

I.P.N.

Instituto Politécnico Nacional

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

**Características Esenciales del Movimiento
en el Campo de un
Monopolo Electromagnético Fijo**

T E S I S

JOSÉ LEONEL TORRES HERNÁNDEZ

México, D. F.

Agosto, 1971

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CARACTERÍSTICAS ESENCIALES DEL MOVIMIENTO
EN EL CAMPO DE UN
MONOPOLO ELECTROMÁGNETICO FIJO

TESIS PRESENTADA POR

JOSÉ LEONEL TORRES HERNÁNDEZ
A LA ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUISITOS
PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

México, D. F.

Agosto, 1971

Con el cariño de siempre a:

mis padres

mis hermanos

mis hermanas

Índice

Prólogo	i
Introducción	1
I Tratamiento clásico del problema del movimiento de una partícula cargada eléctricamente en el campo de un monopoló eléctrico y magnético fijo	7
I.A Resumen	7
I.B Características generales del movimiento en el campo de un monopoló magnético	7
I.C Tratamiento Hamiltoniano del problema	12
I.D Determinación de un grupo dinámico clásico del problema, para estados ligados ($E < 0$)	35
II Tratamiento cuántico del problema	45
II.A Resumen	45
II.B Ecuación de Schrödinger para el problema	45
II.C Cuantización de \mathcal{E} y de la componente Z del momento angular	53
II.D Grupo de simetría cuántico del problema	61
III Conclusiones	63

P R Ó L O G O

Como se desprende de su título, el objeto del presente trabajo es el estudio de las características esenciales del movimiento de una partícula con carga eléctrica en el campo de un monopolo eléctrico y magnético fijo. Incluye este estudio el tratamiento clásico y cuántico (basado este último en la ecuación de Schrödinger) del problema; estando el énfasis en: a) un método de determinación de los grupos clásicos de simetría y dinámico del mismo, el cual es de aplicabilidad siempre que el Hamiltoniano del sistema sea función sólo de la suma de las coordenadas de acción; b) el proceso de cuantización de la carga magnética; c) el uso de coordenadas cuadrático parabólicas. Comprende esta tesis una Introducción (en la cual se anotan y discuten los fundamentos sobre los cuales se basa la herramienta de Electromagnetismo que se usa) y los tres capítulos siguientes:

- I.- Tratamiento clásico. Se estudian en él las características generales del movimiento en el campo de un monopolo magnético (sección I-B); se determina el grupo de simetría (sección I-C) y un grupo dinámico (sección I-D) para estados acotados, o sea, estados de energía total $E < O$, pues los generadores empleados dependen todos de esta condición.
- II.- Tratamiento cuántico.- Se trabaja en el esquema de Schrödinger y se obtiene la fórmula para la energía (sección II-B). Se obtiene la cuantización de la carga magnética (sección II-C) y el grupo de simetría (sección II-D).
- III.- Conclusiones: Se incluyen las que considero más relevantes.

En cuanto a la notación: las coordenadas esféricas se denotan por ρ, θ, ϕ ; la notación para el paréntesis de Poisson y el conmutador cuántico de dos cantidades A y B es la misma: $[A, B]$, pues no hay peligro de confusión. La numeración de las fórmulas, tablas y figuras es independiente para cada sección. En el Texto, las referencias a fórmulas se anotan con números entre paréntesis al nivel del renglón y las correspondientes a la Bibliografía con números entre paréntesis encima del renglón.

Respecto al proceso de desarrollo de esta tesis, deseo expresar mi agradecimiento al Profesor Harold V. McIntosh por haberme introducido al tema y por las provechosas discusiones que hemos tenido. También, va mi reconocimiento a la Escuela Superior de Física y Matemáticas por las facilidades con que he contado para el desarrollo de mi trabajo en la misma; hago extensivo este reconocimiento a mis Profesores (de ayer y de hoy) y a todas aquellas personas que directa o indirectamente han contribuido a la realización de este trabajo por medio de su influencia en mi formación no sólo académica.

I N T R O D U C C I Ó N

El problema del monopolo magnético tiene una historia que puede considerarse ya como larga. El trabajo importante más antiguo sobre él es el de Poincaré [1] de 1896, en el cual estudia las órbitas resultantes en el movimiento de un electrón en el campo de un monopolo eléctrico y magnético; también en este trabajo, identifica e interpreta geoméricamente las constantes del movimiento.

La causa más importante de que se haya especulado sobre la existencia de monopolos magnéticos, consiste en que no hay nada en la teoría Maxwelliana del Electromagnetismo cuya consistencia se pierda si existen: se puede elaborar una teoría electromagnética perfectamente consistente y que tome en cuenta la existencia de monopolos eléctricos y magnéticos. Esta teoría como se verá después, se basa en un conjunto de ecuaciones: desde este punto de vista, puede decirse que si “hay lugar” en la teoría Electromagnética clásica para los monopolos magnéticos.

Además, las ecuaciones de la teoría resultante son notablemente más simétricos que las originales de Maxwell, y siempre ha satisfecho más el intelecto humano el conocimiento de estructuras de alguna manera simétricas, que el de estructuras sin simetrías aparentes [2], debido a la belleza intrínseca de las primeras. También, es bien conocido que las simetrías, en Física, implican leyes de conservación, siendo éstas las de aplicación más general y las que dan las bases para entender los fenómenos físicos [3]. Se sabe [4] que el hecho de no poder distinguir (por medio de mediciones de sus observables) entre dos situaciones de un sistema físico dado, implica la no conservación de alguna o algunas cantidades (observables) del mismo, y que el hecho contrario implica la no conservación de observables relacionadas. En el caso del Electromagnetismo, el tener el campo eléctrico como fundamentalmente distinto del campo magnético (ausencia aparente de monopolos magnéticos) implica la no conservación de alguna cantidad, el conocimiento de cuya constancia en el caso de que los campos eléctricos y magnético aparecieran simétricamente en las ecuaciones de Maxwell sería tal vez de gran utilidad en el entendimiento de la naturaleza de estos campos.

Las ecuaciones de Maxwell en ausencia de medios materiales son:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{B} - \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= J_e & \nabla \times \bar{E} + \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \bar{E} &= J_e^0 & \nabla \cdot \bar{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

La fuerza de Lorents está dada por:

$$\bar{F} = J_e^0 \bar{E} + \bar{J}_e \times \bar{B} \quad (2)$$

Las ecuaciones que generalizan a las anteriores al tomar en cuenta la existencia de monopolos magnéticos son las siguientes [5]:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{B} - \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= J_e & -\nabla \times \bar{E} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= \bar{J}_g \\ \nabla \cdot \bar{E} &= J_e^0 & \nabla \cdot \bar{B} &= J_g^0 \end{aligned} \quad (3)$$

Las fuerza de Lorentz generalizada está dada por:

$$\bar{F} = J_e^0 \bar{E} + \bar{J}_e \times \bar{B} + J_g^0 \bar{B} - \bar{J}_g \times \bar{E} \quad (4)$$

En las ecuaciones anteriores, J_e^0 y $J_e = J_e^0 \bar{v}$ son las densidades de carga y corriente eléctricas, respectivamente, siendo \bar{v} la velocidad de la carga eléctrica (o, en general, del elemento de volumen con densidad de carga J_e^0) que da lugar a $\bar{J}_e = J_e^0 \bar{v}$ y $J_g = J_g^0 \bar{v}$ son las correspondientes densidades de carga y corriente magnéticas, respectivamente.

Es importante notar que la única base que se tiene para hacer las generalizaciones (3,4) consiste en razones de simetría. Se volverá a este punto en la conclusiones del presente trabajo.

Las ecuaciones anteriores no están referidas a ningún sistema de unidades particular. Ya que se trabajará con unidades C.G.S. se incluirán las ecuaciones (3) y (4) en estas unidades, pues, como representan tan sólo generalizaciones de (1,2), no es obvia (ni única) la manera en que deben introducirse las constantes c y 4π que se tienen para las ecuaciones de Maxwell en unidades Gaussianas [5]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \bar{J}_e & -\nabla \times \bar{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \bar{J}_g \\ \nabla \cdot \bar{E} &= 4\pi J_e^0 & \nabla \cdot \bar{B} &= 4\pi J_g^0\end{aligned}\tag{3-a}$$

La fuerza de Lorentz sobre una partícula con carga eléctrica $J_e^0 = e_2$ y magnética $J_g^0 = g_2$, moviéndose con velocidad \bar{v} en una región donde existen campos eléctrico \bar{E} y magnético \bar{B} está dada por [5]:

$$\bar{F} = e_2(\bar{E} + \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{B}) + g_2(\bar{B} - \frac{1}{c} \bar{v} \times \bar{E})\tag{4-a}$$

Con respecto a la no existencia aparente hasta hoy de monopolos magnéticos, es pertinente hacer notar lo siguiente: las ecuaciones (3,4) son invariantes bajo la transformación [5]:

$$\bar{E} \rightarrow \bar{E}_1, \quad \bar{B} \rightarrow \bar{B}_1, \quad J_e^\mu \rightarrow J_{e_1}^\mu, \quad J_g^\mu \rightarrow J_{g_1}^\mu, \quad \text{tal que:}$$

$$\left. \begin{aligned}\bar{E} &= \cos \theta \bar{E}_1 - \text{sen} \theta \bar{B}_1 \\ \bar{B} &= \text{sen} \theta \bar{E}_1 + \cos \theta \bar{B}_1 \\ J_e^\mu &= \cos \theta J_{e_1}^\mu - \text{sen} \theta J_{g_1}^\mu \\ J_g^\mu &= \text{sen} \theta J_{e_1}^\mu + \cos \theta J_{g_1}^\mu\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

En lo anterior, θ es un ángulo arbitrario; $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Pero las ecuaciones (1,2) se obtienen de las (3,4) por medio de una transformación del tipo (5), si suponemos que toda partícula cargada tiene carga eléctrica y magnética, de tal manera que $J_{g_1}^\mu = \alpha J_{e_1}^\mu$, con α una cantidad dada por:

$$\alpha = -\tan \theta\tag{6}$$

Por lo tanto, si se cumple lo anterior, se puede tener un universo en el cual existen cargas magnéticas, descrito por las ecuaciones de Maxwell usadas comúnmente (1,2), o sea, en el cual no pueden detectarse (ó, de otra manera, se detectan cada vez que se detectan cargas eléctricas, de acuerdo con (6)). Sin embargo, no son claras las implicaciones del resultado anterior, (que puede ser fundamental), pues el ángulo θ es arbitrario, por lo que $\tan \theta \in (-\infty, \infty)$: según ésto, para cualquier valor que pueda tener J_g^0 en la naturaleza (en una partícula), se puede hallar un ángulo θ tal que la carga eléctrica $J_{e_1}^0$ asociada a la partícula está dada por $J_e^0 = -\text{csc} \theta J_{g_1}^0$, con $\alpha = -\tan \theta$. Esto implica que $J_e^\mu = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} J_{g_1}^\mu$; o sea, se puede dar una descripción de tal sistema usando las ecuaciones de Maxwell (1,2) ordinarias. O sea, desde el punto de vista puramente Electromagnético, de acuerdo con lo anterior, aunque existieran partículas magnéticamente cargadas, no podrían detectarse (siendo $J_{g_1}^0$ su carga magnética, se detectarían como partículas con carga eléctrica $J_e^0 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 1} J_{g_1}^0$, con $\alpha = -\tan \theta$, para algún valor de θ no determinado por los argumentos anteriores).

La literatura sobre el problema de monopolo magnético aumentó considerablemente a partir del trabajo de Dirac [6] sobre las restricciones cuánticas para la existencia del mismo. Los trabajos son de dos tipos principales: del primer tipo, son aquellos en los cuales se trata de dar una fundamentación teórica a la existencia o inexistencia de monopolos magnéticos (referencias 5,6,7,12), incluyendo su proposición como constituyentes de partículas elementales [18], del segundo tipo,

son aquellos sobre intentos de tipo experimental para detectar monopolos magnéticos [9], la referencia [9] contiene una lista de trabajos sobre el último tipo de problema. Es particularmente interesante el método empleado en el primer trabajo de la ref. [9], se trató de determinar la existencia de monopolos magnéticos en las muestras lunares traídas a la tierra por la nave Apolo 11, en 1969, por medio del campo eléctrico que producen (el que se espera que debe producir, si las ecuaciones (3) son correctas) cuando están en movimiento. La luna es un lugar muy apropiado para buscar monopolos magnéticos si se supone que éstos forman parte también de los rayos cósmicos o que son producidos por otras partículas de éstos al tener colisiones con átomos de la superficie lunar, pues en ella prácticamente no hay erosión y, además, no tiene campo magnético (o es muy débil), el cual interferiría en el movimiento de estas partículas en el caso de que se acercaron a la tierra. Los resultados obtenidos fueron, como en el caso de los demás reportes al respecto, negativos.

En lo que sigue, se darán algunas consideraciones generales sobre el potencial del cual se obtiene el campo (supuesto) de un monopolo magnético, las cuales son de consecuencia en el desarrollo del problema.

El campo de fuerza de un monopolo magnético es muy parecido al de uno eléctrico, estando descrito por la expresión:

$$\bar{B} = K \frac{g}{p^2} \hat{p} \quad (9)$$

La expresión anterior se obtiene de la última de las ecs. (3) y de la ec. (4), por un procedimiento análogo al de la obtención de la Ley de Coulomb a partir de la de Gauss. Se anotan algunos comentarios sobre este campo \bar{B} en el capítulo de Conclusiones.

En la expresión (9), \bar{p} es un vector de la posición del monopolo a la del punto de observación, p es su magnitud y $\hat{p} = \frac{\bar{p}}{p}$; g es la carga magnética del monopolo y k es una constante que depende de las unidades empleadas (puede hacerse igual a 1 escogiendo las unidades para g tales que la fuerza entre dos monopolos magnéticos unitarios, sea unitaria a la distancia unidad, como en el caso de unidades eléctricas C.G.S.). Es claro que, si el monopolo es puntual, $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$ en todo el espacio excepto en el punto donde se encuentra dicho monopolo, por lo cual [10], existe un “potencial vectorial” \bar{A} tal que:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (10)$$

para todo punto del espacio, excepto aquel en el cual se encuentra el monopolo. Esto da una restricción muy importante para el tratamiento clásico del problema (y también para el tratamiento cuántico, pues éste está íntimamente ligado con el clásico y depende, para su aplicación, de la misma circunstancia: la existencia de un potencial), pues el formulismo Hamiltoniano sólo se puede usar donde la ec. (10) es válida, debido a lo siguiente:

El tratamiento Hamiltoniano depende de que sean válidas las ecuaciones de Lagrange en su forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\ell} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\ell} = 0 \quad (11)$$

O sea, se requiere que todas las fuerzas generalizadas F_i que aparezcan sean derivables de un potencial U tal que [11]:

$$F_\ell = -\frac{\partial U}{\partial q_\ell} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\ell} \right) \quad (12)$$

Para el caso en que se tienen fuerzas electromagnéticas, se demuestra [11] que la existencia de U depende de que exista un “potencial vectorial” \bar{A} tal que el campo magnético \bar{B} esté dado por la ecuación (10); como ésto es posible donde no se tienen cargas magnéticas (o sea, donde

$\nabla \cdot \bar{B} = 0$), se tiene que se puede aplicar el tratamiento Hamiltoniano al problema y que éste será válido en todo el espacio excepto en los puntos donde haya monopolos magnéticos. Si se tiene que $\nabla \cdot \bar{B} \neq 0 \quad \forall \bar{p} \in \mathcal{M}$, con \mathcal{M} un subconjunto denso de \mathbb{R}^3 , es claro que el tratamiento Hamiltoniano no será aplicable en todo el espacio. En términos más físicos, si existe una región del espacio tal que $\nabla \cdot \bar{B} \neq 0$ para puntos de esa región arbitrariamente cercanos, no se puede aplicar el tratamiento Hamiltoniano en ella.

El tratamiento Hamiltoniano que se usa en la versión clásica de este trabajo, se justifica por el hecho de que sólo se considera un monopolo magnético, puntual, tomando el punto que ocupa como el origen del sistema coordenado. Como el monopolo se considera fijo, el tratamiento Hamiltoniano será válido para todo el espacio, excepto el origen.

El campo \bar{B} de la ec.(9) se puede obtener, de acuerdo con la ec.(10) de cualquiera de los dos potenciales siguientes [12].

$$\bar{A}(\bar{p}) = g \frac{(\bar{p} \times \hat{n})(\bar{p} \cdot \hat{n})}{p[p^2 - (\bar{p} \cdot \hat{n})^2]} \quad (13)$$

$$\bar{A}_1(\bar{p}) = g \frac{\bar{p} \times \hat{n}}{p(p - \bar{p} \cdot \hat{n})} \quad (14)$$

En las ecs. (13,14), \hat{n} es un vector unitario arbitrario constante; o, sea los potenciales \bar{A} , \bar{A}_1 , no están completamente determinados, pues podemos escoger cualquier dirección \hat{n} ; esto sugiere que el campo que se obtenga de \bar{A} o \bar{A}_1 será simétrico con respecto a rotaciones. Que esto último es cierto es evidente de la ec (9).

Ya que los “potenciales” (13,14) dan lugar al mismo campo, o sea, tienen el mismo rotacional, deben diferir a lo más en una función $f_1(\bar{p}, \hat{n})$, tal que existe una función $f(\bar{p}, \hat{n})$ que cumple:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{f}_1(\bar{p}, \hat{n}) = \bar{A}_1 + \nabla[f(\bar{p}, \hat{n})] \quad (15)$$

Para obtener la función f , se puede trabajar con \bar{A} y \bar{A}_1 en sus formas (13,14). Sin embargo, el procedimiento resulta muy largo. Se ahorra trabajo de la manera siguiente: dada la dirección \hat{n} que aparece en \bar{A} y \bar{A}_1 (obviamente, debe ser la misma para ambos, pues queremos relacionarlos), podemos escoger, sin pérdida de generalidad, nuestro sistema coordenado de tal manera que uno de los ejes, digamos el z , coincida en dirección y sentido con \hat{n} . En este sistema coordenado (que se llamará $[x, y, z]$) se tiene que \bar{A} y \bar{A}_1 toman la forma:

$$\bar{A} = \frac{gz}{p(x^2 + y^2)} (y, -x, 0) \quad (16)$$

$$\bar{A}_1 = \frac{g}{p(p - z)} (y, -x, 0) \quad (17)$$

Es directo demostrar, entonces, que:

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \nabla(+g\phi) \quad (18)$$

Con $\phi = \arctan \frac{y}{x}$. Para cualquier otro sistema coordenado $[x', y', z']$, podemos, entonces, considerar las ecuaciones de transformación $x = x(x', y', z')$, $y = y(x', y', z')$, $z = z(x', y', z')$, con lo cual tendremos que:

$$\bar{A}(x', y', z') = \bar{A}_1(x', y', z') + \nabla(g\phi) \quad (19)$$

$$\text{Con:} \quad \phi(x', y', z') = \arctan \frac{y(x', y', z')}{x(x', y', z')}$$

\bar{A} y \bar{A}_1 que aparecen en (19) no son, claro, en general, las mismas relaciones funcionales que aparecen en (16, 17), pero la ecuación (19) es la misma que (18). Esto demuestra que no se pierde generalidad con la elección del sistema coordenado $[x, y, z]$.

