto contradice la maximalidad de la familia  $\mathfrak{G}'$ . Entonces  $\mathfrak{M}$  no existe y la propiedad 3 queda demostrada. Tome una secuencia finita  $G_1, G_2, \dots, G_k$  de subconjuntos de  $\mathfrak{G}'$ . Como  $\mathfrak{G}'$  tiene la propiedad de intersección finita, entonces existe un subconjunto:

$$G_0 = \bigcap_{i=1}^k G_i \neq \emptyset$$

Forme la familia:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{G}' \cup G_0$$

entonces  $\mathfrak{G}'$  es un subconjunto de  $\mathfrak{M}$ , además  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$  y  $\mathfrak{M}$  tiene la propiedad de intersección finita pues  $G_0$  es la intersección de algunos conjuntos en  $\mathfrak{G}'$ . Pero  $\mathfrak{G}'$  es maximal, entonces  $\mathfrak{G}' = \mathfrak{M}$ , es decir,  $G_0$  es también un subconjunto de  $\mathfrak{G}'$  y la propiedad 4 queda demostrada.  $\square$

Utilizando el Lema 2 y el teorema de Tychonoff [Bau91] [HY88], se presenta el siguiente resultado:

**Teorema 4.** *Para el espacio de configuraciones  $(C, \mathfrak{C})$ , sea el conjunto de configuraciones  $C$  asignado a cada entero  $i \in \mathbb{Z}$ , entonces el producto topológico:*

$$\mathfrak{F} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} C_i$$

es compacto.

*Demostración.* Cada elemento  $e$  de  $\mathfrak{F}$  es una secuencia de configuraciones de  $C$ , es decir:

$$e = \{\dots c_{-1} c_0 c_1 \dots c_i \dots\} \quad (3.14)$$

donde cada  $c_i \in C$ . Por el Lema 2, existe una familia maximal  $\mathfrak{G}'$  de subconjuntos de  $\mathfrak{F}$  con la propiedad de intersección finita.

Entonces, cada intersección finita de subconjuntos en  $\mathfrak{G}'$  tiene al menos una secuencia  $e$  de configuraciones. Para cada secuencia  $e$  en cada subconjunto de  $\mathfrak{G}'$ , tome la configuración  $c_i$  que pertenece al conjunto de configuraciones  $C_i$ . De esta manera, se obtiene un subconjunto  $G_i$  para cada subconjunto  $G \in \mathfrak{G}'$ .  $G_i$  contiene solamente las configuraciones localizadas en la  $i$ -ésima posición de cada secuencia  $e$  de  $G$ .

Sea  $\mathfrak{G}_i$  la familia de subconjuntos  $G_i$ . Los subconjuntos en cada  $\mathfrak{G}_i$  tienen la propiedad de intersección finita ya que cada intersección finita de subconjuntos en  $\mathfrak{G}'$  contiene al menos una secuencia  $e$ , y de esta secuencia la configuración  $c_i$  está en la intersección de subconjuntos en  $\mathfrak{G}_i$ .

Como  $\mathfrak{G}'$  es maximal, entonces  $\mathfrak{G}_i$  es maximal también. Tome la cerradura de cada subconjunto de la familia  $\mathfrak{G}_i$ . Ya que el espacio de configuraciones es compacto, entonces la intersección arbitraria de subconjuntos en  $\mathfrak{G}_i$  no es vacía por el Teorema 3. Lo mismo sucede para todo entero  $i$ . Por lo tanto la intersección arbitraria de subconjuntos en  $\mathfrak{G}'$  no es vacía tampoco, entonces existe una secuencia  $e$  de configuraciones tal que:

$$e \in \bigcap_{G \in \mathfrak{G}'} G$$

Con la cerradura de cada subconjunto de  $\mathfrak{G}'$ ,  $e \in G \subseteq \overline{G}$  para cada  $G \in \mathfrak{G}'$ , entonces:

$$e \in \bigcap_{G \in \mathfrak{G}'} \overline{G}$$

donde  $\mathfrak{G}'$  es el conjunto maximal con la propiedad de intersección finita. Por lo tanto el producto topológico  $\mathfrak{F}$  es compacto por el Teorema 3. □

La compacidad de  $\mathfrak{F}$  ha quedado demostrada, ahora se definirá una familia de conjuntos donde cada uno contiene algunas secuencias límite inversas finitas y la familia completa cumple con la propiedad de intersección finita.

### 3.3.3.2 Familia $\{\mathfrak{F}_i\}$ con la propiedad de intersección finita

Para  $i \in \mathbb{Z}$ , sea  $\mathfrak{F}_i$  el conjunto de secuencias  $e$  definido en la Ecuación 3.14 tal que para  $0 < n \leq i$ , la  $n$ -ésima configuración es ancestral de la  $(n - 1)$ -ésima configuración por la aplicación de un mapeo global  $\Phi$  correspondiente a un autómata celular unidimensional. Así, las configuraciones entre las posiciones 1 y  $i$  de una secuencia  $e \in \mathfrak{F}_i$  satisfacen la siguiente condición:

$$c_n \in \mathcal{C}_{[w_n]} \text{ where } w_n \in K^{2r(n)+1}, \Phi(c_n) = c_{n-1} \quad (3.15)$$

La Ecuación 3.15 muestra también un mapeo entre conjuntos de cilindros centrados:

$$\Phi(\mathcal{C}_{[w_n]}) = \mathcal{C}_{[w_{n-1}]} \text{ or } \mathcal{C}_{[w_n]} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_{[w_{n-1}]}$$

De esta forma, cada secuencia en  $\mathfrak{F}_i$  define una secuencia límite inversa. Existen secuencias en  $\mathfrak{F}_i$  que también pertenecen a  $\mathfrak{F}_{i+1}$ ; entonces la familia:

$$\{\mathfrak{F}_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \quad (3.16)$$

cumple con la propiedad de intersección finita.

Con esta familia, se demostrará la existencia de secuencias límite inversas infinitas en el espacio de configuraciones. Este resultado está basado en el trabajo de Hocking y Young [HY88].

### 3.3.3.3 Mostrando la existencia del conjunto $\mathcal{C}_{[\infty]}$

Usando el producto topológico  $\mathfrak{F}$  y la propiedad de intersección finita de la familia  $\{\mathfrak{F}_i\}$ , se demostrará la existencia de  $\mathcal{C}_{[\infty]}$ . El Teorema 3 será útil para mostrar que la intersección arbitraria de subconjuntos en la familia  $\{\mathfrak{F}_i\}$  no es vacía, pero esta intersección está formada por secuencias límite inversas infinitas.

**Teorema 5.** *El conjunto  $\mathcal{C}_{[\infty]}$  no es vacío.*

*Demostración.* Tome la familia  $\{\mathfrak{F}_i\}$  de secuencias de configuraciones que se definió en la Sección 3.3.3.2 y para cada subconjunto  $\mathfrak{F}_i \in \{\mathfrak{F}_i\}$ , tome su cerradura  $\overline{\mathfrak{F}_i}$ . Como  $\{\mathfrak{F}_i\}$  satisface la propiedad de intersección finita, entonces  $\{\overline{\mathfrak{F}_i}\}$  también satisface dicha propiedad. Por el Teorema 4, el producto topológico  $\mathfrak{F}$  es compacto, y la intersección arbitraria de subconjuntos en  $\{\overline{\mathfrak{F}_i}\}$  es no vacía por el Teorema 3. Pero cada punto en la intersección es igual a la secuencia:

$$e = \{\dots c_0 c_1 \dots\} \text{ where } \Phi(c_i) = c_{i-1}, \text{ for } i \in \mathbb{Z}^+$$

Cada configuración  $c_i$  pertenece a un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  para  $w_i \in K^{2r(i)+1}$ . Entonces existe una secuencia tal que  $\mathcal{C}_{[w_i]} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_{[w_{i-1}]}$  y por lo tanto el conjunto  $\mathcal{C}_{[\infty]}$  es no vacío. □

Con el Teorema 5, un resultado directo es que los autómatas celulares unidimensionales sobreyectivos pertenecen al conjunto de secuencias límite inversas.

### 3.3.4 Autómatas celulares unidimensionales sobreyectivos

Estos autómatas cumplen que cada configuración tiene al menos un ancestro. Los mapeos globales sobreyectivos coinciden con algunas secuencias límite inversas y por lo tanto pertenecen al conjunto  $\mathcal{C}_{[\infty]}$ .

**Corolario 1.** *El conjunto  $\mathcal{C}_{[\infty]}$  de secuencias límite inversas contiene a todos los autómatas celulares unidimensionales sobreyectivos.*

*Demostración.* Cada autómata sobreyectivo define un mapeo sobreyectivo entre elementos del conjunto de configuraciones. Pero cada configuración pertenece a un conjunto de cilindros centrados. Así, el mapeo sobreyectivo es una secuencia límite inversa infinita de conjuntos de cilindros centrados en el espacio de configuraciones. De esta forma los autómatas sobreyectivos son un subconjunto de  $\mathcal{C}_{[\infty]}$ . □

Las propiedades topológicas del espacio de configuraciones han resultado útiles para caracterizar los mapeos globales sobreyectivos. Ahora se discutirán otras propiedades más específicas.

## 3.4 Multiplicidad uniforme

En base al trabajo de Hedlund [Hed69], se caracterizará el comportamiento cuantitativo de los autómatas celulares unidimensionales sobreyectivos en  $\mathcal{C}_{[\infty]}$ .

### 3.4.1 Valores invariantes

Usando la forma de las secuencias límite inversas definidas en la Ecuación 3.12, para  $i \in \mathbb{N}$ ,  $w_i \in K^{2r(i)+1}$  y  $r \in \mathbb{Z}^+$ , tome cada conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  en una secuencia  $e$  de  $\mathcal{C}_{[\infty]}$ . En  $e$  existe un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  con un número mínimo de conjuntos de cilindros centrados ancestros, este número se representará por  $p_{min}$ . Un resultado acerca de  $p_{min}$  es el siguiente:

**Lema 3.** *El valor  $p_{min}$  es invariante bajo extensiones.*

*Demostración.* Para un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$ , sea  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[w]})|$  el número de ancestros de  $\mathcal{C}_{[w]}$ . Sea  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  un conjunto de cilindros centrados con  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[w_i]})| = p_{min}$ . Tome las secuencias de  $K^{2r(i+1)+1}$  tales que sus partes centrales sean iguales a  $w_i$ :

$$A = \{a \mid a \in K^{2r(i+1)+1}, a_{[r, r+2r(i)]} = w_i\}$$

Las posiciones variables de estas secuencias son aquellas en las  $r$  primeras y en las  $r$  últimas posiciones, cada posición con  $k$  alternativas, así:

$$|A| = k^{2r}$$

Para cada secuencia  $a \in A$ , los ancestros de  $\mathcal{C}_{[a]}$  son extensiones de las secuencias en el conjunto  $\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[w_i]})$ :

$$\Phi^{-1}(A) = \{a' \mid a' \in K^{2r(i+2)+1}, \varphi(a') = a \text{ para cualquier } a \in A, \varphi(a'_{[r, r+2r(i+1)]}) = w_i\}$$

Para las secuencias en el conjunto  $\Phi^{-1}(A)$ , existen  $p_{min}$  distintas alternativas en el intervalo  $[r, r + 2r(i + 1)]$ , y tanto sus  $r$  primeras células como sus  $r$  últimas tienen  $k^r$  alternativas. De esta forma:

$$|\Phi^{-1}(A)| = (k^r)(p_{min})(k^r) = k^{2r} p_{min}$$

Pero  $|A| = k^{2r}$  y cada secuencia en  $A$  tiene al menos  $p_{min}$  ancestros, entonces el valor mínimo de  $|\Phi^{-1}(A)|$  es también  $k^{2r} p_{min}$ . Por lo tanto, cada conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[a]}$  tiene  $p_{min}$  ancestros y  $p_{min}$  es un valor invariante. □

De manera similar, en una secuencia límite inversa  $e \in \mathcal{C}_{[\infty]}$  existe un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  el cual tiene el máximo número de ancestros. Este número se representará por  $p_{max}$ . Para este valor se tiene el siguiente resultado:

**Lema 4.** *El valor  $p_{max}$  es invariante bajo extensiones.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  un conjunto de cilindros centrados con  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[w_i]})| = p_{max}$ . Tome el conjunto de secuencias:

$$A = \{a \mid a \in K^{2r(i+1)+1}, a_{[r, r+2r(i)]} = w_i\}$$

como en el Lema 3. Entonces  $|A| = k^{2r}$  y  $|\Phi^{-1}(A)| = k^{2r} p_{max}$ . Suponga que alguna secuencia  $a \in A$  cumple que:

$$|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[a]})| < p_{max}$$

Entonces debe existir otra secuencia  $a' \in A$ ,  $a' \neq a$  tal que:

$$|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[a']})| > p_{max}$$

para conservar que  $|\Phi^{-1}(A)| = k^{2r} p_{max}$ . Pero esto contradice que  $p_{max}$  sea máximo, por lo tanto  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[a]})| = p_{max}$  para cada secuencia  $a \in A$  y  $p_{max}$  es invariante. □

Usando los Lemas 3 y 4, se demostrará que el mínimo número de ancestros de un conjunto de cilindros centrados es también igual al máximo número de ellos en una secuencia límite inversa infinita. Por lo tanto todos los conjuntos de cilindros centrados tienen el mismo número de ancestros en tales secuencias.

**Lema 5.**  $p_{min} = p_{max}$

*Demostración.* Suponga que  $p_{min} \neq p_{max}$ . Tome las secuencias  $w, w'$  de estados tales que  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[w]})| = p_{min}$  y  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[w']})| = p_{max}$ . Forme una nueva secuencia:

$$c = (ww')^* = \dots ww'ww'ww' \dots$$

Entonces  $c$  es una extensión tanto de la secuencia  $w$  como de la secuencia  $w'$ . Así  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[c]})| = p_{min}$  pues  $c$  puede ser tomada como una extensión de  $w$  pero esto contradice al Lema 4. También  $|\Phi^{-1}(\mathcal{C}_{[c]})| = p_{max}$  si  $c$  es tomada como una extensión de  $w'$  pero esto a su vez contradice al Lema 3. Por lo tanto  $p_{min} = p_{max}$ . □

Entonces para todo  $i \in \mathbb{N}$  y  $w_i \in K^{2r(i)+1}$ , cada conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  en una secuencia límite inversa  $e \in \mathcal{C}_{[\infty]}$  tiene el mismo número de ancestros que todos los demás. Este número es igual al promedio de ancestros ya que  $p_{min} = p_{max}$ . La regla de evolución  $\varphi : K^{2r+1} \rightarrow K$  determina este promedio:

$$\frac{|K^{2r+1}|}{|K|} = \frac{k^{2r+1}}{k} = k^{2r} \quad (3.17)$$

por lo tanto se obtiene el siguiente resultado:

**Corolario 2 (Multiplicidad uniforme de ancestros).** *Para cada secuencia límite inversa  $e \in \mathcal{C}_{[\infty]}$  definida por un autómata celular unidimensional sobreyectivo, cada conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  en  $e$  tiene  $k^{2r}$  ancestros.*

El Corolario 2 muestra que existe una multiplicidad uniforme de ancestros caracterizando así las secuencias límite inversas definidas por autómatas sobreyectivos. Estas secuencias pueden ser presentadas por un conjunto de  $k$  árboles (Figura 3.1), donde cada secuencia es un árbol  $k^{2r}$ -ario.

### 3.4.2 Clases de equivalencia de ancestros

La Sección 2.7 muestra que la familia de conjuntos de cilindros centrados  $\mathfrak{C}_{K^{2r(i)+1}}$  es un cubrimiento finito del conjunto de configuraciones, y cada conjunto de cilindros centrados es disjunto de los demás. Como cada conjunto de cilindros centrados tiene  $k^{2r}$  ancestros, estos conforman una familia  $\mathfrak{C}_{K^{2r(i+1)+1}}$  de conjuntos de cilindros centrados que es otro cubrimiento finito del espacio de configuraciones. Este cubrimiento contiene subconjuntos de  $k^{2r}$  conjuntos de cilindros centrados que mapean al mismo conjunto de cilindros centrados debido al mapeo sobreyectivo global. Esto produce el siguiente resultado:

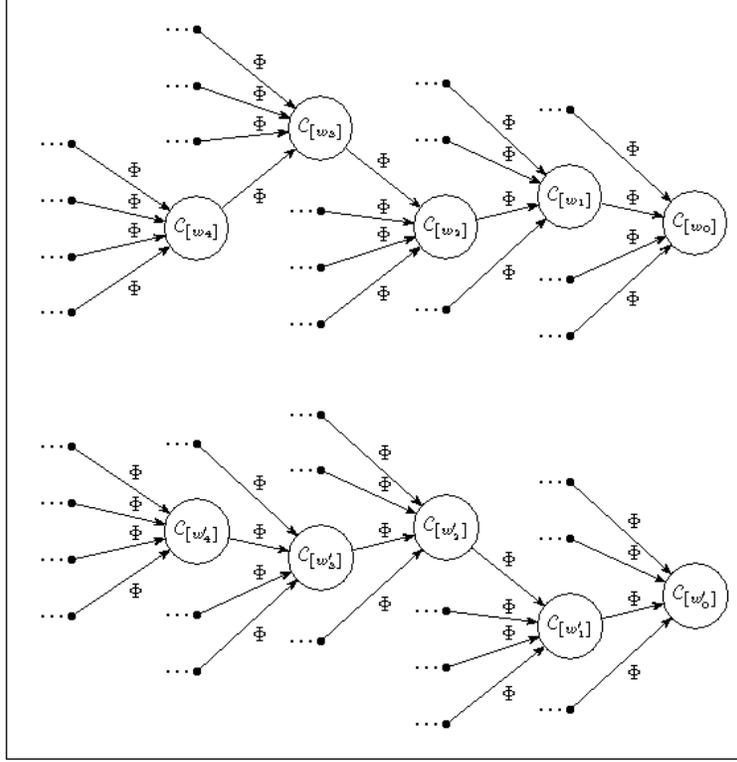


Figura 3.1: Árboles que representan a un autómata celular unidimensional sobreyectivo  $(2, 1)$ . Aquí se presentan dos diferentes secuencias límite inversas.

**Lema 6.** *La familia de conjuntos de cilindros centrados:*

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{C}_{K^{2r(i)+1}}) = \{\mathcal{C}_{[w_{i+1}]} \mid \Phi(\mathcal{C}_{[w_{i+1}]})) = \mathcal{C}_{[w_i]}, w_i \in K^{2r(i)+1}, i \in \mathbb{N}\}$$

establece una relación de equivalencia  $\mathbf{R}$  en el espacio de configuraciones.

*Demostración.* La familia  $\mathfrak{C}_{K^{2r(i)+1}}$  de conjuntos de cilindros centrados es un cubrimiento finito del espacio de configuraciones, entonces se define una relación de equivalencia de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}_{[w_{i+1}]} \mathbf{R} \mathcal{C}_{[w'_{i+1}]} \quad \text{sí y sólo si } \Phi(\mathcal{C}_{[w_{i+1}]})) = \Phi(\mathcal{C}_{[w'_{i+1}]}) \quad (3.18)$$

para  $\mathcal{C}_{[w_{i+1}]}, \mathcal{C}_{[w'_{i+1}]}$  elementos de  $\mathfrak{C}_{K^{2r(i)+1}}$

Entonces existen subconjuntos de  $\mathfrak{C}_{K^{2r(i)+1}}$  cada uno con  $k^{2r}$  conjuntos de cilindros centrados por el Corolario 2. Cada subconjunto es disjunto al resto porque cada conjunto de cilindros centrados tiene solamente un conjunto de cilindros centrados sucesor en  $\mathfrak{C}_{K^{2r(i)+1}}$ . De esta manera, se define una relación de equivalencia en el espacio de configuraciones.  $\square$

## 3.5 Distancia 1/2 y comportamiento reversible

Se analizará ahora el caso donde el mapeo global es reversible. En este caso, todos los ancestros de cualquier conjunto  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  tienen la misma parte central.

### 3.5.1 Autómatas celulares unidimensionales reversibles

Para este tipo de autómatas, la regla de evolución tiene una regla inversa (posiblemente con un radio de vecindad distinto) donde ambas reglas inducen un mapeo global invertible [McI91a] [McI91b]. Si ambos radios de vecindad son diferentes, entonces se selecciona el más grande y ambas reglas se representan con este radio de vecindad. De esta manera, para toda secuencia  $w \in K^{2r+1}$ , los ancestros generados por la regla inversa  $\varphi^{-1}(w)$  tienen las siguientes propiedades:

- $|\varphi^{-1}(w)| = k^{2r}$  por la multiplicidad uniforme de ancestros.
- Cada ancestro  $w' \in \varphi^{-1}(w)$  tiene  $2r$  células más que la secuencia  $w$ , así  $w' \in K^{2r+1+2r}$ .
- Todos los ancestros de  $w$  tienen la misma célula central.

Para  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2r + 1$ , cada secuencia  $w \in K^n$  satisface las propiedades anteriores ya que cada una está formada por secuencias de  $K^{2r+1}$  células que traslapan (Figura 3.2).

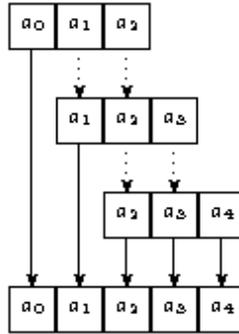


Figura 3.2: Secuencia  $(a_0a_1a_2a_3a_4) \in K^5$  formada por tres vecindades que traslapan, para  $r = 1$ .

Entonces, las secuencias del siguiente conjunto:

$$\varphi^{-1}(w) = \{w' \mid \varphi(w') = w, w \in K^n, w' \in K^{n+2r}, n \geq 2r + 1\} \quad (3.19)$$

tienen las mismas  $n - 2r$  células centrales y difieren en sus extremos de  $2r$  células en ambos lados (Figura 3.3). Con estas propiedades, para  $n \geq 2r + 1$ , cada secuencia  $w \in K^n$  tiene  $k^{2r}$  ancestros y estos tienen  $4r$  posiciones variables en sus extremos para producir  $k^{2r}$  ancestros distintos. Una opción es que estos ancestros tengan 1 variante izquierda y  $k^{2r}$  variantes derechas. Así en general,  $k^{2r}$  se factoriza en dos índices  $L$  y  $R$  donde  $L$  enumera las variantes izquierdas y  $R$  las variantes derechas.

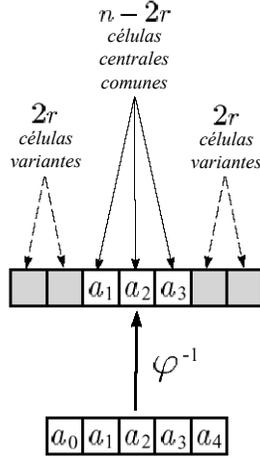


Figura 3.3: Secuencia  $(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4) \in K^5$  con  $r = 1$ ,  $n - 2r = 3$  células centrales comunes y  $2r$  células variantes a cada lado de los ancestros.

### 3.5.2 Secuencias límite inversas en autómatas celulares unidimensionales reversibles

Los autómatas celulares unidimensionales reversibles definen un tipo especial de secuencia límite inversa. Tome dos reglas invertibles  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$ , ambas con el mismo radio de vecindad. Así,  $K^{2r}$  es el conjunto de vecindades para ambas reglas; con esto se presenta el siguiente resultado:

**Lema 7.** Sean  $\Phi$  y  $\Phi^{-1}$  mapeos globales invertibles inducidos por  $\varphi$  y  $\varphi^{-1}$  sobre el espacio de configuraciones. Para  $i \in \mathbb{Z}^+$  y  $w_i \in K^{2r(i)+1}$ , los conjuntos de cilindros centrados ancestros de  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  tienen una máxima distancia igual a:

$$1/(r(i-1) + 2)$$

*Demostración.* Dado que cada secuencia  $w_i$  tiene  $2r(i) + 1$  células, los ancestros de  $w_i$  tienen  $2r(i) + 1 - 2r$  células centrales comunes. Estos pertenecen así al conjunto de cilindros centrados:

$$\mathcal{C}_{[w']} \text{ para alguna } w' \in K^{2r(i-1)+1}$$

Así, la máxima distancia entre cualquier pareja de configuraciones de este conjunto de cilindros centrados está dada por:

$$d_{max} = \frac{1}{r(i-1) + 2}$$

como es requerido. □

Un resultado directo del Lema 7 es el siguiente:

**Corolario 3.** Para cada secuencia  $w \in K^{2r+1}$ , la máxima distancia entre los ancestros del conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$  es  $1/2$ .

Finalmente, para una secuencia  $w \in K^{2r+1}$ , se definen secuencias límite inversas en ambas direcciones usando al mismo tiempo los mapeos globales invertibles  $\Phi$  y  $\Phi^{-1}$  sobre el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$  (Figura 3.4).

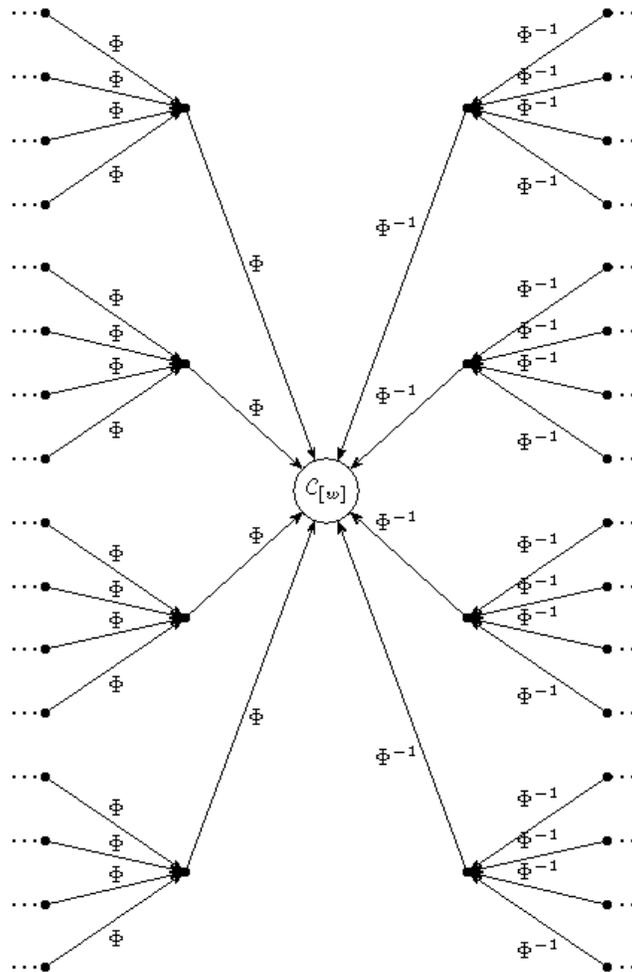


Figura 3.4: Secuencias límite inversas especificadas por  $\Phi$  y  $\Phi^{-1}$  en un autómata reversible  $(2, 1)$ .

## 3.6 Un ejemplo ilustrativo

El siguiente ejemplo ilustra las propiedades topológicas del espacio de configuraciones para un autómata celular unidimensional sobreyectivo.

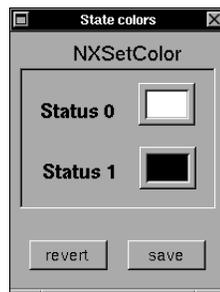
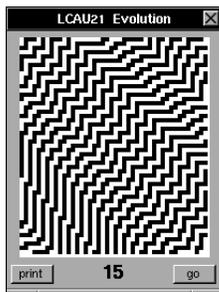
### 3.6.1 Autómata $(2, 1)$ reglas 15 y 85

Este autómata tiene 2 estados y ambas reglas de evolución tienen un tamaño de vecindad 3. Las reglas invertibles  $\varphi = 15$  y  $\varphi^{-1} = 85$  están numeradas por la notación establecida por Stephen Wolfram [Wol86]. Estas reglas son representadas por matrices; los renglones

y columnas de cada matriz muestran vecindades parciales o secuencias de 2 células. Para cada renglón, si la última célula de la vecindad parcial coincide con la primera célula de cualquier vecindad parcial que representa una columna, entonces la posición especificada por el renglón y la columna describe una vecindad completa. El valor de esta posición es igual a la evolución de la vecindad que representa. De esta manera, las reglas 15 y 85 se representan en la Figura 3.5.

Regla de evolución 15

	00	01	10	11
00	1	1		
01			1	1
10	0	0		
11			0	0



Regla de evolución 85

	00	01	10	11
00	1	0		
01			1	0
10	1	0		
11			1	0

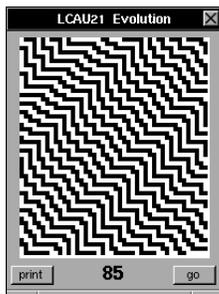


Figura 3.5: Autómata celular unidimensional reversible  $(2, 1)$  con reglas invertibles  $\varphi = 15$  y  $\varphi^{-1} = 85$ .

Los ancestros de cada vecindad son los siguientes para ambos casos:

Ancestros de la regla 15				Vecindad	Ancestros de la regla 85			
11111	11110	11101	11100	000	00111	01111	10111	11111
11011	11010	11001	11000	001	00110	01110	10110	11110
10111	10110	10101	10100	010	00101	01101	10101	11101
10011	10010	10001	10000	011	00100	01100	10100	11100
01111	01110	01101	01100	100	00011	01011	10011	11011
01011	01010	01001	01000	101	00010	01010	10010	11010
00111	00110	00101	00100	110	00001	01001	10001	11001
00011	00010	00001	00000	111	00000	01000	10000	11000

Tabla 3.1: Ancestros de las vecindades en el autómata  $(2, 1)$ ,  $\varphi = 15$  y  $\varphi^{-1} = 85$ .

Estos ancestros representan conjuntos de cilindros centrados que establecen una relación de equivalencia en el espacio de configuraciones por el Lema 6. Los ancestros forman ocho clases de equivalencia para ambas reglas, cada una de cuatro conjuntos de cilindros centrados.