En este trabajo, se usará el potencial \bar{A} dado por (16). Es claro que, para cada norma (gauge) f, se obtendrá un potencial distinto. El hecho de usar \bar{A} obedece a que el Hamiltoniano del problema toma una forma muy simétrica cuando se emplea (ec.(17), sección I-C). Este potencial ha sido usado más recientemente [8], pues en los primeros trabajos se usó invariablemente el empleado por Dirac [6] en su trabajo de 1931:

$$\bar{A}_2 = \frac{g}{p(p+z)}(-y, x, 0) \quad (20)$$

\bar{A}_2 se obtiene de (14) al considerar los ejes X, Y, Z de tal manera que $\hat{n} = (0, 0, -1)$; está relacionado con \bar{A} por la expresión:

$$\bar{A}_2 = \bar{A} + \nabla(g\phi) \quad (21)$$

Se sabe que el efecto de una transformación de norma se traduce en un cambio de fase de la función de onda de un sistema [14]. Sin embargo, como se verá en el tratamiento cuántico del problema, el efecto de una transformación de fase es profundo en lo que a la cuantización de la carga magnética se refiere. Usando \bar{A}_2 , se obtiene una cuantización tal que $\frac{\varepsilon}{\hbar} = \frac{ge_2}{\hbar e}$ puede tomar valores enteros o semienteros; usando \bar{A} ; se obtiene que $\frac{\varepsilon}{\hbar}$ sólo puede tomar valores enteros (e_2 es una carga eléctrica). Se volverá a este punto en las conclusiones de este trabajo.

I

Tratamiento clásico del problema del movimiento de una partícula cargada eléctricamente en el campo de un monopolo eléctrico y magnético fijo

I.A Resumen

Se dan en la sección I-B algunas características generales del movimiento en el campo de un monopolo magnético, usando la Mecánica de Newton; en este tratamiento, se enfatiza el aspecto geométrico de los resultados obtenidos. En la sección I-C se da el tratamiento Hamiltoniano del problema; ya que el énfasis está en la simetría del mismo y como dicha simetría aumenta al considerar un potencial escalar de interacción $V(p) = \frac{e_1 e_2}{p} + \frac{\varepsilon^2}{2m p^2}$ en lugar del puramente Coulómbico $\frac{e_1 e_2}{p}$, se trabaja con V (e_1 y e_2 son las cargas eléctricas del monopolo electromagnético y la partícula móvil, respectivamente; $\varepsilon = \frac{e_2 g}{c}$, con g la carga magnética del monopolo). También, en la sección I-C se anotan algunas consideraciones cualitativas sobre la inclusión del término $\frac{\varepsilon^2}{2m p^2}$ en el potencial y se construye el grupo de simetría clásico, el cual resulta ser $O(4)$. En la sección I-D se aplica y desarrolla el concepto de grupo dinámico o de no invariancia: se identifican sus generadores en el problema que se tiene y resulta ser $SU(2, 2)$.

I.B Características generales del movimiento en el campo de un monopolo magnético

Muchas de las características del movimiento en el campo de un monopolo magnético son independientes de la interacción de algún otro tipo que tenga con la partícula móvil, siempre y cuando dicha interacción dependa tan sólo del módulo del vector que lo une a ella. Lo anterior será evidente del tratamiento siguiente, el cual se da en términos de vectores para que sea independiente del sistema de coordenadas que se use. Se basa el estudio en la Mecánica Newtoniana.

La segunda ley de Newton, $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}$, adquiere, en el presente caso, la forma siguiente, usando unidades Gaussianas y las ecuaciones (2) y (9) de la Introducción:

$$m \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = \frac{e_2 g}{c} \frac{d\bar{p}}{dt} \times \frac{\bar{p}}{p^3} - \nabla(U(p)) \quad (1)$$

El primer término corresponde a la interacción Lorentziana de la partícula móvil de carga eléctrica e_2 con el campo magnético del monopolo (fijo); g es la carga magnética de éste y \bar{p} el vector que lo une con la partícula móvil; m es la masa de esta última. $-\nabla U$ es la fuerza de interacción no Lorentziana y lo único que se supone de ella es que es radial y derivable de un potencial $U = U(p)$.

De (1):

$$\frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = \frac{\varepsilon_1}{p^3} \frac{d\bar{p}}{dt} \times \bar{p} - \frac{\partial U_1}{\partial p} \hat{p} \quad (2)$$

Siendo:

$$U_1(p) = \frac{1}{m} U(p) \quad \text{y} \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 g}{mc} \quad (3)$$

Multiplicando vectorialmente ambos miembros de la ec. (2) por \bar{p} se obtiene:

$$\bar{p} \times \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = \frac{\varepsilon_1}{p^3} \bar{p} \times \left(\frac{d\bar{p}}{dt} \times \bar{p} \right) \quad (4)$$

Desarrollando el producto triple y tomando en cuenta que $\frac{d\bar{p}}{dt} = \hat{p} \cdot \frac{d\hat{p}}{dt}$:

$$\bar{p} \times \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = \varepsilon_1 \frac{d\hat{p}}{dt} \quad (5)$$

Pero $\bar{p} \times \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\bar{p} \times \frac{d\bar{p}}{dt})$, por lo que, integrando en la ec. (5), se obtiene:

$$\bar{p} \times \frac{d\bar{p}}{dt} = \varepsilon_1 \hat{p} + \bar{D}_1 \quad (6)$$

En la ec. (6), \bar{D}_1 es un vector constante (la constante de integración depende sólo de las condiciones iniciales). Siendo $\bar{L} = \bar{p} \times (m \frac{d\bar{p}}{dt}) = \bar{p} \times \bar{\pi}$, con $\bar{\pi} = m \frac{d\bar{p}}{dt}$ el momento mecánico, $\bar{D} = m \bar{D}_1$ y $\varepsilon = m \varepsilon_1 = \frac{e_2 g}{c}$ se obtiene de (6):

$$\bar{D} = \bar{L} - \varepsilon \hat{p} \quad (7)$$

La ecuación anterior indica que el momento angular $\bar{L} = \bar{p} \times \bar{\pi}$ no es una constante del movimiento, lo cual era de esperarse, pues la fuerza de Lorentz en la ec. (1) no es central. Sin embargo, se ha encontrado que el vector \bar{D} relacionado con \bar{L} por la ec. (7) es una constante del movimiento. Es claro que, para $g = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow \bar{D} = \bar{L}$ y se obtiene el resultado esperado para potenciales que dependen sólo de p : $\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{0}$.

De la ec. (7), es directo deducir que la trayectoria de la partícula móvil se confina a la superficie de un cono circular recto pues, multiplicando escalarmente por \hat{p} :

$$\bar{D} \cdot \hat{p} = -\varepsilon \quad (8)$$

Entonces, el vector de posición de la partícula móvil forma un ángulo θ constante con un vector constante \bar{D} , el cual define el eje del cono que se ha mencionado. θ es tal que:

$$\cos \theta = -\frac{\varepsilon}{|\bar{D}|} \quad (9)$$

Es claro de (8, 9) que, siendo $\varepsilon = \frac{e_2 g}{c}$ para $\frac{e_2 g}{c} \leq 0$, sea, para cargas eléctricas (de la partícula móvil) y magnética (del monopolo) de signos contrarios, $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, teniéndose un movimiento como

el esquematizado en la Figura I.1. Este es el tipo de movimiento cuando se tiene, por ejemplo, un protón ($e_2 > 0$) moviéndose en el campo de un “polo sur” ($g < 0$) ó un electrón ($e_2 < 0$) moviéndose en el campo de un “polo norte” ($g > 0$).

Para $e_2 g > 0$, se tiene que $\theta > \frac{\pi}{2}$, o sea, se tiene un movimiento como el de la Figura I.2. Este es el tipo de movimiento esperado cuando se tiene, por ejemplo, un protón moviéndose en el campo de un “polo norte” ($e_2 > 0, g > 0$), o un electrón moviéndose en el de un “polo sur” ($e_2 < 0, g < 0$).

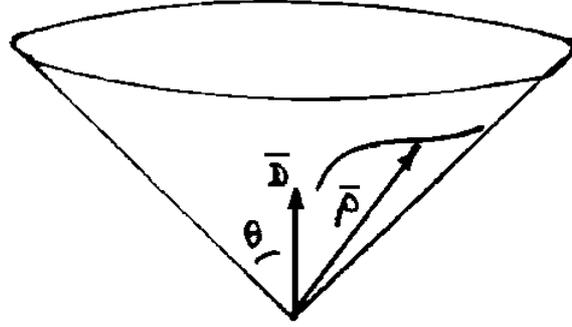


Figura I.1:

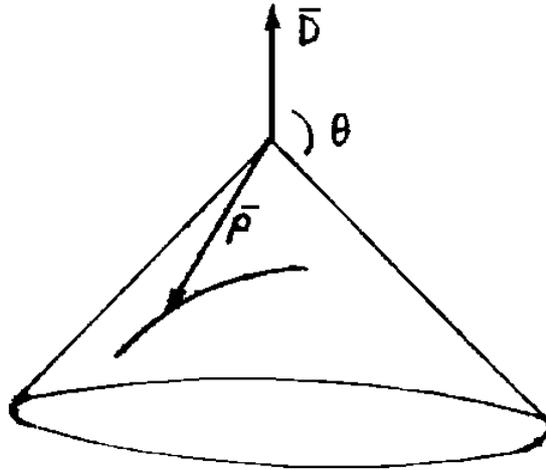


Figura I.2:

De las ecs. (7,8), se obtiene que:

$$L^2 = \bar{L} \cdot \bar{L} = D^2 - \varepsilon^2 \quad (10)$$

O sea, $L = |\bar{L}|$ es una constante pues D y ε lo son. También,

$$L^2 \geq 0 \Rightarrow D^2 \geq \varepsilon^2 \Rightarrow |\bar{D}| \geq |\varepsilon| \quad (11)$$

Como se verá en el tratamiento cuántico del problema, se obtiene un resultado análogo al de la expresión (11): siendo $\ell(\ell + 1)\hbar^2$ los eigenvalores del operador \mathcal{D}^2 asociado a \bar{D}^2 , se obtiene que:

$$\ell \geq \hbar^{-1}|\varepsilon| \quad (12)$$

$$\Rightarrow [\ell(\ell + 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \geq |\varepsilon| \quad (12-a)$$

Siendo $[\ell(\ell + 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar$ los eigenvalores del operador \mathcal{D} asociado a D.

Se puede ver también directamente de la ec. (1) que L debe ser una constante, pues, haciendo $g(p) = -\frac{\partial U}{\partial p}$ en dicha ecuación:

$$\bar{F} = m \frac{d^2 \bar{p}}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{p^3} \frac{d\bar{p}}{dt} \times \bar{p} + g(p)\hat{p} = -\frac{\varepsilon_1}{p^3} \bar{L} + g(p)\hat{p} \quad (13)$$

El torque \bar{N} está dado por:

$$\bar{N} + \bar{p} \times \bar{F} = -\frac{\varepsilon_1}{p^3} \bar{p} \times \bar{L} \quad (14)$$

Pero $\bar{N} = \frac{d\bar{L}}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt}$ es perpendicular a \bar{L} (de la ec. (14)).

Entonces:

$$\frac{dL}{dt} = \hat{L} \cdot \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \quad (15)$$

En el problema general de fuerzas centrales (derivables de un potencial $U = U(p)$), se tiene que $\bar{L} = \bar{p} \times (m \frac{d\bar{p}}{dt})$ es un vector constante. Es directo demostrar que, siendo $\hat{p} = \frac{\bar{p}}{p}$:

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{\bar{L}}{mp^2} \times \hat{p} \quad (15-a)$$

La fórmula anterior, para fuerzas centrales ($\Rightarrow \bar{L} = \text{cte.}$), implica la 2a. ley de Kepler (la ley de las áreas), pues, de la definición de \bar{L} , $\bar{p} \cdot \bar{L} = 0$, ó sea, el movimiento tiene lugar en un plano. Definiendo coordenadas polares (ρ, θ) en este plano y tomando magnitudes en la ec. (15):

$$\left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right| = \dot{\theta} = \frac{L}{mp^2} \Rightarrow mp^2 \dot{\theta} = L = \text{cte.}$$

Pero siendo $\frac{dA}{dt}$ el área “barrida” por \bar{p} por unidad de tiempo, se demuestra fácilmente que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} p^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2m} mp^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{cte.} \quad (16)$$

Entonces ya que \bar{D} en nuestro caso parece jugar el mismo papel que \bar{L} para fuerzas centrales, se espera una fórmula análoga a (15), sólo que involucrando a \bar{D} :

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{\bar{D}}{mp^2} \times \hat{p} = \frac{\bar{D}_1}{p^2} \times \hat{p} \quad (17)$$

Pero, de (6), multiplicando vectorialmente por \hat{p} y recordando que $\hat{p} \cdot \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{dp}{dt}$, se obtiene la fórmula (17), o sea, el análogo a la 2a. ley de Kepler.

De (17), se puede obtener una ley de áreas como sigue: tomando magnitudes en ambos lados de la ecuación, se obtiene una relación:

$$\left| \frac{d\hat{p}}{dt} \right| = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{D_1}{p^2} \text{sen}\theta \quad (18)$$

En la ec. (18), α es el ángulo que el vector de posición \bar{p} de la partícula móvil forma con una recta fija en la superficie del cono, la cual contiene al vértice (que es donde está el monopolo); θ es el semiángulo del cono, definido por la ec.(9). Pueden apreciarse θ y $\Delta\alpha = \alpha(t_2) - \alpha(t_1)$ siendo t_1, t_2 instantes cercanos, en la Figura I.3:

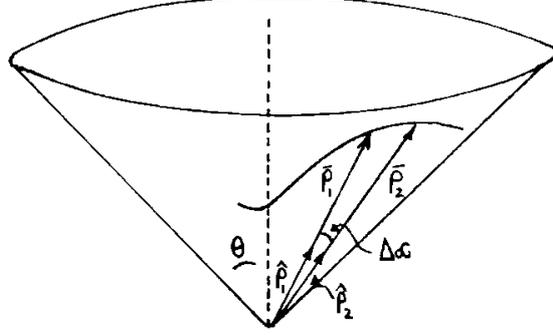


Figura I.3:

De (18):

$$p^2 \dot{\alpha} = D_1 \text{sen } \theta = \text{cte.} \quad (19)$$

Pero, de la Figura I.3, es fácil ver que, llamando ΔA al área sobre el cono barrida por el vector \bar{p} en el tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ con t un tiempo arbitrario tal que Δt es pequeña:

$$\Delta A = \frac{1}{2} p_1^2 (\Delta\alpha) + \mathcal{O}(\alpha) \quad (20)$$

Al obtenerla, se ve que la fórmula (20) depende de que $\left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} \right| < \infty$, o sea, de que $|\bar{L}| = \left| m\bar{p} \times \frac{d\bar{p}}{dt} \right| > 0$. Esto es de esperarse pues, si $\left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha} \right| \rightarrow \infty$, quiere decir que \bar{p} y $\frac{d\bar{p}}{dt}$ son paralelos: no se barre ninguna área sobre la superficie del cono. De las ecs. (19,20), con $p_1 = p$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} p^2 \dot{\alpha} = \text{cte.} \quad (21)$$

Cuando $g = 0$, lo que implica que el cono degenera en un plano (fuerzas centrales), la ley de áreas (21) se reduce a la convencional dada por la ec.(16), pues \bar{D} se reduce a \bar{L} .

Particularizando ahora para el caso en que:

$$U(p) = V(p) = \frac{e_1 e_2}{p} + \frac{\varepsilon^2}{2mp^2} \quad (22)$$

que es el potencial escalar que se usará en el tratamiento Hamiltoniano del problema, se demuestra que el vector:

$$\bar{R} = \bar{D} \times \bar{\pi} - m e_1 e_2 \hat{p} = m \bar{D} \times \frac{d\bar{p}}{dt} - m e_1 e_2 \hat{p} \quad (23)$$

es una constante del movimiento. \bar{R} es el llamado vector de Runge (o de Runge-Lenz-Pauli).

De las ecs. (23,17):

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{D} \times \left(m \frac{d^2\bar{p}}{dt^2} \right) - \frac{e_1 e_2}{p^2} \bar{D} \times \hat{p} \quad (24)$$

Pero, de las ecs. (1,3,22):

$$m \frac{d^2\bar{p}}{dt^2} = -\frac{\bar{D}}{mp^3} + \frac{e_1 e_2}{p^2} \hat{p} \quad (25)$$

Sustituyendo la ec. (25) en (24), se obtiene que $\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{0}$.

I.C Tratamiento Hamiltoniano del problema

En unidades Gaussianas, el Lagrangiano para el problema de una partícula con carga eléctrica e_2 moviéndose en una región donde existen un potencial escalar v y uno vectorial \bar{A} está dado por [15]:

$$L = T - e_2 V + \frac{e_2}{c} \bar{A} \cdot \bar{v} \quad (1)$$

En la ec. (1), $T = \frac{1}{2} m v^2$ es la energía cinética de la partícula móvil.

Por el procedimiento habitual [16], se obtiene el Hamiltoniano correspondiente (suponiendo que V no depende de velocidades):

$$\mathcal{H} = \frac{(\bar{p} - \frac{e_2}{c} \bar{A})^2}{2m} + e_2 V \quad (1-a)$$

Para el problema que se tiene, en el cual el potencial escalar correspondería al debido a una carga eléctrica de magnitud e_1 en el monopolo, se debería tener:

$$V = \frac{e_1}{p} \quad (1-b)$$

En la ec. (1-b), p es la magnitud del vector \bar{p} que une al monopolo electromagnético con la partícula móvil; para un sistema cartesiano con origen en dicho monopolo, $\bar{p} = (x, y, z)$.

Sin embargo, usando el potencial (1-b), la ecuación de Hamilton-Jacobi no es separable en las coordenadas cuadrático parabólicas empleadas (de hecho, no es separable en coordenadas conocidas (esféricas, parabólicas, cuaterniónicas). Como lo que interesaba era estudiar la simetría del problema usando un método que descansa en el uso de coordenadas de acción-ángulo, o sea, en la separabilidad de la ec. de Hamilton-Jacobi, se usó el potencial escalar:

$$V(p) = \frac{e_1}{p} + \frac{\varepsilon^2}{2me_2} \left(\frac{1}{p^2} \right) \quad (1-c)$$

En la ec. (1-c), $\varepsilon = \frac{e_2 g}{c}$, siendo g la carga magnética del monopolo.

El problema parece ser, entonces, poco realista, pues para p pequeña el término $\frac{\varepsilon^2}{2me_2} \left(\frac{1}{p^2} \right)$ es el más importante en 1-c. Sin embargo, cuando p crece, el más importante es $\frac{e_1}{p}$.

Se dirá en lo siguiente un poco más sobre la influencia de $\frac{\varepsilon^2}{2me_2} \left(\frac{1}{p^2} \right)$ en el Hamiltoniano.

Sea H_1 el Hamiltoniano obtenido de (1-a) al incluir el potencial (1-b). Sea H el obtenido de incluir (1-c) en (1-a). Se sabe [17] que, para un sistema dado, el Hamiltoniano genera una transformación canónica infinitesimal que describe el cambio infinitesimal de coordenadas y momenta en el tiempo; por aplicación sucesiva de esta transformación, con el tiempo como parámetro, se genera el desarrollo (movimiento) del sistema con el tiempo en el espacio fase. Desde este punto de

vista, se puede decir que el Hamiltoniano general el movimiento del sistema en el tiempo, a partir de las condiciones iniciales. Supóngase que a un tiempo t a partir del tiempo t_0 al cual se dan las condiciones iniciales, H_1 , de acuerdo con lo que se acaba de decir, da lugar a una trayectoria (que será la del sistema real). Como, cuando $p \rightarrow \infty$, $H \rightarrow H_1$ se espera cierto tipo de continuidad, en el sentido de que, si el movimiento tiene lugar de tal manera que p siempre es grande (por condiciones iniciales apropiadas), la trayectoria en el espacio fase generada por H debe ser muy parecida (cercana en cada punto) a la generada por H_1 . O sea, para p grande, se espera que H describa con buena aproximación al problema real. Los argumentos anteriores se basan en consideraciones de estabilidad de las ecuaciones canónicas, las cuales no se demostraron por su dificultad y porque no se usará dicha demostración más adelante.

Desde otro punto de vista, de acuerdo con el teorema de órbitas revolventes de Newton [18], el efecto del término $\frac{\varepsilon^2}{2me_2} \left(\frac{1}{p^2}\right)$ es causar una precesión de la órbita (ya que $\frac{\varepsilon^2}{2m} > 0$, se tendrá un retardamiento). Es claro que, para pequeñas cargas magnéticas, la interacción de tipo magnético podrá tratarse como una perturbación de la puramente coulombica, en cuyo caso, efectivamente, el único efecto de $\frac{\varepsilon^2}{2me_2} \left(\frac{1}{p^2}\right)$ en el movimiento total será una precesión de la órbita de la partícula móvil, la cual es casi plana para ε pequeña, de acuerdo con las fórmulas (7,9) de la sección I-B.

Otra de las razones por las cuales se introduce el término $\frac{\varepsilon^2}{2me_2} \left(\frac{1}{p^2}\right)$ es la siguiente: el Hamiltoniano del problema de Coulomb en coordenadas plano polares $[\rho, \psi]$ se puede escribir en la forma [19]:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{\bar{L}^2}{2mp^2} + \frac{e_1 e_2}{p} \quad (1-d)$$

Sin embargo, en coordenadas esféricas $[\rho, \theta, \phi]$, se puede escribir el Hamiltoniano (1-a) en la forma [20]:

$$\mathcal{H}_2 = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{\bar{D}^2}{2mp^2} - \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{1}{p^2}\right) + e_2 V \quad (1-e)$$

Entonces, se ve que, si \bar{D} (dado por la ec. (7) de la sección 1-B), va a tomar el papel de \bar{L} para el problema tradicional de Coulomb, al emplear V dado por (1-c) en (1-e), se obtiene una expresión análoga a (1-d), por lo que se espera encontrar, en este caso, el mismo tipo de simetría que en el problema de Coulomb.

Entonces, el Hamiltoniano que se estudiará es:

$$H = \frac{(\bar{p} - \frac{e_2}{c} \bar{A})^2}{2m} + \frac{e_1 e_2}{p} + \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (2)$$

Como se dijo en la Introducción, se usará el potencial vectorial:

$$\bar{A} = \frac{g z}{p(x^2 + y^2)}(y, -x, 0) \quad (2-a)$$

Se basará la discusión en el uso de coordenadas paraboloidales o cuadrático-parabólicas $[\mu, \nu, \phi]$, definidas por:

$$\mathcal{X} = \mu \nu \cos \phi \quad (3)$$

$$\mathcal{Y} = \mu \nu \sin \phi \quad (4)$$

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2) \quad (5)$$

con $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$.

Un interés esencial que existe para usar estas coordenadas consiste en que son tales que las superficies $\mu = \text{cte.}$ & $\nu = \text{cte.}$ son simétricas con respecto a rotaciones que tengan como eje al eje Z. como se vió en la Introducción, este eje es muy especial, pues se escogió el sistema de coordenadas de tal manera que el eje Z tiene la dirección del vector \hat{n} que aparece en \bar{A} (fórmula (13) Introducción); o viceversa, dado el sistema coordenado $[x, y, z,]$ se escogió \hat{n} tal que tuviera la dirección del eje Z. Lo anterior se refleja en la forma tan simple en que depende \bar{A} de ϕ , el expresarse en las nuevas coordenadas (o sea, al expresar sus componentes A_x, A_y, A_z en las nuevas coordenadas); también, cuando \bar{A} se expresa, digamos, en coordenadas esféricas $[\rho, \theta, \phi]$ (se le considera como un vector y se le somete a un cambio de coordenadas), se obtienen las siguientes componentes, teniendo ϕ el mismo significado geométrico que en las coordenadas cuadrático-parabólicas [21].

$$A_\rho = 0, \quad A_\theta = 0, \quad A_\phi = -\frac{g \cos\theta}{\rho^2 \sin^2\theta}$$

Además, al usar estas coordenadas, se obtiene, expresando al Hamiltoniano en función de ellas, una expresión remarcablemente simétricas (ec. (17)), la cual facilita la determinación de su grupo de simetría. Se comprueba directamente que, usando \bar{A}_1 (ec. (14) Introducción), el Hamiltoniano obtenido en estas coordenadas pierde bastante de su simetría funcional.

Se dará ahora la interpretación geométrica de las coordenadas que se usarán. De las ecs. (3,4,5):

$$p = \frac{1}{2} (\mu^2 + \nu^2) \quad (6)$$

$$\mu^2 = p + z \quad (7)$$

$$\nu^2 = p - z \quad (8)$$

De las ecs. (7, 8), introduciendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se obtiene:

$$r^2 = -2\mu^2 \left(z - \frac{\mu^2}{2} \right) \quad (9)$$

$$r^2 = 2\nu^2 \left(z + \frac{\nu^2}{2} \right) \quad (10)$$

Para cada valor de μ , la ec. (9) es la de una parábola con foco en $Z = 0$, vértice en $Z = \frac{\mu^2}{2}$, con eje Z y que se abre hacia la izquierda. Para cada valor de ν , la ec. (10) es la de una parábola con foco en $Z = 0$, vértice en $Z = -\frac{\nu^2}{2}$, eje el eje Z y que se abre hacia la derecha. Entonces, al variar los parámetros μ y ν , se obtiene un conjunto de parábolas (estrictamente, media parábolas, pues $r \geq 0$), confocales en el origen ($Z = 0$). Como el análisis anterior es válido para cualquier plano $\phi = \text{cte.}$, es claro que, al variar μ, ν y ϕ , se obtendrá, en 3 dimensiones, un conjunto de paraboloides de revolución confocales en el origen que “barren” todo el espacio.

Entonces, para localizar geoméricamente el punto

$$\bar{Q} = (x_0, y_0, z_0) = (\mu_0, \nu_0, \phi_0)$$

se hace la construcción siguiente, Fig I.4.

Se pasará ahora de la descripción (ec. (2)) en términos de las coordenadas y momenta canónicos $[X, Y, Z, P_x, P_y, P_z]$ a otra en términos de coordenadas $[\mu, \nu, \phi]$ y momenta canónicos $[P_\mu, P_\nu, P_\phi]$ por medio de una transformación canónica con función generadora [12]:

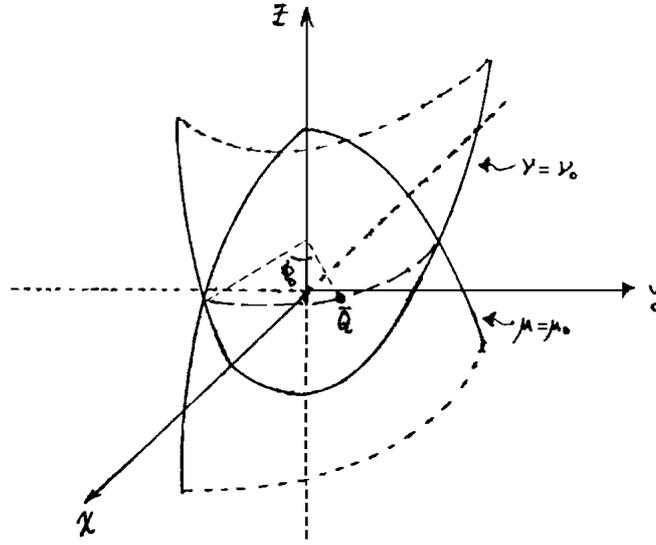


Figura I.4:

$$\begin{aligned}
 F(X, Y, Z, P_\mu, P_\nu, P_\phi) = & [(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} + z]^{\frac{1}{2}} P_\mu + \\
 & [(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} - z]^{\frac{1}{2}} P_\nu + \\
 & (\text{arc tan } \frac{Y}{X}) P_\phi
 \end{aligned} \tag{11}$$

Usando las relaciones [31]:

$$P_X = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad P_Y = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad P_Z = \frac{\partial F}{\partial Z},$$

se obtiene:

$$P_X = \frac{\cos \phi}{\mu^2 + \nu^2} (\mu P_\nu + \nu P_\mu) - \frac{\text{sen } \phi}{\mu \nu} P_\phi \tag{12}$$

$$P_Y = \frac{\text{sen } \phi}{\mu^2 + \nu^2} (\mu P_\nu + \nu P_\mu) + \frac{\cos \phi}{\mu \nu} P_\phi \tag{13}$$

$$P_Z = \frac{\mu P_\mu - \nu P_\nu}{\mu^2 + \nu^2} \tag{14}$$

Para el potencial \bar{A} se tiene que:

$$\bar{A} = \frac{gz}{p(x^2 + y^2)} (y_1 - x, 0) = \frac{g(\mu^2 - \nu^2)}{\mu\nu(\mu^2 + \nu^2)} (\text{sen } \phi, -\cos \phi, 0) \tag{15}$$

Entonces H_1 , obtenido de introducir (1-b) en la ec. (1-a), toma la siguiente forma en este nuevo conjunto canónico:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{(\bar{p} - \frac{e_2}{c}\bar{A})^2}{2m} + \frac{e_1 e_2}{p} = \\
&= \frac{(\mu^2 + \nu^2)^{-1}}{2m} \left[P_\mu^2 + P_\nu^2 + \frac{(P_\phi - \varepsilon)^2}{\mu^2} + \frac{(P_\phi + \varepsilon)^2}{\nu^2} \right] + \\
&\quad \frac{2e_1 e_2}{\mu^2 + \nu^2} + \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{2}{\mu^2 + \nu^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{16}$$

Es aquí donde se ve la necesidad de trabajar con $H = H_1 + \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{2}{\mu^2 + \nu^2} \right)^2 = H_1 + \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{1}{p^2} \right)$, pues, debido a la presencia de $(\mu^2 + \nu^2)^2$ en un denominador en la ec. (16), la ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente no es separable en estas coordenadas cuadrático-parabólicas.

Entonces:

$$H = \frac{1}{2m(\mu^2 + \nu^2)} \left[P_\mu^2 + P_\nu^2 + \frac{(P_\phi - \varepsilon)^2}{\mu^2} + \frac{(P_\phi + \varepsilon)^2}{\nu^2} + 4me_1 e_2 \right] \tag{17}$$

De la ec. (17) es aparente la simetría funcional del Hamiltoniano cuando se expresa en términos de las coordenadas que se están usando.

La ecuación de Hamilton-Jacobi para (17) es [23]:

$$\frac{1}{2m(\mu^2 + \nu^2)} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \nu} \right)^2 + \frac{(\frac{\partial S}{\partial \phi} - \varepsilon)^2}{\mu^2} + \frac{(\frac{\partial S}{\partial \phi} + \varepsilon)^2}{\nu^2} + 4me_1 e_2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

Ya que H no depende explícitamente de t ni de ϕ (ec. 17), se puede probar como solución a la ec. (18) la función [24]:

$$S(\mu, \nu, \phi, t) = S_\mu(\mu) + S_\nu(\nu) + M\phi - Et \tag{19}$$

Con $M = \frac{\partial S}{\partial \phi} = P_\phi = \text{cte.}$ y $E = -\frac{\partial S}{\partial t} = H = \text{cte.} =$ energía total del sistema, pues los potenciales (escalar y vectorial) no dependen de velocidades y las ecuaciones de transformación (3,4,5) no contienen al tiempo explícitamente [25]. De las ec. (18,19):

$$\frac{1}{2m(\mu^2 + \nu^2)} \left[\left(\frac{dS_\mu}{d\mu} \right)^2 + \left(\frac{dS_\nu}{d\nu} \right)^2 + \frac{(M - \varepsilon)^2}{\mu^2} + \frac{(M + \varepsilon)^2}{\nu^2} + 4me_1 e_2 \right] - E = 0 \tag{20}$$

La ecuación diferencial (20) se puede separar de las siguiente manera:

$$\left(\frac{dS_\mu}{d\mu} \right)^2 + \frac{(M - \varepsilon)^2}{\mu^2} - 2mE\mu^2 + 2me_1 e_2 = \alpha \tag{21}$$

$$\left(\frac{dS_\nu}{d\nu} \right)^2 + \frac{(M + \varepsilon)^2}{\nu^2} - 2mE\nu^2 + 2me_1 e_2 = -\alpha \tag{22}$$

Siendo α la constante de separación. Haciendo $H_1 \doteq -2me_1 e_2 + \alpha$, $H_2 = -2me_1 e_2 - \alpha$, (21) y (22) se convierten en:

$$\mathcal{H}_1 = P_\mu^2 + \frac{(M - \varepsilon)^2}{\mu^2} + A\mu^2 \tag{23}$$

$$\mathcal{H}_2 = P_\nu^2 + \frac{(M + \varepsilon)^2}{\nu^2} + A\nu^2 \tag{24}$$

Con $A = -2mE$. Las expresiones (23) y (24) corresponden formalmente a Hamiltonianos de dos osciladores armónicos, lo que será más aparente al introducir nuevas coordenadas en (23) y (24) por medio de las siguientes funciones generadoras [22]:

Para (23), sea $P_\Omega = M - \varepsilon$ y sea Ω su variable canónicamente conjugada; sea la función generadora:

$$F_2(\mu, \Omega, P_{X_1}, P_{Y_1}) = \mu \cos\Omega P_{X_1} + \mu \sin\Omega P_{Y_1} \quad (25)$$

Entonces: [22]

$$P_\mu = \frac{\partial F_2}{\partial \mu} = \cos\Omega P_{X_1} + \sin\Omega P_{Y_1} \quad (26)$$

$$P_\Omega = \frac{\partial F_2}{\partial \Omega} = -\mu \sin\Omega P_{X_1} + \mu \cos\Omega P_{Y_1} \quad (27)$$

$$X_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_{X_1}} = \mu \cos\Omega \quad (28)$$

$$Y_1 = \frac{\partial F_2}{\partial P_{Y_1}} = \mu \sin\Omega \quad (29)$$

Entonces, \mathcal{H}_1 queda en la forma:

$$\mathcal{H}_1 = P_{X_1}^2 + P_{Y_1}^2 + A(X_1^2 + Y_1^2) \quad (30)$$

Similarmente, para (24), definiendo $P_\Delta \doteq M + \varepsilon$ con Δ su variable canónica conjugada y usando la función generadora:

$$F_2(\nu, \Delta, P_{X_2}, P_{Y_2}) = \nu \cos\Delta P_{X_2} + \nu \sin\Delta P_{Y_2} \quad (31)$$

se llega a la expresión:

$$\mathcal{H}_2 = P_{X_2}^2 + P_{Y_2}^2 + A(X_2^2 + Y_2^2) \quad (32)$$

Las expresiones (30,32) son formalmente idénticas, para $A > 0$ ($\Rightarrow E < 0$) a los Hamiltonianos de osciladores armónicos bidimensionales isotrópicos [26] con constantes de fuerza $A = -2mE$ idénticas. La simetría del oscilador armónico bidimensional ha sido estudiada en forma completa [26], resultando ser que su grupo de simetría es $SU(2) \sim 0^+(3)$. Esto sugiere que el grupo de simetría para H está relacionado con $0^+(3) \times 0^+(3)$. Sin embargo, hay algunas dificultades para establecer esta relación: P_Ω & P_Δ no son funciones independientes, pues de su definición, se tiene que:

$$P_\Delta - P_\Omega = 2\varepsilon = \text{cte.} \quad (33)$$

Otra dificultad, que impide obtener los generadores del grupo de simetría del Hamiltoniano H a partir directamente de los dados en la ref. [26], consiste en que, en esta última, la construcción de los generadores de $0^+(3)$ se hace basándose en expresiones del tipo:

$$P_x \pm ix, P_y \pm iy$$

Sin embargo, según se verá más adelante (ec. 80), las cantidades correspondientes obtenidas para H son del tipo:

$$(p \pm q)e^f$$

siendo f una función de las coordenadas y momenta canónicos μ, ν, P_μ, P_ν . La aparición de este factor e^f dificulta, entonces, el procedimiento de extender directamente los generadores de $0^+(3)$ dados en la ref. [26], para obtener los de grupo de simetría de este problema.