Regla 15		Regla 85	
Clase 1	$\mathcal{C}_{[11111]}, \mathcal{C}_{[11110]}, \mathcal{C}_{[11101]}, \mathcal{C}_{[11100]}$	Clase 1	$\mathcal{C}_{[00111]}, \mathcal{C}_{[01111]}, \mathcal{C}_{[10111]}, \mathcal{C}_{[11111]}$
Clase 2	$\mathcal{C}_{[11011]}, \mathcal{C}_{[11010]}, \mathcal{C}_{[11001]}, \mathcal{C}_{[11000]}$	Clase 2	$\mathcal{C}_{[00110]}, \mathcal{C}_{[01110]}, \mathcal{C}_{[10110]}, \mathcal{C}_{[11110]}$
Clase 3	$\mathcal{C}_{[10111]}, \mathcal{C}_{[10110]}, \mathcal{C}_{[10101]}, \mathcal{C}_{[10100]}$	Clase 3	$\mathcal{C}_{[00101]}, \mathcal{C}_{[01101]}, \mathcal{C}_{[10101]}, \mathcal{C}_{[11101]}$
Clase 4	$\mathcal{C}_{[10011]}, \mathcal{C}_{[10010]}, \mathcal{C}_{[10001]}, \mathcal{C}_{[10000]}$	Clase 4	$\mathcal{C}_{[00100]}, \mathcal{C}_{[01100]}, \mathcal{C}_{[10100]}, \mathcal{C}_{[11100]}$
Clase 5	$\mathcal{C}_{[01111]}, \mathcal{C}_{[01110]}, \mathcal{C}_{[01101]}, \mathcal{C}_{[01100]}$	Clase 5	$\mathcal{C}_{[00011]}, \mathcal{C}_{[01011]}, \mathcal{C}_{[10011]}, \mathcal{C}_{[11011]}$
Clase 6	$\mathcal{C}_{[01011]}, \mathcal{C}_{[01010]}, \mathcal{C}_{[01001]}, \mathcal{C}_{[01000]}$	Clase 6	$\mathcal{C}_{[00010]}, \mathcal{C}_{[01010]}, \mathcal{C}_{[10010]}, \mathcal{C}_{[11010]}$
Clase 7	$\mathcal{C}_{[00111]}, \mathcal{C}_{[00110]}, \mathcal{C}_{[00101]}, \mathcal{C}_{[00100]}$	Clase 7	$\mathcal{C}_{[00001]}, \mathcal{C}_{[01001]}, \mathcal{C}_{[10001]}, \mathcal{C}_{[11001]}$
Clase 8	$\mathcal{C}_{[00011]}, \mathcal{C}_{[00010]}, \mathcal{C}_{[00001]}, \mathcal{C}_{[00000]}$	Clase 8	$\mathcal{C}_{[00000]}, \mathcal{C}_{[01000]}, \mathcal{C}_{[10000]}, \mathcal{C}_{[11000]}$

Tabla 3.2: Relaciones de equivalencia definidas por las reglas invertibles 15 y 85.

La Tabla 3.2 muestra que cada clase de equivalencia tiene una máxima distancia de  $1/2$ . Una descripción gráfica de esta relación de equivalencia es la siguiente:

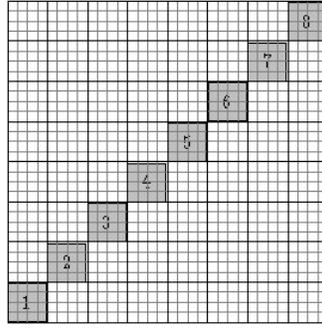


Figura 3.6: Representación gráfica de la relación de equivalencia, cada cuadro gris muestra una clase de equivalencia.

El conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[011]}$  define dos secuencias límite inversas en ambas direcciones por el mapeo global inducido por las reglas 15 y 85.

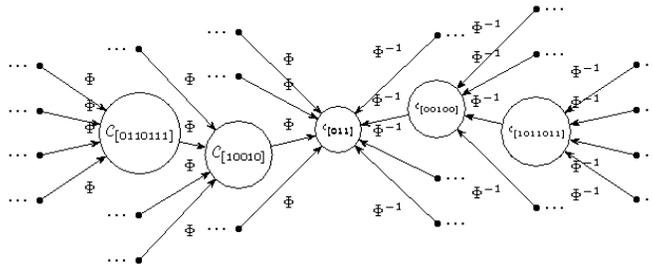


Figura 3.7: Secuencias límite inversas del conjunto  $\mathcal{C}_{[011]}$ .

## 3.7 Observaciones finales

Algunos trabajos interesantes acerca de la topología de los autómatas celulares son los realizados por Lind [Lin84], Culik [IHY91a] [IHY91b], Blanchard et al. [BKM97] y el libro de Wuensche y Lesser [WL92]. Las características topológicas del espacio de configuraciones definen la existencia de secuencias límite inversas de conjuntos de cilindros centrados, ya que el espacio de configuraciones es compacto y de Hausdorff.

Así el producto topológico de espacios compactos puede aplicarse y las propiedades de la cerradura de los conjuntos de cilindros centrados muestran que los autómatas celulares unidimensionales sobrejectivos pertenecen al conjunto de secuencias límite inversas infinitas. En este sentido, las secuencias límite inversas en autómatas celulares fueron primeramente analizadas por Williams [Wil73], como parte de su estudio sobre dinámica simbólica.

Cada conjunto de cilindros centrados tiene el mismo número de ancestros que todos los demás por la propiedad de multiplicidad uniforme en los autómatas sobrejectivos. Este número es igual a  $k^{2r}$ , donde  $k$  es el número de estados y  $r$  es el radio de vecindad de la regla de evolución. De esta forma, los conjuntos de cilindros centrados forman clases de equivalencia de  $k^{2r}$  elementos, donde la relación de equivalencia está dada por conjuntos con el mismo sucesor en una secuencia límite inversa. Un importante trabajo que utiliza conjuntos de cilindros como conjuntos de Borel fue realizado por Denker et al. [DGS76] para estudiar las propiedades ergódicas del sistema de corrimiento.

Para autómatas celulares unidimensionales reversibles, existe una cota superior para la distancia entre los ancestros de un conjunto de cilindros centrados dado. La cota es igual a  $1/2$  con la métrica definida en la Sección 3.2.7 sobre el espacio de configuraciones. Blanchard et al. han analizado otras topologías en los autómatas celulares [BFK97], definiendo métricas de acuerdo a una posición central o a la densidad de estados en un conjunto de cilindros dado.



# Capítulo 4

## Comportamiento Periódico de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles

### 4.1 Resumen

Una vez establecida la estructura del conjunto de configuraciones por medio de los conjuntos de cilindros centrados, se analizará el efecto de las permutaciones en bloque sobre estos conjuntos de cilindros centrados para caracterizar la dinámica de los autómatas celulares unidimensionales reversibles.

El primer paso será investigar las configuraciones periódicas que presentan una única permutación en bloque. Con esto se definirá cómo es el paso de una permutación a otra, con lo cual se clasificarán los autómatas reversibles en base a su comportamiento periódico.

De este modo, este capítulo discutirá las propiedades periódicas de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. El conjunto de configuraciones será tomado como un espacio topológico basado en conjuntos de cilindros centrados y mapeos entre ellos. Solo se estudiarán autómatas reversibles con tamaño de vecindad 2 ya que estos representan al conjunto completo de autómatas reversibles unidimensionales. Su caracterización por permutaciones en bloque será útil para establecer un método matricial que detecta puntos fijos, puntos periódicos y conjuntos no errantes. En la parte final de este capítulo, se presentará una clasificación de los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de su comportamiento periódico.

### 4.2 Conceptos básicos de sistemas dinámicos

La motivación detrás de la teoría de sistemas dinámicos es estudiar y analizar el comportamiento a largo plazo de un sistema dado que evoluciona a través del tiempo. Esta caracterización consiste en conocer las condiciones que generan un comportamiento en particular del sistema. Algunos ejemplos de estos comportamientos son los siguientes:

- El sistema tiene un comportamiento periódico.

- El sistema intersecta recurrentemente un conjunto dado.
- El sistema intersecta todos los posibles conjuntos que cubren el espacio.
- El sistema nunca abandona un conjunto dado.

Con algunos conceptos topológicos básicos, un sistema dinámico se define de la siguiente manera [LM95]:

**Definición 4.** *Un sistema dinámico  $(X, \Psi)$  consiste de un espacio métrico, compacto  $X$  y un mapeo continuo  $\Psi : X \rightarrow X$ . Si  $\Psi$  es invertible entonces el sistema dinámico es invertible.*

Una primera consecuencia de la Definición 4 es el concepto de la órbita de un punto dado en el espacio:

**Definición 5.** *Para un sistema dinámico  $(X, \Psi)$ , la órbita de un punto  $x \in X$  es su trayectoria en  $X$  generada por la aplicación sucesiva del mapeo  $\Psi$ .*

La compacidad asegura que el espacio sea cubierto y por lo tanto representado por un número finito de conjuntos. Con esto, la órbita de cualquier punto es descrita por el número finito de conjuntos que intersecta, facilitando el análisis de la dinámica. La meta en estudiar el comportamiento dinámico de los autómatas celulares unidimensionales reversibles es caracterizar las órbitas generadas por el mapeo global en el espacio de configuraciones.

Este capítulo analizará en particular comportamientos recurrentes y periódicos. En base a los trabajos de J. de Vries [dV93] y Clark Robinson [Rob95], se presentan las siguientes definiciones de estos comportamientos.

**Definición 6.** *Un punto  $x$  en un sistema dinámico  $(X, \Psi)$  es periódico con un período mínimo  $n$  si  $\Psi^n(x) = x$  y  $\Psi^j(x) \neq x$  para  $0 < j \leq n$ .*

La Definición 6 señala que después de  $n$  iteraciones de  $\Psi$ , la órbita regresa a  $x$ . Si un punto tiene período 1, entonces es un punto fijo. El análisis de puntos periódicos y órbitas periódicas es un primer paso en el estudio de un sistema dinámico. Ahora, otra pregunta es si existen órbitas que no intersectan al punto inicial sino al conjunto abierto inicial. Si esto sucede para cada conjunto abierto, entonces se obtiene la siguiente definición:

**Definición 7.** *Un sistema dinámico  $(X, \Psi)$  es no errante si para cada conjunto abierto  $\mathcal{O}$  de  $X$  existe un entero  $n > 0$  tal que  $\Psi^n(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ .*

### 4.3 Comportamiento periódico de los autómatas celulares unidimensionales reversibles

En autómatas celulares unidimensionales, la órbita de una configuración es su evolución formada por la iteración del mapeo global. Los conjuntos abiertos intersectados por la órbita son los conjuntos de cilindros centrados que cubren el conjunto de configuraciones.

Hasta ahora no existe una caracterización completa del comportamiento de los autómatas celulares unidimensionales. Por este motivo no existe una clasificación formal completa basada en el comportamiento dinámico de estos sistemas, a pesar de la sencillez de las reglas de evolución. Sin embargo, la Sección 2.6 presenta esta caracterización para el caso reversible. Esta será utilizada para definir algunos métodos matriciales que detecten los comportamientos descritos en la Sección 4.2.

### 4.3.1 Comportamiento dinámico

Esta sección presenta las condiciones que una configuración inicial debe tener para producir un comportamiento periódico. Para esto, se define una órbita en autómatas celulares unidimensionales como sigue:

**Definición 8.** Para un autómata celular unidimensional y para  $i \in \mathbb{N}$ , una órbita  $e = \{c_0, c_1, \dots, c_i, \dots\}$  es la secuencia de configuraciones tal que  $c_{i+1}$  es evolución de  $c_i$ .

El comportamiento de una configuración dada es caracterizado tanto por los conjuntos centrados de cilindros que interseca como por la forma en que lo hace. En esta tesis, el cubrimiento del conjunto de configuraciones es definido por la familia  $\mathfrak{C}_{K^3}$  ya que las secuencias de 3 células en autómatas reversibles  $(k, 1/2)$  son las que definen las permutaciones en bloque. Estas permutaciones establecen la transición de una secuencia de 3 células a otra de la misma longitud, y por lo tanto presentan las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados. Existe un corrimiento entre permutaciones de 3/2 células, por lo que un corrimiento igual a la longitud de estas secuencias se obtiene con la composición de la regla de evolución. Este proceso no es necesario pero es útil pues permite trabajar con conjuntos de cilindros centrados posicionados en las mismas coordenadas. De esta forma, la composición de la regla de evolución original se representará por  $\varphi$ , y  $\varphi^{-1}$  describirá la composición de la regla de evolución inversa. Estas reglas invertibles especifican mapeos de las secuencias de 3 células a sí mismas con un corrimiento de 3 células, y una órbita comprende un mapeo de un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[c_i[-1,1]]}$  a otro conjunto  $\mathcal{C}_{[c_{i+1}[-1,1]]}$  (Figura 4.1).

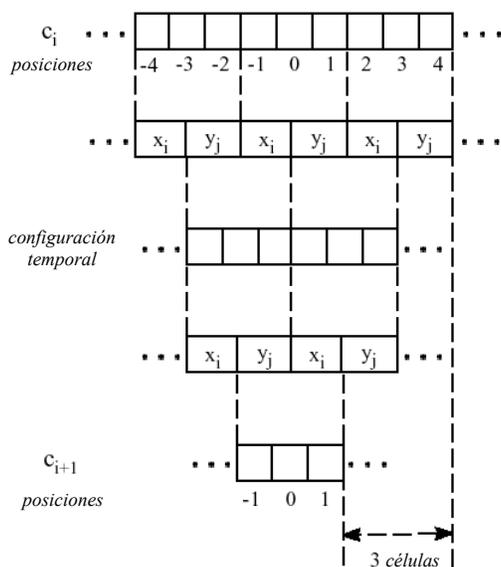


Figura 4.1: Mapeo del conjunto  $\mathcal{C}_{[c_i[-1,1]]}$  al conjunto  $\mathcal{C}_{[c_{i+1}[-1,1]]}$  usando la composición de la regla de evolución en un autómata reversible  $(k, 1/2)$ .

Con estos mapeos, se presentarán métodos matriciales simples para detectar diferentes tipos de órbitas.

### 4.3.2 Características del comportamiento periódico en autómatas reversibles $(k, 1/2)$

Suponga que una configuración esté compuesta por la repetición sucesiva de una secuencia finita de  $n$  células, es decir, los estados que forman esta configuración tienen período  $n$ . Ahora, suponga que se tiene una regla de evolución invertible. Como su acción es la composición de permutaciones en bloque, con estas podemos caracterizar el comportamiento periódico global.

**Teorema 6.** *Para un autómata celular unidimensional reversible  $(k, 1/2)$  y una configuración compuesta por la repetición sucesiva de una secuencia finita de longitud  $n$ , el máximo período de la órbita formada por esta configuración es  $k^{3n}$ .*

*Demostración.* Para alguna  $w \in K^n$ , sea  $c = w^*$ . Sea  $w_1$  una secuencia de  $3n$  células en  $c$ . Entonces  $w_1$  tiene  $n$  secuencias, cada una de 3 células. Cada secuencia de 3 células mapea a otra secuencia de 3 células por las permutaciones en bloque. Entonces la secuencia completa  $w_1$  de  $3n$  células mapea a otra única secuencia  $w_2$  de  $3n$  células también.

Todas las secuencias de  $3n$  células están en  $K^{3n}$ , y la cardinalidad de este conjunto es  $k^{3n}$ . Como el autómata es reversible, la secuencia  $w_1$  debe ser repetida en la evolución del autómata. Así, el máximo período de la configuración  $c$  es  $k^{3n}$ .  $\square$

Para el caso general de autómatas reversibles  $(k, r)$ , el Teorema 6 define un máximo período de  $k^{6rn}$  pasos; donde  $r$  es el radio de vecindad y  $n$  es la longitud de la secuencia  $w$  cuya repetición forma la configuración  $c$ . Se debe señalar que este máximo período es una mala cota para la mayoría de los casos, pues la experiencia práctica muestra períodos menores.

Órbitas periódicas de período  $n$  regresan al mismo conjunto de cilindros centrados. Dado que cada secuencia de 3 células define un conjunto de cilindros centrados y la familia completa de conjuntos de cilindros centrados es un cubrimiento finito del espacio de configuraciones, entonces se obtiene por el Teorema 6 y la Definición 7 el siguiente resultado:

**Corolario 4.** *Para cada secuencia  $w \in K^3$ , el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$  es no errante.*

*Demostración.* Tome una secuencia  $w$  en  $K^3$ , y forme una configuración  $c$  con la repetición sucesiva de  $w$ . Entonces  $c$  pertenece al conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$  y tiene un período finito por el Teorema 6. Así, la órbita de  $c$  regresa al mismo conjunto  $\mathcal{C}_{[w]}$  y por lo tanto  $\mathcal{C}_{[w]}$  es no errante.  $\square$

Las permutaciones en bloque serán utilizadas ahora para detectar el comportamiento periódico de estos sistemas.

### 4.3.3 Representación matricial del comportamiento periódico

Las transiciones entre permutaciones en bloque son útiles para encontrar órbitas periódicas en autómatas reversibles. Tome el conjunto completo de secuencias de 3 células. Estas secuencias forman  $k^3$  configuraciones, donde cada una es la repetición sucesiva de una secuencia

en  $K^3$ . De esta forma, se puede conocer al sucesor de cada una de estas configuraciones por medio de las permutaciones en bloque.

Para  $0 \leq i < k^3$  y para cada secuencia  $w_i \in K^3$ , cada configuración  $c_i = \dots w_i w_i w_i \dots$ , donde  $w_i$  mapea a un único bloque  $x_i y_i$  con  $x_i \in X$  y  $y_i \in Y$ . Entonces la configuración completa  $c_i$  mapea a una secuencia de bloques  $\dots x_i y_i x_i y_i x_i y_i \dots$ . Se tienen solamente dos tipos de bloques,  $x_i y_i$  y  $y_i x_i$ , cada bloque  $y_i x_i$  mapea a una única secuencia  $w_j \in K^3$  por la permutación  $p_2^{-1}$ . Aplicando dos veces este proceso, se obtiene un mapeo de un bloque  $x_i y_i$  a otro  $x_k y_k$ , ambos colocados en las mismas coordenadas (Figura 4.2).

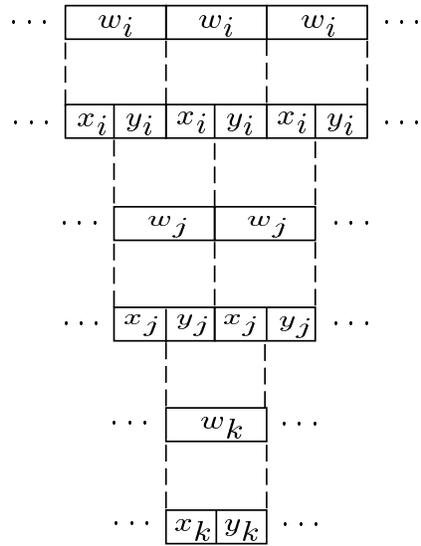


Figura 4.2: Mapeo de un bloque  $x_i y_i$  a otro bloque  $x_k y_k$  colocado en las mismas coordenadas.

Aplicando el proceso anterior en todas las  $k^3$  configuraciones, para cada  $x \in X$  y cada  $y \in Y$  se obtiene un mapeo biyectivo entre los bloques  $xy$  ya que el autómata es reversible. Así cada bloque tiene solamente un ancestro y un sucesor. Entonces, se establece una relación de conectividad entre bloques, cuyos índices son bloques  $xy$  y los elementos muestran el mapeo de un bloque a otro (Tabla 4.1).

$xy$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_i y_i$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\vdots$	1	$\vdots$
$\vdots$	$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$\dots$	$x_k y_k$	$\dots$
				$xy$

Tabla 4.1: Relación de conectividad definida por los bloques  $xy$  que representan el comportamiento periódico.

Una relación de equivalencia puede ser definida con la relación de conectividad de la Tabla 4.1. Si el bloque  $x_i y_i$  mapea a  $x_k y_k$  y éste mapea a  $x_m y_m$ , entonces existe un mapeo de  $x_i y_i$  a  $x_m y_m$ . Así, la cerradura transitiva de la relación de conectividad produce una relación de equivalencia. Cada bloque  $xy$  retorna a sí mismo por el comportamiento periódico de los autómata reversibles  $(k, 1/2)$ , por lo que la cerradura transitiva es también reflexiva.

Si existe un mapeo del bloque  $x_i y_i$  al bloque  $x_m y_m$ , entonces existe también un mapeo de  $x_m y_m$  a  $x_i y_i$  (Figura 4.3). Cada clase en esta relación es un conjunto de configuraciones periódicas, y el período de cada clase es su número de elementos.

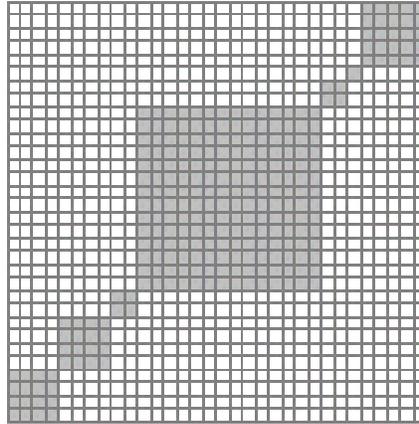


Figura 4.3: Ejemplo de una relación de equivalencia definida por la cerradura transitiva de una relación de conectividad dada.

#### 4.4 Clasificación de los autómatas reversibles $(k, 1/2)$ por medio de sus comportamientos periódicos

El procedimiento presentado en la Sección 4.3 es práctico para comparar el comportamiento periódico de los autómatas reversibles y por lo tanto ofrece una clasificación dinámica de estos sistemas. En particular, se utilizará la cerradura transitiva de la relación de conectividad para analizar el comportamiento periódico de estos sistemas. Tome dos autómatas reversibles  $(k, 1/2)$  y la cerradura transitiva de sus relaciones de conectividad correspondientes, entonces ambos autómatas pertenecen a la misma clase periódica si:

1. Ambas relaciones tienen el mismo número de clases de equivalencia.
2. Existe una biyección de una relación a otra entre clases de equivalencia isomórficas.

Por ejemplo, relaciones de equivalencia en la misma clase periódica se muestran en la Figura 4.4. De esta manera, el procedimiento compara el comportamiento cuantitativo de las cerraduras transitivas, es decir, muestra si las permutaciones en bloque de distintos autómatas reversibles tienen el mismo comportamiento periódico. Este proceso es fácil de calcular si el autómata tiene un número pequeño de estados.

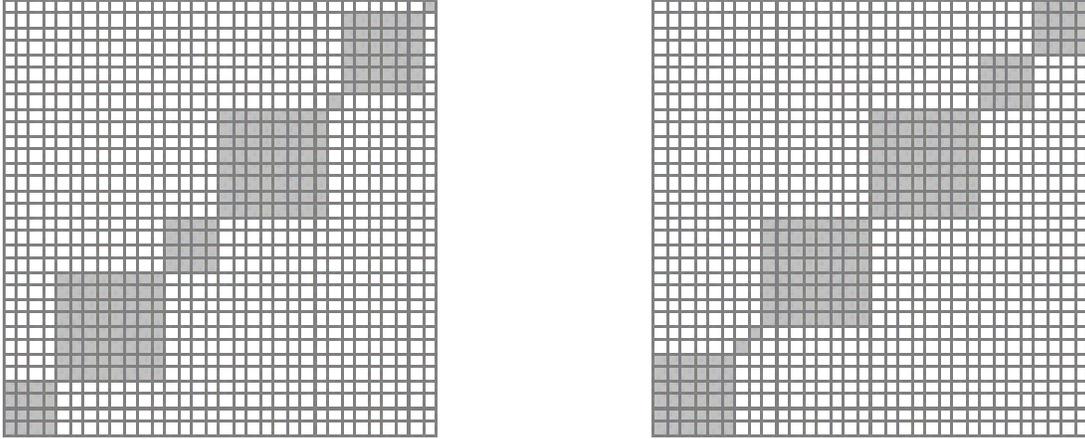


Figura 4.4: Relaciones de equivalencia que pertenecen a la misma clase periódica.

## 4.5 Ejemplos ilustrativos

Esta sección presenta algunos ejemplos del procedimiento matricial desarrollado en las Secciones 4.3 y 4.4 para clasificar autómatas celulares unidimensionales reversibles  $(4, 1/2)$ . Estos métodos fueron implementados en el sistema RLCAU el cual calcula autómatas reversibles  $(k, 1/2)$  por medio de permutaciones en bloque aleatorias.

En los siguientes ejemplos, cada autómata celular es representado por un número hexadecimal el cual es calculado tomando la regla de evolución, poniéndola en orden lexicográfico descendente y dividiéndola en parejas de dos vecindades. Así, cada pareja se asocia a un único número hexadecimal dependiendo de la evolución de sus vecindades. Para este caso se tienen ocho parejas de dos vecindades, representando la regla con un número hexadecimal de ocho dígitos.

Las reglas de evolución de los siguientes autómatas serán mostradas por matrices de de Bruijn, los índices de cada matriz son vecindades parciales, y las posiciones de las entradas son vecindades completas. El valor de cada entrada es la evolución de cada vecindad. Se utilizará también el sistema NXLCAU [McI90] en la presentación de estos ejemplos.

### 4.5.1 Autómata celular unidimensional reversible $(4, 1/2)$ , regla FFAA5500

Este autómata tiene índices de Welch  $L = 1$  y  $R = 4$ . La regla de evolución, un ejemplo de su evolución y sus permutaciones en bloque se muestran en la Figura 4.5.

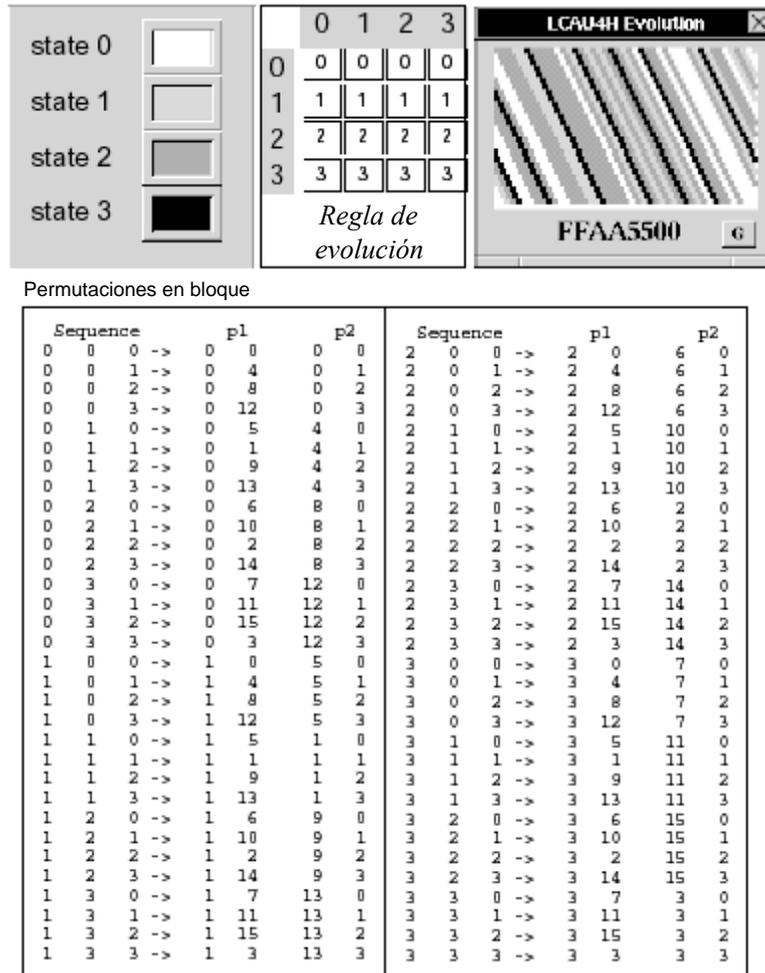


Figura 4.5: Autómata  $(4, 1/2)$ , regla FFAA5500.

La relación de conectividad de este autómata se presenta en la Figura 4.6.

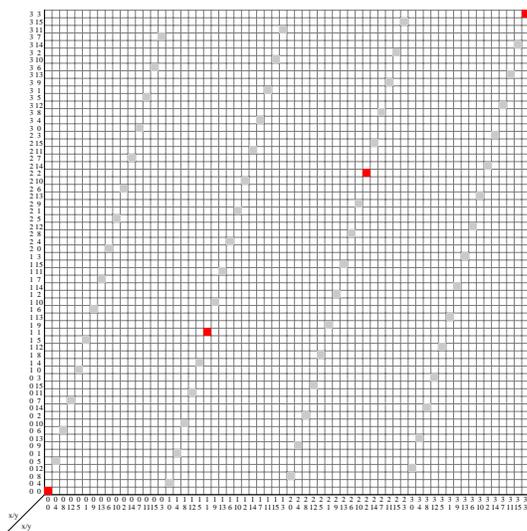


Figura 4.6: Relación de conectividad del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla *FFAA5500*. Los puntos oscuros indican configuraciones fijas.

La cerradura transitiva de esta relación se muestra en la Figura 4.7.

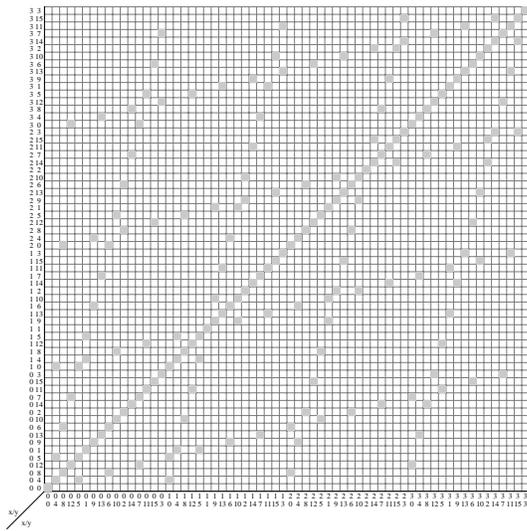


Figura 4.7: Cerradura transitiva de la relación de conectividad del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla *FFAA5500*.

La cerradura transitiva genera las siguientes clases de equivalencia (Figura 4.8).

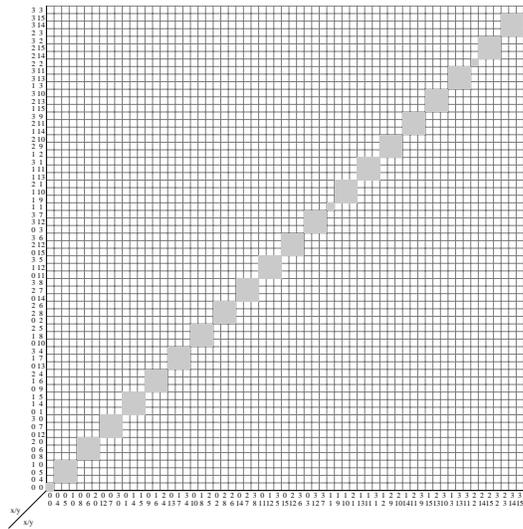


Figura 4.8: Clases del autómata  $(4, 1/2)$  regla *FFAA5500*.

Este autómata tiene 24 clases de equivalencia, 20 de tres elementos y 4 de un elemento solamente. Tome el bloque 1, 8 que representa a la secuencia de estados 102. Su clase tiene período 3, por lo que la configuración formada por repeticiones de esta secuencia debe tener período 3. Es necesario recordar que se está utilizando la composición de la regla de evolución original para conservar las mismas coordenadas. De esta forma, el período 3 es en realidad un período 6 en la evolución del autómata. Un ejemplo de este comportamiento periódico se da en la Figura 4.9.

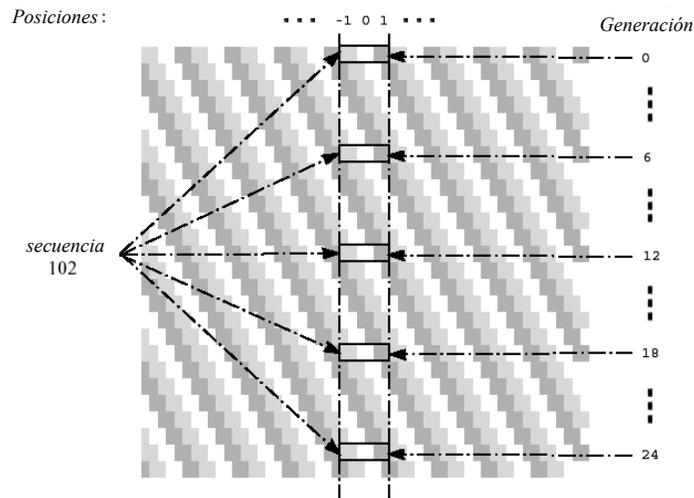


Figura 4.9: Período 3 para la composición de la regla de evolución aplicada sobre la configuración compuesta por repeticiones de la secuencia 102.