El procedimiento que se sigue en la obtención del grupo de simetría de H es el siguiente: se define un nuevo momento $P_\gamma = \varepsilon$ en H , siendo γ su variable canónica conjugada. Esto equivale a trabajar en un espacio fase de 8 dimensiones, siendo de 6 el apropiado al problema; o sea, implica el uso de multiplicadores de Lagrange [17], lo cual, de hacerse, complicaría todas las ecuaciones; para evitar lo anterior, se tratará a γ y P_γ como otras variables canónicas independientes. Con ésto, se facilita la introducción de variables de acción-ángulo, por la simetría que adquiere el “nuevo Hamiltoniano” (ec. 52); como γ es cíclica en el “nuevo” H ($\Rightarrow \varepsilon = P_\gamma = cte.$), ésto no acarrea problemas. Ya que el “nuevo H ” es función sólo de la suma de las variables de acción-ángulo, es aplicable un procedimiento debido a V. A. Dulock y H. V. McIntosh [28] para hallar las constantes del movimiento, el cual depende de este hecho. Del conjunto de constantes del movimiento obtenidos se escogen como aceptables sólo aquellas tales que sus paréntesis de Poisson con ε sean 0. La razón para ésto es la siguiente:

El movimiento debe tener lugar en el hiperplano del espacio fase cuya ecuación es: $\varepsilon = P_\gamma = \frac{e_2 g}{c} = cte.$ Cada constante del movimiento, G , es una función de las coordenadas y momenta canónicas que genera una transformación canónica infinitesimal tal que [29]:

$$\delta \mu = \eta [\mu, G]$$

siendo η el parámetro de la transformación infinitesimal y μ cualquier función de las variables y momenta canónicos. Siendo δq & δp los cambios de las variables y momenta canónicas producidos por la transformación, se tiene que [29]:

$$\delta \mu = \mu(q + \delta q, p + \delta p) - \mu(q, p)$$

En particular, para $\mu = \varepsilon = P_\gamma$, se tiene que el cambio de ε producido por la transformación infinitesimal generada por G está dado por:

$$\delta \varepsilon = \eta [\varepsilon, G]$$

Como el movimiento del sistema real es tal que en el espacio fase se está restringido al hiperplano $\varepsilon = cte.$, se debe tener que, para cualquier transformación del sistema, $\delta \varepsilon = 0$. Entonces, cuando esta transformación corresponde a una del tipo que se está tratando, de la fórmula de arriba, se tiene que, siendo η arbitrario:

$$\delta \varepsilon = 0 \iff [\varepsilon, G] = 0$$

Es importante notar que el Hamiltoniano en un espacio fase de 8 dimensiones del que se habló anteriormente, no corresponde a un sistema físico análogo al original, con la única diferencia de que ahora ε sea variable con el tiempo, pues un sistema así no puede existir en la naturaleza, si se aceptan como verdaderas las ecuaciones de Maxwell generalizadas dadas por las ecs. (3) de la introducción. Es sencillo demostrar que estas ecuaciones implican las leyes de conservación de las cargas eléctricas y magnéticas, en forma de las ecuaciones de continuidad:

$$\nabla \cdot \bar{J}_e = -\frac{\partial J_e^0}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \bar{J}_g = -\frac{\partial J_g^0}{\partial t}$$

Entonces, sí $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial J_e^0}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J}_e \neq 0$$

ó

$$\frac{\partial g}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial J_g^0}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J}_g \neq 0$$

(o ambas). O sea, se produce una densidad de corriente eléctrica \bar{J}_e y/o magnética \bar{J}_g cuyo efecto, dado por la fuerza de Lorentz generalizada (ec. (4) de la Introducción), debe ser incluido en un Hamiltoniano que describa a este sistema (si es que puede construirse este Hamiltoniano, o sea, si es que existe alguna función U tal que se cumple la ec. (12) de la Introducción).

Siguiendo el programa que se acaba de trazar, se cambiará de las coordenadas

$$\{\mu, \nu, \phi, \gamma, P_\mu, P_\nu, P_\phi, \varepsilon\}$$

a un nuevo conjunto canónico

$$\{\mu, \nu, \theta, \delta, P_\mu, P_\nu, P_\theta, P_\delta\}$$

por medio de la siguiente función generadora (para dar al Hamiltoniano una forma más simétrica):

$$F(\mu, \nu, P_\mu, P_\nu, P_\phi, \varepsilon, \theta, \delta) = -\mu P_\mu - \nu P_\nu - (P_\phi - \varepsilon)\theta - (P_\phi + \varepsilon)\delta \quad (33-a)$$

Entonces [22]:

$$\phi = -\frac{\partial F}{\partial P_\phi} = \theta + \delta \quad (34)$$

$$\gamma = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \delta - \theta \quad (35)$$

$$P_\theta = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = P_\phi - \varepsilon = M - \varepsilon \quad (36)$$

$$P_\delta = -\frac{\partial F}{\partial \delta} = P_\phi + \varepsilon = M + \varepsilon \quad (37)$$

De las ecuaciones (17,36,37):

$$H = \frac{1}{2m(\mu^2 + \nu^2)} [P_\mu^2 + P_\nu^2 + \frac{P_\theta^2}{\mu^2} + \frac{P_\delta^2}{\nu^2} + 4me_1e_2] \quad (38)$$

Se introducirá ahora un sistema de coordenadas canónicas $\{q_1, q_2, q_3, q_4, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en el cual la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable (completamente) de una manera uniforme: el mismo tipo de ecuación diferencial se obtiene para cada coordenada; esto es con el objeto de calcular las variables de acción y ángulo. Sea la función generadora:

$$F(\mu, \nu, \theta, \delta, P_1, P_2, P_3, P_4) = \mu \cos\theta P_1 + \mu \operatorname{sen}\theta P_2 + \nu \cos\delta P_3 + \nu \operatorname{sen}\delta P_4 \quad (39)$$

Entonces:

$$q_1 = \frac{\partial F}{\partial P_1} = \mu \cos\theta \quad (40)$$

$$q_2 = \frac{\partial F}{\partial P_2} = \mu \operatorname{sen}\theta \quad (41)$$

$$q_3 = \frac{\partial F}{\partial P_3} = \nu \cos \delta \quad (42)$$

$$q_4 = \frac{\partial F}{\partial P_4} = \nu \sen \delta \quad (43)$$

$$P_\mu = \frac{\partial F}{\partial \mu} = \cos \theta P_1 + \sen \theta P_2 \quad (44)$$

$$P_\nu = \frac{\partial F}{\partial \nu} = \cos \delta P_3 + \sen \delta P_4 \quad (45)$$

$$P_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta} = -\mu \sen \theta P_1 + \mu \cos \theta P_2 \quad (46)$$

$$P_\delta = \frac{\partial F}{\partial \delta} = -\nu \sen \delta P_3 + \nu \cos \delta P_4 \quad (47)$$

De las ecuaciones (44-47):

$$P_1 = \cos \theta P_\mu - \sen \theta \frac{P_\theta}{\mu} \quad (48)$$

$$P_2 = \sen \theta P_\mu + \cos \theta \frac{P_\theta}{\mu} \quad (49)$$

$$P_3 = \cos \delta P_\nu - \sen \delta \frac{P_\delta}{\nu} \quad (50)$$

$$P_4 = \sen \delta P_\nu + \cos \delta \frac{P_\delta}{\nu} \quad (51)$$

Las ecuaciones (40-43) y (42-50) servirán para regresar, posteriormente, al sistema $\{\mu, \nu, \theta, \delta, P_\mu, P_\nu, P_\theta, P_\delta\}$.

En las nuevas coordenadas, el Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \frac{1}{2m(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)} [P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + 4me_1e_2] \quad (52)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi correspondiente es:

$$\frac{1}{2m(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_4} \right)^2 + 4me_1e_2 \right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (53)$$

Se propone una solución del tipo [24]:

$$S = \sum_{\ell=1}^4 S_\ell(q_\ell) - Et \quad (54)$$

(No se incluye la dependencia en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, los nuevos momenta -constantes- por razones de espacio). E es la energía total.

De (53) y (54):

$$\frac{1}{2m \sum_{\ell=1}^4 q_\ell^2} \left[\sum_{\ell=1}^4 \left(\frac{dS_\ell}{dq_\ell} \right)^2 + 4me_1e_2 \right] - E = 0 \quad (55)$$

La ecuación (55) es separable en la forma:

$$\left(\frac{dS_\ell}{dq_\ell}\right)^2 - 2mE q_\ell^2 = \alpha_\ell \quad (56)$$

$$(\ell = 1, 2, 3)$$

Con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ctes. de separación (nuevos momenta)

$$\left(\frac{dS_4}{dq_4}\right)^2 - 2mE q_4^2 = -(4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \quad (57)$$

El momento α_4 es igual a $-(4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

Las ecuaciones (56) y (57) equivalen a:

$$P_\ell = \sqrt{\alpha_\ell + 2mE q_\ell^2} \quad (58)$$

$$(\ell = 1, 2, 3)$$

$$P_4 = \sqrt{(-4me_1e_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + 2mE q_4^2} \quad (59)$$

Como se está trabajando con coordenadas y momenta reales, se debe tener:

Para $\ell = 1, 2, 3$:

$$\alpha_\ell + 2mE q_\ell^2 \geq 0 \quad (60)$$

$$\Rightarrow 2mE q_\ell^2 \geq -\alpha \quad (61)$$

Si $+2mE > 0$, o sea, si $E > 0$, es claro que de (61) no se pueden obtener cotas para q_ℓ^2 o sea, no se puede obtener un rango de variación finito para q_ℓ , por lo que, tomando en cuenta a (58), se ve que es imposible obtener un movimiento periódico. Esto impone la restricción (importante) $E < 0$ para movimiento acotado, la cual ya fue hallada cuando se separó la ecuación de Hamilton-Jacobi en dos ecuaciones que correspondían formalmente a Hamiltonianos de osciladores armónicos bidimensionales (ecs. (23,24)). Entonces, para $E < 0$, de (61):

$$q_\ell^2 \leq -\frac{\alpha_\ell}{2mE} \quad (62)$$

Lo cual implica que $\alpha_\ell \geq 0$. Entonces de (62):

$$|q_\ell| \leq \sqrt{-\frac{\alpha_\ell}{2mE}} \quad (63)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{-\frac{\alpha_\ell}{2mE}} \leq q_\ell \leq \sqrt{-\frac{\alpha_\ell}{2mE}} \quad (64)$$

O sea, se obtiene un movimiento de tipo libratorio. [30]

Para P_4 , se tiene:

$$-(4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2mE q_4^2 \geq 0 \quad (65)$$

Ya que $E < 0$, entonces:

$$q_4^2 \leq \frac{4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2mE} \quad (66)$$

Esto implica que $4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 0$, o sea, que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq -4me_1e_2 \quad (67)$$

Pero, según lo que se demostró para $\ell = 1, 2, 3$, $\alpha_\ell \geq 0$. Entonces, $-4me_1e_2 \geq 0$. Esto implica otra importante restricción (no muy independiente de $E < 0$) para tener movimiento periódico: las cargas e_1 y e_2 deben ser de *signos contrarios* (para que se pueda cumplir que $-4me_1e_2 \geq 0$).

De la ecuación (66):

$$-\sqrt{\frac{4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2mE}} \leq q_4 \leq \sqrt{\frac{4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2mE}} \quad (68)$$

Resumiendo se ha obtenido un movimiento de tipo libratorio en el espacio fase $\{q_1, q_2, q_3, q_4, P_1, P_2, P_3, P_4\}$ imponiendo las restricciones $E < 0$ y e_1, e_2 de signos opuestos.

Ahora, se calcularán las variables de acción [30]:

Para $\ell = 1, 2, 3$:

$$J_\ell = \oint P_\ell dq_\ell = \int_{-\sqrt{-\frac{\alpha_\ell}{2me}}}^{\sqrt{-\frac{\alpha_\ell}{2me}}} \sqrt{\alpha_\ell + 2mE} q_\ell^2 dq_\ell = \frac{\pi\alpha_\ell}{\sqrt{-2mE}} \quad (69)$$

Para $\ell = 4$, por un procedimiento análogo se obtiene;

$$J_4 = \frac{-\pi(4me_1e_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\sqrt{-2mE}} \quad (70)$$

Es obvio de (69) y (70) que:

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \frac{-4\pi me_1 e_2}{\sqrt{-2mE}} \quad (71)$$

O sea que:

$$E = H = -\frac{8\pi^2 me_1^2 e_2^2}{(J_1 + J_2 + J_3 + J_4)^2} \quad (72)$$

Es claro de la ec. anterior que las frecuencias del movimiento son todas iguales [30], o sea, el movimiento es completamente degenerado. Estas frecuencias están dadas, para $\ell = 1, 2, 3, 4$, por [30]:

$$f_\ell = \frac{\partial H}{\partial J_\ell} = \frac{1}{2\pi|e_1 e_2|} \left[-\frac{2E^3}{m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (72-a)$$

Los períodos están dados, con $K = 2|e_1 e_2|$, por:

$$\mathcal{T}_\ell = \frac{1}{f_\ell} = \pi K \sqrt{\frac{m}{-2E^3}} \quad (72-b)$$

Esta última expresión es idéntica a la que se tiene para el problema de Kepler [31].

La relación (72) es fundamental en todo lo que sigue, pues, como ya se dijo anteriormente, el procedimiento de Dulock-McIntosh depende de la condición [28] $E = H = H(\sum_\ell J_\ell)$.

Debido a que serán usadas más adelante, se calcularán ahora las variables de ángulo W_ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) se tiene que:

$$W_\ell \doteq \frac{\partial W}{\partial J_\ell} = \frac{\partial(\sum_{\ell=1}^4 S_\ell(q_\ell, J_1, J_2, J_3, J_4))}{\partial J_\ell} \quad (73)$$

Con $W(q_1, q_2, q_3, q_4, J_1, J_2, J_3, J_4) = \sum_{\ell=1}^4 S_\ell(q_\ell, J_1, J_2, J_3, J_4) =$ función característica de Hamilton:

De las ecuaciones (56, 59, 69, 70,72):

$$P_\ell = \frac{dS_\ell}{dq_\ell} = \frac{(4me_1 e_2 J J_\ell - 16\pi^2 m^2 e_1^2 e_2^2 q_\ell^2)^{\frac{1}{2}}}{J} \quad (74)$$

Con $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$. Sean:

$$A = 4m|e_1 e_2| \quad (75)$$

$$B = 16\pi^2 m^2 e_1^2 e_2^2 \quad (76)$$

Entonces, de (73, 76) (para raíces de A y B se tomará siempre el signo positivo, o sea, $B^{\frac{1}{2}} = 4\pi m|e_1 e_2|$):

$$\begin{aligned} W_\ell &= \frac{\partial W}{\partial J_\ell} = \frac{\partial}{\partial J_\ell} \left[\sum_{k=1}^4 \int \frac{(AJJ_k - Bq_k^2)^{\frac{1}{2}}}{J} dq_k \right] = \\ &= -\frac{1}{2J} \sum_{k=1}^4 q_k p_k + \frac{1}{2\pi} \text{arc sen} \frac{\sqrt{B}q_\ell}{\sqrt{AJJ_\ell}} \end{aligned} \quad (77)$$

O sea:

$$2\pi W_\ell = \text{arc sen} \frac{B^{\frac{1}{2}}q_\ell}{(AJJ_\ell)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\pi}{J} \sum_{k=1}^4 q_k P_k \quad (78)$$

Lo anterior para $\ell = 1, 2, 3, 4$. En la integración (77), se despreciaron constantes de integración.

Siguiendo el procedimiento de Dulock-McIntosh, se introducirán ahora nuevas coordenadas $\{a_\ell^+, a_\ell^-\}$ con $\ell = 1, 2, 3, 4$, dadas por:

$$a_\ell^\pm = \mp i \left(\frac{J_\ell}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\pm 2\pi i W_\ell} \quad (79)$$

Se pueden poner estas coordenadas en función de las $\{q_\ell, P_\ell\}$ usando las ecs. (58, 59, 69, 70, 71, 78). Después de una manipulación algebraica se llega a la expresión:

$$a_\ell^\pm = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} [(-2mE)^{\frac{1}{2}} q_\ell \mp i P_\ell] [e^{\pm \pi i B^{-\frac{1}{2}} (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^4 q_k P_k}] \quad (80)$$

Anteriormente, se dijo que no se podían obtener los generadores del grupo de simetría buscado, a partir de los dados en la referencia (26). Las funciones en las cuales, según se dijo, se basa la construcción de los generadores, son las a_ℓ^\pm dadas por (79,80). La función de que se hablaba está dada, según es aparente de la ec. (80), por:

$$f = \mp \pi i B^{-\frac{1}{2}} (-2mE)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^4 q_k P_k$$

Las coordenadas a_ℓ^\pm introducidas no forman un conjunto canónico bajo la definición usual de éste [32], aunque no están muy lejos de formar lo pues se demuestra directamente, usando la ec. (19), que sus paréntesis de Poisson están dados por:

$$[a_\ell^+, a_k^-] = i\delta_{\ell k} \quad (81)$$

$$[a_\ell^+, a_k^+] = 0 \quad (82)$$

$$[a_\ell^-, a_k^-] = 0 \quad (83)$$

Estas coordenadas a_ℓ^\pm son eigenfunciones de H con eigenvalores tales que, si λ es eigenvalor correspondiente a a_ℓ^+ , $-\lambda$ lo es de a_ℓ^- (en nuestro caso, $\lambda = -i\forall\ell$). Las a_ℓ^\pm son eigenfunciones de H tomado como operador lineal obtenido del operador bilineal que son los paréntesis de Poisson, de la siguiente manera [33]:

$$\tilde{H} = [H, \quad] \quad (85)$$

El dominio de \tilde{H} es, nuestro caso, el espacio generado por las a_ℓ^+ , a_k^- .

Entonces [33, 26], los productos de la forma $a_\ell^+ a_k^-$ conmutan con el Hamiltoniano bajo la operación de paréntesis de Poisson, o sea :

$$\forall \ell, k = 1, 2, 3, 4 : \quad [H, a_\ell^+ a_k^-] = 0 \quad (86)$$

Por lo tanto, $a_\ell^+ a_k^-$ son constantes del movimiento. Existen 16 de ellas.

$$\left. \begin{array}{l} a_1^+ a_1^-, a_1^+ a_2^-, a_1^+ a_3^-, a_1^+ a_4^- \\ a_2^+ a_1^-, a_2^+ a_2^-, a_2^+ a_3^-, a_2^+ a_4^- \\ a_3^+ a_1^-, a_3^+ a_2^-, a_3^+ a_3^-, a_3^+ a_4^- \\ a_4^+ a_1^-, a_4^+ a_2^-, a_4^+ a_3^-, a_4^+ a_4^- \end{array} \right\} \quad (87)$$

Sin embargo, según lo que se discutió anteriormente, sólo serán constantes del movimiento aceptables aquellas combinaciones de las expresiones (87) que conmuten con ε (bajo la operación de paréntesis de Poisson), o sea, sólo aquellas combinaciones de $a_\ell^+ a_k^-$ que conserven la carga magnética, en el sentido mencionado anteriormente.