## 4.5.2 Autómata celular unidimensional reversible (4,1/2), regla 5F0A5F0A

Este autómata tiene índices de Welch  $L = 2$  y  $R = 2$ . La regla de evolución, un ejemplo de su evolución y sus permutaciones en bloque se muestran en la Figura 4.10.

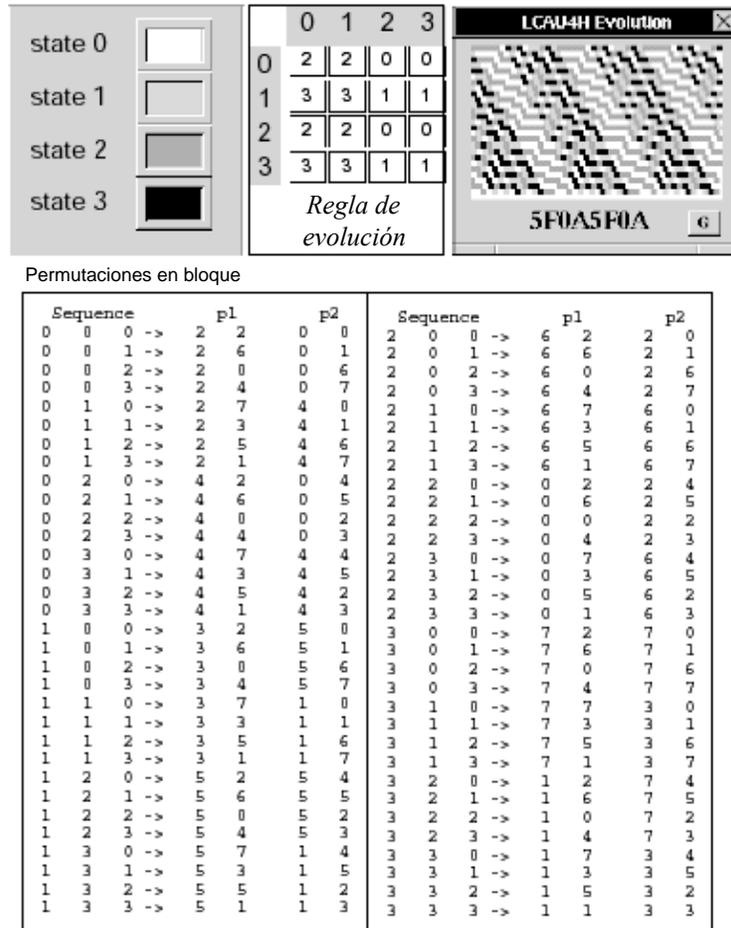


Figura 4.10: Evolución del autómata reversible (4,1/2) regla 5F0A5F0A.

La relación de conectividad de este autómata se presenta en la Figura 4.11.

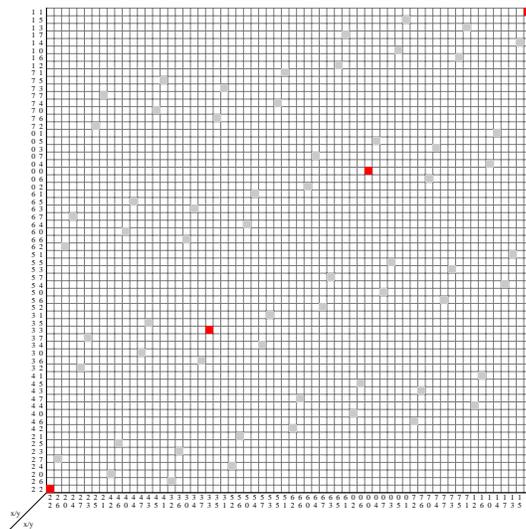


Figura 4.11: Relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla 5F0A5F0A. Los puntos oscuros representan configuraciones fijas.

La cerradura transitiva de la relación de conectividad se muestra en la Figura 4.12.

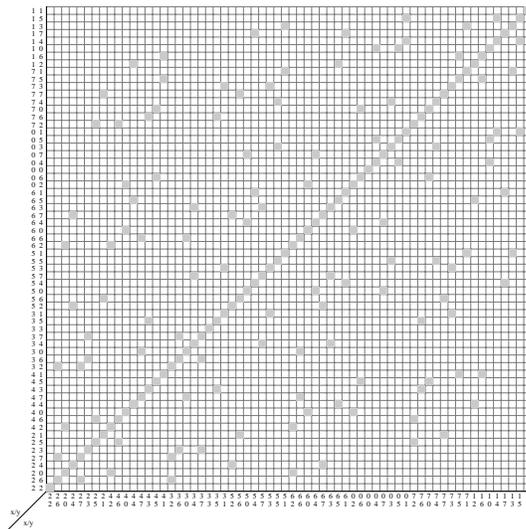


Figura 4.12: Cerradura transitiva de la relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla 5F0A5F0A.

Esta cerradura transitiva tiene las siguientes clases de equivalencia (Figura 4.13).

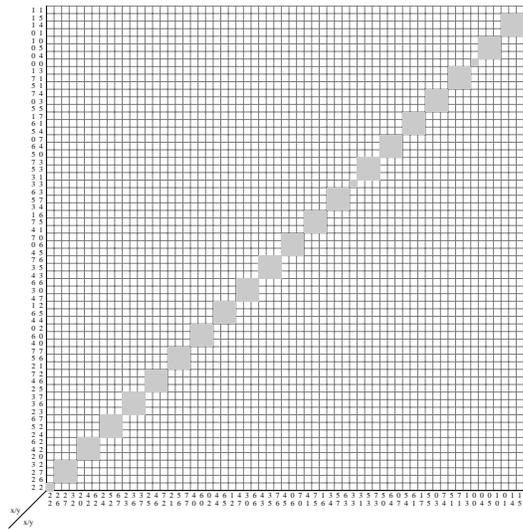


Figura 4.13: Clases de la cerradura transitiva del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla  $5F0A5F0A$ .

Este ejemplo tiene las mismas clases de equivalencia que el ejemplo anterior de la Sección 4.5.1, por lo tanto ambos autómatas pertenecen a la misma clase periódica. Tome el bloque  $3, 0$  que representa a la secuencia  $102$ , este bloque tiene período  $3$ , por lo cual la configuración formada por repeticiones de esta secuencia debe tener período  $3$ , o un período  $6$  en la evolución del autómata. Un ejemplo de este comportamiento periódico se da en la Figura 4.14.

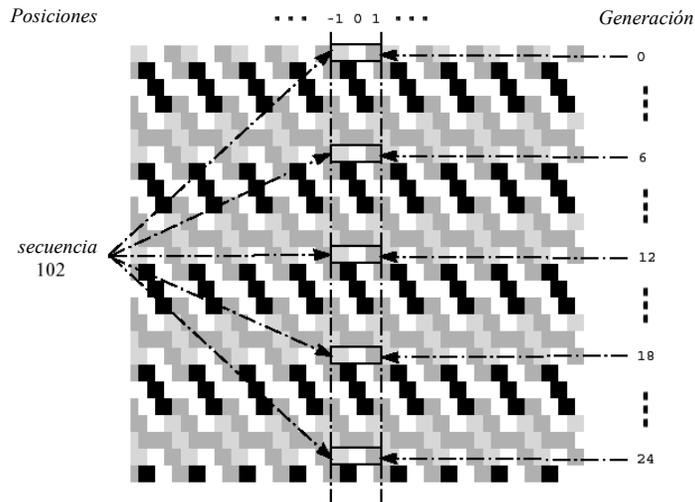


Figura 4.14: Período  $3$  en la composición de la regla de evolución sobre la configuración formada por repeticiones de la secuencia  $102$ .

### 4.5.3 Autómata celular unidimensional reversible $(4, 1/2)$ , regla AA5500FF

Este autómata tiene índices de Welch  $L = 1$  y  $R = 4$ . Su regla de evolución, un ejemplo de la misma y sus permutaciones en bloque se presentan en la Figura 4.15.

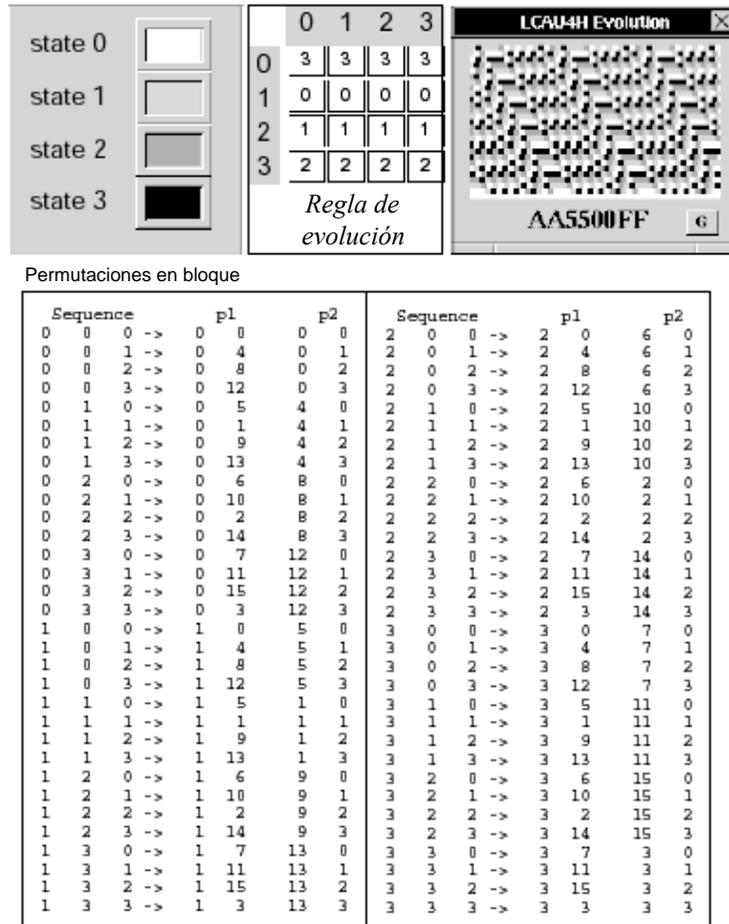


Figura 4.15: Evolución del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla AA5500FF.

La relación de conectividad de este autómata se muestra en la Figura 4.16.

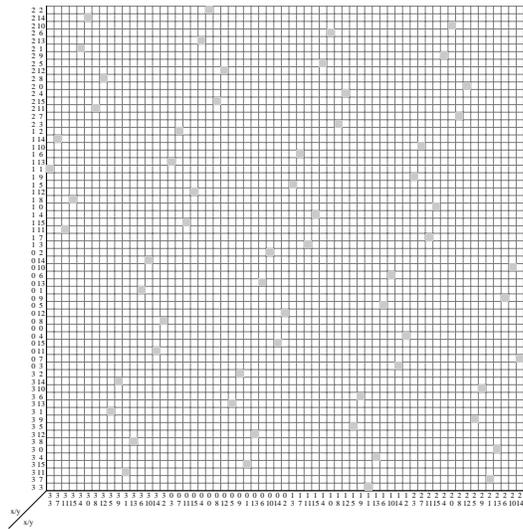


Figura 4.16: Relación de conectividad del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla  $AA5500FF$ .

La cerradura transitiva de esta relación de conectividad se presenta en la Figura 4.17.

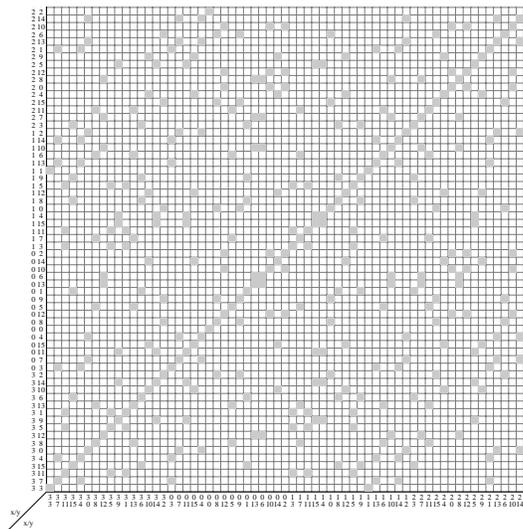


Figura 4.17: Cerradura transitiva de la relación de conectividad del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla  $AA5500FF$ .

La cerradura transitiva tiene las siguientes clases (Figura 4.18).

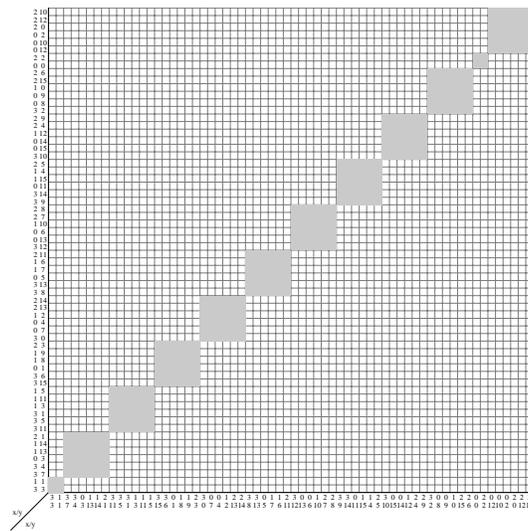


Figura 4.18: Clases de la cerradura transitiva del autómata reversible  $(4,1/2)$  regla  $AA5500FF$ .

En este caso existen 10 clases de 6 elementos y 2 clases de 2 elementos. Tome el 0,11 que representa a la secuencia 102. Esta clase tiene período 6, por lo que la configuración formada por la secuencia 102 tiene período 12 en la evolución del autómata. Un ejemplo de este comportamiento se da en la Figura 4.19.

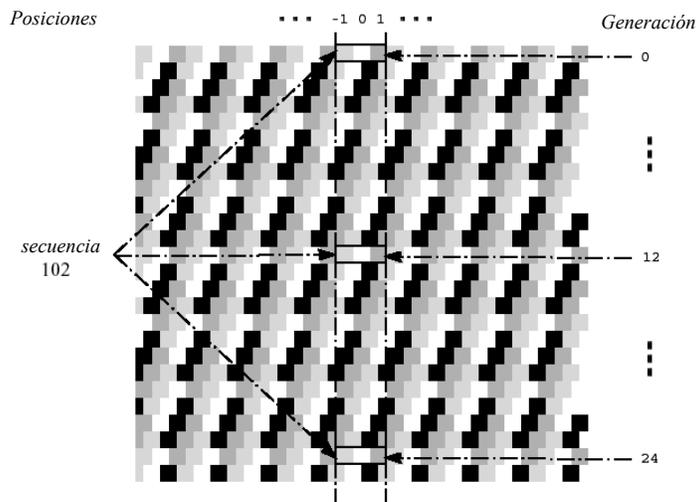


Figura 4.19: Período 6 de la configuración formada por repeticiones de la secuencia 102.

### 4.5.4 Autómata celular unidimensional reversible $(4, 1/2)$ , regla BB991133

Este autómata tiene índices de Welch  $L = 2$  y  $R = 2$ . La regla de evolución, un ejemplo de su evolución y sus permutaciones en bloque se presentan en la Figura 4.20.

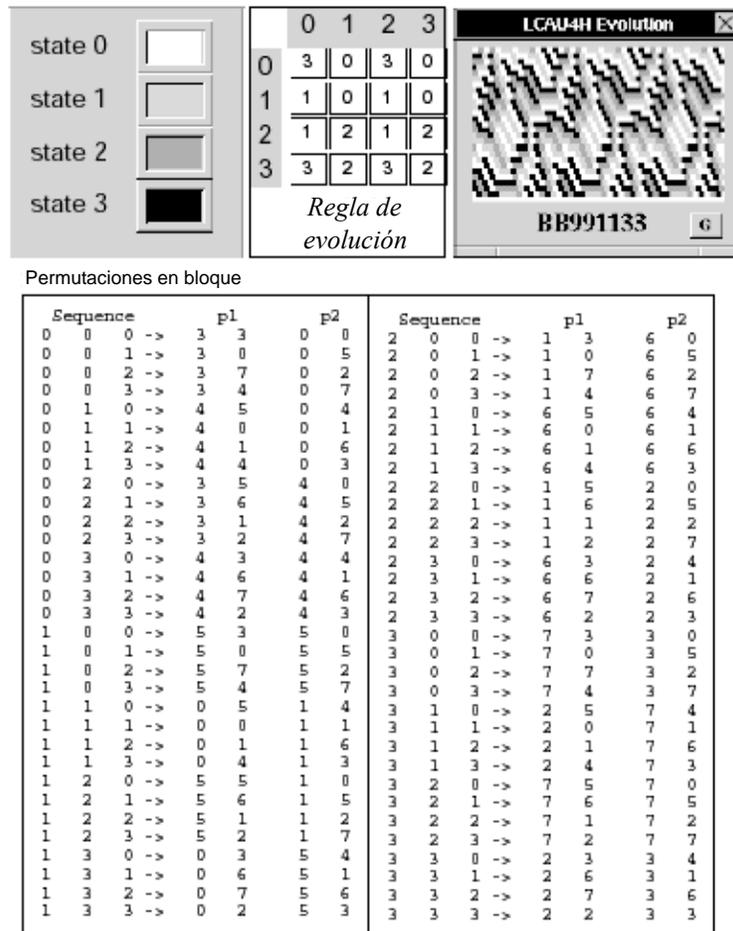


Figura 4.20: Evolución del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla BB991133.

La relación de conectividad de este autómata se muestra en la Figura 4.21.

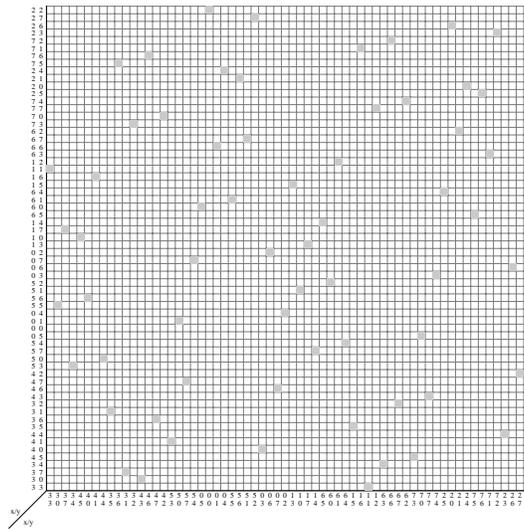


Figura 4.21: Relación de conectividad del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla  $BB991133$ .

La cerradura transitiva de la relación de conectividad se da en la Figura 4.22.

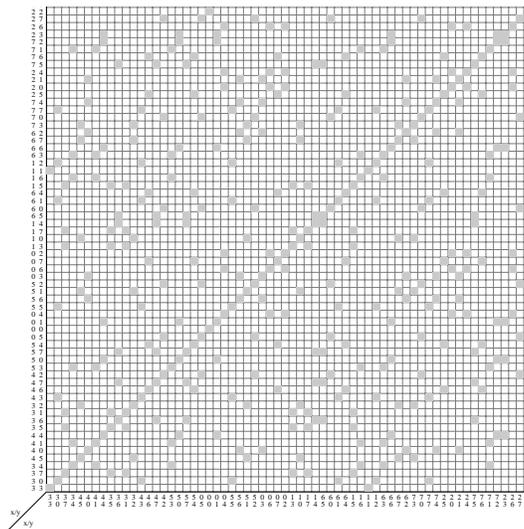


Figura 4.22: Cerradura transitiva del autómata reversible  $(4, 1/2)$  regla  $BB991133$ .

La cerradura transitiva anterior tiene las siguientes clases (Figura 4.23).

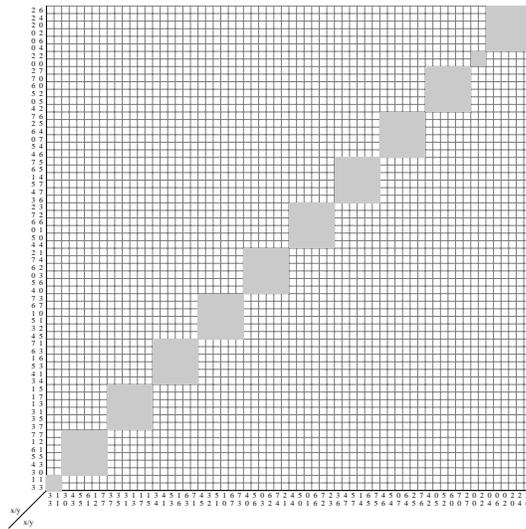


Figura 4.23: Clases de la cerradura transitiva del autómata reversible  $(4,1/2)$  regla *BB991133*.

Este autómata pertenece a la misma clase de equivalencia que el autómata presentado en la Sección 4.5.3. Tome el bloque 5,7 representando a la secuencia 102, este bloque tiene período 6, o período 12 en la evolución del autómata. Un ejemplo de este comportamiento se tiene en la Figura 4.24.

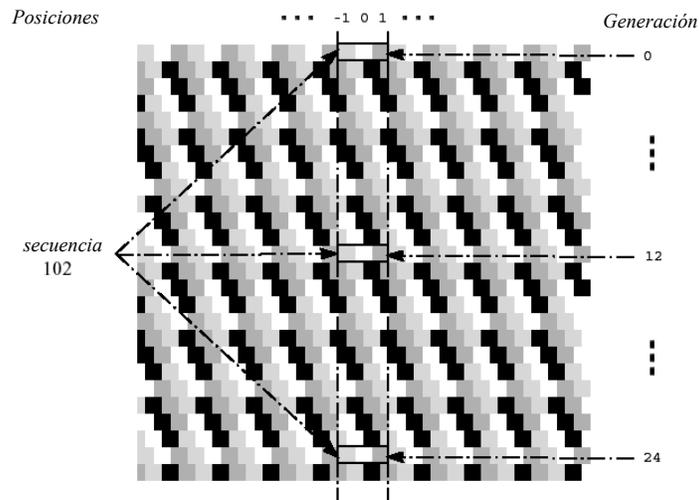


Figura 4.24: Período 12 en la evolución de la configuración formada por repeticiones de la secuencia 102.

## 4.6 Observaciones finales

Las características topológicas de los conjuntos de cilindros centrados y las propiedades de las permutaciones en bloque ofrecen una forma de conocer y clasificar diferentes tipos de comportamiento dinámicos básicos en los autómatas celulares unidimensionales reversibles. De esta manera, se ha presentado un método matricial para caracterizar el comportamiento periódico de tales sistemas. J. de Vries [dV93] presenta algunas propiedades periódicas del sistema dinámico de corrimiento usando conjuntos de cilindros como parte de su estudio acerca de teoría ergódica. Hurd [Hur90] y Culik II, Hurd y Yu [IHY91a] analizan puntos periódicos y conjuntos no errantes como conjuntos límite de lenguajes formales para cualquier (no necesariamente reversible) autómata celular unidimensional.

La clasificación propuesta en la Sección 4.4 es para autómatas reversibles cuyas reglas invertibles tengan el mismo tamaño de vecindad. Esta clasificación se generaliza por la representación de cualquier autómata por otro de tamaño de vecindad 2. Pero una consecuencia de esta simulación es el crecimiento del número de estados. Así, este procedimiento es práctico si el número de estados es pequeño. Marcus y Lind [LM95] han analizado puntos periódicos y conjuntos no errantes en subcorrimientos de tipo finito por medio de sus representaciones gráficas.

La Sección 4.5 muestra que los índices de Welch no son esenciales para establecer una clase periódica. En otras palabras, la misma clase puede tener autómatas con índices de Welch diferentes. Una primera revisión de los autómatas celulares unidimensionales reversibles  $(4, 1/2)$  muestra solamente unos cuantos tipos de clases periódicas. El siguiente capítulo discutirá algunas propiedades de esta clasificación desde el punto de vista matricial.

# Capítulo 5

## Estudio Matricial de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles

### 5.1 Resumen

Dada una representación matricial del comportamiento de un sistema, un paso a seguir es aplicar la teoría de gráficas y la teoría de matrices para obtener propiedades relevantes de esta representación y ver como estas propiedades condicionan el comportamiento del sistema. Para los autómatas celulares unidimensionales reversibles tenemos hasta el momento dos representaciones matriciales, una con respecto al comportamiento local definida por el diagrama de de Bruijn y otra que refleja el comportamiento global periódico a través de la relación de conectividad entre conjuntos de cilindros centrados que se desarrolló en el capítulo anterior.

Se tomarán ambas representaciones matriciales y con resultados clásicos de la teoría de matrices, de la teoría de gráficas y de dinámica simbólica se obtendrá una caracterización local de los autómatas celulares unidimensionales reversibles y se explicará la equivalencia que establece la clasificación global periódica presentada en el capítulo previo.

Con esto, este capítulo describirá tanto el comportamiento local como el comportamiento global periódico en los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de métodos matriciales. Utilizando gráficas lineales dirigidas, se prueba que las matrices de conectividad en los autómatas celulares unidimensionales reversibles tiene un único valor propio positivo igual a 1. Aplicando también el teorema de Cayley-Hamilton, se demuestra la idempotencia de estas matrices. Se utilizarán los vectores propios de estas matrices para encontrar la regla inversa de un autómata reversible dado. Finalmente, se establece una equivalencia fuerte con respecto al corrimiento entre autómatas en la misma clase periódica por medio de la representación matricial desarrollada en el Capítulo 4.

## 5.2 Características de los diagramas de de Bruijn

Como cada autómatas celular unidimensional reversible es simulado por otro con tamaño de vecindad 2, su diagrama de de Bruijn asociado y sus matrices de conectividad que representan la regla de evolución tienen una forma muy particular y restringida.

Los nodos del diagrama son los elementos del conjunto de estados. Como para este caso no existen nodos que traslapen, entonces cada nodo está conectado con todos los demás. Así, los índices de las matrices de conectividad son los estados de  $K$ . Cualquier secuencia de estados tiene  $k$  diferentes rutas que la representan en el diagrama de de Bruijn debido a la multiplicidad uniforme de ancestros.

Como ambas reglas invertibles tienen un tamaño de vecindad 2, entonces cada estado está formado por  $L$  nodos iniciales y  $R$  nodos finales en el diagrama de de Bruijn que representa a  $\varphi$ , con  $LR = k$ . Esto se cumple también en el diagrama de de Bruijn que representa a  $\varphi^{-1}$ , pero en este caso cada estado está formado por  $R$  nodos iniciales y  $L$  nodos finales, con  $RL = k$ .

Un resultado importante de Nasu [Nas78] es que el conjunto de nodos iniciales que forman un estado y el conjunto de nodos finales que generan otro (quizás el mismo estado) tienen un único nodo en común. Con estas características, se expondrán las propiedades de las matrices de conectividad.

## 5.3 Matrices de conectividad en autómatas celulares unidimensionales reversibles

Para autómatas celulares unidimensionales reversibles con tamaño de vecindad 2, la matriz de conectividad de una secuencia  $w \in K^n$ ,  $n \geq 2$  tiene las siguientes propiedades:

1. La suma de elementos de cada matriz de conectividad es igual a  $k$ .
2. Cada matriz de conectividad es una matriz de 0's y 1's ya que un elemento mayor que 1 implica más de una ruta que representa a  $w$  de un nodo a otro. Debido a que existe un arco del nodo final al nodo inicial en otra matriz de conectividad, entonces existe una secuencia  $v \in K^m$ ,  $m > n$  con más de  $k$  ancestros, contradiciendo la multiplicidad uniforme de ancestros.
3. Tomando la propiedad establecida por Nasu [Nas78], existe un único 1 en la diagonal principal de la matriz de conectividad.
4. Para  $i \neq j$ , si una entrada  $a_{ij}$  en la matriz es igual a 1, entonces la entrada  $a_{ji}$  es 0. Esto también evita que existan más ancestros que  $k$ .
5. Cada matriz de conectividad tiene  $L$  renglones iguales y el resto son nulos por el índice de Welch  $L$ .
6. Cada matriz de conectividad tiene  $R$  columnas iguales y el resto son nulas por el índice de Welch  $R$ .

Observaciones experimentales [Mar99], [SM96], [Sec98] sugieren que estas matrices de conectividad tienen un único valor propio 1 y los demás son iguales a 0. Esta propiedad y su relación con la multiplicidad uniforme de ancestros será discutida utilizando subgráficas lineales dirigidas.

## 5.4 Propiedades espectrales de las matrices de conectividad en autómatas celulares unidimensionales reversibles.

Los valores propios juegan un papel relevante para conocer las propiedades de las matrices de conectividad. Dada una matriz cuadrada  $A$ , su polinomio característico tiene la siguiente forma:

$$p(A) = |A - I\lambda| \quad (5.1)$$

$p(A)$  representa el polinomio característico de la matriz  $A$ ,  $|A|$  es su determinante y  $I$  es la matriz identidad.

Las raíces de  $p(A)$  son sus valores propios. Un vector propio  $v$  correspondiente a un valor propio  $\lambda$  de  $A$ , es un vector no nulo tal que  $Av = \lambda v$ . Dado un valor propio  $\lambda$  de  $A$ , su vector propio se obtiene reemplazando el valor de  $\lambda$  en  $A - I\lambda$ , igualando  $A - I\lambda$  con el vector nulo y resolviendo el sistema de ecuaciones.

Suponga que los índices de la matriz  $A$  representan a los nodos de una gráfica dada, y cada entrada de  $A$  es el número de arcos entre dos nodos. Entonces, los valores propios son útiles para conocer como crece el número de rutas finitas.

**Definición 9 (Matriz irreducible).** Para  $n \in \mathbb{Z}^+$ , sea  $A^n$  la  $n$ -ésima potencia de la matriz  $A$ . Entonces,  $A$  es irreducible si para cada entrada  $a_{ij}$  en  $A$  existe un entero  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $a_{ij} > 0$  en  $A^n$ .

En otras palabras, existen rutas de longitud  $n$  del nodo  $i$  al nodo  $j$ . Para una matriz  $A$ , un valor propio  $\lambda$  y su correspondiente vector propio  $v$  con  $Av = \lambda v$  cumplen que:

$$A^2v = AA v = A\lambda v = \lambda A v = \lambda\lambda v = \lambda^2 v \quad (5.2)$$

y en general,  $A^n v = \lambda^n v$ . Para el  $i$ -ésimo renglón de  $A^n$  se obtiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} v_j = \lambda^n v_i \quad (5.3)$$

donde  $r$  es el orden de  $A$ , es decir, el número de renglones o columnas. La Ecuación 5.3 muestra que el producto del renglón  $i$  por el vector propio  $v$  es igual al producto del valor propio por el elemento  $i$  del vector propio. Si la matriz es irreducible, entonces existe un valor propio  $\lambda$  tal que su vector propio  $v$  es positivo [LM95] [Gan59] [Kit98]. Se tomarán tanto el mínimo como el máximo de  $v$ ,  $v_m = \min\{v\}$  y  $v_M = \max\{v\}$ , con estos elementos se obtienen las siguientes cotas:

$$v_m \sum_{j=1}^r a_{ij} \leq \sum_{j=1}^r a_{ij} v_j = \lambda^n v_i \leq \lambda^n v_M \quad (5.4)$$

Así, la suma del renglón  $i$  por el vector propio  $v$  tiene dos cotas. Tomando todos los renglones, se obtiene el siguiente resultado:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij} \leq \sum_{i=1}^r \frac{v_M}{v_m} \lambda^n = \frac{r v_M}{v_m} \lambda^n \quad (5.5)$$

El término  $\frac{r v_M}{v_m}$  es una constante de la Ecuación 5.5, por lo cual la suma de elementos de  $A^n$  (o el número de rutas de longitud  $n$ ) está acotada por  $\lambda^n$ . Así, se debe analizar el comportamiento de  $\lambda^n$  para conocer como crece o decrece el número de rutas finitas conforme  $n$  crece. Para una secuencia  $s \in K^*$ , suponga que  $A$  es su matriz de conectividad en un autómata celular unidimensional reversible con tamaño de vecindad 2. Entonces  $A^n$  muestra el número de ancestros de la secuencia  $s^n$ .

De esta forma,  $A^n$  debe reflejar el comportamiento reversible del autómata, en particular, la suma de sus elementos es igual a  $k$  y  $A^n$  muestra en sus renglones y columnas la acción de los índices de Welch. Pero las matrices de conectividad no son irreducibles, y un vector propio  $v$  puede tener elementos 0 y por lo tanto la constante  $\frac{r v_M}{v_m}$  es indefinida. Por este motivo  $\frac{r v_M}{v_m} \lambda^n$  no es una cota para el comportamiento de los ancestros; sin embargo éste puede conocerse por los componentes irreducibles de  $A$ .

### 5.4.1 Componentes irreducibles y $\lambda = 1$

Dada una matriz de conectividad, sus índices serán reordenados para que la matriz tenga una forma de bloques diagonales. Estos bloques son sus componentes irreducibles, y el crecimiento de los elementos de la matriz puede conocerse a través del crecimiento de los bloques diagonales.

Para obtener los componentes irreducibles, debemos calcular las clases comunicantes de la matriz de conectividad [LM95] [Kit98]. Para  $m, n > 0$ , si la entrada  $a_{ij} > 0$  en la matriz de conectividad  $A^m$  y  $a_{ji} > 0$  en  $A^n$  entonces  $i, j$  pertenecen a la misma clase comunicante. Es decir, existe una ruta tanto de  $i$  a  $j$  como de  $j$  a  $i$ , y ambos índices están comunicados.

Una vez detectadas estas clases, se reordena la matriz  $A$  permutando sus renglones y columnas para que estas clases sean bloques diagonales. Como los elementos de cualquier clase están conectados unos con otros, entonces cada bloque diagonal es irreducible. El polinomio característico de  $A$  no cambia por permutaciones de renglones o columnas. Con esto, se utilizarán los bloques diagonales de  $A$  para calcular su polinomio característico [LM95] [Kit98]:

$$p(A) = p(A_1)p(A_2) \cdots p(A_n) \quad (5.6)$$

donde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son los componentes diagonales irreducibles de  $A$ .

Los valores propios de  $A$  son los valores propios de los  $A_i$ , en particular el valor propio más grande de  $A$  (representado por  $\lambda_A$ ) define el crecimiento de  $A^n$ . Si todo autómata celular unidimensional reversible cumple que cada matriz de conectividad  $A$  tiene un único valor

propio positivo igual a 1, entonces dicha matriz tiene uno y sólo un componente irreducible de un elemento que controla el crecimiento de  $A^n$ .

De esta manera, el único componente irreducible positivo determina la multiplicidad uniforme de los ancestros para  $A^n$ . Por esta razón es relevante demostrar que cada matriz de conectividad en un autómata reversible tiene un único  $\lambda_A = 1$ . La próxima sección demostrará esta característica usando las subgráficas lineales dirigidas de los diagramas de de Bruijn.

## 5.4.2 Subgráficas lineales dirigidas y comportamiento idempotente

Para un autómata reversible dado, tome la matriz de conectividad de cada estado en  $K$ . Cada matriz es una subgráfica de su diagrama de de Bruijn asociado.

Esta subgráfica tiene  $L$  nodos iniciales,  $R$  nodos finales y un único ciclo de un nodo por las propiedades de su matriz de conectividad (Sección 5.3).

Como se están utilizando subgráficas, la teoría de gráficas será de utilidad para conocer algunas propiedades relevantes de los autómatas reversibles. En particular, se aplicarán algunos resultados relacionados con el espectro de una gráfica. Por esta razón, se presenta la siguiente definición:

**Definición 10.** *Una gráfica lineal dirigida es una digráfica en la cual el grado de entrada y el grado de salida de cada nodo es 1.*

En otras palabras, una gráfica lineal dirigida esta compuesta solamente por ciclos. El Teorema 7 muestra que los ciclos de una gráfica definen el polinomio característico y el espectro (conjunto de valores propios) de su matriz de conectividad asociada.

**Teorema 7.** *(Milić, Sachs, Spialter [CDS80]) Sea  $G$  una digráfica y sea  $A$  su matriz de conectividad con el siguiente polinomio característico:*

$$p(A) = |A - I\lambda| = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}p_1 + \dots + p^n$$

Entonces:

$$p_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{\text{per}(L)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde  $\mathcal{L}_i$  es el conjunto de todas las subgráficas lineales dirigidas  $L$  de  $G$  con exactamente  $i$  nodos.  $\text{per}(L)$  es el número de componentes de  $L$ , es decir, el número de ciclos que forman a  $L$ .

El Teorema 7 dice que cada coeficiente  $p_i$  depende solamente del conjunto de subgráficas lineales dirigidas  $L$  de  $G$  con exactamente  $i$  nodos. La contribución de cada  $L$  a  $p_i$  es 1 si  $L$  tiene un número par de ciclos o  $-1$  si  $L$  contiene un número impar de ciclos.

No se expondrá en este trabajo una prueba formal del Teorema 7, pero se discutirán sus puntos esenciales. Para un autómata reversible de  $k$  estados, sea  $A$  una matriz de conectividad con entradas  $a_{ij}$ . Tome el coeficiente  $p_k$  de  $p(A)$  el cual coincide con  $|A|$  y tiene la siguiente forma:

$$p_k = \sum_{n!} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{k\gamma} \quad (5.7)$$

donde los índices de cada término en la suma están definidos por la permutación de  $k$  elementos.

$$\begin{array}{l} \text{Primer índice} \\ \text{Segundo índice} \end{array} \left( \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & k \\ \alpha & \beta & \dots & \gamma \end{array} \right) \quad (5.8)$$

Si un término  $a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{k\gamma}$  es diferente de 0, entonces existen en  $G$  los arcos  $(1, \alpha), (2, \beta), \dots, (k, \gamma)$ . Pero estos arcos definen un conjunto de ciclos disjuntos, es decir, una subgráfica lineal dirigida de  $G$  con  $k$  nodos. De esta forma, el valor  $a_k$  está definido por las subgráficas lineales dirigidas de  $G$  con  $k$  nodos.

Para  $1 \leq i \leq k$ , cada coeficiente  $p_i$  de  $p(A)$  depende de los menores o subdeterminantes de orden  $k$ , es decir,  $p_i$  depende de las subgráficas lineales dirigidas de  $i$  nodos en  $G$  (Ecuación 5.9).

$$p(A) = (-\lambda)^k + (-\lambda)^{k-1} \sum_{i=1}^k a_{ii} + (-\lambda)^{k-2} \sum_{i < j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + (-\lambda)^{k-3} \sum_{i < j < m} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{im} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jm} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \dots + |A| \quad (5.9)$$

La subgráfica que representa a los ancestros de cada estado en el diagrama de de Bruijn tiene solamente un único ciclo de un nodo por las propiedades de las matrices de conectividad en los autómatas reversibles. No existen ciclos más grandes debido a que estos implican múltiples ancestros para repeticiones indefinidas del estado en cuestión. Así, un resultado directo del Teorema 7 es el siguiente:

**Corolario 5.** *Sea  $A$  la matriz de conectividad de algún estado en  $K$  de un autómata celular unidimensional reversible de  $k$  estados y tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles. Entonces:*

$$p(A) = \lambda^k - \lambda^{k-1}$$

*Demostración.* Existe un único ciclo de un nodo en la gráfica representada por  $A$ , entonces  $A$  tiene solamente una subgráfica lineal dirigida de un elemento. Así  $p_1 = -1$  por el Teorema 7 y  $p_i = 0$  para  $i = 2 \dots k$ .  $\square$

El Corolario 5 tiene otra importante implicación acerca del espectro de una matriz de conectividad dada.

**Corolario 6.** *Sea  $A$  la matriz de conectividad de algún estado en  $K$  de un autómata celular unidimensional reversible de  $k$  estados y tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles. Entonces el espectro de  $A$  tiene un único valor propio positivo  $\lambda_A = 1$  y otro valor propio 0 de multiplicidad  $k - 1$ .*

*Demostración.* Por el Corolario 6  $p(A) = \lambda^k - \lambda^{k-1}$ ; calculando los valores propios:

$$\lambda^k - \lambda^{k-1} = 0 \Rightarrow \lambda^{k-1}(\lambda - 1) = 0 \quad (5.10)$$

La Ecuación 5.10 muestra un único valor propio positivo  $\lambda_A = 1$  y otro valor propio  $\lambda = 0$  de multiplicidad  $k - 1$ .  $\square$

La idempotencia de estas matrices es fácilmente probada por el Corolario 5.

**Corolario 7.** *Sea  $A$  la matriz de conectividad de algún estado en  $K$  de un autómata celular unidimensional reversible de  $k$  estados y tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles. Entonces  $A$  es idempotente.*

*Demostración.* Como  $p(A) = \lambda^k - \lambda^{k-1}$ , entonces por el teorema de Cayley-Hamilton se tiene que  $A^k - A^{k-1} = 0$ . De este modo  $A^k = A^{k-1}$  demostrando la idempotencia de  $A$ .  $\square$

El espectro de las matrices de conectividad ha sido utilizado para demostrar la existencia de un valor propio igual a 1 y su comportamiento idempotente en un autómata celular unidimensional reversible. Ahora se obtendrá la regla inversa de un autómata reversible dado con tamaño de vecindad 2 por medio de los vectores propios de las matrices de conectividad.

## 5.5 Vectores propios y regla inversa

Una matriz de conectividad muestra el número de ancestros de una secuencia dada y los estados iniciales y finales de estos ancestros en un autómata celular unidimensional reversible. Otra cuestión es si estas matrices son útiles para encontrar la regla inversa de un autómata reversible. Para esto, los vectores propios de las matrices de conectividad serán utilizados.

### 5.5.1 Calculando los vectores propios de las matrices de conectividad

Una parte importante en el estudio de la estructura de una matriz de conectividad  $A$  en un autómata reversible es la forma de los vectores  $\langle e|$  y  $|e \rangle$  tales que:

$$\langle e|A = \langle e|\lambda_A \quad y \quad A|e \rangle = \lambda_A|e \rangle \quad (5.11)$$

donde  $\lambda_A$  es el valor propio positivo de  $A$  igual a 1.  $\langle e|$  y  $|e \rangle$  son los vectores propios de  $A$  asociados a  $\lambda_A$ . Para obtener  $\langle e|$  se resuelve  $(A - I\lambda) = 0$  como un sistema de ecuaciones escalares, análogamente se calcula  $|e \rangle$  resolviendo  $(A - I\lambda)^T = 0$ .

Sabemos que  $A$  es una matriz con  $L$  renglones iguales y  $R$  columnas iguales (Figura 5.1).

De esta manera, la forma que adquiere  $(A - I\lambda)$  se presenta en la Ecuación 5.12.

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & -\lambda & & & \\ 1 & \cdots & -\lambda & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

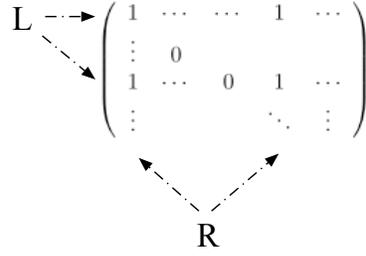


Figura 5.1: Forma de una matriz de conectividad en un autómata reversible con tamaño de vecindad 2.

Resolviendo el sistema de ecuaciones escalares para  $\lambda = 1$ , este toma la forma de la Ecuación 5.13.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \quad (5.13)$$

Usando la Ecuación 5.13 el vector propio  $|e\rangle$  no puede tomar en cuenta las columnas con entradas 1 y elementos diagonales  $-1$  ya que el  $i$ -ésimo renglón con su elemento diagonal 0 representa a una ecuación escalar que tomaría en cuenta valores positivos que no podrían cancelarse, lo que impide que la ecuación sea igual a 0. De la misma forma,  $|e\rangle$  no puede tomar en cuenta la  $j$ -ésima columna con un elemento diagonal  $-1$  tal que el  $j$ -ésimo renglón en  $A$  sea nulo, pues la ecuación escalar definida por el  $j$ -ésimo renglón no podría igualarse a 0.

La  $j$ -ésima columna que puede ser tomada por  $|e\rangle$  es aquella donde la entrada  $a_{jj} = -1$  y el  $j$ -ésimo renglón no es nulo en  $A$ , ya que en este caso el elemento diagonal es cancelado por el elemento  $a_{ji} = 1$  tal que  $a_{ii} = 1$  en  $A$ . Este proceso implica que  $|e\rangle$  tome también la  $i$ -ésima columna donde  $a_{ii} = 0$  en  $(A - I\lambda)$ . Esto no afecta la resolución del sistema porque en el  $i$ -ésimo renglón de  $(A - I\lambda)$  no se está tomando ningún valor positivo. La forma de  $|e\rangle$  se presenta en la Ecuación 5.14.

$$\begin{aligned} |e\rangle &= \{ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \}^T \\ (A - I\lambda) = 0 &= \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & -1 & & & & \vdots \\ 1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

De esta forma, para  $|e\rangle = \{a_i\}^T$ ,  $i = 0 \dots k - 1$  si  $a_i = 1$  entonces el  $i$ -ésimo renglón de  $A$  no es nulo, es decir,  $|e\rangle$  está tomando los  $L$  renglones no nulos de  $A$  que representan a un subconjunto izquierdo de Welch. Lo mismo sucede para  $\langle e| = \{a_i\}$ ,  $i = 0 \dots k - 1$ , si  $a_i = 1$  entonces el  $i$ -ésimo renglón de  $A^T$  no es nulo, es decir,  $\langle e|$  toma las  $R$  columnas no nulas de  $A$  que representan un subconjunto derecho de Welch (Ecuación 5.15).

$$\begin{aligned}
\langle e| &= \{ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \dots \} \\
(A - I\lambda)^T = 0 &= \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & -1 & & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \end{array} \right) \quad (5.15)
\end{aligned}$$

### 5.5.2 Encontrando la regla inversa

Para una matriz de conectividad  $A$  asociada a un estado en un autómata reversible, sus vectores propios  $|e \rangle$  y  $\langle e|$  correspondientes a  $\lambda_A = 1$  representan a subconjuntos de Welch. Estos vectores propios cumplen que:

$$|e \rangle \langle e| = A \quad (5.16)$$

debido a que cada entrada 1 en  $|e \rangle$  copia al vector completo  $\langle e|$ , generando a la matriz  $A$  con  $L$  renglones iguales, donde cada renglón tiene  $R$  entradas iguales a 1. Pero la propiedad más relevante es que los vectores propios de todas las matrices de conectividad son útiles para obtener la regla inversa de un autómata reversible:

1. Para cada estado  $i \in K$ , tome su matriz de conectividad  $A_i$ .
2. Tome los vectores propios  $\langle e_i|$  y  $|e_i \rangle$  de cada  $A_i$ .
3. Para  $0 \leq m \leq k - 1$  y cada  $i \in K$ , sea  $\langle e_i| = \{e_{im}\}$  el vector propio renglón de  $A_i$ . Reemplace cada  $e_{im} = 1$  por  $e_{im} = m$ .
4. Para  $i, j$  estados de  $K$ , tome todos los productos  $\langle e_i|e_j \rangle$ . Si  $\langle e_i|e_j \rangle = m \in K$  entonces  $\varphi^{-1}(ij) = m$ .

La justificación de este procedimiento es que los vectores propios tienen toda la información de los subconjuntos de Welch, por lo tanto el producto  $\langle e_i|e_j \rangle$  genera el estado en común que es tanto un ancestro derecho de  $i$  como un ancestro izquierdo de  $j$ , es decir, genera el estado en el cual la vecindad  $ij$  evoluciona en el sentido inverso.

Una vez analizados algunos aspectos del comportamiento local de los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de representaciones matriciales, continuaremos ahora con el análisis matricial para discutir el comportamiento periódico global de estos sistemas.

## 5.6 Equivalencia fuerte con respecto al corrimiento en el comportamiento periódico global

La clasificación expuesta en la Sección 4.4 define una equivalencia fuerte con respecto al corrimiento entre autómatas celulares unidimensionales reversibles. Para mostrar esta equiv-

alencia, se aplicará el isomorfismo que existe entre los componentes conectados de las relaciones de conectividad en autómatas de la misma clase. Dos sistemas de corrimiento representados por las matrices  $A$  y  $B$  tienen una equivalencia fuerte con respecto a sus corrimientos si existen dos matrices  $R$  y  $S$  tales que:

$$A = RS \text{ y } B = SR. \quad (5.17)$$

Si las matrices  $A$  y  $B$  son equivalentes en este sentido, se dice que los sistemas que éstas representan son topológicamente equivalentes (R. F. Williams [Wil73]). Para dos relaciones de conectividad  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$ , si existen dos matrices  $R$  y  $S$  tales que:

$$P_{\varphi_1} = RS \text{ y } P_{\varphi_2} = SR \quad (5.18)$$

entonces los comportamientos periódicos definidos por  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$  son topológicamente equivalentes. Un problema importante es que no existe un proceso que sea general y fácil de implementar para encontrar las matrices  $R$  y  $S$  que establecen la equivalencia fuerte de dos sistemas. Sin embargo, este no es el caso para relaciones de conectividad equivalentes  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$ , y las matrices  $R$  y  $S$  son calculadas sin dificultad.

**Teorema 8.** *Si dos relaciones de conectividad  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$  son periódicamente equivalentes, entonces existen matrices  $R$  y  $S$  tales que  $P_{\varphi_1} = RS$  y  $P_{\varphi_2} = SR$ .*

*Demostración.* Si  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$  son periódicamente equivalentes, entonces existe un isomorfismo entre las cerraduras transitivas de  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$ ; como se explica en la Sección 4.4. Así, cada clase en  $P_{\varphi_1}$  puede ser mapeada a otra clase con la misma forma en  $P_{\varphi_2}$ .

Para cada clase en  $P_{\varphi_1}$ , asigne un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  a otro conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[v_i]}$  de una clase similar en  $P_{\varphi_2}$ . Después, asocie al conjunto  $\mathcal{C}_{[v_i]}$  el conjunto  $\mathcal{C}_{[w_j]}$  si  $\mathcal{C}_{[w_i]}$  está conectado en un paso con  $\mathcal{C}_{[w_j]}$  en la matriz  $P_{\varphi_1}$ .

Repita el proceso, asocie  $\mathcal{C}_{[w_j]}$  a  $\mathcal{C}_{[v_j]}$  si  $\mathcal{C}_{[v_i]}$  está conectado en un paso con  $\mathcal{C}_{[v_j]}$  en la matriz  $P_{\varphi_2}$ . Realizando iterativamente este procedimiento para cualquier pareja de clases de equivalencia en  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$ , cada conjunto en la clase de  $P_{\varphi_1}$  está asociado a uno y sólo un conjunto en la clase de  $P_{\varphi_2}$  y viceversa.

Así, los mapeos de la matriz  $P_{\varphi_1}$  a la matriz  $P_{\varphi_2}$  están representados por una matriz  $R$ ; y los mapeos de  $P_{\varphi_2}$  a  $P_{\varphi_1}$  están representados por otra matriz  $S$ .

Finalmente, el mapeo entre los conjuntos de cilindros centrados de  $P_{\varphi_1}$  está también definido por  $RS$ , donde  $R$  va a los conjuntos de  $P_{\varphi_2}$  y  $S$  regresa a los conjuntos de  $P_{\varphi_1}$ . Para los mapeos en  $P_{\varphi_2}$  se tiene el mismo resultado por medio de  $SR$ . Por lo tanto,  $P_{\varphi_1} = RS$  y  $P_{\varphi_2} = SR$ . □

Resultados directos del Teorema 8 son los siguientes:

**Corolario 8.** *Si dos autómatas celulares unidimensionales reversibles con tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles son periódicamente equivalentes, entonces sus relaciones de conectividad  $P_{\varphi_1}$  y  $P_{\varphi_2}$  tienen una equivalencia fuerte con respecto al corrimiento.*

**Corolario 9.** *Si dos autómatas celulares unidimensionales reversibles con tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles son periódicamente equivalentes, entonces sus comportamientos periódicos son topológicamente equivalentes.*

## 5.7 Ejemplos ilustrativos

### 5.7.1 Comportamiento local

Tome el siguiente autómata celular unidimensional reversible  $(2, 1/2)$ .

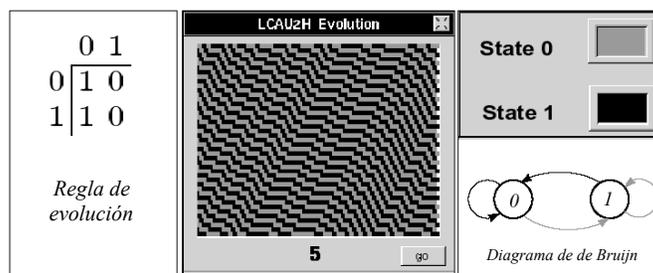


Figura 5.2: Autómata reversible con tamaño de vecindad 2.

La matriz de conectividad del estado 0 y sus valores propios son como sigue:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

Tabla 5.1: Matriz de conectividad cuyos valores propios son  $\lambda_A = 1$  y  $\lambda = 0$ .

El comportamiento idempotente de la matriz de conectividad se observa en la forma de su polinomio característico.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La regla inversa de este autómata reversible es calculada por los vectores propios de la matriz de conectividad.

Estado	Matriz de conectividad	$\langle e $	$ e\rangle$
0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$( 0 \ 1 )$	$( 1 \ 1 )^T$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$( 1 \ 0 )$	$( 1 \ 1 )^T$

Tome el vector propio renglón de cada estado y reemplace los elementos 1's por sus índices correspondientes. Multiplique cada vector propio renglón por todos los vectores propios columna de los estados del autómata. De esta forma se obtiene la evolución inversa de cada vecindad.

<i>Vecindad</i>	<i>Producto</i>	<i>Vecindad</i>	<i>Producto</i>
00	$(0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$	01	$(0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$
10	$(0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$	11	$(0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Así, la regla inversa del autómata celular unidimensional reversible es la siguiente:

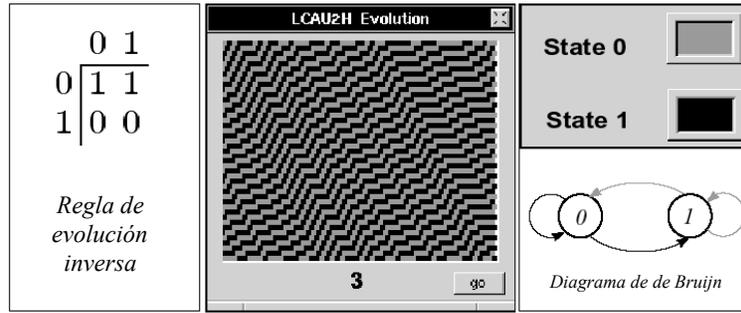


Figura 5.3: Regla inversa del autómata reversible de la Figura 5.2.

### 5.7.2 Comportamiento global

Tome los siguientes dos autómatas celulares unidimensionales reversibles de 2 estados y tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles.

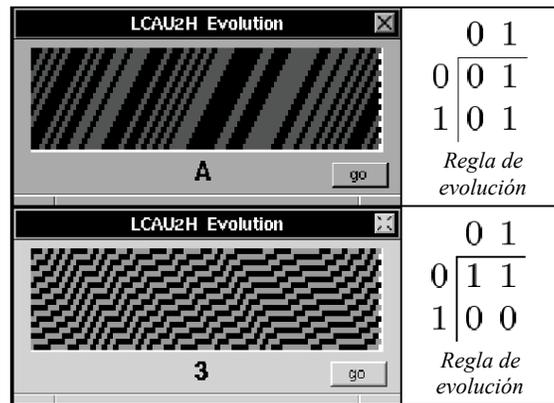


Figura 5.4: Autómatas reversibles con tamaño de vecindad 2.

Sus relaciones de conectividad son las siguientes:

$P_A$								$P_3$							
000 001 010 011 100 101 110 111								000 001 010 011 100 101 110 111							
000	1							000	1						
001		1						001			1				
010				1				010	1						
011					1			011				1			
100	1							100		1					
101			1					101					1		
110				1				110			1				
111						1		111						1	

Tabla 5.2: Relaciones de conectividad  $P_A$  y  $P_3$ .

Las cerraduras transitivas de las relaciones de conectividad  $P_A$  y  $P_3$  son como sigue:

$P_A$								$P_3$							
000 001 010 100 011 101 110 111								000 001 010 100 011 101 110 111							
000	1							000	1						
001		1	1	1				001		1	1	1			
010		1	1	1				010		1	1	1			
100		1	1	1				100		1	1	1			
011					1	1	1	011				1	1	1	
101					1	1	1	101				1	1	1	
110					1	1	1	110				1	1	1	
111							1	111							1

Tabla 5.3: Cerraduras transitivas de las relaciones  $P_A$  y  $P_3$ .

Así, ambos autómatas son periódicamente equivalentes. Para la clase de equivalencia de  $P_A$  compuesta por  $\{001, 010, 100\}$  y la clase de equivalencia de  $P_3$  formada por  $\{011, 101, 110\}$ , si se asocia 001 con 011 y se aplica el proceso del Teorema 8, entonces los otros mapeos se determinan como se muestra en la Figura 5.5.

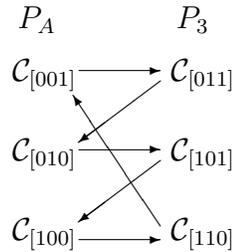


Figura 5.5: Mapeos entre conjuntos de cilindros centrados definidos por las clases  $\{001, 010, 100\} \subseteq P_A$  y  $\{011, 101, 110\} \subseteq P_3$ .

El mismo proceso se aplica a las otras clases de equivalencia, generando las matrices  $R$  y  $S$ . La matriz  $R$  muestra los mapeos de  $P_A$  a  $P_3$  y análogamente la matriz  $S$  presenta los mapeos de  $P_3$  a  $P_A$  (Tabla 5.4). De esta forma,  $RS = P_A$  y  $SR = P_3$ . Por lo tanto, ambos autómatas tiene una equivalencia fuerte respecto al comportamiento periódico de sus conjuntos de cilindros centrados (Tabla 5.5).

$R$								$S$							
000 001 010 011 100 101 110 111								000 001 010 011 100 101 110 111							
000							1	000							1
001			1					001			1				
010					1			010				1			
011		1						011		1					
100						1		100			1				
101					1			101				1			
110	1							110	1						
111	1							111	1						

Tabla 5.4: Matrices  $R$  y  $S$ .

$R$	$S$	$P_A$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$S$	$R$	$P_3$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tabla 5.5: Productos  $RS = P_A$  y  $SR = P_3$ .

## 5.8 Observaciones finales

Las propiedades espectrales y los vectores propios de las matrices de conectividad son muy útiles para obtener propiedades importantes del comportamiento local de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. En este sentido, una herramienta importante es la representación de cada autómata con otro de tamaño de vecindad 2. Esta simulación conlleva a que las matrices de conectividad tengan una forma muy conveniente para ser analizadas.

Jarkko Kari [Kar00] realizó un análisis del comportamiento local de los autómatas reversibles aditivos usando su representación matricial. La relación de los diagramas de de Bruijn con dinámica simbólica es tratada en el trabajo de Benjamin Weiss en su estudio referente a sistemas sóficos [Wei73]. No obstante, los resultados obtenidos en sistemas sóficos no han sido ampliamente utilizados en el estudio de diagramas de de Bruijn, por lo tanto es necesario más trabajo en esta dirección.

Con respecto al comportamiento global, las permutaciones en bloque son muy útiles para conocer las características y la forma del comportamiento periódico. Esta tesis ha desarrollado una clasificación de estos sistemas por medio de esta caracterización sobre sus configuraciones periódicas, y es fácil establecer que esta clasificación define una equivalencia fuerte con respecto al corrimiento debido a la acción de las permutaciones en bloque.

R. F. Williams [Wil73] fue el primero en discutir la equivalencia fuerte con respecto al corrimiento entre subcorrimientos de tipo finito utilizando una aproximación matricial. Este trabajo ha servido de base a otros, como se puede observar en el trabajo de Mike Boyle [Boy93] y en el de Nasu [Nas88] el cual estudia equivalencias respecto al corrimiento y automorfismos entre subcorrimientos de tipo finito.



# Capítulo 6

## Comportamiento Transitivo de los Autómatas Celulares Unidimensionales Reversibles

### 6.1 Resumen

En la parte final de esta tesis se investigarán los comportamientos transitivos básicos de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. Ya que se tiene establecida una herramienta matricial para analizar el comportamiento periódico global de los autómatas reversibles, una cuestión interesante es utilizar esta misma herramienta para discutir ahora el comportamiento transitivo de estos sistemas.

Para que dicho proceso matricial pueda aplicarse al estudio del comportamiento transitivo de los autómatas reversibles con ambos índices de Welch distintos de 1, se complementará con los resultados obtenidos acerca del comportamiento local de estos sistemas. En particular se utilizarán los subconjuntos de Welch tanto de la regla original como de la regla inversa los cuales son representados por los vectores propios de sus matrices de conectividad.

De esta forma, este capítulo tomará la caracterización determinística dada por las permutaciones en bloque y corrimientos para representar la dinámica global transitiva de los conjuntos de cilindros centrados en un autómata celular unidimensional reversible. Se define una representación matricial y con ésta se establece un procedimiento para detectar si un autómata reversible con un índice de Welch igual a 1 es topológicamente transitivo, topológicamente mezclado y contiene configuraciones transitivas. Para autómatas reversibles con índices de Welch diferentes de 1, se presenta un procedimiento que hace uso de los subconjuntos de Welch para calcular las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados y se muestran algunos ejemplos de comportamientos topológicamente transitivos y configuraciones transitivas.

### 6.2 Definiciones básicas de comportamientos transitivos

Se definen varios tipos de comportamientos transitivos para analizar y caracterizar las transiciones entre las configuraciones de un autómata celular unidimensional reversible dado. Se

utilizarán las definiciones expuestas en [LM95], [Rob95], [dV93].