Usando las ecuaciones (72, 79, 80, 40-47, 36-37), se demuestra que:

$$H = E = \frac{-2me_1^2 e_2^2}{(a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + a_3^+ a_3^- + a_4^+ a_4^-)^2} \quad (88)$$

$$\varepsilon = -\frac{i}{2} (a_3^+ a_4^- + a_4^+ a_3^- + a_2^+ a_1^- + a_1^+ a_2^-) \quad (89)$$

Para calcular los paréntesis de Poisson necesarios, se tomará a ε como operador [33] en el espacio de las a_ℓ^\pm , con el objeto de encontrar sus eigenfunciones y tratar de construir así las constantes de movimiento (combinaciones lineales de términos de la forma $a_\ell^+ a_k^-$) que conmuten (bajo paréntesis de Poisson) con él. Para calcular paréntesis de Poisson de funciones de las a_ℓ^\pm , hay que tener en cuenta que no forman una base canónica, por lo que hay que expresarlas primero en función de una

base canónica (los paréntesis de Poisson son invariantes [32] bajo transformaciones canónicas, o sea, bajo el cambio de una base canónica a otra). Sin embargo, se puede evitar este cambio tomando ventaja de las relaciones (81-83). En una base canónica $\{Q_\ell, P_\ell\}$ el paréntesis de Poisson de f y g está definido por:

$$[f, g] = \sum_{\ell} \left[\frac{\partial f}{\partial Q_\ell} \frac{\partial g}{\partial P_\ell} - \frac{\partial f}{\partial P_\ell} \frac{\partial g}{\partial Q_\ell} \right] \quad (90)$$

Tomando en cuenta las relaciones (81-83) se demuestra, usando la regla de la cadena, que:

$$[f, g] = i \sum_{\ell} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_\ell^+} \frac{\partial g}{\partial Q_\ell^-} - \frac{\partial f}{\partial Q_\ell^-} \frac{\partial g}{\partial Q_\ell^+} \right) = i[f, g]^* \quad (91)$$

con

$$[f, g]^* \doteq \sum_{\ell} \left(\frac{\partial f}{\partial Q_\ell^+} \frac{\partial g}{\partial Q_\ell^-} - \frac{\partial f}{\partial Q_\ell^-} \frac{\partial g}{\partial Q_\ell^+} \right) \quad (92)$$

Esto da un método muy cómodo para calcular los paréntesis de Poisson de funciones expresadas en términos de las a_ℓ^\pm . En nuestro caso, la ec. (91) es particularmente útil, pues se está tratando con funciones muy sencillas que las a_ℓ^\pm . Usando (91), se demuestra que el operador \mathcal{E} actúa sobre la base a_ℓ^\pm de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{E}, a_1^+] &= -\frac{1}{2} a_2^+ \\ [\mathcal{E}, a_2^+] &= \frac{1}{2} a_1^+ \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{E}, a_3^+] &= \frac{1}{2} a_4^+ \\ [\mathcal{E}, a_4^+] &= -\frac{1}{2} a_3^+ \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{E}, a_1^-] &= -\frac{1}{2} a_2^- \\ [\mathcal{E}, a_2^-] &= \frac{1}{2} a_1^- \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{E}, a_3^-] &= \frac{1}{2} a_4^- \\ [\mathcal{E}, a_4^-] &= -\frac{1}{2} a_3^- \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Es obvio de las relaciones (93-96) que los planos generados por $\{a_1^+, a_2^+\}$, $\{a_3^+, a_4^+\}$, $\{a_1^-, a_2^-\}$ y $\{a_3^-, a_4^-\}$ son subespacios invariantes de \mathcal{E} . Entonces, en dichos planos hay que buscar los eigenvectores (eigenfunciones) de \mathcal{E} . Usando (93-96), se demuestra que los eigenvectores de \mathcal{E} son:

Con eigenvalor $\frac{i}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} a_1^+ + ia_2^+ \\ a_4^+ + ia_3^+ \\ a_1^- + ia_2^- \\ a_4^- + ia_3^- \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Con eigenvalor $-\frac{i}{2}$:

$$\left. \begin{aligned}
a_2^+ + ia_1^+ &= i(a_1^+ - ia_2^+) \\
a_3^+ + ia_4^+ &= i(a_4^+ - ia_3^+) \\
a_2^- + ia_1^- &= i(a_1^- - ia_2^-) \\
a_3^- + ia_4^- &= i(a_4^- - ia_3^-)
\end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Con eigenvalor $\frac{i}{2}$:

$$\left. \begin{aligned}
a_1^+ &+ ia_2^+ \\
a_4^+ &+ ia_3^+
\end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Con eigenvalor $-\frac{i}{2}$:

$$\left. \begin{aligned}
a_2^+ + ia_1^+ &= i(a_1^+ - ia_2^+) \\
a_3^+ + ia_4^+ &= i(a_4^+ - ia_3^+)
\end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Es claro [33, 26], entonces, que cualquier función de productos de términos (97) con términos (98) conmuta (bajo paréntesis de Poisson) con \mathcal{E} . Sin embargo, sólo se pueden escoger productos que den lugar a términos de la forma $a_l^+ a_k^-$ que son los que conmutan con H son nuestras constantes del movimiento. Así, por ejemplo, no se pueden tomar productos de términos marcados (99) con los marcados (100). Existen 8 productos independientes de términos (97) con (98):

$$F_1 = (a_1^+ + ia_2^+)(a_2^- + ia_1^-) = a_1^+ a_2^- - a_2^+ a_1^- + i(a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^-) \quad (101)$$

$$F_2 = (a_1^+ + ia_2^+)(a_3^- + ia_4^-) = a_1^+ a_3^- - a_2^+ a_4^- + i(a_1^+ a_4^- + a_2^+ a_3^-) \quad (102)$$

$$F_3 = (a_4^+ + ia_3^+)(a_2^- + ia_1^-) = a_4^+ a_2^- - a_3^+ a_1^- + i(a_4^+ a_1^- + a_3^+ a_2^-) \quad (103)$$

$$F_4 = (a_4^+ + ia_3^+)(a_3^- + ia_4^-) = a_4^+ a_3^- - a_3^+ a_4^- + i(a_3^+ a_3^- + a_4^+ a_4^-) \quad (104)$$

$$F_5 = (a_1^- + ia_2^-)(a_2^+ + ia_1^+) = a_2^- a_1^+ - a_1^- a_2^+ + i(a_2^- a_2^+ + a_1^- a_1^+) \quad (105)$$

$$F_6 = (a_3^- + ia_4^-)(a_1^- + ia_2^-) = a_3^- a_1^- - a_4^- a_2^- + i(a_4^- a_1^- + a_3^- a_2^-) \quad (106)$$

$$F_7 = (a_2^- + ia_1^-)(a_4^- + ia_3^-) = a_2^- a_4^- - a_1^- a_3^- + i(a_2^- a_3^- + a_1^- a_4^-) \quad (107)$$

$$F_8 = (a_3^- + ia_4^-)(a_4^- + ia_3^-) = a_3^- a_4^- - a_4^- a_3^- + i(a_3^- a_3^- + a_4^- a_4^-) \quad (108)$$

Estas son entonces las constantes del movimiento correspondientes a nuestro problema. Son perfectamente aceptables; sin embargo nuestro interés principal consiste en construir, a partir de ellas, el grupo de simetría apropiado ; o sea, queremos hallar, a partir de ellas, los generadores de dicho grupo. Como tal condición de generadores se da en términos de sus relaciones con respecto a paréntesis de Poisson, se calculará ahora la tabla de paréntesis de Poisson de las F 's. Usando (91), se demuestra que:

$[F_i, F_j]$	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
F_1	0	$2F_2$	$-2F_3$	0	0	0	0	0
F_2	$-2F_2$	0	$2(F_1 - F_4)$	$2F_2$	0	0	0	0
F_3	$2F_3$	$-2(F_1 - F_4)$	0	$-2F_3$	0	0	0	0
F_4	0	$-2F_2$	$2F_3$	0	0	0	0	0
F_5	0	0	0	0	0	$-2F_6$	$-2F_7$	0
F_6	0	0	0	0	$2F_6$	0	$-2(F_5 - F_8)$	$-2F_6$
F_7	0	0	0	0	$-2F_7$	$2(F_5 - F_8)$	0	$2F_7$
F_8	0	0	0	0	0	$2F_6$	$-2F_7$	0

Tabla 1.

De la tabla 1, se deducen las siguientes constantes del movimiento;

$$R_1 = F_1 + F_4 = a_1^+ a_2^- - a_2^+ a_1^- + a_4^+ a_3^- - a_3^+ a_4^- + i(a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + a_3^+ a_3^- + a_4^+ a_4^-) \quad (109)$$

$$R_2 = F_5 + F_8 = a_2^+ a_1^- - a_1^+ a_2^- + a_3^+ a_4^- - a_4^+ a_3^- + i(a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + a_3^+ a_3^- + a_4^+ a_4^-) \quad (110)$$

$$S_1 = -\frac{i}{4}(F_1 - F_4) = \frac{1}{4}[a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- - a_3^+ a_3^- - a_4^+ a_4^- - i(a_1^+ a_2^- - a_2^+ a_1^- + a_3^+ a_4^- - a_4^+ a_3^-)] \quad (111)$$

$$S_2 = \frac{1}{4}(F_2 - F_3) = \frac{1}{4}[a_1^+ a_3^- - a_2^+ a_4^- + a_3^+ a_1^- - a_4^+ a_2^- - i(a_4^+ a_1^- + a_3^+ a_2^- - a_1^+ a_4^- - a_2^+ a_3^-)] \quad (112)$$

$$S_3 = -\frac{i}{4}(F_2 + F_3) = \frac{1}{4}[a_1^+ a_4^- + a_2^+ a_3^- + a_4^+ a_1^- + a_3^+ a_2^- - i(a_1^+ a_3^- - a_3^+ a_4^- + a_4^+ a_2^- - a_3^+ a_1^-)] \quad (113)$$

$$T_1 = -\frac{i}{4}(F_5 - F_8) = \frac{1}{4}[a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- - a_3^+ a_3^- - a_4^+ a_4^- - i(a_2^+ a_1^- - a_1^+ a_2^- + a_4^+ a_3^- - a_3^+ a_4^-)] \quad (114)$$

$$T_2 = \frac{1}{4}(F_6 - F_7) = \frac{1}{4}[a_3^+ a_1^- - a_4^+ a_2^- + a_1^+ a_3^- - a_2^+ a_4^- - i(a_2^+ a_3^- + a_1^+ a_4^- - a_4^+ a_1^- - a_3^+ a_2^-)] \quad (115)$$

$$T_3 = -\frac{i}{4}(-F_6 - F_7) = \frac{1}{4}[-a_4^+ a_1^- - a_2^+ a_3^- - a_3^+ a_2^- - a_1^+ a_4^- - i(a_4^+ a_2^- + a_1^+ a_3^- - a_3^+ a_1^- - a_2^+ a_4^-)] \quad (116)$$

Los paréntesis de Poisson de estas constantes del movimiento se dan en la siguiente tabla, en la construcción de la cual se usó la tabla 1;

$[f, g]$	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3	T_1	T_2	T_3
R_1	0	0	0	0	0	0	0	0
R_2	0	0	0	0	0	0	0	0
S_1	0	0	0	S_3	$-S_2$	0	0	0
S_2	0	0	$-S_3$	0	S_1	0	0	0
S_3	0	0	S_2	$-S_1$	0	0	0	0
T_1	0	0	0	0	0	0	T_3	$-T_2$
T_2	0	0	0	0	0	$-T_3$	0	T_1
T_3	0	0	0	0	0	T_2	$-T_1$	0

Tabla 2.

En forma compacta, estas relaciones son las siguientes:

Para $\ell = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$; $K = 1, 2, 3$; $m = 1, 2, 3$:

$$[R_\ell, S_j] = 0 \quad (117)$$

$$[R_\ell, T_j] = 0 \quad (118)$$

$$[R_\ell, R_1] = [R_\ell, R_2] = 0 \quad (119)$$

$$[S_j, S_k] = Sm \quad (j, k, m \text{ en orden cíclico}) \quad (120)$$

$$[T_j, T_k] = Tm \quad (j, k, m \text{ en orden cíclico}) \quad (121)$$

$$[S_j, T_k] = 0 \quad (122)$$

Las anteriores relaciones de conmutación indican [13] que las constantes del movimiento halladas son generadores del grupo $O(4)$, o sea se ha demostrado que el grupo de simetría del problema representado por el Hamiltoniano H (ec. (2)) es $O(4)$.

La demostración anterior es perfectamente rigurosa y válida; sin embargo, las constantes del movimiento obtenidos no tienen una interpretación geométrica directa. Lo que se hará ahora es construir, a partir de las constantes del movimiento (109-116), funciones que también sean constantes del movimiento pero que tengan un significado geométrica conocido. Para hacer ésto, nos guiaremos por el tratamiento vectorial que se dió al problema en la sección I-B. En dicho estudio vectorial, se demostró (ecs. (7,23) de la sección I-B) que:

$$\bar{D} = \bar{L} - \varepsilon \hat{p} \quad (123)$$

$$\mathbf{R} = \bar{D} \times \bar{\pi} - m e_1 e_2 \hat{p} \quad (124)$$

son constantes del movimiento.

Introduciendo el vector $\bar{\ell}$ dado por:

$$\bar{\ell} = \bar{\rho} \times \bar{p} \quad (124-a)$$

al cual se le llama “momentum angular canónico”, pues \bar{p} es el momentum canónico, relacionado con el momentum mecánico $\bar{\pi} = m \frac{d\bar{p}}{dt}$ por:

$$\bar{\pi} = \bar{p} - \frac{e_2}{c} \bar{A} \quad (124-b)$$

se demuestra que las componentes de $\bar{D} = (D_x, D_y, D_z)$ se pueden escribir en la forma:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \ell_x - \frac{\mathcal{E} X \rho}{X^2 + Y^2} \\ D_y &= \ell_y - \frac{\mathcal{E} Y \rho}{X^2 + Y^2} \\ D_z &= \ell_z \end{aligned} \right\} \quad (123-a)$$

Se puede poner a \bar{D} y \bar{R} en función de las a_ℓ^\pm . Sin embargo resulta más fácil trabajar con las coordenadas y momenta originales

$$\{\mu, \nu, \phi, \gamma, P_\mu, P_\nu, P_\phi, \mathcal{E}\}.$$

Para ésto, es necesario, poner a las constantes $\{R_\ell, S_k, T_j\}$ en función de estas coordenadas, lo mismo que a \bar{D} y a \bar{R} .

Para realizar lo anterior, se necesitan las a_ℓ^\pm en función de las coordenadas $\{\mu, \nu, \phi, \text{etc.}\}$. Usando las relaciones (40-43, 48-51), así como la ecuación (80), se demuestra que;

$$a_1^\pm = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} \left[(-2mE)^{\frac{1}{2}} \mu \cos\theta \mp i(\cos\theta P_\mu - \text{sen}\theta \frac{P_\theta}{\mu}) \right] \cdot \left[e^{\mp(\pi i B^{-\frac{1}{2}})(-2mE)^{\frac{1}{2}}(\mu P_\mu + \nu P_\nu)} \right] \quad (125)$$

$$a_2^\pm = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} \left[(-2mE)^{\frac{1}{2}} \mu \text{sen}\theta \mp i(\text{sen}\theta P_\mu + \cos\theta \frac{P_\theta}{\mu}) \right] \cdot \left[e^{\mp(\pi i B^{-\frac{1}{2}})(-2mE)^{\frac{1}{2}}(\mu P_\mu + \nu P_\nu)} \right] \quad (126)$$

Para a_3^\pm y a_4^\pm sólo hay que cambiar μ por ν , θ por δ y P_μ por P_ν en (125) y (126), respectivamente:

$$a_3^\pm = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} \left[(-2mE)^{\frac{1}{2}} \nu \cos\delta \mp i(\cos\delta P_\nu - \text{sen}\delta \frac{P_\delta}{\nu}) \right] \cdot \left[e^{\mp(\pi i B^{-\frac{1}{2}})(-2mE)^{\frac{1}{2}}(\mu P_\mu + \nu P_\nu)} \right] \quad (127)$$

$$a_4^\pm = [+2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-\frac{1}{2}} \left[(-2mE)^{\frac{1}{2}} \nu \text{sen}\delta \mp i(\text{sen}\delta P_\nu + \cos\delta \frac{P_\delta}{\nu}) \right] \cdot \left[e^{\mp(\pi i B^{-\frac{1}{2}})(-2mE)^{\frac{1}{2}}(\mu P_\mu + \nu P_\nu)} \right] \quad (128)$$

Usando las relaciones (125-128), se pondrán ahora las $a_\ell^+ a_K^-$ en función de las coordenadas $\{\mu, \nu, \phi, \text{etc.}\}$:

$$a_1^+ a_1^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} [-2mE\mu^2 \cos^2\theta + \cos^2\theta P_\mu^2 + \text{sen}^2\theta \frac{P_\theta^2}{\mu^2} - 2\text{sen}\theta \cos\theta \frac{P_\mu P_\theta}{\mu}] \quad (129)$$

$$a_2^+ a_2^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} [-2mE\mu^2 \text{sen}^2\theta + \text{sen}^2\theta P_\mu^2 + \cos^2\theta \frac{P_\theta^2}{\mu^2} + 2\text{sen}\theta \cos\theta \frac{P_\mu P_\theta}{\mu}] \quad (130)$$

$$a_3^+ a_3^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} [-2mE\nu^2 \cos^2\delta + \cos^2\delta P_\nu^2 + \text{sen}^2\delta \frac{P_\delta^2}{\nu^2} - 2\text{sen}\delta \cos\delta \frac{P_\nu P_\delta}{\nu}] \quad (131)$$

$$a_4^+ a_4^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} [-2mE\nu^2 \text{sen}^2\delta + \text{sen}^2\delta P_\nu^2 + \cos^2\delta \frac{P_\delta^2}{\nu^2} + 2\text{sen}\delta \cos\delta \frac{P_\nu P_\delta}{\nu}] \quad (132)$$

$$a_1^+ a_4^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \cos\theta \cos\delta \left[i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} + \frac{P_\mu P_\delta}{\nu} \right] + \cos\theta \text{sen}\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu + i(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \text{sen}\theta \text{sen}\delta \left[i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu P_\theta}{\mu} - \frac{P_\nu P_\theta}{\mu} \right] - \text{sen}\theta \cos\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (133)$$

$$a_3^+ a_2^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \cos\theta \cos\delta \left[i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu P_\theta}{\mu} + \frac{P_\nu P_\theta}{\mu} \right] + \text{sen}\theta \cos\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu - i(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \text{sen}\theta \text{sen}\delta \left[i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} - \frac{P_\mu P_\delta}{\nu} \right] - \cos\theta \text{sen}\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (134)$$

$$a_1^+ a_2^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ i(-2mE)^{\frac{1}{2}} P_\theta + \text{sen}\theta \cos\theta \left[-2mE\mu^2 + P_\mu^2 - \frac{P_\mu^2 \text{heta}}{\mu^2} \right] + \frac{P_\mu P_\theta}{\mu} [\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta] \right\} \quad (135)$$

$$a_1^+ a_3^- = [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \cos\theta \cos\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu + i(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \cos\theta \text{sen}\delta \left[-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} - \frac{P_\mu P_\delta}{\nu} \right] + \text{sen}\theta \cos\delta \left[i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu P_\theta}{\mu} - \frac{P_\nu P_\theta}{\mu} \right] + \text{sen}\theta \text{sen}\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (136)$$

$$\begin{aligned}
a_2^+ a_1^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \text{sen}\theta \cos\theta [-2mE\mu^2 + P_\mu^2 - \frac{P_\theta^2}{\mu^2}] \right. \\
&\quad \left. -i(-2mE)^{\frac{1}{2}} P_\theta + \frac{P_\mu P_\theta}{\mu} [\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta] \right\} \quad (137)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2^+ a_3^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \text{sen}\theta \cos\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu + i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \text{sen}\theta \text{sen}\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} - \frac{P_\mu P_\delta}{\nu}] \\
&\quad \left. + \cos\theta \cos\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu P_\theta}{\mu} + \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] - \cos\theta \text{sen}\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (138)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2^+ a_4^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \text{sen}\theta \text{sen}\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu + i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \text{sen}\theta \cos\delta [i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} + \frac{P_\mu P_\delta}{\nu}] \\
&\quad \left. + \cos\theta \text{sen}\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu P_\theta}{\mu} + \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] + \cos\theta \cos\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (139)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3^+ a_1^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \cos\theta \cos\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu - i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \cos\theta \text{sen}\delta [i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} - \frac{P_\mu P_\delta}{\nu}] \\
&\quad \left. + \text{sen}\theta \cos\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu P_\theta}{\mu} - \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] + \text{sen}\theta \text{sen}\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (140)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3^+ a_4^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ i(-2mE)^{\frac{1}{2}} P_\delta + \text{sen}\delta \cos\delta \right. \\
&\quad \left. [-2mE\nu^2 + P_\nu^2 - \frac{P_\delta^2}{\nu^2}] + \frac{P_\nu P_\delta}{\nu} (\cos^2\delta - \text{sen}^2\delta) \right\} \quad (141)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4^+ a_1^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \cos\theta \text{sen}\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu - i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \text{sen}\theta \text{sen}\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\theta}{\mu} - \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] \\
&\quad \left. + \cos\theta \cos\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} + \frac{P_\mu P_\delta}{\nu}] - \text{sen}\theta \cos\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (142)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4^+ a_2^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \text{sen}\theta \text{sen}\delta [-2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu - i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad (\mu P_\nu - \nu P_\mu)] + \text{sen}\theta \cos\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu P_\delta}{\nu} + \frac{P_\mu P_\delta}{\nu}] \\
&\quad \left. + \cos\theta \text{sen}\delta [-i(-2mE)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu P_\theta}{\mu} + \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] + \cos\theta \cos\delta \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu} \right\} \quad (143)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4^+ a_3^- &= [2(-2mE)^{\frac{1}{2}}]^{-1} \left\{ \text{sen} \delta \cos \delta [-2mE\nu^2 + P_\nu^2 - \frac{P_\delta^2}{\nu^2}] \right. \\
&\quad \left. -i(-2mE)^{\frac{1}{2}} P_\delta + \frac{P_\nu P_\delta}{\nu} [\cos^2 \delta - \text{sen}^2 \delta] \right\} \quad (144)
\end{aligned}$$