**Definición 11.** *Un sistema dinámico  $(X, \Psi)$  tiene un punto transitivo  $x \in X$  si para algún  $n \in \mathbb{Z}$  y para cada conjunto abierto  $\mathcal{O}$  del cubrimiento de  $X$ , se cumple que  $\Psi^n(x) \in \mathcal{O}$ . Es decir, existe un punto en  $X$  que intersecta todos los conjuntos del cubrimiento.*

En un autómata celular unidimensional reversible, un punto transitivo es una configuración que intersecta todos los conjuntos de cilindros centrados en la familia  $\mathfrak{C}_{K^{2i+1}}$  por la acción del mapeo global. Se describirá ahora el comportamiento transitivo entre conjuntos abiertos de un cubrimiento.

**Definición 12.** *Un sistema dinámico  $(X, \Psi)$  es topológicamente transitivo si para algún  $n \in \mathbb{Z}$  y para cada par ordenado  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  de conjuntos abiertos en el cubrimiento se cumple que  $\Psi^n(\mathcal{O}_1) \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ . Es decir, cada conjunto abierto en el cubrimiento intersecta a todos los demás por la acción de  $\Psi$ .*

En un autómata celular unidimensional reversible, para  $i \in \mathbb{N}$  el sistema es topológicamente transitivo si cada conjunto de cilindros centrados en la familia  $\mathfrak{C}_{K^{2i+1}}$  intersecta al resto debido al mapeo global. Una propiedad transitiva más restrictiva se presenta a continuación.

**Definición 13.** *Un sistema dinámico  $(X, \Psi)$  es topológicamente mezclado si para algún  $n_0 \in \mathbb{Z}$  y para cada par ordenado  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  de conjuntos abiertos del cubrimiento se cumple que  $\Psi^n(\mathcal{O}_1) \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$  para cada  $n \geq n_0$ . Así, cada conjunto abierto además de intersectar cualquier otro conjunto en  $n_0$  pasos, sus trayectorias pueden permanecer en este conjunto de manera indefinida.*

Entonces, un autómata celular unidimensional reversible es topológicamente mezclado si cada conjunto de cilindros centrados intersecta a cualquier otro y el conjunto tiene configuraciones cuya evolución intersecta al otro conjunto de forma indefinida. Se estudiará ahora las condiciones que un autómata reversible debe tener para satisfacer los comportamientos anteriores utilizando las permutaciones en bloque sobre conjuntos de cilindros centrados.

### 6.3 Transiciones entre conjuntos de cilindros centrados

Para facilitar nuestro análisis, se tomará sólo la familia de conjuntos de cilindros centrados especificada por el conjunto de secuencias de tres células. Cada secuencia  $w \in K^3$  define un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$ . Concatenemos cada  $w$  con todas las secuencias de tres células a ambos lados. Entonces para cualquier pareja  $w_l, w_r$  de secuencias de tres células, se obtiene una secuencia más grande  $w_l w w_r$  de nueve células.

Para  $0 \leq i < Lk$  y  $0 \leq j < Rk$ , cada secuencia  $w_l w w_r$  permuta en tres bloques  $x_i y_j$  elementos del producto  $XY$ . Estos tres bloques tienen dos bloques centrales  $y_j x_i$  elementos de  $YX$ . Permute estos bloques centrales por sus secuencias correspondientes  $v_1, v_2$  de tres células. Así, secuencias distintas  $w_l w w_r$  generan diferentes secuencias  $v_1 v_2$ . Cada secuencia  $v_1 v_2$  permuta en dos bloques  $x_i y_j$  elementos de  $XY$ . Tome el bloque central  $y_j x_i$  de estos y permútelos por su secuencia correspondiente  $u \in K^3$ .

De esta manera, distintos bloques  $v_1 v_2$  mapean a distintas secuencias  $u \in K^3$ . Con esto se obtienen las transiciones de un conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w]}$  a distintos conjuntos de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[u]}$  posicionados en las mismas coordenadas. Este proceso se ilustra en la Figura 6.1.

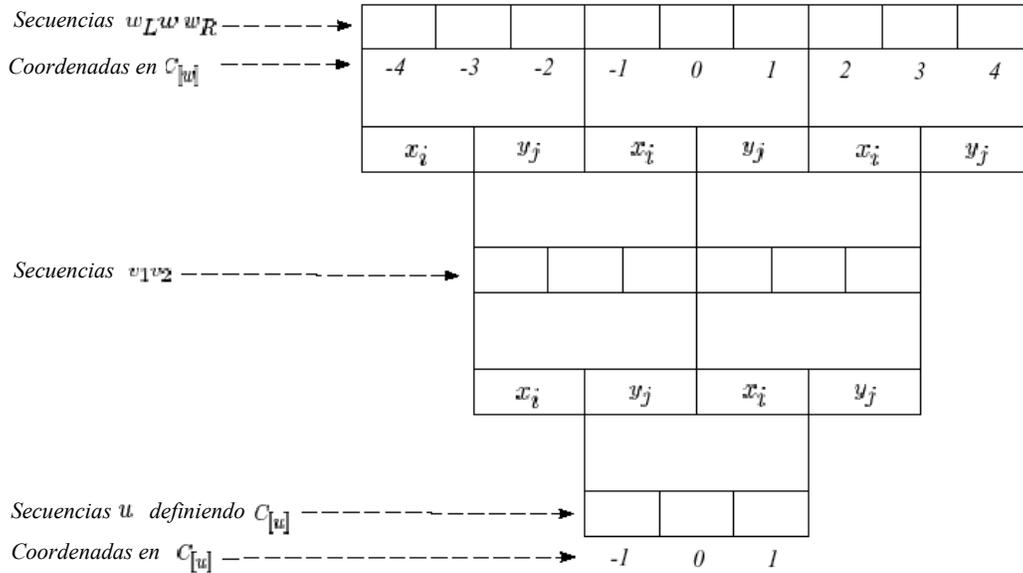


Figura 6.1: Transiciones del conjunto  $\mathcal{C}_{[w]}$  a distintos conjuntos  $\mathcal{C}_{[u]}$ .

## 6.4 Representación matricial del comportamiento dinámico

El procedimiento anterior genera todas las posibles transiciones desde un conjunto de cilindros centrados dado a todos los demás en la familia  $\mathfrak{C}_{K^3}$ . Estas transiciones tienen una representación matricial  $M_\varphi$ . En esta matriz, los índices por renglones y columnas son los conjuntos de cilindros centrados en  $\mathfrak{C}_{K^3}$ . Para las secuencias  $w_1$  y  $w_2$  en  $K^3$ , si existe una transición de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ , entonces la entrada especificada por los índices de estos conjuntos en  $M_\varphi$  es 1, en otro caso es 0.

De esta manera,  $M_\varphi$  es una matriz de 0's y 1's que muestra las transiciones entre los diferentes conjuntos de cilindros centrados, y en algunos casos las propiedades de  $M_\varphi$  pueden señalar las características del comportamiento transitivo en los autómatas celulares unidimensionales reversibles. Por ejemplo, las potencias de  $M_\varphi$  pueden representar las transiciones en varios pasos entre los conjuntos de cilindros centrados.

Observaciones experimentales sugieren que el conjunto de autómatas celulares unidimensionales reversibles manifiesta todos los tipos de comportamientos transitivos. Sin embargo, hasta ahora no existe un procedimiento computacional para detectar y caracterizar estos comportamientos. Por tal motivo se utilizará la matriz  $M_\varphi$  asociada a cada autómata reversible para estudiar el comportamiento de estos sistemas.

## 6.5 Propiedades transitivas de los autómatas celulares unidimensionales reversibles

La matriz  $M_\varphi$  ofrece una representación del comportamiento dinámico de un autómata celular unidimensional reversible, y las propiedades de esta matriz pueden caracterizar dicho

comportamiento. Por tal motivo, se definirán varios tipos de matrices que serán útiles para el análisis de  $M_\varphi$ .

**Definición 14 (Matriz esencial).** Sea  $M$  una matriz cuadrada no negativa.  $M$  es esencial si no tiene renglones ni columnas nulas.

**Definición 15 (Matriz primitiva).** Una matriz  $M$  es primitiva si existe algún  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,  $M^n$  es positiva.

Los tipos de matrices observados en  $M_\varphi$  pueden indicar los diferentes tipos de comportamientos dinámicos. Primeramente se expondrá un resultado importante acerca del comportamiento simétrico de las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados.

**Lema 8.** Para cualesquiera secuencias  $w_1$  y  $w_2$  en  $K^3$ , si el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  interseca al conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ , entonces  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  también interseca a  $\mathcal{C}_{[w_1]}$ .

*Demostración.* Si  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  interseca a  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ , entonces existen dos secuencias  $a, b$  elementos de  $K^n$  tales que:

$$\varphi^{2n}(aw_1b) = w_2$$

es decir, la evolución de la secuencia  $aw_1b$  en  $2n$  pasos es igual a  $w_2$ , y  $w_1$  es la subsecuencia central de  $aw_1b$ .

Tome la configuración  $c = \dots aw_1baw_1baw_1b \dots$  compuesta por la concatenación de  $aw_1b$ , así:

$$\Phi^{2n}(c) = c'$$

donde la configuración  $c' = \dots dw_2cdw_2cdw_2c \dots$  está formada por la repetición de la secuencia  $dw_2c$  para  $c, d$  elementos de  $K^n$  (Figura 6.2).

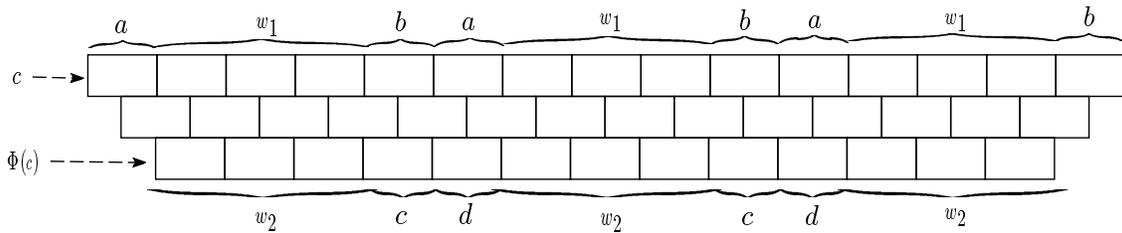


Figura 6.2: Transición del conjunto  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  al conjunto  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  dada por  $\Phi^2(c) = c'$ .

Pero  $dw_2c$  es finita, por lo cual  $c'$  puede solamente generar un número finito de configuraciones distintas, y tiene una evolución periódica. Ya que el autómata es reversible, la evolución regresa a  $c'$  pero también a  $c$ .

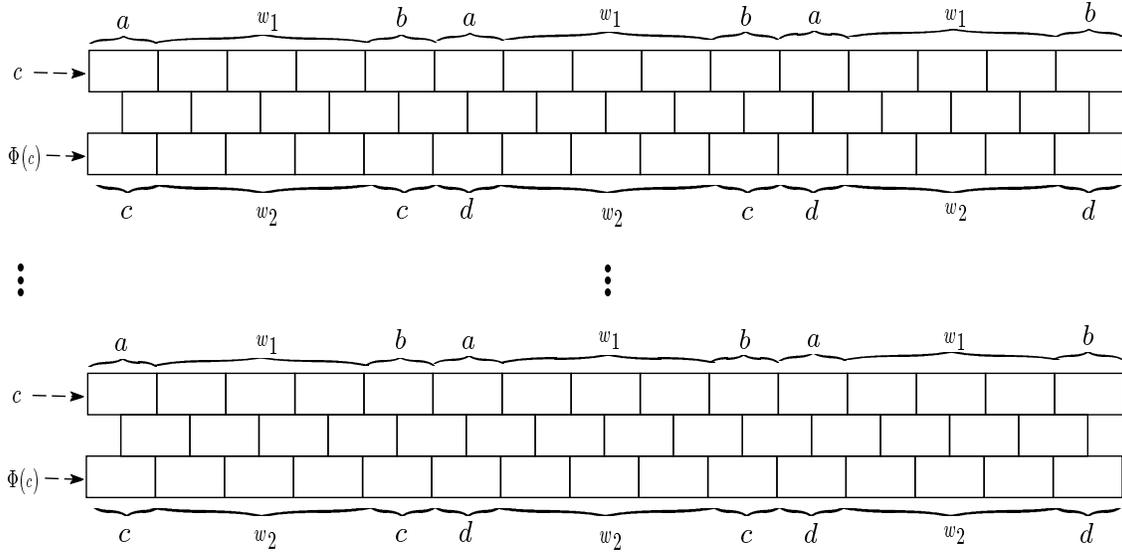


Figura 6.3: Evolución periódica de las configuraciones periódicas  $c$  y  $c'$  donde  $\Phi^2(c) = c'$ .

Así,  $c$  es tanto ancestro como sucesor de  $c'$  y por lo tanto el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  intersecta al conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_1]}$ .

□

El Lema 8 tiene otra implicación:

**Corolario 10.** *La transición entre conjuntos de cilindros centrados es una relación reflexiva.*

El punto importante ahora es obtener el comportamiento transitivo de  $M_\varphi$ . Esto es, para las secuencias  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  en  $K^3$ , si el conjunto  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta al conjunto  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  y este intersecta además a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  en  $M_\varphi$ , entonces algún proceso debe establecerse para saber si el conjunto  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta al conjunto  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  a través de  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ .

Para autómatas celulares unidimensionales reversibles con un índice de Welch igual a 1, la siguiente sección mostrará que este proceso está dado por la cerradura transitiva de  $M_\varphi$ . Pero para el caso de autómatas con ambos índices de Welch diferentes de 1, este problema es más complicado.

## 6.6 Autómatas reversibles con un índice de Welch igual a 1

Para este tipo de autómata reversible, la cerradura transitiva de la matriz  $M_\varphi$  efectivamente refleja su comportamiento transitivo. Para las secuencias  $w_1$ ,  $w_2$  y  $w_3$  en  $K^3$ , suponga que  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  y  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  en  $M_\varphi$ . De este modo, la cerradura transitiva de  $M_\varphi$  conecta  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  con  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  a través de  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ , y se demostrará que esta transición es verdadera.

**Lema 9.** *Para autómatas celulares unidimensionales reversibles con tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles y con índice de Welch  $L = 1$  en la regla original, si  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  y  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  en  $M_\varphi$ , entonces existe una trayectoria de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  a través de  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ .*

*Demostración.* Para este tipo de autómata celular unidimensional reversible, cada estado tiene 1 célula ancestral izquierda y  $k$  células ancestras derechas, es decir,  $L = 1$  y  $R = k$ . Tome la secuencia  $w_1$ , donde  $M_\varphi$  muestra que algunas extensiones de  $w_1$  evolucionan en  $w_2$  en dos pasos.

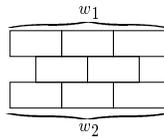


Figura 6.4: Evolución de  $w_1$  a  $w_2$ ; las células aquí presentadas tienen un estado fijo.

En este caso, la representación matricial de la regla de evolución original tiene la siguiente forma. Cada columna es una permutación del conjunto de estados y cada renglón tiene un único estado de este conjunto. Así, en la construcción de la Figura 6.4,  $k$  estados pueden ser concatenados a la derecha de cada célula para que cada uno sea una extensión ancestral derecha, y todos ellos formen un único estado definido por la célula izquierda. Análogamente,  $k$  estados pueden concatenarse a la izquierda de cada célula para que actúen como extensiones ancestras izquierdas, cada una de estas extensiones evolucionando en un estado distinto al de las demás extensiones. De esta manera, la evolución de  $w_1$  a  $w_2$  tiene las siguientes extensiones derechas.

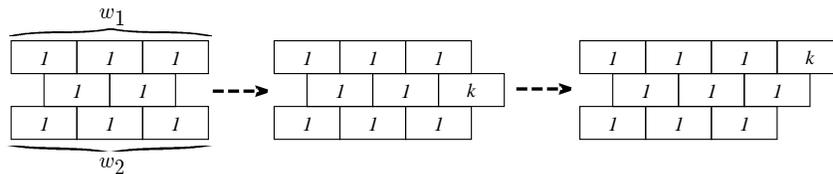


Figura 6.5: Extensiones derechas de  $w_1$  que evolucionan en el lado derecho de  $w_2$ . Aquí, cada valor representa el número de posibles estados que cada célula puede tomar y no describe un estado en particular de  $K$ .

Para completar la construcción, se tienen las siguientes extensiones izquierdas:

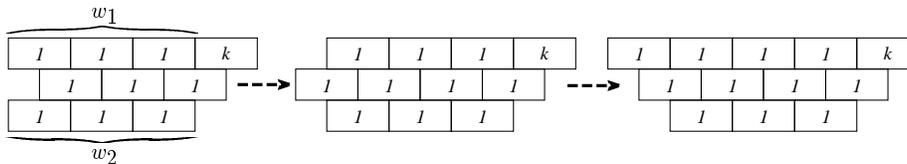


Figura 6.6: Extensiones izquierdas de  $w_1$  que evolucionan en  $w_2$ .

En la Figura 6.6 cada célula ancestral derecha especifica una columna en la representación matricial de  $\varphi$ . Como cada columna es una permutación de  $K$ , entonces cada célula ancestral derecha puede formar cualquier estado dependiendo del estado de su vecina izquierda. Este proceso funciona para generaciones posteriores, y la transición de  $w_1$  a  $w_3$  a través de  $w_2$  se muestra en la Figura 6.7.

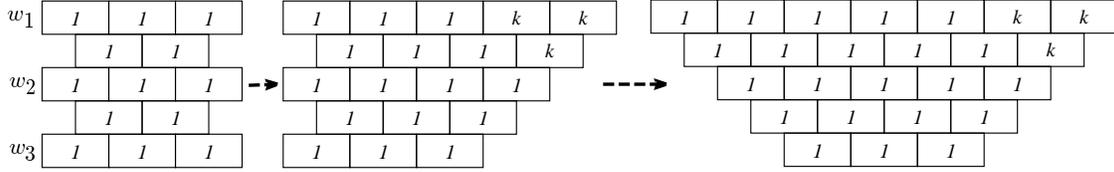


Figura 6.7: Transición de  $w_1$  a  $w_3$  por medio de  $w_2$ .

Por lo tanto, existe una transición de  $w_1$  a  $w_3$  y de este modo de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ . □

Un resultado directo del Lema 9 es el siguiente:

**Corolario 11.** *Para un autómata celular unidimensional reversible con tamaño de vecindad 2 en ambas reglas invertibles y el índice de Welch  $L = 1$  en la regla de evolución original, la cerradura transitiva de  $M_\varphi$  especifica el comportamiento transitivo del autómata. Lo mismo sucede para autómatas celulares unidimensionales reversibles con el índice de Welch derecho  $R = 1$  en la regla de evolución original.*

*Demostración.* Aplique el proceso de la demostración del Lema 9 para mostrar las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados para un mayor número de pasos. Estas transiciones son siempre factibles por las propiedades de la matriz que representa a la regla de evolución original. Así, la cerradura transitiva muestra el comportamiento transitivo entre conjuntos de cilindros centrados. □

De esta manera, la cerradura transitiva de  $M_\varphi$  especifica como están conectados los conjuntos de cilindros centrados para un número grande de pasos. En otras palabras, ésta presenta los ancestros de un conjunto de cilindros centrados dado. Utilizando los Lemas 8 y 9, y el Corolario 10, se obtiene el siguiente resultado:

**Corolario 12.** *La cerradura transitiva de  $M_\varphi$  induce una relación de equivalencia entre los conjuntos de cilindros centrados.*

Se explicará ahora como las clases de equivalencia de la cerradura transitiva de la matriz  $M_\varphi$  caracterizan al comportamiento dinámico de este tipo de autómatas reversibles.

### 6.6.1 Comportamiento topológicamente transitivo y configuraciones transitivas

Tome cada clase de la cerradura transitiva de  $M_\varphi$ . Cada clase es un componente conectado de  $M_\varphi$ . Entonces, una consecuencia de la cerradura transitiva de  $M_\varphi$  es la siguiente:



**Corolario 13.** *Si la cerradura transitiva de  $M_\varphi$  genera una única clase de equivalencia, entonces el autómata celular unidimensional reversible es topológicamente transitivo y tiene configuraciones transitivas.*

En un autómata celular unidimensional reversible, los ancestros de una secuencia dada son idénticos en sus partes centrales y difieren en sus extremos. Así, las configuraciones transitivas que intersectan en el mismo orden los conjuntos de cilindros centrados de alguna clase son configuraciones con la misma secuencia central.

### 6.6.2 Conjuntos de cilindros centrados recurrentes

Se discutirá ahora las condiciones necesarias para detectar comportamientos topológicamente mezclados en las clases de equivalencia. Por este motivo, se define un tipo especial de conjunto de cilindros centrados denominado conjunto recurrente.

**Definición 16.** *Para una clase de equivalencia dada en la cerradura transitiva de  $M_\varphi$ , un conjunto de cilindros centrados es recurrente si está conectado consigo mismo en la submatriz asociada a esta clase.*

En otras palabras, un conjunto de cilindros centrados recurrente se intersecta a sí mismo con una transición de un paso. Esto significa que tal conjunto tiene configuraciones cuyas evoluciones intersectan lo vuelven a intersectar un número indefinido de pasos. Esta propiedad será útil para caracterizar comportamientos topológicamente mezclados.

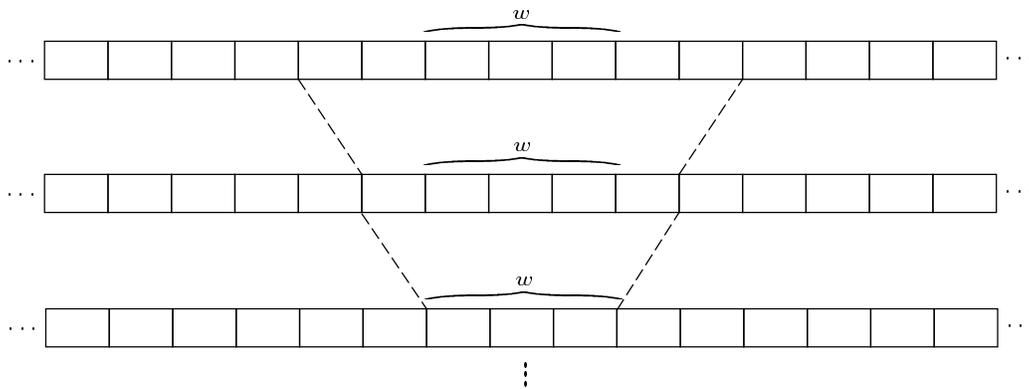


Figura 6.9: Conjunto de cilindros centrados recurrente  $\mathcal{C}_{[w]}$  definido por las extensiones de la secuencia  $w \in K^3$ .

### 6.6.3 Comportamiento topológicamente mezclado

Otro resultado del comportamiento irreducible de cada clase en la cerradura transitiva de  $M_\varphi$  y de la existencia de conjuntos de cilindros centrados recurrentes es el siguiente:

**Lema 11.** *Dada una clase de equivalencia de la cerradura transitiva de  $M_\varphi$ , si la submatriz  $M$  asociada a esta clase tiene un conjunto de cilindros centrados recurrente, entonces para algún  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $M^n$  es positiva.*

*Proof.* La matriz  $M$  de cada clase es irreducible, entonces cada conjunto de la clase intersecta al conjunto recurrente el cual es un elemento diagonal de  $M$ . Con este elemento diagonal, se puede fijar un número de pasos necesarios para conectar cada par de conjuntos en la matriz. Por lo tanto, existe un entero positivo  $n$  tal que  $M^n$  conecta todos los pares ordenados de conjuntos, es decir  $M^n$  es positiva.  $\square$

Las características de las matrices que representan cada clase de equivalencia en la cerradura transitiva de  $M_\varphi$  establecen el siguiente resultado:

**Lema 12.** *Dada una clase de equivalencia en la cerradura transitiva de  $M_\varphi$ , si la matriz  $M$  asociada a esta clase tiene un conjunto de cilindros centrados recurrente, entonces  $M$  es primitiva.*

*Demostración.* Por el Lema 11, existe un entero  $n_0$  tal que  $M^{n_0}$  es positiva. Además,  $M$  es esencial por el Lema 10. Así, para  $n > n_0$ ,  $M^n$  es el producto de renglones no negativos de  $M$  por columnas positivas en  $M^{n-1}$ . Esto produce una matriz positiva y por lo tanto  $M$  es primitiva.  $\square$

El Lema 12 define un resultado importante:

**Teorema 10.** *Dada una clase de equivalencia en la cerradura transitiva de  $M_\varphi$ , si la matriz  $M$  asociada a esta clase tiene un conjunto de cilindros centrados recurrente, entonces esta clase es topológicamente mezclada.*

*Proof.* La matriz  $M$  es primitiva por el Lema 12. Entonces existe un número mínimo de pasos para conectar cada par de conjuntos de cilindros centrados en la clase y esta propiedad se cumple para cualquier otro número mayor de pasos. Por lo tanto, la clase es topológicamente mezclada.  $\square$

Finalmente, el Teorema 10 genera el siguiente resultado acerca del comportamiento de los autómatas celulares unidimensionales reversibles con un índice de Welch igual a 1.

**Corolario 14.** *Si la cerradura transitiva de la matriz  $M_\varphi$  produce una única clase de equivalencia y  $M_\varphi$  tiene al menos un conjunto de cilindros centrados recurrente, entonces el autómata es topológicamente mezclado.*

## 6.7 Autómatas reversibles con índices de Welch diferentes de 1

Para este caso, las posibles transiciones entre conjuntos de cilindros centrados en la matriz  $M_\varphi$  no siempre existen, pues si  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  y este intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ , esto no implica que  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecte necesariamente a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  a través de  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ .

La explicación está en los valores de los índices de Welch. En la sección anterior los ancestros siempre tenían una extensión conveniente en ambos lados para generar un estado en particular. Pero en este tipo de autómatas, las extensiones hacia ambos lados de un ancestro no evolucionan en todos los estados y por lo tanto no siempre se puede encontrar la extensión adecuada.

No obstante, la matriz  $M_\varphi$  es útil para tener una idea de las posibles transiciones entre conjuntos de cilindros centrados. Una forma de conocer si  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  a través de  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  es tomando todas las posibles extensiones de la secuencia  $w_1$  y revisando sus evoluciones. Por supuesto, este método no es práctico para un número grande de transiciones.

Para mejorar este procedimiento, utilizaremos los índices de Welch de cada estado. Suponga que  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  y al mismo tiempo este conjunto intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ . Tome las células derechas finales de  $w_1$ ,  $w_2$  y de la transición intermedia.

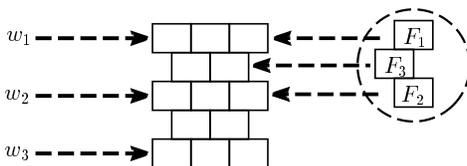


Figura 6.10: Transición de  $w_1$  a  $w_2$  y de  $w_2$  a  $w_3$ , donde se toman las células en la esquina derecha de la construcción. Estas células son etiquetadas como  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ .

En el sentido original de la evolución, tome todos los estados sucesores derechos de  $F_1$  y para el sentido inverso de la evolución tome también todos los estados sucesores derechos de  $F_2$ . Seleccione los estados comunes en ambos sentidos. Este nuevo conjunto de estados será representado por  $F_4$ .

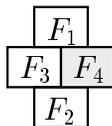


Figura 6.11: Conjunto  $F_4$  obtenido por la intersección de los estados sucesores tanto de  $F_1$  como de  $F_2$ , en el sentido original e inverso respectivamente.

Si  $F_4$  es vacío entonces la transición no es posible y el proceso se detiene. Pero si  $F_4$  no es vacío entonces se revisarán todas las combinaciones de los estados en  $F_3$  con los estados de  $F_4$  y se seleccionarán aquellas combinaciones que evolucionan en el sentido original en algún estado de  $F_2$  y en el sentido inverso en algún estado de  $F_1$ . Así, se realiza la siguiente selección de los estados que estas células pueden tomar:

- Si un estado en  $F_3$  no forma ningún estado en  $F_1$  o en  $F_2$  con ningún estado de  $F_4$ , entonces se descarta este estado de  $F_3$ .
- Si un estado de  $F_4$  no se utiliza para producir al menos un estado en  $F_1$  y en  $F_2$ , entonces se remueve de  $F_4$ .
- Finalmente, si un estado en  $F_1$  o en  $F_2$  no es generado por alguna combinación de estados de  $F_3$  con  $F_4$ , entonces se remueve de  $F_1$  ó  $F_2$  según corresponda.

Si después de este proceso el conjunto  $F_4$  es vacío, entonces la transición no existe. De esta forma, se actualiza la construcción de la Figura 6.11 aplicando el procedimiento en todas las células a los extremos de la construcción presentada en la Figura 6.10.

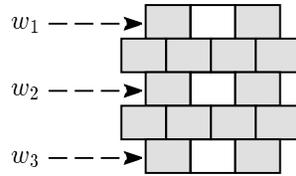


Figura 6.12: Células seleccionadas para revisar la transición de  $w_1$  a  $w_3$ .

Haciendo el mismo proceso en la Figura 6.12, si las células finales en ambos lados no son vacías, entonces existe una secuencia  $w \in K^*$  con  $w_2$  como su subsecuencia central y cuya evolución genera a  $w_3$  en el sentido original y a  $w_1$  en el sentido inverso.

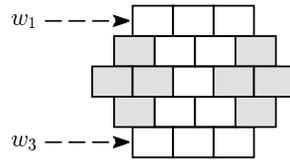


Figura 6.13: Si las células grises no son vacías entonces existe una transición de  $w_1$  a  $w_3$ .

Este procedimiento puede aplicarse iterativamente para secuencias más grandes de conjuntos de cilindros centrados, donde se verifica a cada paso la parte central de esta construcción.

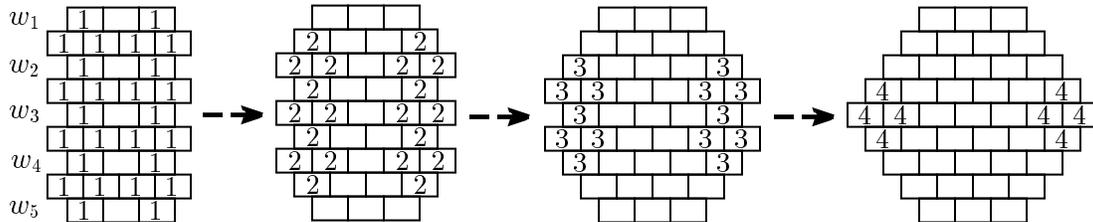


Figura 6.14: Células seleccionadas para verificar la transición de una secuencia de cinco conjuntos de cilindros centrados.

De este modo, la evolución de la configuración compuesta por la repetición de la secuencia central mostrada en la Figura 6.14 intersecta todos los conjuntos de cilindros centrados. Por lo tanto debido al Lema 8, en la Figura 6.14 el conjunto  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[w_5]}$  y viceversa. Así, el procedimiento encuentra las transiciones entre los conjuntos de cilindros centrados de la matriz  $M_\varphi$  (Figura 6.15).

### 6.7.1 Comportamiento topológicamente transitivo y configuraciones transitivas

Para un autómata celular unidimensional reversible con índices de Welch diferentes de 1, se utilizará el proceso anteriormente descrito para analizar el comportamiento transitivo de sus conjuntos de cilindros centrados. Un punto importante en su implementación es la forma

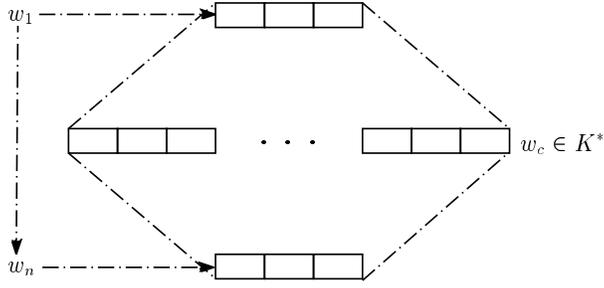


Figura 6.15: Secuencia central calculada iterativamente por la intersección de células ancestras a los extremos. La secuencia define una transición de  $w_1$  a  $w_n$  y por lo tanto de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a  $\mathcal{C}_{[w_n]}$ .

en la cual se seleccionan los conjuntos para revisar sus transiciones. Para esto se usará la matriz  $M_\varphi$ , si el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  interseca a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  a través de  $\mathcal{C}_{[w_2]}$ , y no existe una conexión de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  en  $M_\varphi$ , entonces se aplica el proceso para probar esta transición.

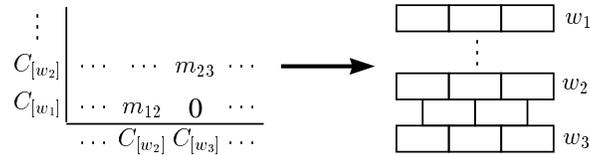


Figura 6.16: Si  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  interseca a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  a través de  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  en  $M_\varphi$ , entonces se revisa esta transición.

Si esta conexión existe, con el mismo proceso se revisan entonces los conjuntos de cilindros centrados conectados con  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  para saber si existen conexiones de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a los sucesores de  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ .

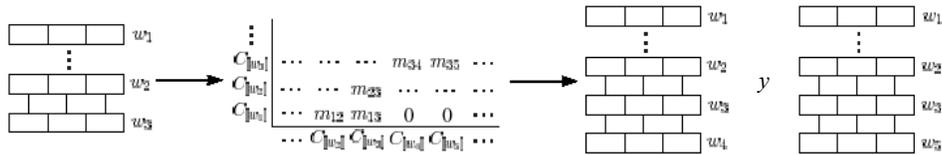


Figura 6.17: Si  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  interseca a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  entonces se analizan las conexiones de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a los sucesores de  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ .

Para mejorar este proceso, se usará el siguiente criterio. Si  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  interseca a  $\mathcal{C}_{[w_2]}$  y este interseca a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ , pero ya existe una conexión de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  establecida por otra trayectoria en la matriz transitiva inducida por  $M_\varphi$ , entonces se considerarán dos casos.

Tome los conjuntos de cilindros centrados sucesores de  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ :

1. Si existe una conexión de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a todos los conjuntos sucesores de  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ , entonces se descarta la trayectoria.

- Si una conexión de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a un conjunto sucesor de  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  no se ha definido todavía en la matriz transitiva inducida por  $M_\varphi$ , entonces tanto  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  como su sucesor son agregados en la trayectoria actual a revisar.

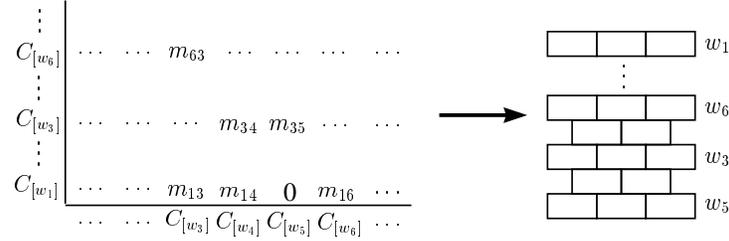


Figura 6.18: Si la transición de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  ya fue considerada, pero una transición de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a algún sucesor de  $\mathcal{C}_{[w_3]}$  todavía no existe, entonces se estudiará dicha transición a través de  $\mathcal{C}_{[w_3]}$ .

Si se obtiene una trayectoria válida, entonces el proceso verifica las siguientes conexiones, añadiendo los conjuntos sucesores del último conjunto de la trayectoria. Si la trayectoria no es válida, entonces se elimina el último conjunto de ésta y se prueban las conexiones del ahora último conjunto. Con este proceso, se obtiene otra matriz inducida por  $M_\varphi$  la cual muestra las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados. Para una trayectoria válida, esta matriz pueden mostrar el número de pasos necesarios para conectar un conjunto con otro.

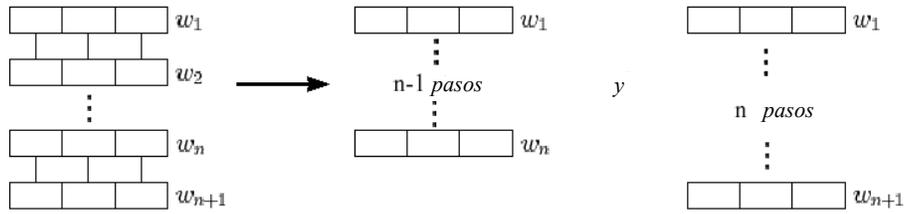


Figura 6.19: Una trayectoria válida con el número de pasos de  $\mathcal{C}_{[w_1]}$  a los demás conjuntos.

Como trayectorias distintas pueden conectar los mismos conjuntos de cilindros centrados, o una sola trayectoria puede conectar varias veces una pareja de conjuntos de cilindros centrados, la entrada especificada por cada pareja de conjuntos en la matriz transitiva inducida por  $M_\varphi$  será igual al primer número de pasos calculado para conectar tales conjuntos. Esta matriz tiene una representación gráfica con colores, donde se usará el rango de colores del amarillo al rojo. Si un conjunto de cilindros centrados está cercano a otro entonces la entrada especificada por estos en la matriz transitiva se colorea con un color cercano al amarillo. De modo contrario, si dos conjuntos están alejados, su entrada se colorea con un color más rojo. Si no hay conexión entre una pareja dada de conjuntos de cilindros centrados, su entrada se colorea con negro. Con este método, si la matriz transitiva inducida por  $M_\varphi$  tiene un renglón donde todas las transiciones son posibles por medio de una sola trayectoria, entonces este renglón es positivo y muestra que el autómata es topológicamente transitivo, ya que los otros renglones también son positivos por el Lema 8.

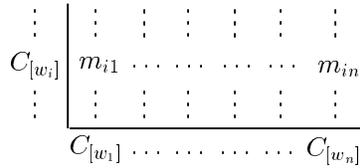


Figura 6.20: Si el renglón  $C_{[w_i]}$  es positivo por una sola trayectoria, entonces los otros renglones también son positivos y el autómata es topológicamente transitivo.

Adicionalmente, si existe una única trayectoria conectando todos los conjuntos centrados de cilindros, entonces se puede tener un registro de estas transiciones para generar una configuración transitiva. Forme una lista de los conjuntos que componen la trayectoria, y aplique el proceso que verifica si la trayectoria es válida. El punto importante es guardar en cada paso la secuencia central de la trayectoria que conecta el conjunto inicial con el último. Así, para la trayectoria completa se tiene una secuencia central que establece una configuración la cual intersecta todos los conjuntos de cilindros centrados por el Lema 8 .

Autómatas celulares unidimensionales reversibles que no son topológicamente transitivos tienen conjuntos de cilindros centrados los cuales no intersectan a todos los demás. En este caso, se han encontrado varios ejemplos cuya evolución se caracteriza por formar membranas y macrocélulas.

### 6.8 Ejemplos ilustrativos

Esta sección muestra algunos ejemplos de comportamientos transitivos, tanto para autómatas con un índice de Welch 1 como para autómatas con índices de Welch diferentes de 1.

#### 6.8.1 Autómatas reversibles con un índice de Welch igual a 1

En este caso se presentan dos ejemplos, el primero de 2 estados y el segundo con 3 estados.

##### 6.8.1.1 Autómata de 2 estados, corrimiento a la derecha

Tome el autómata celular unidimensional reversible que representa al corrimiento derecho de estados (Figura 6.21).

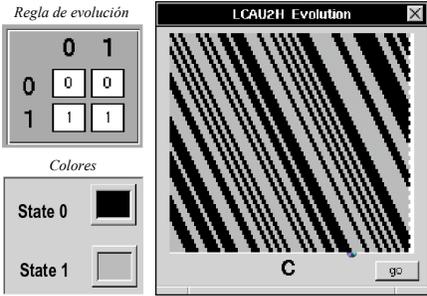


Figura 6.21: Autómata reversible que representa al corrimiento derecho.

El sistema dinámico de corrimiento ha sido ampliamente estudiado [Hed69]. La matriz  $M_\varphi$  del autómata y su cerradura transitiva son las siguientes:

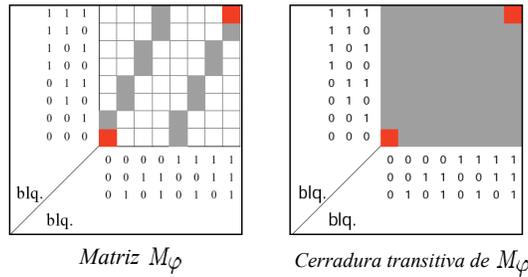


Figura 6.22: Matriz  $M_\varphi$  y su cerradura transitiva.

La Figura 6.22 muestra que la cerradura transitiva produce una sola clase de equivalencia, y la matriz  $M_\varphi$  tiene dos conjuntos de cilindros centrados recurrentes ( $\mathcal{C}_{[000]}$  y  $\mathcal{C}_{[111]}$ ). De este modo, el corrimiento derecho es topológicamente transitivo, topológicamente mezclado y tiene puntos transitivos. Una configuración transitiva se muestra en la Figura 6.23.

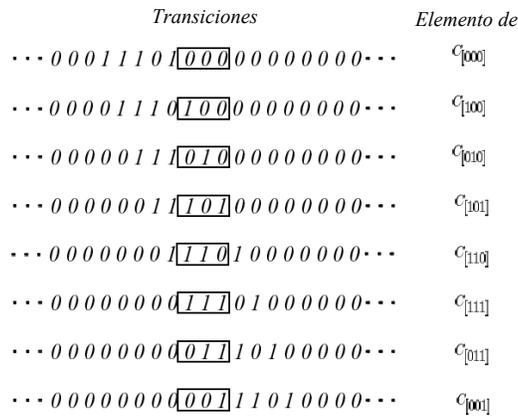


Figura 6.23: Configuración transitiva del corrimiento derecho, cada transición representa dos evoluciones del autómata.

Para ilustrar el comportamiento topológicamente mezclado del corrimiento derecho, se utiliza el conjunto de cilindros recurrentes  $\mathcal{C}_{[000]}$  para establecer una trayectoria en  $n$  y  $n + 1$  pasos de  $\mathcal{C}_{[001]}$  a  $\mathcal{C}_{[101]}$ .

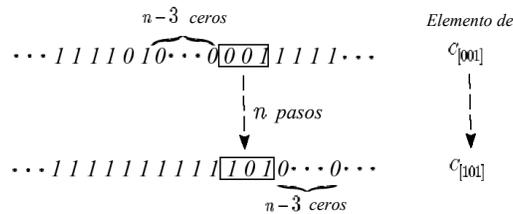


Figura 6.24:  $\mathcal{C}_{[001]}$  intersecta a  $\mathcal{C}_{[101]}$  en  $n$  pasos, para  $n \geq 6$ , cada paso representa dos evoluciones del autómata.

### 6.8.1.2 Autómata de 3 estados

Tome el autómata celular unidimensional reversible de 3 estados que se muestra en la Figura 6.25. Su comportamiento global es un poco más complicado que un simple corrimiento.

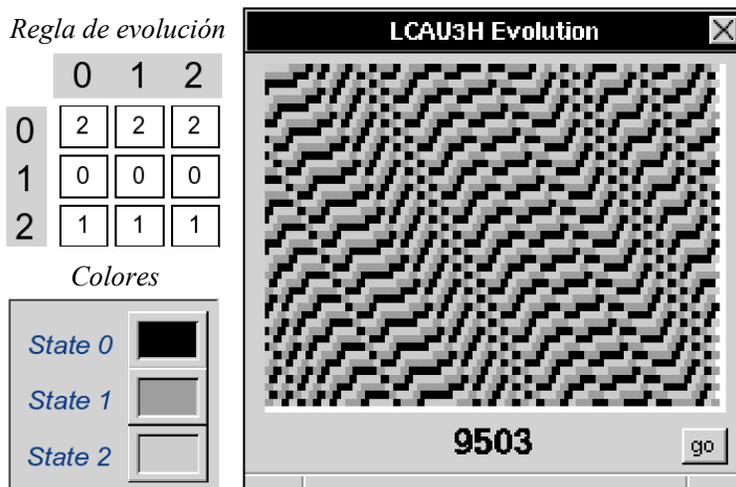


Figura 6.25: Autómata celular unidimensional reversible de 3 estados.

La matriz  $M_\varphi$  del autómata y su cerradura transitiva se presentan en la Figura 6.26.

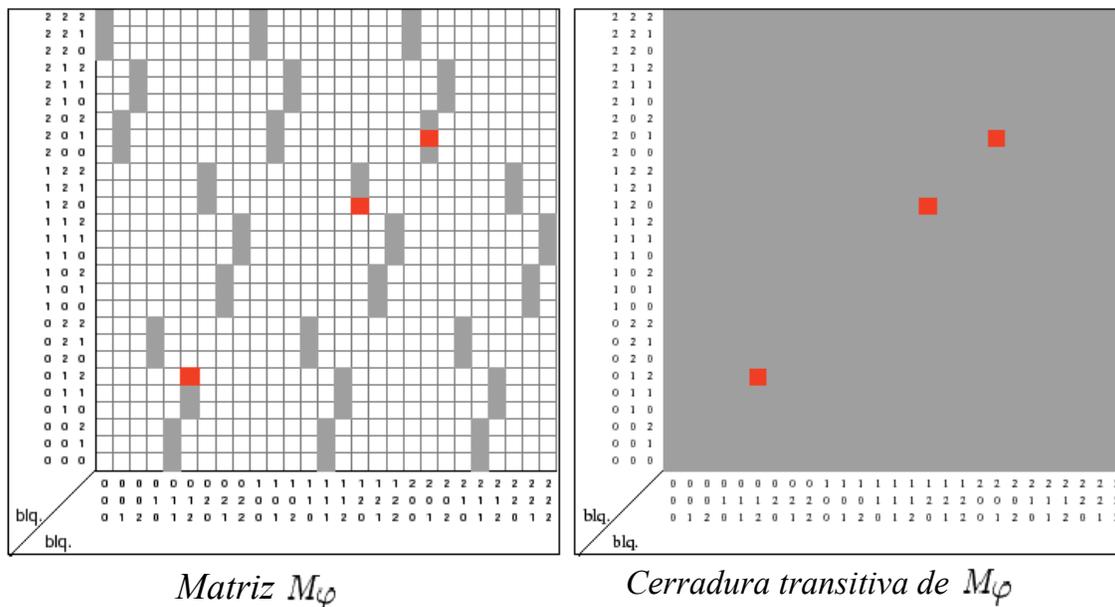


Figura 6.26: Matriz  $M_\varphi$  y su cerradura transitiva.

La Figura 6.26 muestra sólo una clase en la cerradura transitiva de  $M_\varphi$ . Esta matriz tiene además conjuntos de cilindros centrados recurrentes, indicando que el autómata es topológicamente transitivo, topológicamente mezclado y que posee configuraciones transitivas.

Una configuración transitiva del autómata se ilustra en la Figura 6.27.

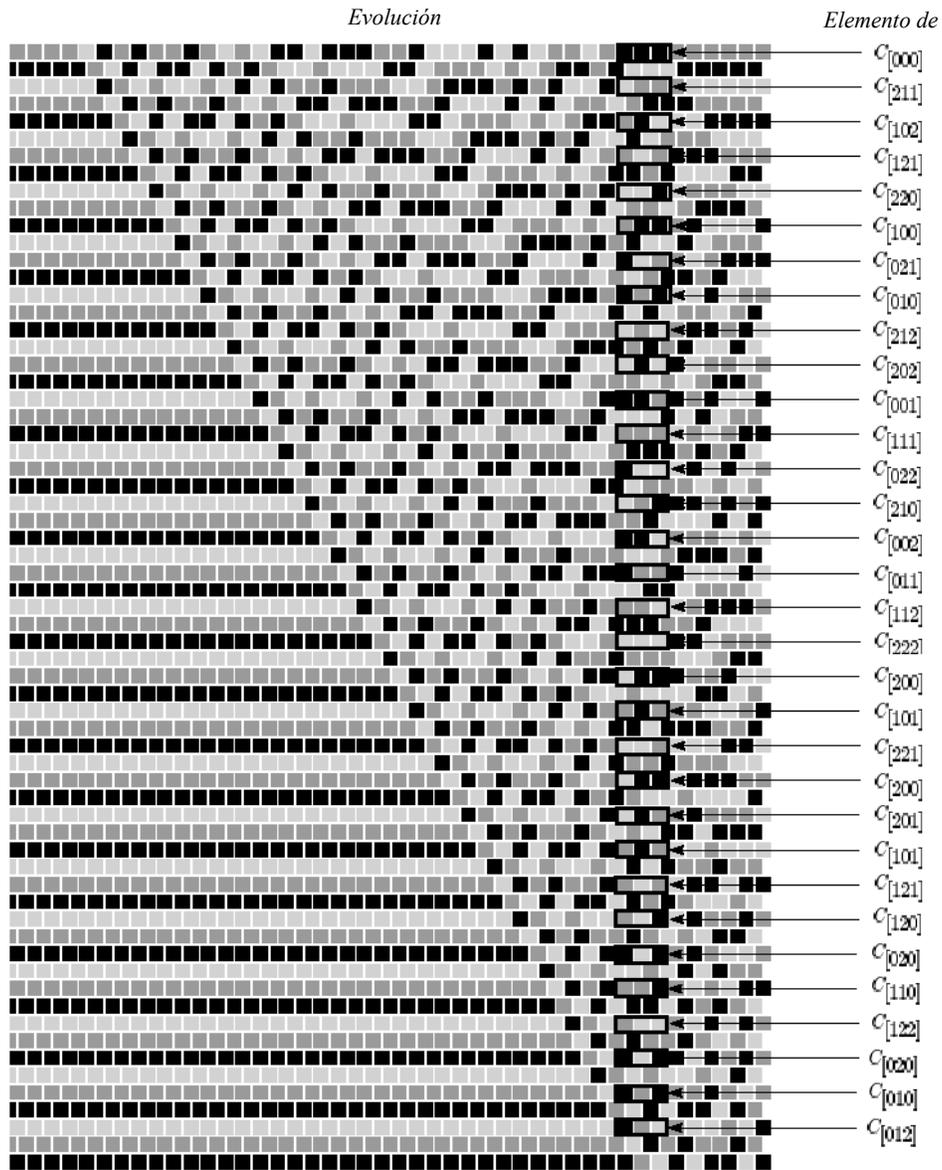


Figura 6.27: Configuración transitiva del autómata de 3 estados.

Una trayectoria desde el conjunto de cilindros centrados  $\mathcal{C}_{[121]}$  al conjunto  $\mathcal{C}_{[220]}$  en 6 y 7 pasos se ilustra en la Figura 6.28. En esta trayectoria se ha utilizado la recurrencia del conjunto  $\mathcal{C}_{[120]}$  para conectar  $\mathcal{C}_{[121]}$  con  $\mathcal{C}_{[220]}$  en 6 y 7 pasos. Con esto se ha ejemplificado el resultado del Teorema 10 y por lo tanto el comportamiento topológicamente mezclado del autómata.

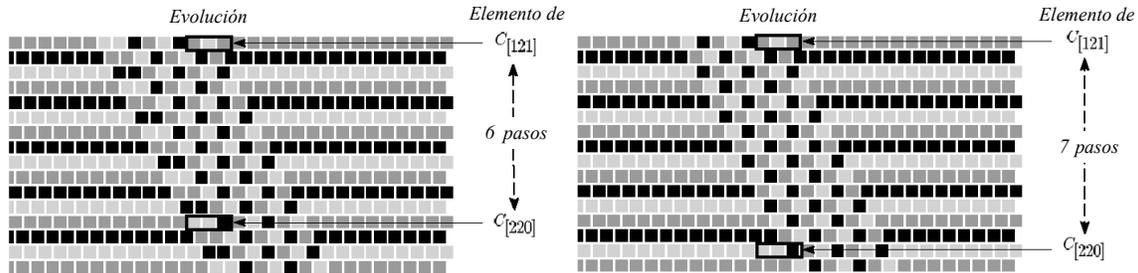


Figura 6.28: Transición del conjunto  $\mathcal{C}_{[121]}$  al conjunto  $\mathcal{C}_{[220]}$  en 6 y 7 pasos.

## 6.8.2 Autómatas reversibles con índices de Welch diferentes de 1

Para este caso se presentan dos ejemplos usando autómatas celulares unidimensionales reversibles de 4 estados, es decir, el caso más simple donde ambos índices de Welch son diferentes de 1. El primer ejemplo tiene un comportamiento topológicamente transitivo y el segundo no muestra dicho comportamiento.

### 6.8.2.1 Autómata reversible topológicamente transitivo

Tome el autómata celular unidimensional reversible de 4 estados que se presenta en la Figura 6.29.

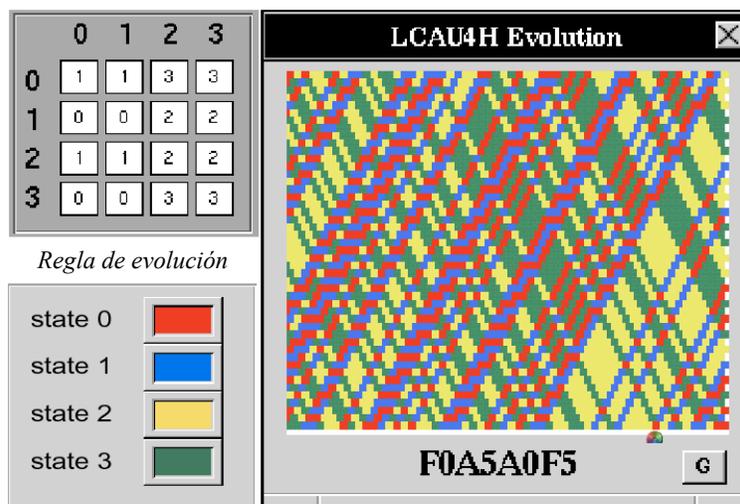


Figura 6.29: Autómata celular unidimensional reversible de 4 estados.

La matriz  $M_\varphi$  de este autómata se muestra en la Figura 6.30.

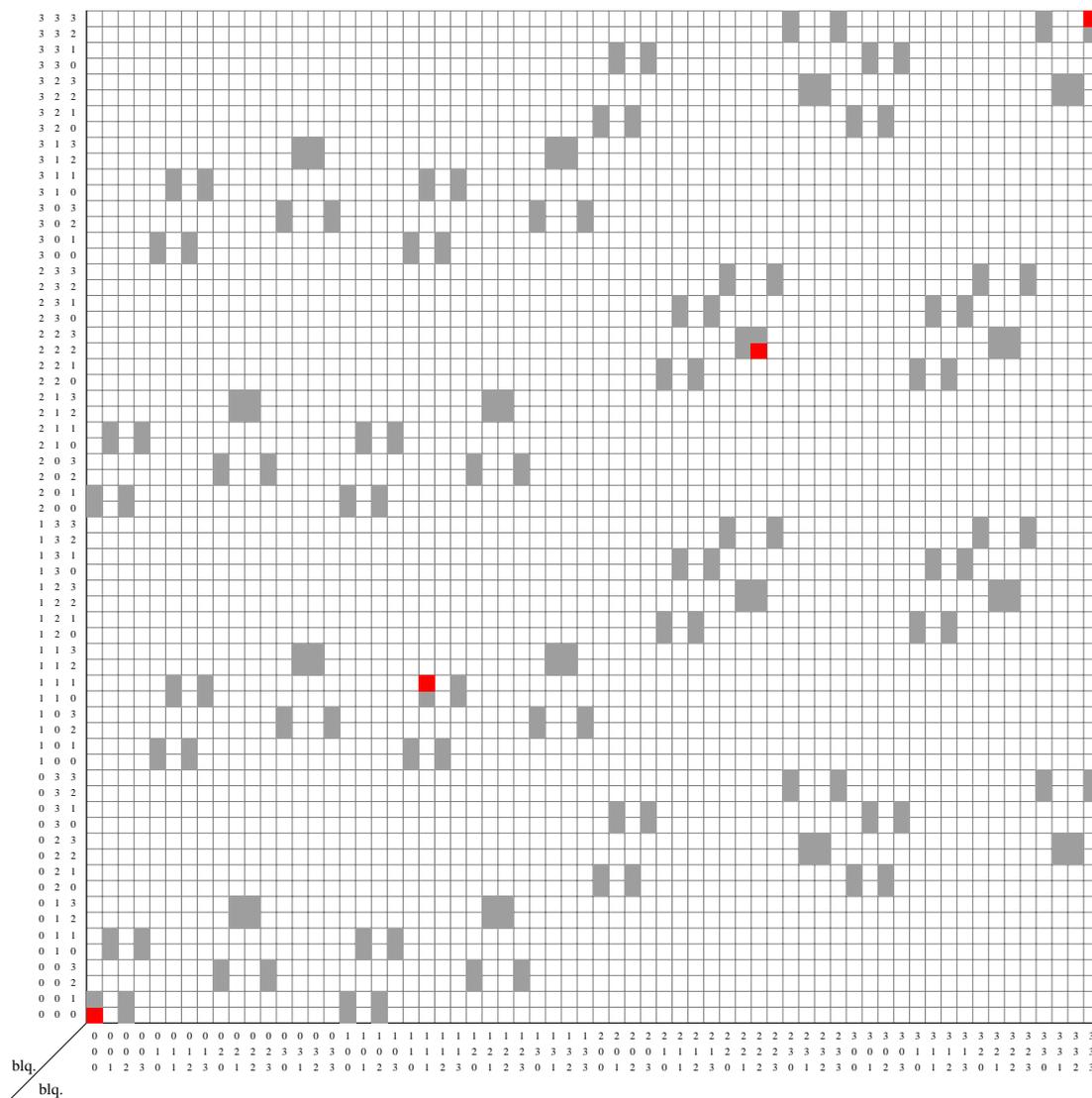


Figura 6.30: Matriz  $M_\varphi$  del autómata de 4 estados.

Con el procedimiento definido en la Sección 6.7.1 se obtiene una representación matricial inducida por  $M_\varphi$  de las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados. En la matriz, cada entrada muestra el número de pasos conectando cada pareja de conjuntos de cilindros centrados.

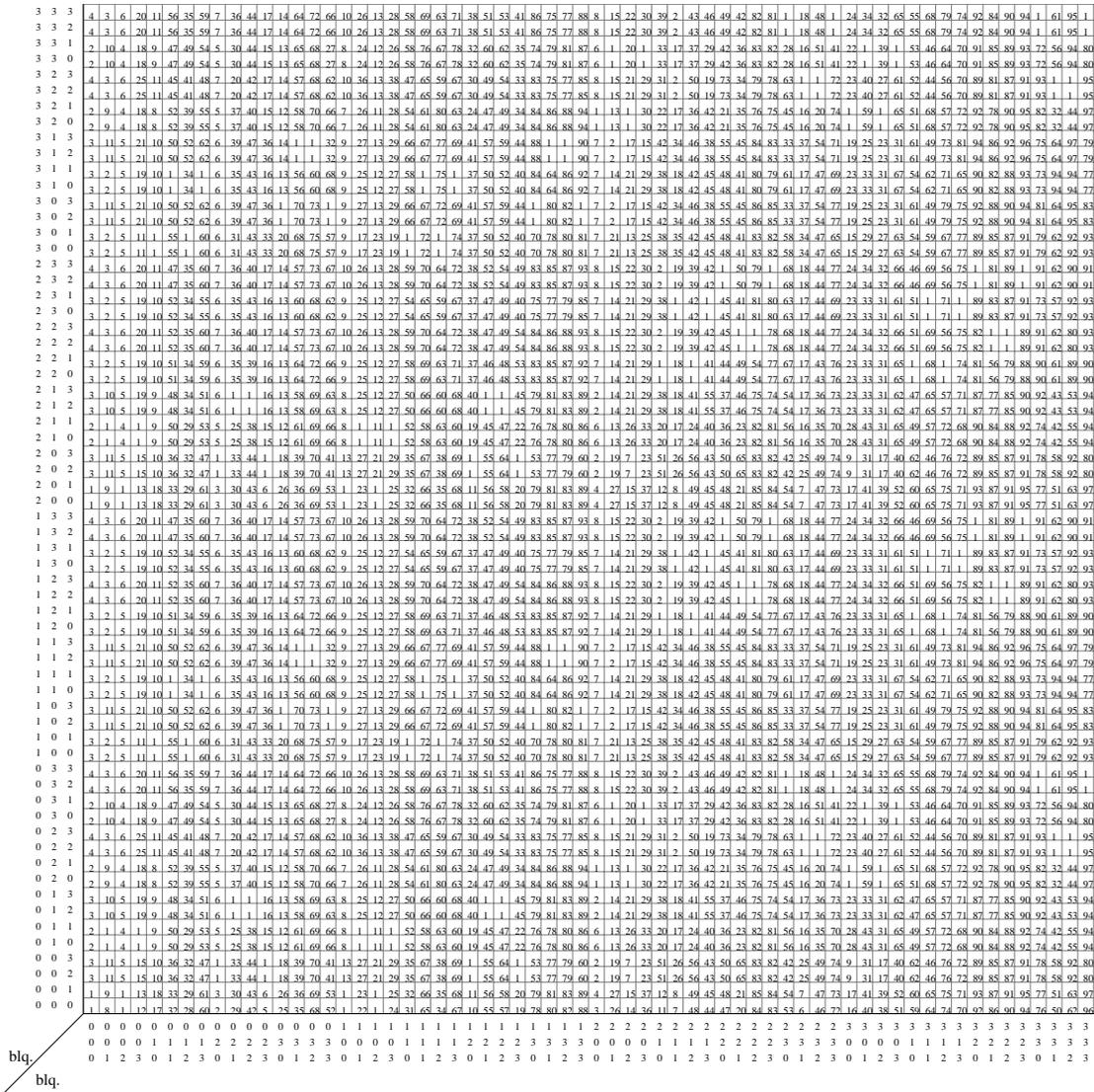


Figura 6.31: Matriz inducida por  $M_\varphi$  representando las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados.

En la Figura 6.31, cada conjunto centrado de cilindros intersecta a todos los otros, por lo tanto el autómata celular unidimensional reversible es topológicamente mezclado. En las transiciones del conjunto  $\mathcal{C}_{\{000\}}$ , no se repite ninguno de los números de pasas mayores a 1. Esto muestra que una sola trayectoria es la que conecta este conjunto con todos los demás. De esta manera, se puede obtener un punto transitivo por medio del procedimiento expuesto en la Sección 6.7.1. Así, una configuración formada por la repetición de la secuencia finita 010200230013012020003300112001311110213030123033212312312122003221100331222122130313233313323202323 intersecta a todos los conjuntos de cilindros centrados.

Ahora a cada entrada de la matriz en la Figura 6.31 se le asignará un color, para valores grandes el color tenderá a rojo y para valores pequeños tenderá a amarillo (Figura 6.32).