Usando las relaciones (109-116) y (129-144), es posible escribir las constantes del movimiento $\{R_\ell, S_j, T_k\}$ en función de $\{\mu, \nu, \text{etc.}\}$ obteniéndose las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
S_1 &= (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{4}(-2mE)^{\frac{1}{2}}(P_\theta + P_\delta) + \frac{1}{8} \right. \\
&\quad \left. [-2mE(\mu^2 - \nu^2) + P_\mu^2 - P_\nu^2 + \frac{P_\theta^2}{\mu^2} - \frac{P_\delta^2}{\nu^2}] \right\} \quad (145)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{4} \cos(\theta + \delta) [(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\frac{\nu P_\theta}{\mu} - \frac{\mu P_\delta}{\nu}) \right. \\
&\quad \left. -2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu - \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu}] + \frac{1}{4} [\text{sen}(\theta + \delta)] \right. \\
&\quad \left. [-(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\mu P_\nu - \nu P_\mu) - \frac{P_\mu P_\delta}{\nu} - \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] \right\} \quad (146)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{4} \cos(\theta + \delta) [(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\mu P_\nu - \nu P_\mu) + \right. \\
&\quad \left. \frac{P_\mu P_\delta}{\nu} + \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] + \frac{1}{4} \text{sen}(\theta + \delta) [(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\frac{\nu P_\theta}{\mu} - \frac{\mu P_\delta}{\nu}) \right. \\
&\quad \left. -2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu - \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu}] \right\} \quad (147)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{1}{4}(-2mE)^{\frac{1}{2}}(P_\theta + P_\delta) + \frac{1}{8} \right. \\
&\quad \left. [-2mE(\mu^2 - \nu^2) + P_\mu^2 - P_\nu^2 + \frac{P_\theta^2}{\mu^2} - \frac{P_\delta^2}{\nu^2}] \right\} \quad (148)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{4} \cos(\theta + \delta) [-(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\frac{\nu P_\theta}{\mu} - \frac{\mu P_\delta}{\nu}) \right. \\
&\quad \left. -2mE\mu\nu + P_\mu P_\nu - \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu}] + \frac{1}{4} \text{sen}(\theta + \delta) \right. \\
&\quad \left. [(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\mu P_\nu - \nu P_\mu) - \frac{P_\mu P_\delta}{\nu} - \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] \right\} \quad (149)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{4} \cos(\theta + \delta) [(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\mu P_\nu - \nu P_\mu) - \right. \\
&\quad \left. \frac{P_\mu P_\delta}{\nu} - \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}] + \frac{1}{4} \text{sen}(\theta + \delta) [(-2mE)^{\frac{1}{2}} (\frac{\nu P_\theta}{\mu} - \frac{\mu P_\delta}{\nu}) \right. \\
&\quad \left. +2mE\mu\nu - P_\mu P_\nu + \frac{P_\theta P_\delta}{\mu\nu}] \right\} \quad (150)
\end{aligned}$$

$$R_1 = (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ i(-2mE)^{\frac{1}{2}}(P_\theta - P_\delta) + \frac{i}{2} \right. \\ \left. [-2mE(\mu^2 + \nu^2) + P_\mu^2 + P_\nu^2 + \frac{P_\theta^2}{\mu^2} + \frac{P_\delta^2}{\nu^2}] \right\} \quad (151)$$

$$R_2 = (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left\{ -i(-2mE)^{\frac{1}{2}}(P_\theta - P_\delta) + \frac{i}{2} \right. \\ \left. [-2mE(\mu^2 + \nu^2) + P_\mu^2 + P_\nu^2 + \frac{P_\theta^2}{\mu^2} + \frac{P_\delta^2}{\nu^2}] \right\} \quad (152)$$

Se pondrán ahora $\bar{\mathbf{R}}$ y \bar{D} en función de $\{\mu, \nu, \text{etc.}\}$. Para esto, según es evidente de sus definiciones, se necesita a $\bar{\ell}$ y $\bar{\pi}$ en función de estas coordenadas.

De sus definiciones (ecs. (124 a-b)):

$$\ell_x = \frac{1}{2} \text{sen} \phi (\nu P_\mu - \mu P_\nu) - \frac{1}{2} \cos \phi \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu \nu} P_\phi \quad (153)$$

$$\ell_y = \frac{1}{2} \cos \phi (\mu P_\nu - \nu P_\mu) - \frac{1}{2} \text{sen} \phi \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu \nu} P_\phi \quad (154)$$

$$\ell_z = P_\phi \quad (155)$$

$$\pi_x = P_x - \frac{\varepsilon y z}{(x^2 + y^2) \rho} \quad (156)$$

$$\pi_y = P_y - \frac{\varepsilon x z}{(x^2 + y^2) \rho} \quad (157)$$

$$\pi_z = P_z \quad (158)$$

Entonces, usando las relaciones 153-158, 12-14, 3-8, 123-a,34-37,124), se tiene que:

$$\mathbf{R}_x = D_y \pi_z - D_z \pi_y - m e_1 e_2 \frac{x}{\rho} = \frac{1}{2} \cos(\theta + \delta) (-2mE \mu \nu + \\ P_\mu P_\nu - \frac{P_\theta P_\delta}{\mu \nu}) - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta + \delta) (\frac{P_\mu P_\delta}{\nu} + \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}) \quad (159)$$

$$\mathbf{R}_y = D_z \pi_x - D_x \pi_z - m e_1 e_2 \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2} \cos(\theta + \delta) (\frac{P_\mu P_\delta}{\nu} + \frac{P_\nu P_\theta}{\mu}) - \\ \frac{1}{2} \text{sen}(\theta + \delta) [-(-2mE \mu \nu + P_\mu P_\nu - \frac{P_\theta P_\delta}{\mu \nu})] \quad (160)$$

$$\mathbf{R}_z = D_x \pi_y - D_y \pi_x - m e_1 e_2 \frac{z}{\rho} = -\frac{1}{2(\mu^2 + \nu^2)} [\mu^2 (P_\nu^2 + \frac{P_\delta^2}{\nu^2}) \\ - \nu^2 (P_\mu^2 + \frac{P_\theta^2}{\mu^2}) + 2m e_1 e_2 (\mu^2 - \nu^2)] \quad (161)$$

En lo anterior, se ha usado la relación (34) para poner $\theta + \delta$ en el lugar de ϕ . Para el vector \bar{D} :

$$D_x = \frac{1}{2} \text{sen}(\theta + \delta)(\nu P_\mu - \mu P_\nu) - \frac{1}{2} \text{cos}(\theta + \delta) \left(\frac{\mu P_\delta}{\nu} - \frac{\nu P_\theta}{\mu} \right) \quad (162)$$

$$D_y = \frac{1}{2} \text{cos}(\theta + \delta)(\mu P_\nu - \nu P_\mu) - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta + \delta) \left(\frac{\mu P_\delta}{\nu} - \frac{\nu P_\theta}{\mu} \right) \quad (163)$$

$$D_z = \ell_z = P_\phi = \frac{1}{2}(P_\theta + P_\delta) \quad (164)$$

De las relaciones (145-150) y (159-164) se tiene casi directamente (sólo hay que hacer algunas transformaciones algebraicas usando (38) para \mathbf{R}_z):

$$\mathbf{R}_x = (-2mE)^{\frac{1}{2}} (S_2 + T_2) \quad (165)$$

$$\mathbf{R}_y = (-2mE)^{\frac{1}{2}} (S_3 - T_3) \quad (166)$$

$$\mathbf{R}_z = (-2mE)^{\frac{1}{2}} (S_1 + T_1) \quad (167)$$

$$D_1 \doteq D_x = S_2 - T_2 \quad (168)$$

$$D_2 \doteq D_y = S_3 + T_3 \quad (169)$$

$$D_3 \doteq D_z = S_1 - T_1 \quad (170)$$

Definiendo un nuevo vector $\check{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$ por:

$$\check{\mathcal{R}} = (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{R}} \quad (171)$$

tenemos que:

$$\mathcal{R}_1 = S_2 + T_2 \quad (172)$$

$$\mathcal{R}_2 = S_3 - T_3 \quad (173)$$

$$\mathcal{R}_3 = S_1 + T_1 \quad (174)$$

De las relaciones (117-122, 168-170, 172-174), es directo demostrar, usando la propiedad de antisimetría de los paréntesis de Poisson con respecto a un cambio de orden en sus argumentos, las siguientes relaciones:

$$[\mathcal{R}_\ell, \mathcal{R}_j] = \varepsilon_{\ell j k} D_k \quad (175)$$

$$[D_\ell, D_j] = \varepsilon_{\ell j k} D_k \quad (176)$$

$$[D_\ell, \mathcal{R}_j] = \varepsilon_{\ell j k} \mathcal{R}_k \quad (177)$$

Estas relaciones indican [13] que $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, D_1, D_2, D_3$, son generadores del grupo $O(4)$. Con ésto, se ha conseguido lo que se quería: dar a las constantes del movimiento una interpretación geométrica y tener así generadores del grupo $O(4)$ más convencionales que $\{\mathcal{R}_\ell, S_j, T_k\}$.

I.D Determinación de un grupo dinámico clásico del problema, para estados ligados ($E < 0$)

Como es sabido, dado un sistema físico descrito por cierto número de variables (observables), la estructura algebraica de éstas se basa, clásicamente, en sus relaciones de paréntesis de Poisson y, cuánticamente, en sus relaciones de conmutación.

Entonces, clásicamente, uno de los métodos de estudio de las simetrías de un sistema se basa en las estructuras algebraicas que se pueden formar a partir de funciones de las coordenadas y momenta que constituyen el espacio fase que le corresponde; otro método de estudio consiste en la identificación de las constantes del movimiento con significado geométrico más o menos directo, usando muchas veces para ésto, procedimientos vectoriales (en este trabajo se han usado los dos métodos, en las secciones I.C y I.B, respectivamente). Así, cuando se quiere estudiar la simetría de un sistema basándose en el primer método (“algebraico”), se buscan funciones de las coordenadas y momenta, independientes explícitamente del tiempo, que:

- a) Conmuten, bajo paréntesis de Poisson, con el Hamiltoniano del sistema; su independencia explícita del tiempo indica, entonces, que son constantes del movimiento [35]: generan transformaciones canónicas que dejan invariante el Hamiltoniano.
- b) Deben constituir un sistema cerrado bajo la operación de paréntesis de Poisson, o sea, deben formar un Álgebra de Lie, pues el paréntesis de Poisson es un tipo de conmutador [33]. La formación de un espacio vectorial con ellas es directa [33], teniéndose casi siempre como campo de coeficientes el de los reales y sólo excepcionalmente el de los complejos. Entonces, basándose en el Álgebra de Lie que forman, se hace la identificación de estas funciones, con generadores de un grupo de Lie, que será un grupo de simetría para el problema, pues sus generadores son, por definición, constantes del movimiento.

El concepto de grupo dinámico puede considerarse ya como un poco antiguo [36], siendo motivado por ciertas observaciones y el deseo de algunas personas [36, 37], de dar un tratamiento basado puramente en teoría de Grupos a ciertos problemas, principalmente los más extensamente estudiados: el de Kepler y el del oscilador armónico [37, 38, 39], aunque también existe la idea de dar un tratamiento similar a todos los problemas dinámicos [36, 37, 38, 45]. La idea surgió después del famoso trabajo de Fock [40] de 1935, en el cual demostró que el grupo de simetría para el problema de Coulomb (átomo de Hidrógeno) es $O(4)$ (aunque ésto estaba implícito en el tratamiento de Pauli [41] del mismo problema, de 1926). Las observaciones a que se hizo mención anteriormente son en el sentido de que ciertos conjuntos de eigen-funciones del Hamiltoniano de un problema cuántico, no correspondiendo necesariamente al mismo eigenvalor, forman base de representaciones de grupos. La referencia más antigua conteniendo una formalización de estas ideas es un artículo de Dothan, Gell-Mann y Neéman [43], en el cual tratan de aplicarlas a la clasificación de partículas elementales.

En el caso clásico, estas ideas forman la siguiente forma: dado un problema descrito por un Hamiltoniano $H(q, p)$, se trata de encontrar funciones independientes $G(q, p)$ tales que formen un conjunto cerrado con respecto a la operación de paréntesis de Poisson; las funciones G deben ser, en número, por lo menos iguales a la dimensionalidad del espacio fase, para que sea posible expresar a todas las variables y momenta q, p en función de ellas [44]. Partiendo de las funciones G , se forma un conjunto canónico [33] y se pone el Hamiltoniano en función de las mismas. Las funciones G constituyen los generadores de un grupo de Lie al cual se le llama grupo de no invariancia o grupo dinámico del problema; debido a su estructura algebraica, dan la información sobre características del sistema (energía, rangos de las variables q, p , etc.) de una manera más o menos directa [36, 45]. Esto equivale a un tratamiento del problema con base sólo en teoría de Grupos. En cuanto al número de funciones G , si éste excede a la dimensionalidad del espacio fase, son de esperarse condiciones de restricción entre ellas, por lo cual es apropiado cambiar del uso de paréntesis de Poisson, a paréntesis de Dirac [36, 38]. Generalmente se requiere, también, del grupo dinámico, que contenga al de simetría. El primer trabajo en el cual se aplica lo anterior al problema de Kepler es el de Bacry [38], en el cual demuestra que el grupo de Desitter $L(4, 1) \sim SO(4, 1)$ es de no invariancia para el problema. Györgyi trató el mismo problema clásica [36] y cuánticamente [38] y demostró que $SO(4, 2)$ es grupo de no invariancia en ambos casos. Hwa y Nuyts [39] trataron el problema del oscilador armónico y demostraron que $SP(n, R)$ y $SU(n, 1)$ son grupos de no invariancia para el oscilador armónico isotrópico n-dimensional.

Cuánticamente, debido al cambio fundamental en el método de descripción con respecto a la Mecánica Clásica, las ideas anteriores toman una forma un poco distinta:

La observación de que, dado un hamiltoniano con un cierto espectro de eigenvalores, había ciertos conjuntos de eigenfunciones que daban bases para representaciones de grupos, ha dado lugar a los conceptos: el de grupo de simetría y el de grupo dinámico o de no invariancia.

Un grupo de simetría de un sistema es un grupo cuyas representaciones tienen como bases subconjuntos de Ψ_E con:

$$\Psi_E = \{\Psi \mid \Psi \text{ es eigenfunción del Hamiltoniano con eigenvalor } E\}$$

La utilidad de conocer tales grupos es evidente cuando se tiene un grupo \mathcal{S} tal que sus representaciones están dadas por Ψ_E misma, para cada E . Entonces, una vez identificado este grupo, se tiene información completa sobre la degeneración del sistema, pues ella está dada por las dimensiones de las representaciones de \mathcal{S} , siendo estas últimas conocidas. Además, se tiene información sobre reglas de selección en transiciones del sistema y sobre el cálculo de elementos de matriz de operadores [46].

El concepto de grupo dinámico se originó en la observación [37, 42] de que ciertos subconjuntos de $\{\Psi\}$, siendo $\{\Psi\}$ el conjunto de eigenfunciones del Hamiltoniano, no correspondiendo necesariamente a un sólo eigenvalor, dan representaciones de grupos de transformaciones del Hamiltoniano. Entonces, si fuera posible hallar un grupo tal que $\{\Psi\}$ diera una base de representación para él, se tendría completamente resuelto el problema, pues se tendría, además de la degeneración, dada por el grupo de simetría, el espectro de eigenvalores, pues éste sería obtenido a partir de relaciones de los generadores del grupo.

El problema de Kepler y el oscilador armónico han sido tratados desde este punto de vista [36, 37, 38, 39]. En general, el grupo dinámico no es único, teniéndose, cuando hay dos o más, que generan distintas porciones del espectro de eigenvalores [37].

Las ideas anteriores se han aplicado también de manera inversa: dado un grupo de Lie, se trata de construir, a partir de funciones de sus generadores, Hamiltonianos que tengan a dicho grupo como de no invariancia [45a]; para que dichos Hamiltonianos correspondan a los de sistemas físicos, se les requieren condiciones adicionales de Hermiticidad, invariancia respecto a inversión el tiempo, etc. [45a].

Para el problema que se ha estado tratando, se tiene, de las relaciones (97,98) de la sec. I.C,

que cualquier eigenfunción de \mathcal{E} en el conjunto (97) multiplicada por cualquiera de las que están en (98), da una eigenfunción de \mathcal{E} con eigenvalor 0, bajo paréntesis de Poisson; o sea, estos productos dan funciones que generan transformaciones canónicas que “conservan” la carga magnética. Entre los 16 productos posibles, hay 8 que fueron ya utilizados en la construcción del grupo de simetría del problema; los 8 productos restantes, sin embargo, son eigenfunciones del Hamiltoniano (bajo paréntesis de Poisson) con eigenvalores distintos de 0. Entonces, si se puede demostrar que los 16 productos de eigenfunciones de \mathcal{E} son generadores de un álgebra de Lie, se habrá demostrado la existencia de un grupo dinámico para el problema, pues el Hamiltoniano, según es evidente de la ec. (88) de la sección I.C, se puede poner en función de ellas, lo mismo que todas las variables y momenta canónicos $\{\mu, \nu, P_\mu, P_\nu, \text{etc.}\}$ (en principio, para hacer ésto, se pueden invertir las relaciones (125-128) de la sección I.C).

Fué posible demostrar que los 16 productos referidos son los generadores del álgebra de Lie correspondiente al grupo $SU(2, 2)$, utilizando el procedimiento siguiente:

Sean B_1, \dots, B_8 los siguientes productos de funciones (97,98) de la sección I.C (los 8 restantes ya fueron calculados, con los nombres F_1, \dots, F_8 , ecs. (101-108), sec. I.C):

$$B_1 = (a_1^+ + ia_2^+)(a_2^+ + ia_1^+) = i(a_1^{+2} + a_2^{+2}) \quad (1)$$

$$B_2 = (a_1^+ + ia_2^+)(a_3^+ + ia_4^+) = a_1^+ a_3^+ - a_2^+ a_4^+ + i(a_1^+ a_4^+ + a_2^+ a_3^+) \quad (2)$$

$$B_3 = (a_4^+ + ia_3^+)(a_2^+ + ia_1^+) = a_2^+ a_4^+ - a_1^+ a_3^+ + i(a_1^+ a_4^+ + a_2^+ a_3^+) \quad (3)$$

$$B_4 = (a_4^+ + ia_3^+)(a_3^+ + ia_4^+) = i(a_4^{+2} + a_3^{+2}) \quad (4)$$

$$B_5 = (a_1^- + ia_2^-)(a_2^- + ia_1^-) = i(a_1^{-2} + a_2^{-2}) \quad (5)$$

$$B_6 = (a_1^- + ia_2^-)(a_3^- + ia_4^-) = a_1^- a_3^- - a_2^- a_4^- + i(a_1^- a_4^- + a_2^- a_3^-) \quad (6)$$

$$B_7 = (a_4^- + ia_3^-)(a_2^- + ia_1^-) = a_2^- a_4^- - a_1^- a_3^- + i(a_1^- a_4^- + a_2^- a_3^-) \quad (7)$$

$$B_8 = (a_4^- + ia_3^-)(a_3^- + ia_4^-) = i(a_3^{-2} + a_4^{-2}) \quad (8)$$

Ahora, se necesitan los paréntesis de Poisson de las B's con el Hamiltoniano. Sin embargo, de la fórmula (88) de la sección I.C, usando el hecho (consecuencia de la regla de la cadena) de que, siendo f, g y h funciones de las variables canónicas q, p : $[f(g(q, p)), h(q, p)]_{q, p} = \frac{\partial f}{\partial g} [g, h]_{q, p}$, se demuestra que; siendo f una función arbitraria de las a_ℓ^+, a_k^- :

$$[H, f] = \left(\frac{2}{me_1^2 e_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} (-E)^{\frac{3}{2}} [a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + a_3^+ a_3^- + a_4^+ a_4^-, f] \quad (9)$$

Pero, ya que el sistema es conservativo, $E = \text{cte.}$, y el factor que aparece enfrente del paréntesis de Poisson del lado derecho de (9) puede hacerse igual a la unidad, escogiendo unidades apropiadas. En este caso, puede aplicarse la fórmula:

$$[H, f] = [H^I, f] \quad (10)$$

Con:

$$H^I = a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + a_3^+ a_3^- + a_4^+ a_4^- \quad (11)$$

Utilizando (11) y la ec. (91) de la sección I.C, se obtiene:

$$[H, B_\ell] = -2iB_\ell \quad (\text{con } \ell = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

$$[H, B_\ell] = 2iB_\ell \quad (\text{con } \ell = 5, 6, 7, 8) \quad (13)$$

Los paréntesis de Poisson de las B's y F's se dan en la tabla 1.

[f,g]	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
F_1	0	$2F_2$	$-2F_3$	0	0	0	0	0	$2B_1$	$2B_2$	0	0	$-2B_5$	0	$-2B_7$	0
F_2	$-2F_2$	0	$2(F_1-F_4)$	$2F_2$	0	0	0	0	0	0	$2B_1$	$2B_2$	$-2B_6$	0	$-2B_4$	0
F_3	$2F_3$	$2(F_1-F_4)$	0	$-2F_3$	0	0	0	0	$2B_3$	$2B_4$	0	0	0	$-2B_5$	0	$-2B_7$
F_4	0	$-2F_2$	$2F_3$	0	0	0	0	0	0	0	$2B_3$	$2B_4$	0	$-2B_6$	0	$-2B_8$
F_5	0	0	0	0	0	$-2F_6$	$2F_7$	0	$2B_1$	0	$2B_3$	0	$-2B_5$	$-2B_6$	0	0
F_6	0	0	0	0	$2F_6$	0	$-2(F_5-F_8)$	$-2F_6$	$2B_2$	0	$2B_4$	0	0	0	$-2B_5$	$-2B_6$
F_7	0	0	0	0	0	$-2F_7$	$2(F_5-F_8)$	0	$2F_7$	0	$2B_1$	0	$2B_3$	$-2B_7$	$-2B_4$	0
F_8	0	0	0	0	0	$2F_6$	$-2F_7$	0	0	$2B_2$	0	$2B_4$	0	0	$-2B_7$	$-2B_8$
B_1	$-2B_1$	0	$-2B_3$	0	$-2B_1$	$-2B_2$	0	0	0	0	0	0	$-2(F_1+F_5)$	$-2F_2$	$-2F_7$	0
B_2	$-2B_2$	0	$-2B_4$	0	0	0	$-2B_1$	$-2B_2$	0	0	0	0	$-2F_6$	0	$-2(F_1+F_8)$	$-2F_2$
B_3	0	$-2B_1$	0	$-2B_3$	$-2B_3$	$-2B_4$	0	0	0	0	0	0	0	$-2(F_4+F_5)$	0	$-2F_2$
B_4	0	$-2B_2$	0	$-2B_4$	0	0	$-2B_3$	$-2B_4$	0	0	0	0	0	$-2F_6$	$-2F_3$	$-2(F_4+F_8)$
B_5	$2B_5$	$2B_6$	0	0	$2B_5$	0	$2B_7$	0	$2(F_1+F_5)$	$2F_6$	$2F_3$	0	0	0	0	0
B_6	0	0	$2B_5$	$2B_6$	$2B_6$	0	$2B_4$	0	$2F_2$	0	$2(F_4+F_5)$	$2F_6$	0	0	0	0
B_7	$2B_7$	$2B_4$	0	0	0	$2B_5$	0	$2B_7$	$2F_7$	$2(F_1+F_8)$	0	$2F_3$	0	0	0	0
B_8	0	0	$2B_7$	$2B_8$	0	$2B_6$	0	$2B_8$	0	$2F_2$	$2F_7$	$2(F_4+F_8)$	0	0	0	0

Tabla 1.- Tabla de paréntesis de Poisson de los generadores del Grupo Dinámico.

Es claro, de la tabla 1, que el conjunto de las B 's y F 's es cerrado bajo la operación de paréntesis de Poisson; entonces, constituye una álgebra de Lie [33]. Se trata ahora de identificarla.

Se hará la identificación del álgebra de Lie que se tiene por medio de su diagrama de Schouten [47]. Este diagrama se construye de la siguiente manera: se buscan los vectores raíces [48] (root vectors) del álgebra de Lie que se tiene; estos vectores raíces son elementos del espacio dual de las B 's y F 's para cuya identificación se usa la subálgebra de Cartan del álgebra bajo estudio [33]; ésta es una subálgebra que es nilpotente y además, su propio normalizador [33], estando constituida, salvo en casos excepcionales, por el conjunto máximo de elementos del álgebra que conmutan entre sí bajo paréntesis de Poisson. De entre los vectores raíces, se seleccionan las raíces simples (simple roots) [48] y de ellas se obtiene el diagrama de Schouten buscado, por un procedimiento que se describirá en el lugar apropiado.

La subálgebra de Cartan del álgebra de Lie que se tiene está constituida por los siguientes elementos:

$$H^I = -\frac{i}{2}(F_1 + F_4 + F_5 + F_8) \quad (14)$$

$$\varepsilon = -\frac{i}{4}(-F_1 - F_4 + F_5 + F_8) \quad (15)$$

$$P_\phi = -\frac{i}{4}(F_1 - F_4 - F_5 + F_8) \quad (16)$$

$$\mathcal{R}_3 = -\frac{i}{4}(F_1 - F_4 + F_5 - F_8) \quad (17)$$

En la identificación de las sumas de los lados derechos de (15-17) se usaron las ecs. (164,170,174,89) de la sección I.C.

La elección anterior de elementos de la subálgebra de Cartan parece muy arbitraria; sin embargo, no lo es tanto si se examina con detenimiento de la tabla 1. Se comprueba en el cuadrante superior izquierdo de ésta que F_1, F_4, F_5, F_8 , conmutan entre sí (bajo paréntesis de Poisson); para formar una subálgebra de Cartan, se deben añadir a los anteriores elementos todos aquellos tales que la condición de paréntesis de Poisson nulos entre miembros cualesquiera del conjunto formado se cumpla; sin embargo, es evidente, por inspección de la tabla 1, que no se puede añadir a este conjunto ninguna otra F ni B , pues la relación de paréntesis de Poisson nulos no se conserva si se añade alguna. Entonces, F_1, F_4, F_5, F_8 , junto con sus combinaciones lineales, constituyen una subálgebra de Cartan. Por inspección del cuadrante inferior derecho de la tabla 1, se concluye que con los elementos B_1, B_2, B_3, B_4 , se puede construir una subálgebra de Cartan, lo mismo que con los elementos B_5, B_6, B_7, B_8 , sin embargo, se eligió formar la subálgebra de Cartan que se

usaría con combinaciones lineales de F_1, F_4, F_5, F_8 , pues en la sección I.C ya se construyó con ellas en conjunto de 4 expresiones con significado físico directo; dicho conjunto de expresiones es el que aparece en las ecs. (14,17). Que el conjunto (14,17) forma junto con 0 (elemento nulo) una subálgebra, es obvio de su construcción, que dicha subálgebra es de Cartan se comprueba como sigue [33]: *es nilpotente* (por su definición), *es su propio normalizador*, se comprueba esto por inspección de la tabla 1: dada cualquier F_l distinta de las que forman la subálgebra, es eigenfunción de alguna de estas últimas, bajo paréntesis de Poisson; lo mismo sucede con cada B_i ; entonces, no existe una subálgebra que contenga propiamente a la obtenida y en la cual ésta sea un ideal [33].

Utilizando la tabla 1, se obtiene la tabla de paréntesis de Poisson de los miembros de la subálgebra de Cartan con las B 's y F 's (tabla 2).

[f,g]	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
H	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2iB_1$	$-2iB_2$	$-2iB_3$	$-2iB_4$	$2iB_5$	$2iB_6$	$2iB_7$	$2iB_8$
P_ϕ	0	$-iF_2$	iF_3	0	0	$-iF_6$	iF_7	0	0	$-iB_2$	iB_3	0	0	$-iB_6$	iB_7	0
Z	0	$-iF_2$	iF_3	0	0	iF_6	$-iF_7$	0	$-iB_1$	0	0	iB_4	iB_5	0	0	$-iB_8$
\mathcal{E}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 2

Como se ve de la tabla 2, todos los eigenvalores son imaginarios. Para obtener eigenvalores reales, se trabajará con los operadores:

$$H' = \frac{i}{2}H^I \quad (18)$$

$$P'_\phi = iP_\phi \quad (19)$$

$$\mathcal{R}'_3 = i\mathcal{R}_3 \quad (20)$$

$$\varepsilon' = i\varepsilon \quad (21)$$

El $\frac{1}{2}$ que aparece en (18) es un factor de normalización adecuado.

Con estos miembros modificados de la subálgebra de Cartan (ecs. (18-21)), se tiene la siguiente tabla de paréntesis de Poisson (tabla 3):

[f,g]	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
H'	0	0	0	0	0	0	0	0	B_1	B_2	B_3	B_4	$-B_5$	$-B_6$	$-B_7$	$-B_8$
P'_ϕ	0	F_2	$-F_3$	0	0	F_6	$-F_7$	0	0	B_2	$-B_3$	0	0	B_6	$-B_7$	0
\mathcal{R}'_3	0	F_2	$-F_3$	0	0	$-F_6$	F_7	0	B_1	0	0	$-B_4$	$-B_5$	0	0	B_8
\mathcal{E}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 3

De la tabla 3, se obtienen directamente [33] los siguientes vectores raíces:

r_1	$=$	$(0, 0, 0)$
r_2	$=$	$(0, 1, 1)$
r_3	$=$	$(0, -1, -1)$
r_4	$=$	r_1
r_5	$=$	r_1
r_6	$=$	$(0, 1, -1)$
r_7	$=$	$(0, -1, 1)$
r_8	$=$	r_1
r_9	$=$	$(1, 0, 1)$
r_{10}	$=$	$(1, 1, 0)$
r_{11}	$=$	$(1, -1, 0)$
r_{12}	$=$	$(1, 0, -1)$
r_{13}	$=$	$(-1, 0, -1)$
r_{14}	$=$	$(-1, 1, 0)$
r_{15}	$=$	$(-1, -1, 0)$
r_{16}	$=$	$(-1, 0, 1)$

Tabla 4

Usando la tabla 4, se construye el diagrama de raíces [33] (root diagram) del álgebra de Lie que se tiene. Aunque no será usado más adelante, será incluido aquí pues es una herramienta muy útil, ya que, por su simple inspección [33], se tiene prácticamente toda la información contenida en la tabla 1, o sea, todas las relaciones de paréntesis de Poisson entre las F 's y B 's.

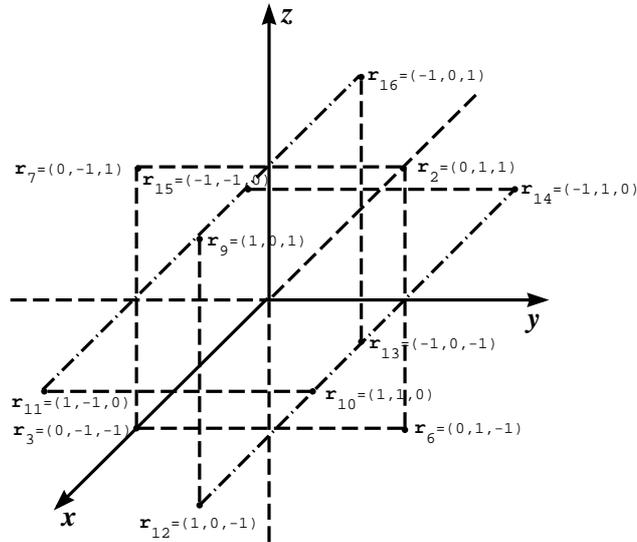


Figura I.5: Diagrama de raíces del álgebra de Lie constituida por las F 's y B 's.

Estudiando la tabla 4, se demuestra que:

$$S_{1r} = (1, 1, 0) \quad (22)$$

$$S_{2r} = (1, -1, 0) \quad (23)$$

$$S_{3r} = (-1, 0, -1) \quad (24)$$

Son raíces simples. La comprobación es la siguiente: un subconjunto $\{S_{vr}\}$ del conjunto de vectores raíces está constituido por raíces simples si y sólo si [48]:

Dados $\alpha, \beta \in S_{vr} \Rightarrow$

$$\alpha \cdot \beta = 0 \quad (25)$$

$$\text{ó} \quad \alpha \cdot \beta = -M \frac{\alpha \cdot \alpha}{2} = -N \frac{\beta \cdot \beta}{2} \quad (26)$$

con M, N , enteros positivos:

En el caso de S_{1r}, S_{2r}, S_{3r} dados por (22-24), se tienen los siguientes resultados:

Para S_{1r} y S_{2r} :

$$S_{1r} \cdot S_{2r} = 0 \quad (27)$$

Para S_{1r} y S_{3r} :

$$S_{1r} \cdot S_{3r} = -1 = -1 \left(\frac{2}{2} \right) = (-1) \frac{S_{1r} \cdot S_{1r}}{2} = -1 \frac{S_{3r} \cdot S_{3r}}{2} \quad (28)$$

$$\Rightarrow M = N = 1$$

Para S_{2r} y S_{3r} :

$$S_{2r} \cdot S_{3r} = -1 = -1 \left(\frac{2}{2} \right) = -1 \left(\frac{S_{2r} \cdot S_{2r}}{2} \right) = -1 \left(\frac{S_{3r} \cdot S_{3r}}{2} \right) \Rightarrow M = N = 1 \quad (29)$$

Comparando (27,28,29) con (25,26), se concluye que S_{1r}, S_{2r}, S_{3r} , son raíces simples.

Se demuestra fácilmente [48] que hay sólo 4 ángulos posibles entre vectores raíces simples: $90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$ y 150° . Además, sólo hay dos valores distintos (y distintos de 0) posibles para $S \cdot S$, siendo S una raíz simple; de acuerdo con ésto, se dice que se tienen raíces simples “largas” y “cortas”, dependiendo del valor de $S \cdot S$. Usando estas dos características de las raíces simples se construye el diagrama de Schouten del cual se habló anteriormente: se representa una raíz simple por un disco, el cual es blanco (\circ) si la raíz es larga y negro (\bullet) si la raíz es corta; estos discos se unen por un número de líneas que es función del ángulo θ entre las raíces simples correspondientes [48].

Si $\theta = 90^\circ$, los discos no se unen; si $\theta = 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$, los discos se unen por 1, 2 y 3 líneas, respectivamente.

En nuestro caso, de la tabla 4 se demuestra que:

$$S_{1r} \cdot S_{1r} = S_{2r} \cdot S_{2r} = S_{3r} \cdot S_{3r} = 2 \quad (30)$$

o sea, todas las raíces son de la misma longitud.