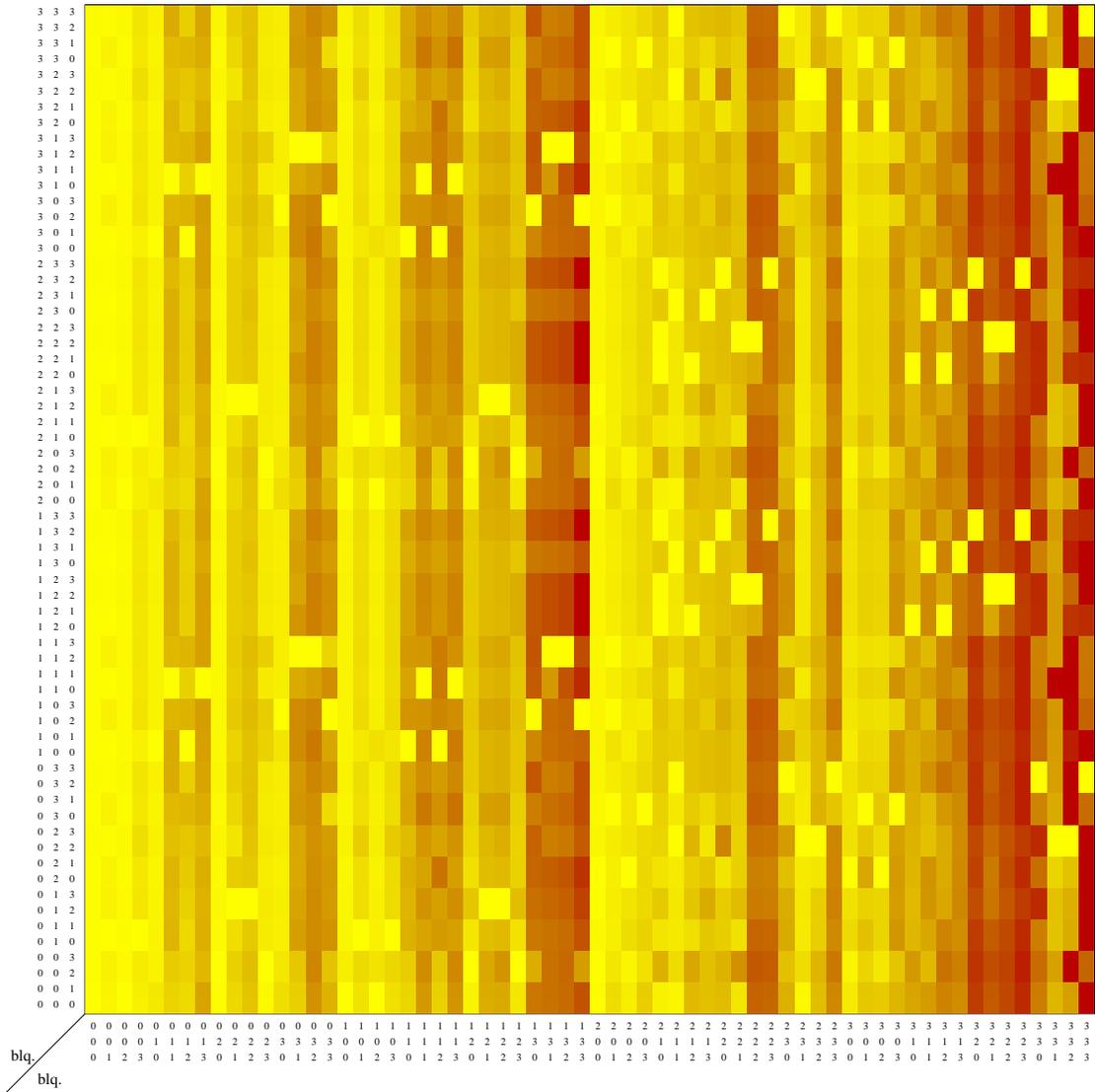


Figura 6.32: Matriz coloreada inducida por  $M_\varphi$  que representa las transiciones de los conjuntos de cilindros centrados.

### 6.8.3 Autómata reversible no topológicamente transitivo

Tome el autómata celular unidimensional reversible de 4 estados que se muestra en la Figura 6.33.

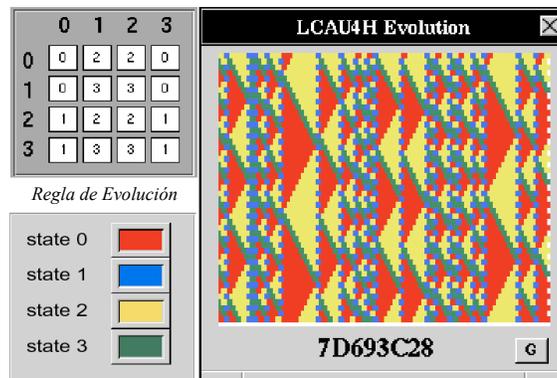


Figura 6.33: Autómata celular unidimensional reversible de 4 estados.

La evolución del autómata se caracteriza por la formación de membranas y macrocélulas [Wol86] [McI90]. La matriz  $M_\varphi$  asociada con este autómata se presenta en la Figura 6.34.

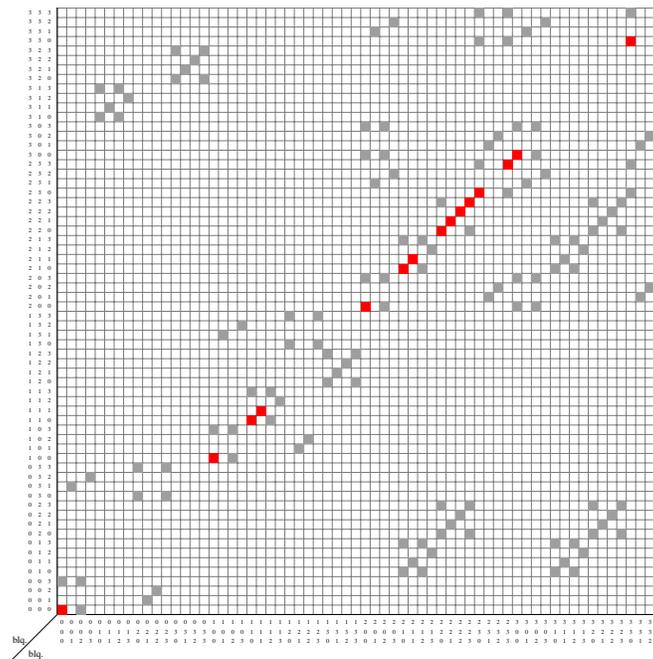


Figura 6.34: Matriz  $M_\varphi$  asociada con el autómata celular unidimensional reversible de 4 estados.

Las transiciones entre los conjuntos de cilindros centrados se presentan en la Figura 6.35.

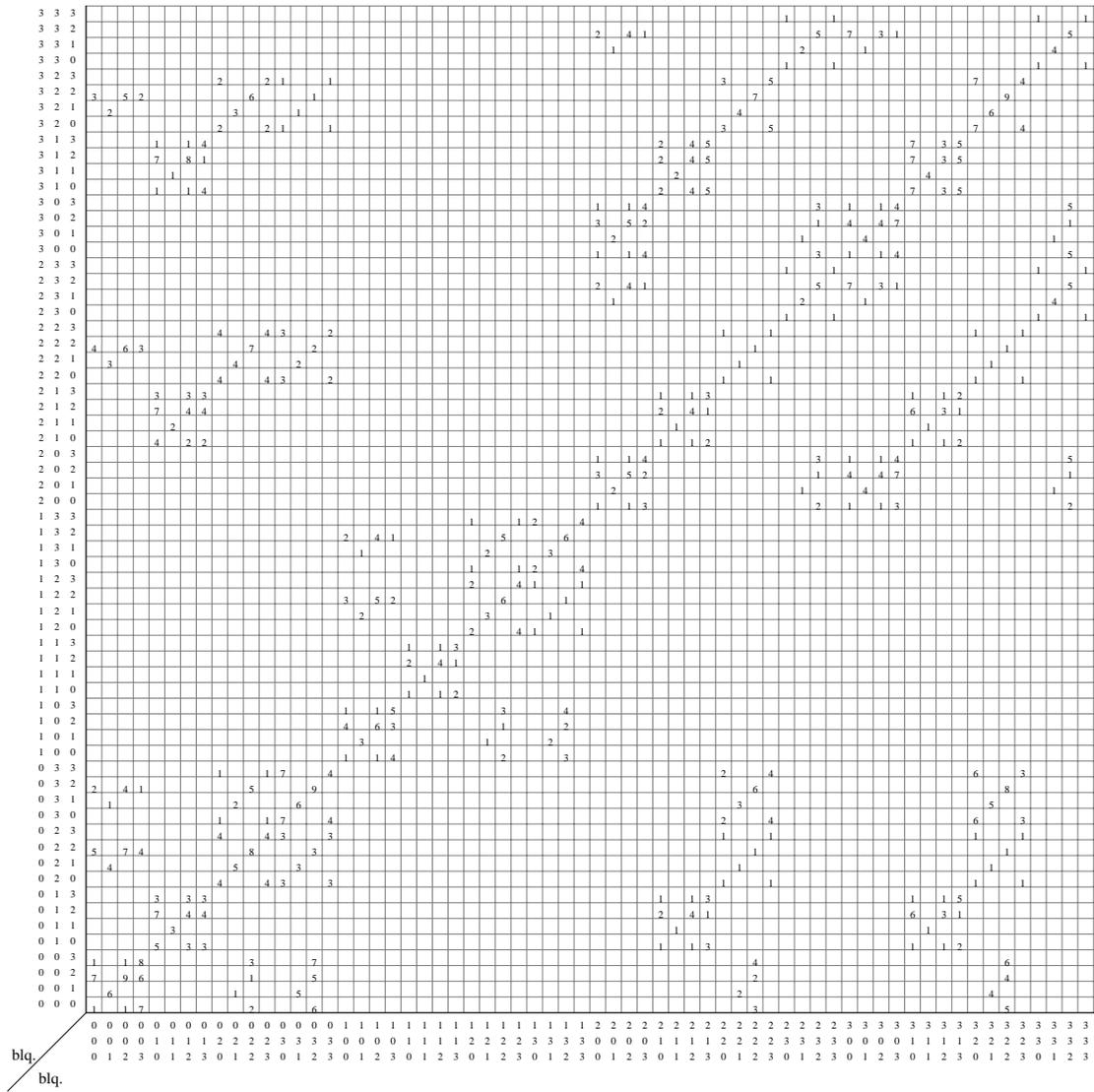


Figura 6.35: Representación matricial de las transiciones entre conjuntos centrados de cilindros.

En este caso, ningún conjunto de cilindros centrados intersecta a todos los demás, lo que muestra el comportamiento dinámico particular de este autómata. Para la clase que contiene a  $\mathcal{C}_{[000]}$ , existe una única trayectoria que intersecta a todos los conjuntos de esta clase. Así, se puede formar una configuración transitiva de ésta con la repetición de la secuencia 0212222000.

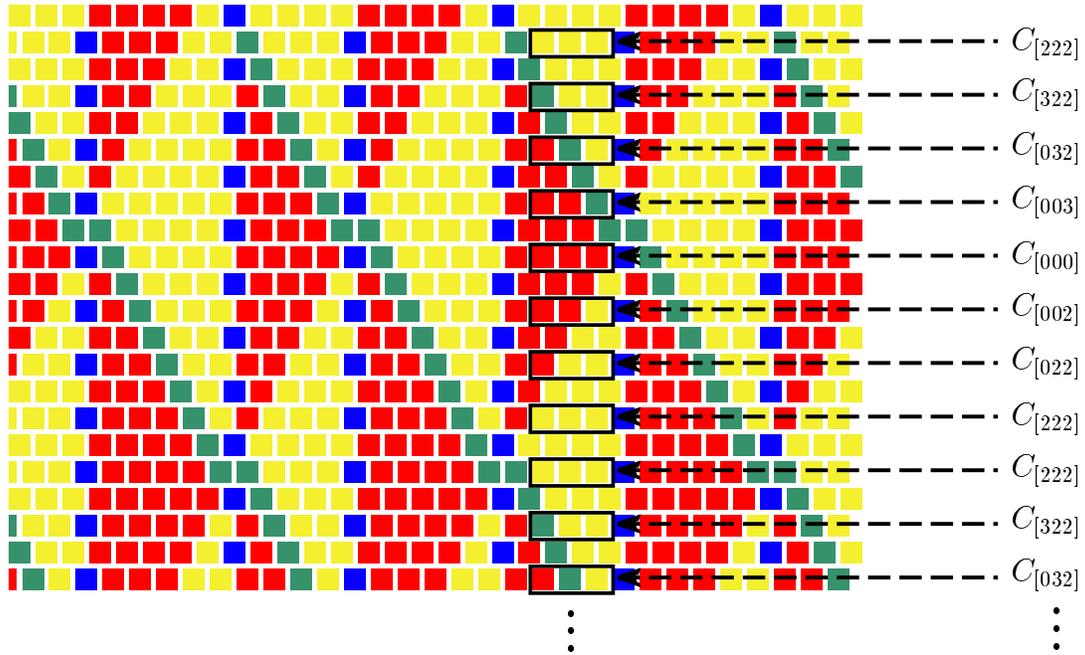


Figura 6.36: Configuración transitiva de la clase que contiene a  $\mathcal{C}_{[000]}$ .

Representando la matriz de la Figura 6.35 con colores, se obtiene la relación de la Figura 6.37.

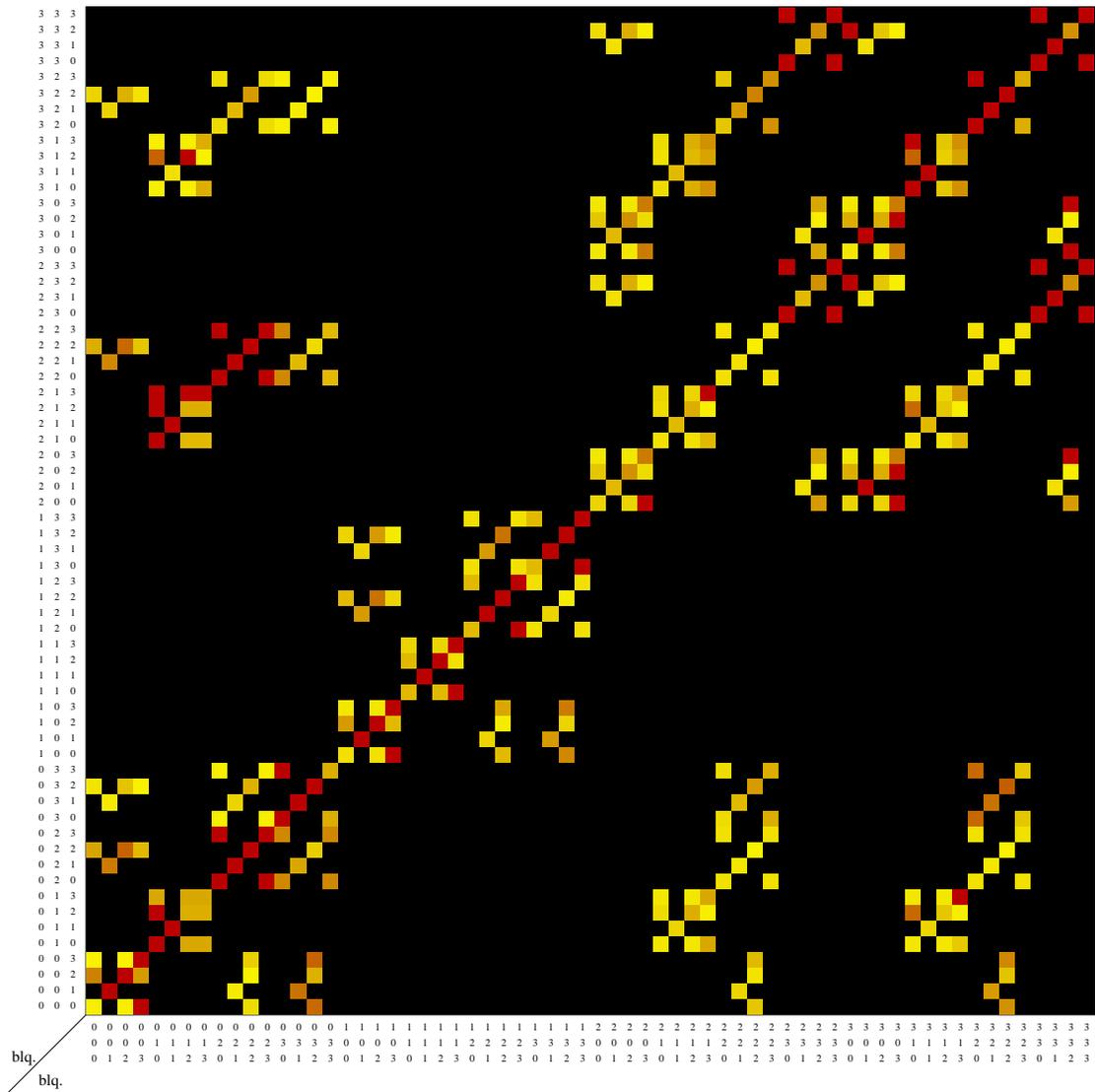


Figura 6.37: Representación con colores inducida por  $M_\varphi$  de las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados.

## 6.9 Observaciones finales

Se ha establecido una representación matricial del comportamiento dinámico de los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de su caracterización utilizando permutaciones en bloque sobre los conjuntos de cilindros centrados. Este tipo de análisis comenzó con el trabajo de Hedlund [Hed69] acerca del sistema dinámico de corrimiento. Su trabajo ha sido la base para muchos otros, entre estos podemos encontrar los siguientes. El libro de Denker et al. [DGS76], que analiza las propiedades ergódicas del sistema de corrimiento sobre conjuntos de cilindros. El trabajo de Culik et al. [IHY91a] que estudian los conjuntos límite de los autómatas celulares unidimensionales. Los trabajos de Blanchard et al. [BFK97] [BKM97] que discuten diversos aspectos dinámicos de los autómatas celulares en diferentes topologías. El trabajo de Boyle y Maass [BM00] que analizan la expansividad de autómatas celulares reversibles con configuraciones infinitas hacia un lado solamente.

Para un autómata reversible con un índice de Welch igual a 1, las propiedades de su representación matricial definen su comportamiento dinámico, tal como fue explicado por medio de matrices esenciales, irreducibles y primitivas. En este sentido, un punto importante es la cerradura transitiva de la matriz, la cual ofrece información importante a través de sus componentes irreducibles. Sin embargo, si el autómata tiene muchos estados, este análisis es más difícil por el tamaño de la matriz de transiciones entre conjuntos de cilindros centrados.

Los diversos comportamientos transitivos en autómatas reversibles con un índice de Welch igual a 1 han sido investigados por Cattaneo y Margara [CM98], Cattaneo et al. [CFMM99] y Manzini y Margara [MM98]. Estos trabajos discuten las propiedades expansivas de los autómatas reversibles y su relación con la definición de sistemas caóticos.

Para autómatas celulares unidimensionales reversibles con ambos índices de Welch diferentes de 1, este estudio no es tan sencillo. Este trabajo ha presentado un procedimiento utilizando los subconjuntos de Welch de ambas reglas invertibles para calcular las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados, obteniendo alguna información tanto del comportamiento topológicamente transitivo como de las configuraciones transitivas del autómata.

El uso de bloques de tres células para definir los conjuntos de cilindros centrados hace más fácil el estudio dinámico, pero este tamaño no es esencial para construir la matriz  $M_\varphi$ . Se pueden utilizar bloques más grandes para generar un análisis más detallado pero al mismo tiempo el crecimiento exponencial de la matriz lo hace impráctico.

La caracterización transitiva de los autómatas reversibles con índices de Welch diferentes de 1 ha sido muy poco desarrollada. Un trabajo relevante en este aspecto se debe a Nasu [Nas95] el cual define “sistemas textiles” para representar la dinámica de estos sistemas. Trabajos relacionados se pueden encontrar en dinámica simbólica (Boyle [Boy93], Marcus y Lind [LM95] y Kitchens [Kit98]), parte de sus resultados han sido aplicados en este capítulo para definir los métodos matriciales que analizan la dinámica de los conjuntos de cilindros centrados en autómatas reversibles.



# Capítulo 7

## Conclusiones

La belleza de los autómatas celulares unidimensionales reversibles es su capacidad de generar un comportamiento global invertible que en muchas ocasiones es muy interesante, a pesar de la simplicidad de su comportamiento local. El caso reversible es una de las pocas áreas con más resultados profundos en la teoría de los autómatas celulares. No obstante, esta área todavía tiene cuestiones relevantes que permanecen abiertas, y su comprensión total está aún lejos de obtenerse. Además, una inspección preliminar y superficial de este tema podría aparentar que existe muy poca relación entre los resultados que se tienen hasta el momento.

En este sentido, la topología de conjuntos ha resultado muy útil para establecer un entorno teórico general para desarrollar de manera conjunta los resultados combinatorios y matriciales establecidos por Hedlund y Williams y la representación determinística definida por Kari. La estructura del conjunto de configuraciones que especifican los conjuntos de cilindros centrados es de gran utilidad ya que corresponde con el estudio de los autómatas celulares unidimensionales reversibles, donde los ancestros comparten una secuencia central común lo que es similar a la definición de un conjunto de cilindros centrados. Para otro tipo de análisis donde la posición de una secuencia finita en una configuración no sea relevante (por ejemplo, el análisis de las densidades de los estados en una configuración), otro tipo de topologías pueden ser más convenientes. El espacio de configuraciones es caracterizado principalmente por su naturaleza discreta. De este modo, este espacio es métrico, compacto y de Hausdorff. Estas cualidades caracterizan a las propiedades sustanciales (multiplicidad uniforme e índices de Welch) del mapeo global inducido por una regla de evolución.

Los trabajos desarrollados por Boykett [Boy94] [Boy97], Moore y Boykett [MB97] y Kari [Kar92] que explican como simular cada autómata celular unidimensional con otro con tamaño de vecindad 2, son importantes ya que demuestran que es suficiente analizar este caso para generalizar resultados en la teoría de autómatas celulares.

La dinámica de los autómatas celulares unidimensionales reversibles está caracterizada por las permutaciones en bloque. Su aplicación sobre conjuntos de cilindros centrados define los diferentes comportamientos periódicos y transitivos de estos sistemas. Para autómatas reversibles con un índice de Welch igual a 1, existe una caracterización determinística simple. En este caso, la simulación de un autómata con otro con tamaño de vecindad 2 facilita el estudio por la forma que toma la matriz que representa a la regla de evolución (la misma permutación de estados ya sea por renglones o por columnas). Esta restricción permite demostrar de manera muy simple las propiedades dinámicas de los autómatas reversibles por medio de su regla de evolución, porque en este caso un ancestro siempre tiene una

posible extensión hacia ambos lados para evolucionar en una secuencia dada.

Para un autómata celular unidimensional reversible con ambos índices de Welch diferentes de 1, la regla de evolución no tiene una representación matricial tan simple ni conveniente. Por tal motivo, la caracterización dinámica de estos sistemas por medio de sus reglas de evolución no aparece de una forma tan directa como en el caso de autómatas reversibles con un índice de Welch 1.

## 7.1 Contribuciones y limitaciones del trabajo

Las contribuciones de esta tesis se dan en dos direcciones. Primero, se han integrado los diferentes puntos de vista (combinatorial, dinámico y matricial) en el estudio de los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de la topología de conjuntos. Esta integración muestra que todas estas maneras de abordar el problema sólo reflejan diferentes manifestaciones del mismo fenómeno reversible de los autómatas celulares.

Por otra parte, los resultados expuestos en el presente manuscrito ofrecen un conjunto de procedimientos computacionales útiles para detectar y analizar los diferentes comportamientos periódicos y transitivos de estos sistemas. Un resultado del estudio periódico es la implementación de una clasificación para los autómatas celulares unidimensionales reversibles. Esta clasificación establece también una equivalencia fuerte con respecto al corrimiento entre autómatas reversibles periódicamente equivalentes, y no está condicionada por los valores de los índices de Welch.

Para el caso transitivo, la dinámica de un autómata celular unidimensional reversible con un índice de Welch igual a 1 está completamente caracterizada por la cerradura transitiva de su matriz que representa las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados. Para autómatas celulares unidimensionales reversibles con ambos índices de Welch distintos de 1, esta tesis establece un procedimiento computacional para calcular algunas instancias de los diferentes comportamientos transitivos (excepto para el comportamiento topológicamente mezclado) utilizando los subconjuntos de Welch.

Se ha caracterizado el comportamiento local de los autómatas celulares unidimensionales reversibles por medio de las propiedades espectrales de sus matrices de conectividad. En este aspecto los resultados más relevantes son: demostrar la idempotencia de estas matrices, lo cual define un método para detectar y generar reglas de evolución invertibles, y definir un procedimiento para obtener la regla de evolución inversa a través de los vectores propios de las matrices de conectividad inducidas por la regla de evolución original. Estos vectores propios solamente representan a los diferentes subconjuntos de Welch del autómata reversible.

Una limitante de esta tesis es que sus resultados sólo son aplicables para el caso unidimensional. Muy pocos trabajos existen acerca de los autómatas celulares reversibles en mayores dimensiones por lo que no han sido completamente caracterizados, y muchos de los problemas son indecidibles [Kar94]. Otra limitante del trabajo es que los procedimientos computacionales que se presentan para el caso unidimensional están acotados por el número de estados que tenga el autómata reversible. Estos procedimientos no son muy eficientes, aún para un número de estados relativamente pequeño (hasta nueve en el caso transitivo para autómatas con ambos índices de Welch diferentes de 1).

## 7.2 Trabajo futuro

Finalmente, el trabajo futuro sugerido para esta tesis es la formalización de la dinámica de los autómatas celulares unidimensionales reversibles con ambos índices de Welch diferentes de 1. En este caso, el análisis combinatorio no se presenta tan sencillo. Otros campos (como la teoría de grupos) no han sido ampliamente utilizados para el análisis de los autómatas celulares reversibles, y existen pocas referencias en este sentido [Lib99]. Un camino puede ser el análisis del comportamiento global aplicando la teoría de grupos, lo cual puede generar mejores resultados ya que el conjunto de reglas invertibles conforma un grupo infinito.

El diagrama de de Bruijn es una herramienta muy adecuada para transformar los problemas de los autómatas celulares unidimensionales reversibles en problemas conocidos de trazo de rutas en una gráfica. La relación de estos diagramas con otro tipo de herramientas utilizadas en la discusión de corrimientos de tipo finito, sistemas sóficos y sistemas textiles no ha sido aún analizada. Por otra parte, es deseable tener otra clasificación de los autómatas celulares unidimensionales reversibles la cual tome en cuenta todos los comportamientos dinámicos. Otro trabajo por hacer es el desarrollo de mecanismos ingeniosos para utilizar las permutaciones en bloque con el fin de generar durante la evolución del autómata reversible una configuración con una característica dinámica requerida.

Un fuerte énfasis debe ser hecho en el uso de las propiedades topológicas de los autómatas celulares unidimensionales reversibles. Si el conjunto de configuraciones es un espacio compacto, métrico y de Hausdorff, entonces las propiedades de este tipo de espacios deben ser aplicadas para conocer su influencia en el comportamiento de los autómatas celulares reversibles. Una sugerencia es aplicar la teoría completa de las secuencias límite inversas, o si se define una métrica dentro del conjunto de reglas invertibles, entonces se obtiene un grupo topológico. Así, los resultados en la teoría de grupos y en la teoría de grupos topológicos pueden ser útiles para entender comportamientos dinámicos más complicados en estos sistemas.

Esta tesis ha utilizado resultados básicos de la teoría de matrices, teoría de gráficas y de topología de conjuntos. Estas teorías han permitido encontrar resultados importantes sobre el comportamiento de los autómatas reversibles. De esta manera, un uso más profundo y especializado de estas teorías debe ofrecer mejores resultados para caracterizar el comportamiento invertible de estos sistemas.

Aplicar estos resultados en autómatas reversibles de mayores dimensiones es una perspectiva interesante. Aunque muchos problemas son indecidibles, esto no significa que no se puedan obtener resultados importantes. Si bien no se podrán caracterizar todos los casos, posiblemente se puedan analizar y clasificar grandes clases de autómatas reversibles, como se ha hecho en el caso aditivo [MM98], [BR96].



# Lista de símbolos

## Números

$\mathbb{N}$	números naturales
$\mathbb{Z}$	números enteros
$\mathbb{Z}^+$	números enteros positivos
$\mathbb{R}$	números reales
$\mathbb{R}^+$	números reales positivos

## Elementos de autómatas celulares

$\mathcal{A}$	autómata celular
$K$	conjuntos de estados
$k$	número de estados
$c$	configuración
$r$	radio de vecindad
$\varphi$	regla de evolución
$\varphi^{-1}$	regla de evolución inversa a $\varphi$
$K^{2r+1}$	conjunto de vecindades del autómata
$C$	conjunto de configuraciones
$\Phi$	mapeo global entre configuraciones inducido por $\varphi$
$\Phi^{-1}$	mapeo global inverso a $\Phi$

## Secuencias de elementos de $K$

$w$	secuencia de estados
$K^*$	conjunto de secuencias finitas de estados
$w^*$	secuencia formada por la repetición sucesiva de $w$
$[a_i, a_f]$	secuencia que va de la posición $a_i$ a la posición $a_f$

## Conjuntos de cilindros centrados

$\mathcal{C}_{[w]}$	conjunto de cilindros centrados especificado por la secuencia $w$
$\mathfrak{C}$	familia de conjuntos de cilindros centrados

## Conjuntos genéricos y espacios genéricos

$X$	conjunto genérico
$x$	elemento genérico
$\cup$	unión de conjuntos
$\cap$	intersección de conjuntos
$X^c$	complemento de $X$
$B$	conjunto de índices
$\alpha$	elemento del conjunto de índices $B$
$(X, \mathfrak{T})$	espacio topológico genérico
$T(x)$	vecindad de un elemento $x$ de un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$
$\mathfrak{T}$	familia de vecindades en un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$
$\mathcal{O}$	conjunto abierto en un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$
$\overline{X}$	cerradura de $X$
$d$	función de distancia en un espacio topológico genérico $(X, \mathfrak{T})$
$d(x_1, x_2)$	distancia entre los elementos $x_1$ y $x_2$
$\Psi$	mapeo global genérico en un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$
$(X, \Psi)$	sistema dinámico genérico
$S_\epsilon(x)$	esfera abierta de distancia $\epsilon$ para $x \in (X, \mathfrak{T})$

## Espacio de configuraciones

$(C, \mathfrak{C})$	espacio topológico de configuraciones
$\varphi \circ \varphi$	composición de una regla de evolución
$\xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}_{[w]}$	parte de una secuencia límite inversa en $(C, \mathfrak{C})$
$\mathcal{C}_{[\infty]}$	conjunto de secuencias límite inversas infinitas en $(C, \mathfrak{C})$
$e$	secuencia de configuraciones
$\mathfrak{F}$	conjunto de secuencias de configuraciones
$\mathbf{R}$	relación de equivalencia definida por $\Phi$ entre conjuntos de cilindros centrados
$P_\varphi$	relación de conectividad periódica entre conjuntos de cilindros centrados
$M_\varphi$	matriz transitiva de conjuntos de cilindros centrados

# Lista de Figuras

2.1	Cada ancestro de un estado dado tiene $2r$ estados más. . . . .	11
2.2	Ancestro de una secuencia de $2r$ estados, este ancestro es dividido en dos secuencias de $2r$ estados. . . . .	12
2.3	Ancestros de una vecindad en un autómata celular unidimensional reversible. . . . .	14
2.4	Ancestros de una secuencia de $n$ células en un autómata reversible. . . . .	14
2.5	Ancestros de una secuencia de $4r$ células. . . . .	14
2.6	Elementos de $L_\varphi$ y $R_\varphi$ . . . . .	15
2.7	Evolución de un autómata celular unidimensional reversible representada por $p_1 \circ p_2$ . . . . .	16
2.8	Un conjunto de cilindros centrados. . . . .	16
2.9	Conjuntos de cilindros centrados $\mathcal{C}_{[w_{[n]}]}$ , $\mathcal{C}_{[w_{[n-1]}w_{[n]}w_{[n+1]}]}$ y $\mathcal{C}_{[w_{[n-2]}w_{[n-1]}w_{[n]}w_{[n+1]}w_{[n+2]}]}$ definidos por las subsecuencias centrales de $w \in K^{2n+1}$ . . . . .	18
3.1	Arboles que representan a un autómata celular unidimensional sobreyectivo $(2, 1)$ . Aquí se presentan dos diferentes secuencias límite inversas. . . . .	35
3.2	Secuencia $(a_0a_1a_2a_3a_4) \in K^5$ formada por tres vecindades que traslapan, para $r = 1$ . . . . .	36
3.3	Secuencia $(a_0a_1a_2a_3a_4) \in K^5$ con $r = 1$ , $n - 2r = 3$ células centrales comunes y $2r$ células variantes a cada lado de los ancestros. . . . .	37
3.4	Secuencias límite inversas especificadas por $\Phi$ y $\Phi^{-1}$ en un autómata reversible $(2, 1)$ . . . . .	38
3.5	Autómata celular unidimensional reversible $(2, 1)$ con reglas invertibles $\varphi = 15$ y $\varphi^{-1} = 85$ . . . . .	39
3.6	Representación gráfica de la relación de equivalencia, cada cuadro gris muestra una clase de equivalencia. . . . .	40
3.7	Secuencias límite inversas del conjunto $\mathcal{C}_{[011]}$ . . . . .	40
4.1	Mapeo del conjunto $\mathcal{C}_{[c_{i[-1,1]}]}$ al conjunto $\mathcal{C}_{[c_{i+1}[-1,1]}]}$ usando la composición de la regla de evolución en un autómata reversible $(k, 1/2)$ . . . . .	45
4.2	Mapeo de un bloque $x_iy_i$ a otro bloque $x_ky_k$ colocado en las mismas coordenadas. . . . .	47
4.3	Ejemplo de una relación de equivalencia definida por la cerradura transitiva de una relación de conectividad dada. . . . .	48
4.4	Relaciones de equivalencia que pertenecen a la misma clase periódica. . . . .	49
4.5	Autómata $(4, 1/2)$ , regla $FFAA5500$ . . . . .	50

4.6	Relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla $FFAA5500$ . Los puntos oscuros indican configuraciones fijas. . . . .	51
4.7	Cerradura transitiva de la relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla $FFAA5500$ . . . . .	51
4.8	Clases del autómata (4, 1/2) regla $FFAA5500$ . . . . .	52
4.9	Período 3 para la composición de la regla de evolución aplicada sobre la con- figuración compuesta por repeticiones de la secuencia 102. . . . .	52
4.10	Evolución del autómata reversible (4, 1/2) regla $5F0A5F0A$ . . . . .	53
4.11	Relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla $5F0A5F0A$ . Los puntos oscuros representan configuraciones fijas. . . . .	54
4.12	Cerradura transitiva de la relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla $5F0A5F0A$ . . . . .	54
4.13	Clases de la cerradura transitiva del autómata reversible (4, 1/2) regla $5F0A5F0A$ .	55
4.14	Período 3 en la composición de la regla de evolución sobre la configuración formada por repeticiones de la secuencia 102. . . . .	55
4.15	Evolución del autómata reversible (4, 1/2) regla $AA5500FF$ . . . . .	56
4.16	Relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla $AA5500FF$ . .	57
4.17	Cerradura transitiva de la relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla $AA5500FF$ . . . . .	57
4.18	Clases de la cerradura transitiva del autómata reversible (4, 1/2) regla $AA5500FF$ .	58
4.19	Período 6 de la configuración formada por repeticiones de la secuencia 102. .	58
4.20	Evolución del autómata reversible (4, 1/2) regla $BB991133$ . . . . .	59
4.21	Relación de conectividad del autómata reversible (4, 1/2) regla $BB991133$ . .	60
4.22	Cerradura transitiva del autómata reversible (4, 1/2) regla $BB991133$ . . . .	60
4.23	Clases de la cerradura transitiva del autómata reversible (4, 1/2) regla $BB991133$ .	61
4.24	Período 12 en la evolución de la configuración formada por repeticiones de la secuencia 102. . . . .	61
5.1	Forma de una matriz de conectividad en un autómata reversible con tamaño de vecindad 2. . . . .	70
5.2	Autómata reversible con tamaño de vecindad 2. . . . .	73
5.3	Regla inversa del autómata reversible de la Figura 5.2. . . . .	74
5.4	Autómatas reversibles con tamaño de vecindad 2. . . . .	74
5.5	Mapeos entre conjuntos de cilindros centrados definidos por las clases $\{001, 010, 100\} \subseteq$ $P_A$ y $\{011, 101, 110\} \subseteq P_3$ . . . . .	75
6.1	Transiciones del conjunto $\mathcal{C}_{[w]}$ a distintos conjuntos $\mathcal{C}_{[u]}$ . . . . .	81
6.2	Transición del conjunto $\mathcal{C}_{[w_1]}$ al conjunto $\mathcal{C}_{[w_2]}$ dada por $\Phi^2(c) = c'$ . . . . .	82
6.3	Evolución periódica de las configuraciones periódicas $c$ y $c'$ donde $\Phi^2(c) = c'$ .	83
6.4	Evolución de $w_1$ a $w_2$ ; las células aquí presentadas tienen un estado fijo. . .	84
6.5	Extensiones derechas de $w_1$ que evolucionan en el lado derecho de $w_2$ . Aquí, cada valor representa el número de posibles estados que cada célula puede tomar y no describe un estado en particular de $K$ . . . . .	84

6.6	Extensiones izquierdas de $w_1$ que evolucionan en $w_2$ . . . . .	84
6.7	Transición de $w_1$ a $w_3$ por medio de $w_2$ . . . . .	85
6.8	Transición de $\mathcal{C}_{[w_1]}$ a $\mathcal{C}_{[w_3]}$ dada por una configuración cuyas coordenadas centrales son extensiones de $w_1$ . Con estas extensiones se obtienen las configuraciones transitivas de cualquier conjunto de una clase de equivalencia dada. . . . .	86
6.9	Conjunto de cilindros centrados recurrente $\mathcal{C}_{[w]}$ definido por las extensiones de la secuencia $w \in K^3$ . . . . .	87
6.10	Transición de $w_1$ a $w_2$ y de $w_2$ a $w_3$ , donde se toman las células en la esquina derecha de la construcción. Estas células son etiquetadas como $F_1$ , $F_2$ y $F_3$ . . . . .	89
6.11	Conjunto $F_4$ obtenido por la intersección de los estados sucesores tanto de $F_1$ como de $F_2$ , en el sentido original e inverso respectivamente. . . . .	89
6.12	Células seleccionadas para revisar la transición de $w_1$ a $w_3$ . . . . .	90
6.13	Si las células grises no son vacías entonces existe una transición de $w_1$ a $w_3$ . . . . .	90
6.14	Células seleccionadas para verificar la transición de una secuencia de cinco conjuntos de cilindros centrados. . . . .	90
6.15	Secuencia central calculada iterativamente por la intersección de células ancestras a los extremos. La secuencia define una transición de $w_1$ a $w_n$ y por lo tanto de $\mathcal{C}_{[w_1]}$ a $\mathcal{C}_{[w_n]}$ . . . . .	91
6.16	Si $\mathcal{C}_{[w_1]}$ intersecta a $\mathcal{C}_{[w_3]}$ a través de $\mathcal{C}_{[w_2]}$ en $M_\varphi$ , entonces se revisa esta transición. . . . .	91
6.17	Si $\mathcal{C}_{[w_1]}$ intersecta a $\mathcal{C}_{[w_3]}$ entonces se analizan las conexiones de $\mathcal{C}_{[w_1]}$ a los sucesores de $\mathcal{C}_{[w_3]}$ . . . . .	91
6.18	Si la transición de $\mathcal{C}_{[w_1]}$ a $\mathcal{C}_{[w_3]}$ ya fue considerada, pero una transición de $\mathcal{C}_{[w_1]}$ a algún sucesor de $\mathcal{C}_{[w_3]}$ todavía no existe, entonces se estudiará dicha transición a través de $\mathcal{C}_{[w_3]}$ . . . . .	92
6.19	Una trayectoria válida con el número de pasos de $\mathcal{C}_{[w_1]}$ a los demás conjuntos. . . . .	92
6.20	Si el renglón $\mathcal{C}_{[w_i]}$ es positivo por una sola trayectoria, entonces los otros renglones también son positivos y el autómata es topológicamente transitivo. . . . .	93
6.21	Autómata reversible que representa al corrimiento derecho. . . . .	93
6.22	Matriz $M_\varphi$ y su cerradura transitiva. . . . .	94
6.23	Configuración transitiva del corrimiento derecho, cada transición representa dos evoluciones del autómata. . . . .	94
6.24	$\mathcal{C}_{[001]}$ intersecta a $\mathcal{C}_{[101]}$ en $n$ pasos, para $n \geq 6$ , cada paso representa dos evoluciones del autómata. . . . .	94
6.25	Autómata celular unidimensional reversible de 3 estados. . . . .	95
6.26	Matriz $M_\varphi$ y su cerradura transitiva. . . . .	95
6.27	Configuración transitiva del autómata de 3 estados. . . . .	96
6.28	Transición del conjunto $\mathcal{C}_{[121]}$ al conjunto $\mathcal{C}_{[220]}$ en 6 y 7 pasos. . . . .	97
6.29	Autómata celular unidimensional reversible de 4 estados. . . . .	97
6.30	Matriz $M_\varphi$ del autómata de 4 estados. . . . .	98
6.31	Matriz inducida por $M_\varphi$ representando las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados. . . . .	99

6.32	Matriz coloreada inducida por $M_\varphi$ que representa las transiciones de los conjuntos de cilindros centrados. . . . .	100
6.33	Autómata celular unidimensional reversible de 4 estados. . . . .	101
6.34	Matriz $M_\varphi$ asociada con el autómata celular unidimensional reversible de 4 estados. . . . .	101
6.35	Representación matricial de las transiciones entre conjuntos centrados de cilindros. . . . .	102
6.36	Configuración transitiva de la clase que contiene a $\mathcal{C}_{[000]}$ . . . . .	103
6.37	Representación con colores inducida por $M_\varphi$ de las transiciones entre conjuntos de cilindros centrados. . . . .	104

# Lista de Tablas

3.1	Ancestros de las vecindades en el autómata $(2, 1)$ , $\varphi = 15$ y $\varphi^{-1} = 85$ . . . . .	39
3.2	Relaciones de equivalencia definidas por las reglas invertibles 15 y 85. . . . .	40
4.1	Relación de conectividad definida por los bloques $xy$ que representan el comportamiento periódico. . . . .	47
5.1	Matriz de conectividad cuyos valores propios son $\lambda_A = 1$ y $\lambda = 0$ . . . . .	73
5.2	Relaciones de conectividad $P_A$ y $P_3$ . . . . .	75
5.3	Cerraduras transitivas de las relaciones $P_A$ y $P_3$ . . . . .	75
5.4	Matrices $R$ y $S$ . . . . .	76
5.5	Productos $RS = P_A$ y $SR = P_3$ . . . . .	76



# Bibliografía

- [AP72] Serafino Amoroso and Yale Patt, *Decision procedures for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures*, Journal of Computer and System Sciences **6** (1972), 448–464.
- [Bau91] John D. Baum, *Elements of point set topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [BFK97] Francois Blanchard, Enrico Formenti, and Petr Kurka, *Cellular automata in the Cantor, Besicovitch, and Weyl topological spaces*, Complex Systems **11** (1997), 107–123.
- [BKM97] Francois Blanchard, Petr Kurka, and Alejandro Maass, *Topological and measure-theoretic properties of one-dimensional cellular automata*, Physica D **103** (1997), 86–99.
- [BM00] Mike Boyle and Alejandro Maass, *Expansive invertible onesided cellular automata*, Journal of the Mathematical Society of Japan **52** (2000), no. 4, 725–740.
- [Boy93] Mike Boyle, *Symbolic dynamics and matrices*, Combinatorial and Graph-Theoretical Problems in Linear Algebra, vol. 50, Academic Press, 1993, pp. 1–38.
- [Boy94] Tim Boykett, *Combinatorial construction of one-dimensional reversible cellular automata*, Contributions to general algebra **9** (1994), 81–90.
- [Boy97] ———, *Comparism of radius 1/2 and radius 1 paradigms in one dimensional reversible cellular automata*, <http://verdi.algebra.uni-linz.ac.at/~tim>, 1997.
- [BR96] R. Barua and S. Ramakrishnan,  $\delta$ -Game,  $\delta^+$ -game and two-dimensional additive cellular automata, Theoretical Computer Science **154** (1996), no. 2, 349–366.
- [Cas89] John L. Casti, *Alternate realities: mathematical models of nature and man*, John Wiley and Sons, New York, Toronto, Singapore, 1989.
- [CDS80] Dragos M. Cvetkovic, Michael Doob, and Horst Sachs, *Spectra of graphs : theory and application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
- [CFMM99] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara, and G. Mauri, *On the dynamical behavior of chaotic cellular automata*, Theoretical Computer Science **217** (1999), 31–51.

- [CM98] G. Cattaneo and L. Margara, *Topological definitions of chaos applied to cellular automata dynamics*, Mathematical foundations of computer science, vol. 1450, Springer, 1998, pp. 816–824.
- [Cod68] E. F. Codd, *Cellular automata*, Academic Press, New York, 1968.
- [DGS76] Manfred Denker, Christian Grillenberger, and Karl Sigmund, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 527, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [Dow97] R. A. Dow, *Additive cellular automata and global injectivity*, Physica D **110** (1997), no. 1-2, 67–91.
- [dV93] J. de Vries, *Elements of topological dynamics*, Mathematics and its applications, vol. 257, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1993.
- [Fre91] Edward Fredkin, *Digital mechanics, an informational process based on reversible universal cellular automata*, Cellular Automata, Theory and Experiment (Howard A. Gutowitz, ed.), MIT/North-Holland, 1991, pp. 254–270.
- [Gan59] F. R. Gantmacher, *The theory of matrices*, vol. 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.
- [Gar70] Martin Gardner, *The fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game “Life”*, Scientific American **223** (1970), no. 4, 120–123.
- [Gol67] Solomon Wolf Golomb, *Shift Register Sequences*, University of Southern California, Holden-Day Inc., 1967.
- [Hed69] G. A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Mathematical Systems Theory **3** (1969), 320–375.
- [Hil91] David Hillman, *The structure of reversible one-dimensional cellular automata*, Physica D **52** (1991), 277–292.
- [Hur90] Lyman P. Hurd, *Recursive cellular automata invariant sets*, Complex Systems **4** (1990), 119–129.
- [HY88] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- [IHY91a] K. Culik II, L. P. Hurd, and S. Yu, *Computation theoretic aspects of cellular automata*, Cellular Automata, Theory and Experiment (Howard A. Gutowitz, ed.), MIT/North-Holland, 1991, pp. 357–378.
- [IHY91b] ———, *Formal languages and global cellular automaton behavior*, Cellular Automata, Theory and Experiment (Howard A. Gutowitz, ed.), MIT/North-Holland, 1991, pp. 396–403.
- [II87] Karel Culik II, *On invertible cellular automata*, Complex Systems **1** (1987), 1035–1044.

- [ION83] M. Ito, N. Osato, and M. Nasu, *Linear cellular automata over  $z_m$* , Journal of Computer and System Sciences **27** (1983), 125–140.
- [Jen89] Erica Jen, *Enumeration of preimages in cellular automata*, Complex Systems **3** (1989), no. 5, 421–456.
- [JL01] J.Durand-Lose, *Representing reversible cellular automata with reversible block cellular automata*, Discrete models, combinatorics, computation and geometry (DM-CCG'01) (R.Cori, J.Mazoyer, M.Morvan, and R.Mosery, eds.), Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Springer Verlag, 2001, also available in <http://www.i3s.unice.fr/~jdurand/Recherche>.
- [Kar92] Jarkko J. Kari, *On the inverse neighborhoods of reversible cellular automata*, Lindenmayer Systems, Springer-Verlag, 1992, pp. 477–495.
- [Kar94] ———, *Reversibility and surjectivity problems of cellular automata*, Journal of Computer and System Sciences **48** (1994), no. 1, 149–182.
- [Kar96] ———, *Representation of reversible cellular automata with block permutations*, Mathematical Systems Theory **29** (1996), 47–61.
- [Kar00] ———, *Linear cellular automata with multiple state variables*, Lecture Notes in Computer Science **1770** (2000), 110–121.
- [Kit98] Bruce P. Kitchens, *Symbolic dynamics: One-sided, two-sided and countable Markov shifts*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [KPD84] Jr. Kendall Preston and Michael J. B. Duff, *Modern cellular automata, theory and applications*, Plenum Press, New York, 1984.
- [Lib99] Leo Liberti, *Structure of the invertible ca transformations group*, Journal of Computer and System Sciences **59** (1999), 521–536.
- [Lin84] Douglas Lind, *Applications of ergodic theory and sofic systems to cellular automata*, Physica D **10** (1984), no. 1-2, 36–44.
- [LM95] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [LPL91] Wentian Li, Norman H. Packard, and Chris G. Langton, *Transition phenomena in cellular automata rule space*, Cellular Automata, Theory and Experiment (Howard A. Gutowitz, ed.), MIT/North-Holland, 1991, pp. 77–94.
- [Mar99] Genaro Juárez Martínez, *Grados de reversibilidad en autómatas celulares lineales*, Graduate thesis, 1999.
- [MB97] Cristopher Moore and Tim Boykett, *Commuting cellular automata*, Complex Systems **11** (1997), 55–64, also available in <http://www.santafe.edu/~moore>.
- [McI90] Harold V. McIntosh, *Linear cellular automata*, Universidad Autonoma de Puebla, Apartado Postal 461 (72000) Puebla, Puebla, Mexico, 1990, also available in <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>.

- [McI91a] ———, *Linear cellular automata via de Bruijn diagrams*, available in <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, 1991.
- [McI91b] ———, *Reversible cellular automata*, available in <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>, 1991.
- [McI91c] ———, *Wolfram's class iv automata and a good life*, Cellular Automata, Theory and Experiment (Howard A. Gutowitz, ed.), MIT/North-Holland, 1991, pp. 105–121.
- [MM98] G. Manzini and L. Margara, *Invertible linear cellular automata over  $z_m$ : Algorithmic and dynamical aspects*, Journal of Computer and System Sciences **56** (1998), no. 1, 60–67.
- [Moo70] Edward F. Moore, *Machine models of self-reproduction*, Essays on Cellular Automata (Arthur W. Burks, ed.), University of Illinois Press, 1970, pp. 204–205.
- [Mor92] Kenichi Morita, *Computation-universality of one-dimensional one-way reversible cellular automata*, Information Processing Letters **42** (1992), no. 6, 325–329.
- [Mor95] ———, *Reversible simulation of one-dimensional irreversible cellular automata*, Theoretical Computer Science **148** (1995), no. 1, 157–163.
- [Mor00] Hendrik Moraal, *Graph-theoretical characterization of invertible cellular automata*, Physica D **141** (2000), 1–18.
- [Myh63] John Myhill, *The converse of moore's garden-of-eden theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society **14** (1963), 685–686.
- [Nas78] Masakazu Nasu, *Local maps inducing surjective global maps of one dimensional tesellation automata*, Mathematical Systems Theory **11** (1978), 327–351.
- [Nas79] ———, *Indecomposable local maps of tessellation automata*, Mathematical Systems Theory **13** (1979), no. 1, 81–93.
- [Nas80] ———, *An interconnection of local maps inducing onto global maps*, Discrete Applied Mathematics **2** (1980), no. 2, 125–150.
- [Nas88] ———, *Topological conjugacy for sofic systems and extensions of automorphisms of finite subsystems of topological markov shifts*, Lecture Notes in Mathematics **1342** (1988), 564–607.
- [Nas95] ———, *Textile systems for endomorphisms and automorphisms of the shift*, vol. 114, Memoirs of the American Mathematical Society, no. 546, American Mathematical Society, 1995.
- [Ric72] Daniel Richardson, *Tessellations with local transformations*, Journal of Computer and System Sciences **6** (1972), 373–388.
- [Rob95] Clark Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC Press, Inc., 1995.

- [Sec98] Juan Carlos Seck Tuoh Mora, *Autómatas celulares lineales reversibles*, Graduate thesis, 1998.
- [Sec99] ———, *Caracterización del comportamiento de los autómatas celulares lineales reversibles*, Master's thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 1999, available in <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>.
- [SM96] Jose Manuel Gómez Soto and Harold V. McIntosh, *Los índices de Welch en el cálculo de autómatas celulares lineales reversibles*, XXIX Congreso de Matemáticas, 1996.
- [Sut99a] Klaus Sutner, *Linear cellular automata and de Bruijn automata*, Cellular Automata: A Parallel Model (M. Delorme and J. Mazayer, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1999, also available in <http://www.cs.cmu.edu/~sutner/index.html>.
- [Sut99b] ———, *The size of power automata*, available in <http://www.cs.cmu.edu/~sutner/index.html>, 1999.
- [TM87] Tommaso Toffoli and Norman Margolus, *Cellular automata machines*, MIT Press, London, 1987.
- [Tyl01] Tim Tyler, *Public key cryptography using cellular automata*, available in <http://cell-auto.com>, 2001.
- [vN66] John von Neumann, *Theory of self-reproducing automata*, University of Illinois Press, Urbana and London, 1966, edited by Arthur W. Burks.
- [Voo96] Burton H. Voorhees, *Computational analysis of one-dimensional cellular automata*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996.
- [Wei73] Benjamin Weiss, *Subshifts of finite type and sofic systems*, Monatshefte für Mathematik **77** (1973), 462–474.
- [Wil73] Robert F. Williams, *Classification of subshifts of finite type*, Annals of Mathematics **98** (1973), no. 2, 120–153, with errata *ibid.*, 99, 380–381, 1974.
- [WL92] Andrew Wuensche and Mike Lesser, *The global dynamics of cellular automata: an atlas of basin of attraction fields of one-dimensional cellular automata*, Addison-Wesley, 1992.
- [Wol86] S. Wolfram (ed.), *Theory and applications of cellular automata*, World Scientific, Singapore, 1986.



# Glosario

**ancestro** Secuencia de un autómata celular la cual evoluciona en otra por la aplicación de una regla de evolución en todas sus vecindades. *página 12*

**autómata celular** Sistema dinámico discreto compuesto por estados discretos. Su comportamiento depende de las interacciones locales entre sus componentes. *página 9*

**autómata celular reversible** Autómata celular cuyo mapeo global es invertible. *página 12*

**cerradura transitiva** Aplicación de la propiedad transitiva para una relación binaria dada. Esta puede calcularse usando el algoritmo de Warshall. *página 47*

**componente irreducible** Submatriz irreducible de una matriz dada. *página 66*

**configuración** Arreglo inicial de estados o arreglo de estados producido por la evolución de un autómata celular unidimensional. *página 9*

**conjunto abierto** Subconjunto de un espacio topológico que es una vecindad de cada uno de sus elementos. En autómatas celulares unidimensionales, cada conjunto de cilindros centrados es un conjunto abierto. *página 21*

**conjunto cerrado** Un conjunto que contiene a todos sus puntos límite. En autómatas celulares unidimensionales, cada conjunto de cilindros centrados es cerrado. Ver conjunto abierto. *página 22*

**conjunto de cilindros centrado** Conjunto de configuraciones con la misma secuencia central finita de estados. *página 16*

**conjunto de cilindros centrados recurrente** Un conjunto de cilindros centrados tal que el mapeo global puede regresar en un paso al mismo conjunto. *página 87*

**conjunto no errante** Conjunto abierto donde algunas de sus órbitas regresan a el mismo en un número finito de pasos. *página 44*

**conjunto topológicamente mezclado** Conjunto abierto de un sistema dinámico con órbitas que pueden alcanzar otro conjunto abierto dado y permanecer en este indefinidamente. *página 80*

**conjunto topológicamente transitivo** Conjunto abierto de un sistema dinámico con órbitas que pueden alcanzar a todos los demás conjuntos abiertos. *página 80*

- cubrimiento de un espacio topológico** Familia de conjuntos abiertos que cubren todo el espacio. En autómatas celulares unidimensionales, la familia de conjuntos de cilindros centrados es un cubrimiento del espacio de configuraciones. *página 23*
- diagrama de de Bruijn** Diagrama basado en secuencias de  $2r$  células que traslapan para formar una vecindad completa. Se usa para representar una regla de evolución de forma gráfica. *página 10*
- distancia en un espacio topológico** Función para cada par de elementos del espacio la cual es definida positiva, simétrica y cumple con la desigualdad triangular. *página 26*
- equivalencia fuerte con respecto al corrimiento** Equivalencia topológica definida por matrices entre dos sistemas dinámicos de corrimiento. *página 71*
- espacio compacto** Espacio topológico donde cada cubrimiento tenga un subcubrimiento finito. En autómatas celulares unidimensionales, la familia de conjuntos de cilindros centrados define un espacio compacto. Ver espacio métrico. *página 23*
- espacio de Hausdorff** Espacio topológico donde todo punto tiene una vecindad disjunta a cualquier vecindad de otro punto dado. En autómatas celulares unidimensionales, la familia de conjuntos de cilindros centrados establece un espacio de Hausdorff. *página 23*
- espacio métrico** Espacio topológico donde se define una distancia la cual coincide con la topología del espacio. *página 26*
- evolución de un autómata celular** Mapeo de una configuración a otra inducido por una regla de evolución. *página 10*
- extensiones** Concatenación de una o más células a la derecha y/o a la izquierda de una secuencia de estados dada. *página 12*
- índices de Welch** Índices que representan el número de extensiones diferentes en ambos lados de los ancestros en autómatas celulares unidimensionales reversibles. *página 13*
- Jardín del Edén** Conjunto de configuraciones donde cada una no puede ser generada por la evolución de un autómata celular en particular. *página 12*
- lema de Zorn** Este lema establece la existencia de un elemento maximal en un conjunto parcialmente ordenado. *página 29*
- matriz de conectividad** Representación matricial de las rutas que forman una secuencia dada en un diagrama de de Bruijn. *página 11*
- matriz esencial** Matriz no negativa donde ninguno de sus renglones o columnas es nula. *página 82*
- matriz irreducible** Matriz donde una entrada dada es positiva para una potencia de la matriz. Ver matriz primitiva. *página 65*
- matriz no negativa** Matriz cuyas entradas son iguales o mayores que cero. *página 11*

- matriz primitiva** Matriz con una potencia la cual tiene solamente elementos positivos. *página 82*
- multiplicidad uniforme** Propiedad de los autómatas celulares unidimensionales sobreyectivos donde cada secuencia finita de estados tiene  $k^{2r}$  ancestros. *página 13*
- NXLCAU (NeXT Linear Cellular Automata)** Sistema desarrollado por Harold V. McIntosh bajo el sistema operativo NeXT. Este sistema presenta un gran número de herramientas gráficas y probabilísticas para el análisis de autómatas celulares unidimensionales. Está disponible en <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh>. *página 49*
- órbita** Trayectoria descrita por un punto en un sistema dinámico bajo la iteración del mapeo global. *página 44*
- permutación en bloque** Permutaciones de las secuencias de  $6r$  células en sí mismas con un corrimiento de  $3r$  células. Cada permutación se representa por la pareja  $xy$  y todas ellas se utilizan para caracterizar a los autómatas celulares unidimensionales reversibles. *página 13*
- punto fijo** Punto que permanece sin cambio bajo la iteración del mapeo global. *página 44*
- punto límite de un subconjunto** Punto cuyas vecindades tienen una intersección no vacía con el subconjunto. *página 21*
- punto periódico** Punto cuya órbita regresa a este mismo en un número finito de pasos. *página 44*
- punto transitivo** Punto con una órbita que intersecta a todos los conjuntos abiertos de un sistema dinámico. *página 80*
- radio de vecindad** Número de células a cada lado de una célula dada para formar una vecindad completa del autómata celular. *página 10*
- regla de evolución** Mapeo definido de vecindades a estados en un autómata celular unidimensional. *página 10*
- relación de conectividad** Relación entre conjuntos de cilindros centrados en base a su comportamiento periódico. *página 47*
- relación transitiva** Relación entre conjuntos de cilindros centrados inducida por las permutaciones en bloque. Esta relación muestra el comportamiento transitivo de los conjuntos de cilindros centrados definidos por secuencias de  $6r$  células. *página 83*
- RLCAU (Reversible Linear Cellular Automata)** Este sistema calcula autómatas celulares unidimensionales reversibles  $(k, 1/2)$  por medio de permutaciones en bloque. También ofrece algunas herramientas gráficas y matriciales para estudiar estos sistemas. Ver NXLCAU (NeXT Linear Cellular Automata). *página 49*
- secuencia límite inversa** Secuencia de espacios topológicos definida por mapeos continuos inversos entre estos. En autómatas celulares unidimensionales, se definen secuencias límite inversas infinitas sobre el mismo espacio de configuraciones por medio de mapeos globales sobreyectivos inducidos por reglas de evolución sobreyectivas. *página 27*

- sistema de vecindades** Familia de subconjuntos de un espacio topológico la cual determina que elementos están cercanos a uno dado. En autómatas celulares unidimensionales, la familia completa de conjuntos de cilindros centrados es un sistema de vecindades del espacio de configuraciones. *página 20*
- sistema dinámico** Sistema el cual cambia en el tiempo por la acción de una mapeo entre sus elementos. *página 44*
- tamaño de vecindad** Número de células de una vecindad en un autómata celular unidimensional. *página 10*
- teorema de Cayley-Hamilton** Este teorema dice que cada matriz cuadrada obedece a su polinomio característico. *página 69*
- teorema de Tychonoff** Este teorema dice que el producto de espacios compactos es compacto. *página 30*
- valor propio** Raíz del polinomio característico de una matriz cuadrada. *página 65*
- vecindad de un autómata celular** Secuencia de  $2r + 1$  estados que evolucionan en un estado nuevo. *página 10*
- vector propio** Vector renglón o columna asociado a un valor propio de una matriz cuadrada tal que el producto del valor por el vector sea igual al producto de la matriz por el vector. *página 65*