Respecto al ángulo θ se tiene que:

Para S_{1r} y S_{2r}

$$\begin{aligned} \theta_{12} \ni S_{1r} \cdot S_{2r} &= \sqrt{S_{1r} \cdot S_{1r}} \sqrt{S_{2r} \cdot S_{2r}} \cos \theta_{12} \\ \Rightarrow \cos \theta_{12} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{12} = 90^\circ \end{aligned} \quad (31)$$

Para S_{1r} y S_{3r}

$$\theta_{13} \ni S_{1r} \cdot S_{3r} = \sqrt{S_{1r} \cdot S_{1r}} \sqrt{S_{3r} \cdot S_{3r}} \cos \theta_{13}$$

$$\Rightarrow \cos \theta_{13} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_{13} = 120^\circ \quad (32)$$

Para S_{2r} y S_{3r}

$$\begin{aligned} \theta_{23} \ni S_{2r} \cdot S_{3r} &= \sqrt{S_{2r} \cdot S_{2r}} \sqrt{S_{3r} \cdot S_{3r}} \cos \theta_{23} \\ \Rightarrow \cos \theta_{23} &= -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_{23} = 120^\circ \end{aligned} \quad (33)$$

Comparando lo dicho para diagramas de Schouten con los resultados (30-33), se tiene que el diagrama de Schouten es, en nuestro caso:

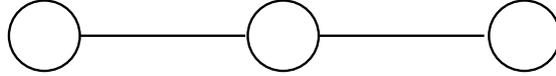


Figura I.6:

Este diagrama es el del álgebra de Lie correspondiente al grupo $SU(4)$, ésto parecería indicar que el grupo dinámico buscado es $SU(4)$. Sin embargo, según las consideraciones siguientes, el grupo dinámico resulta ser $SU(2, 2)$. (Estos grupos están muy relacionados, pues $SU(4)$ es isomorfo al grupo de matrices 4×4 unitarias: conmutan todas con la identidad (“matriz métrica”); $SU(2, 2)$ es el conjunto de matrices unitarias 4×4 que conmutan con una matriz diagonal con dos 1’s y dos -1 ’s, pudiendo representarse la diagonal de esta matriz así: $(1, 1, -1, -1)$).

Todos los elementos del álgebra de Lie del grupo buscado (F ’s y B ’s) conmutan, bajo paréntesis de Poisson, con \mathcal{E} . \mathcal{E} define en el espacio vectorial de las a_ℓ^+ , a_k^- , un operador lineal, a partir del operador bilineal que son los paréntesis de Poisson [33]. Se trata, entonces, de diagonalizar este operador lineal para ver que tipo de “matriz métrica” representa su matriz en la base de sus eigenvectores. Prácticamente, ésto ya está hecho pues, de las fórmulas (97,98) de la sección I.C, se tiene que las funciones que siguen ((34,35)), son tales que las funciones (34) son eigenvectores de \mathcal{E} (en el sentido mencionado arriba) con eigenvalor $\frac{i}{2}$, mientras que las funciones (35) lo son con eigenvalor $-\frac{i}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} b_1^+ &= a_1^+ + ia_2^+ \\ b_2^+ &= a_4^+ + ia_3^+ \\ b_3^+ &= a_1^- + ia_2^- \\ b_4^+ &= a_4^- + ia_3^- \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1^- &= a_2^+ + ia_1^+ \\ b_2^- &= a_3^+ + ia_4^+ \\ b_3^- &= a_2^- + ia_1^- \\ b_4^- &= a_3^- + ia_4^- \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Entonces, la diagonal de la matriz asociada a \mathcal{E} en la base $\{b_\ell^+, b_\ell^-\}$ se puede escribir en la forma: $[\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{-i}{2}, \frac{-i}{2}]$. Ya que el factor $\frac{i}{2}$ aparece en todos los eigenvalores, es irrelevante, por lo que se puede trabajar con el operador $\mathcal{E}'' = -2i\mathcal{E}$, y se tiene que todos los elementos del álgebra de Lie también conmutan con \mathcal{E}'' bajo paréntesis de Poisson. En la base $\{b_\ell^+, b_\ell^-\}$, \mathcal{E}'' tiene asociada una matriz diagonal cuya diagonal se puede escribir en la forma: $[1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1]$. Esta matriz 8×8 sobre el espacio de los reales se puede hacer corresponder con una matriz 4×4 sobre el espacio de los complejos, la cual es diagonal, pudiéndose representar su diagonal en la forma:

$[\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}]$, siendo $\mathbf{1} = (1,1)$ y $-\mathbf{1} = (-1,-1)$, números complejos. Desde este punto de vista, los elementos del álgebra de Lie forman un álgebra isomorfa a la correspondiente al grupo de matrices en este espacio complejo de 4 dimensiones que conmutan con la “matriz métrica” $[\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1}]$. Entonces, el grupo de Lie que es grupo dinámico o de no-invariancia para nuestro problema es, efectivamente, $SU(2, 2)$.

II

Tratamiento cuántico del problema

II.A Resumen

Este tratamiento cuántico se restringe al uso de la ecuación de Schrödinger. En la sección II.B, se usan las coordenadas cuadrático-parabólicas, se obtienen las funciones de onda y una fórmula para la energía, la cual, como era de esperarse, está cuantizada. Sin embargo, se encuentra que la energía depende de parámetros provenientes de las ecuaciones indiciales, los cuales corresponden a la suma y la diferencia entre la componente Z del momentum angular y $\frac{\varepsilon}{\hbar}$, siendo $\varepsilon = \frac{e_2 g}{c}$. De las condiciones a la frontera usuales (integrabilidad cuadrática de las funciones de onda y finitud de la densidad de corriente de probabilidad), no fué posible fijar los valores de estos parámetros, obteniéndose tan sólo rangos posibles para ellos; parte de la dificultad proviene del hecho de que, como es evidente de las ecs. (3, 4, 5, 17) de la sección I.C, μ y ν juegan papeles muy simétricos, reflejándose stó, cuánticamente, en que las ecuaciones diferenciales para μ y ν resultantes de separar la ecuación de Schrödinger son prácticamente idénticas, teniendo que usarse condiciones a la frontera para las soluciones, de manera simultánea: no se puede trabajar con ellas independientemente. Además, el resultado conocido de la cuantización del producto $\frac{e_2 g}{c}$ tampoco pudo obtenerse, por la forma en que está ligada a la de los parámetros mencionados; los argumentos sobre dicha cuantización no son nada directos, por lo que se dedica a la sección II.C a su tratamiento. En la última sección (II.D), se habla un poco de la simetría del problema, identificándose su grupo de simetría correspondiente.

II.B Ecuación de Schrödinger para el problema

Ya que se usarán las coordenadas cuadrático parabólicas, es necesario poner el Hamiltoniano en estas coordenadas. Hay más de una manera de hacer stó. De acuerdo con una de ellas, hay que partir del Hamiltoniano clásico (ec.(2), sección I.C) y siguiendo el método de Schrödinger [49] obtener el Hamiltoniano cuántico en coordenadas cartesianas, para usar después las ecs. (3, 4, 5), sección I-C y la regla de la cadena con el cambio a las coordenadas μ y ν , etc. De acuerdo con otro de los métodos, se puede escribir directamente el Hamiltoniano cuántico en las coordenadas que se usarán, empleando el procedimiento de Podolsky [50] para pasar de la descripción cuántica en unas coordenadas a la correspondiente en otro sistema arbitrario. El procedimiento de cuantización canónica [51] no puede usarse en este caso, pues las coordenadas y momenta $[X, P_x, \dots]$ no están conectados con los $[\mu, P_\mu, \dots]$ por una transformación unitaria, lo cual es claro del hecho de que no tienen los mismos rangos las variables $[x, y, z]$ y $[\mu, \nu, \phi]$ ($(-\infty, \infty)$ las primeras y $(0, \infty)$ y $(0, 2\pi)$ respectivamente, las segundas).

Se usó el primer método de los anotados anteriormente, pues la aplicación del mismo resulta muy larga en el paso de coordenadas cartesianas a cuadrático-parabólicas. El procedimiento de

Podolsky se basa en una forma de normalización de las funciones de onda que es independiente de Jacobianos, y en el uso de una expresión para el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas la cual no es trivial, pues contiene términos del tipo g^{ij} , los cuales denotan los menores del tensor métrico; debido a la longitud de las expresiones algebraicas resultantes, no se empleó este método.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es:

$$H\Psi = E\Psi \quad (1)$$

El Hamiltoniano clásico es: (ec. (2), sección I.C):

$$H = \frac{(\bar{p} - \frac{e_2 \bar{A}}{c})^2}{2m} + \frac{e_1 e_2}{p} + \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{1}{p^2} \right) \quad (2)$$

Siguiendo el procedimiento de cuantización de Schrödinger [45] y usando la ec. (2-a) de la sección I.C, se puede escribir:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\bar{p}^2 - \varepsilon \left[P_x \left(\frac{ZY}{p(x^2 + y^2)} \right) - P_y \left(\frac{ZX}{p(x^2 + y^2)} \right) + \frac{ZY}{p(x^2 + y^2)} P_x - \frac{ZX}{p(x^2 + y^2)} P_y \right] + \frac{\varepsilon^2 Z^2}{p^2(x^2 + y^2)} \right] + \frac{e_1 e_2}{p} + \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{1}{p^2} \right) \quad (3)$$

Trabajando en la representación de coordenadas [52] (en la cual hay que hacer las substituciones $P_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $P_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$, $P_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$), se obtiene:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{i\hbar \varepsilon Z}{mp(x^2 + y^2)} \left[Y \frac{\partial}{\partial x} - X \frac{\partial}{\partial y} \right] + \frac{\varepsilon^2 Z^2}{2mp^2(x^2 + y^2)} + \frac{e_1 e_2}{p} + \frac{\varepsilon^2}{2mp^2} \quad (4)$$

Se pasará ahora a las coordenadas $[\mu, \nu, \phi]$. Usando las ecs. (3,4,5) de la sección I.C se puede escribir [53].

$$\nabla^2 = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \right] \quad (5)$$

$$Y \frac{\partial}{\partial x} - X \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial \phi} \quad (6)$$

De las ecs. (4,5,6) se obtiene:

$$H = \frac{1}{2m(\mu^2 + \nu^2)} \left\{ \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \nu} \right)^2 + \frac{1}{\mu^2} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - \varepsilon \right]^2 + \frac{1}{\nu^2} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \varepsilon \right]^2 + 4me_1 e_2 - \hbar^2 \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right\} \quad (7)$$

Comparando la ec.(7) con la ec. (17) de la sección I.C, se vé que excepto por el término $\frac{-\hbar^2}{2m(\mu^2 + \nu^2)} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \right)$, la expresión (7) se obtiene de la (17) (sección I.C) haciendo las substituciones $P_\mu \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mu}$, $P_\nu \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \nu}$, $P_\phi \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$; éstas son las substituciones que indicaría el proceso de cuantización canónica [47]. El último término de la ec. (7) proviene de que, como se dijo anteriormente, las coordenadas $[\mu, \nu, \phi]$ no se obtiene de las $[X, Y, Z]$ por una transformación unitaria, por lo que el proceso de cuantización canónica no es aplicable.

De la ec. (7), se tiene que la coordenada ϕ es cíclica en la ec. de Schrödinger, por lo cual [54] se tiene una solución del tipo siguiente para la ec. (1):

$$\Psi(\mu, \nu, \phi) = \Psi_1(\mu, \nu)e^{ik\phi} \quad (8)$$

Suponiendo que:

$$\Psi_1(\mu, \nu) = F(\mu)G(\nu) \quad (9)$$

se obtiene, de las ecs. (1) y (7):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{F} \left(\frac{d^2 F}{d\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{dF}{d\mu} \right) - \frac{1}{\hbar^2 \mu^2} \alpha^2 - \frac{2me_1 e_2}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \mu^2 \right] + \\ & + \left[\frac{1}{G} \left(\frac{d^2 G}{d\nu^2} + \frac{1}{\nu} \frac{dG}{d\nu} \right) - \frac{1}{\hbar^2 \nu^2} \beta^2 - \frac{2me_1 e_2}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \nu^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

En la ec. (10):

$$\alpha = \hbar k - \varepsilon \quad (11)$$

$$\beta = \hbar k + \varepsilon \quad (12)$$

Es claro de la ec. (10) que se ha obtenido la separación completa de variables en la ecuación diferencial (1). Llamando γ a la constante de separación y definiendo las cantidades (constantes):

$$A = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} \quad (13)$$

$$B = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (14)$$

$$C = -\frac{2me_1 e_2}{\hbar^2} + \gamma \quad (15)$$

$$A_1 = -\frac{\beta^2}{\hbar^2} \quad (16)$$

$$D = -\frac{2me_1 e_2}{\hbar^2} - \gamma \quad (17)$$

Se obtienen las ecuaciones diferenciales que debe satisfacer $F(\mu)$ y $G(\nu)$:

$$\frac{d^2 F}{d\mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{dF}{d\mu} + \left(\frac{A}{\mu^2} + B\mu^2 + C \right) F = 0 \quad (18)$$

$$\frac{d^2 G}{d\nu^2} + \frac{1}{\nu} \frac{dG}{d\nu} + \left(\frac{A_1}{\nu^2} + B\nu^2 + D \right) G = 0 \quad (19)$$

Es claro, de las ecs. (18,19) que $F(\mu)$ y $G(\nu)$ satisfacen ecuaciones diferenciales esencialmente idénticas. Basta, entonces, resolver una de ellas para obtener la solución de las dos, pues la solución de la otra ecuación se obtiene haciendo los cambios $A \longleftrightarrow A_1$, $D \longleftrightarrow D_1$. Era de esperarse lo anterior de la simetría de la expresión (7) con respecto a μ y ν , y de las ecs. (3,4,5) de la sección I.C, en las cuales μ y ν aparecen también simétricamente. Se trabajará con la ecuación (18).

La ecuación (18) se puede resolver de dos maneras: directamente, por series o transformándola para identificar una ecuación diferencial conocida. Ya que el resultado esencial es obtener la cuantización de $\varepsilon = \frac{e^2 g}{c}$ y, debido a que dicha cuantización no pudo obtenerse de las consideraciones comunes sobre la función de onda (integrabilidad cuadrática y finitud de la densidad de corriente de probabilidad), se incluirán los dos procedimientos, para apreciar más claramente las dificultades.

a) Solución de la ec. (18) por series:

La ec. (18) no es soluble directamente por serie de potencias, pues la relación de recursión obtenida para los coeficientes de la misma involucra 3 índices, complicando su cálculo. Como es usual en esto casos [55], se hallará primero el comportamiento asintótico de la solución (cuando $\mu \rightarrow \infty$). El procedimiento que se sigue es matemáticamente incompleto, pues no se demuestra el hecho en el cual se basa, el cual es el siguiente: el problema de resolver una ecuación diferencial lineal ordinaria es realmente el problema de hallar el Kernel de un operador lineal en un espacio de funciones apropiado [56]; así, para ecuaciones de 2o. orden, el Kernel es un espacio vectorial generado por combinaciones lineales de dos funciones linealmente independientes (las soluciones independientes de la ecuación); entonces, cuando se tiene que dos operadores diferenciales D_1, D_2 son tales que, al variar apropiadamente un parámetro o la variable de la cual dependen las funciones del espacio sobre el cual actúan D_1 y D_2 , $D_1 \rightarrow D_2$, se espera (éste es el hecho que no se demuestra, pues dicha demostración no es esencial en lo que sigue) que, siendo K_1 y K_2 los Kernels de D_1 y D_2 , cuando el parámetro o variable antes dicho se varía, $K_1 \rightarrow K_2$. En otras palabras, se espera que las soluciones independientes de $D_1 f = 0$ y $D_2 f = 0$ sean muy parecidas cuando D_1 y D_2 lo son. Las condiciones para que ésto suceda no son tenidas en cuenta aquí, siguiendo el pensamiento de que es un proceso que ha funcionado en otras ocasiones [55].

De acuerdo con lo anterior, de la ec. (18) se tiene que, cuando $\mu \rightarrow \infty$, para $\frac{dF}{d\mu}$ acotada (lo cual es esencial para la finitud de la densidad de corriente de probabilidad, que se define [57] en términos del gradiente de la función de onda), se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 F_a}{d\mu^2} + B\mu^2 F_a = 0 \quad (20)$$

En la ec. (20), $F_a(\mu)$ denota la función a la cual tiende F cuando $\mu \rightarrow \infty$; o sea, $F_a(\mu)$ es tal que $\lim_{\mu \rightarrow \infty} (F(\mu) - F_a(\mu)) = 0$.

Se comprueba por substitución en (20) que, siendo α_1, α_2 constantes:

$$F_a(\mu) = \alpha_1 e^{\frac{1}{2}(-B)^{\frac{1}{2}}\mu^2} + \alpha_2 e^{-\frac{1}{2}(-B)^{\frac{1}{2}}\mu^2} \quad (21)$$

es solución de (20) para $\mu \rightarrow \infty$.

Se tiene, de la ec. (14), que:

$$B = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (21-a)$$

Entonces, para $E < O$ ($\Rightarrow B > O$), la función $F_a(\mu)$ dada por (21) es oscilatoria: corresponde a una onda plana la función de onda (pues se tiene lo mismo para la función G y para la dependencia en ϕ), lo cuál era de esperarse, pues el problema corresponde al movimiento de una partícula de masa m y carga eléctrica e_2 que sufre Scattering por el monopolo electromagnético, ya que, muy lejos de éste, la partícula se mueve en forma libre (no sujeta a potenciales); en este caso, se usa para normalizar a la función de onda alguno de los métodos usuales [58] (normalización en una caja - "box normalization" etc.). Para $E < O$, $-B > O$, lo que implica que F_a da un comportamiento aceptable (se puede normalizar la función de onda) sólo para $\alpha_1 = 0$; ya que en el caso clásico se estudiarán los estados de movimiento acotado ($E < O$), se continuará la presente discusión con esta hipótesis, o sea, se tomará como comportamiento asintótico aceptable de F, la función:

$$F_a(\mu) = \alpha_2 E^{-\frac{1}{2}(-B)^{\frac{1}{2}}\mu^2} \quad (22)$$

Entonces, todo lo que sigue es válido para $E < O$:

Se probará ahora [55] como solución de (18) a:

$$F(\mu) = e^{\delta\mu^2} f(\mu) \quad (23)$$

Con:

$$\delta = -\frac{1}{2}(-B)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\hbar}(-2mE)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Por substitución de (23) en (18), se obtiene que la ecuación diferencial que debe satisfacer $f(\mu)$ es:

$$\frac{d^2 f}{d\mu^2} + \left(4\delta\mu + \frac{1}{\mu}\right) \frac{df}{d\mu} + (4\delta + C)f + \frac{A}{\mu^2}f = 0 \quad (25)$$

Suponiendo posible para $f(\mu)$ una expansión en serie de potencias:

$$f(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \mu^{\ell+s} \quad (26)$$

con [54] $a_0 \neq 0$, se obtiene la ecuación, indicial:

$$S^2 + A = 0 \quad (27)$$

y la relación de recursión para los coeficientes a_{ℓ} :

$$a_{\ell+2} = \frac{-[4\delta(\ell + S + 1) + C]}{(\ell + 2)(\ell + 2S + 2)} a_{\ell} \quad (28)$$

De las ecs. (13,11) se tiene que $A = -\frac{\alpha^2}{\hbar^2} = -\frac{1}{\hbar^2}(\hbar K - \varepsilon)^2$, por lo que, de la ec. (27), se obtiene:

$$S^2 = \left(K - \frac{\varepsilon}{\hbar}\right)^2 \quad (29)$$

La ec. (29) tiene las raíces:

$$S_1 = K - \frac{\varepsilon}{\hbar} \quad (30)$$

$$S_2 = -K + \frac{\varepsilon}{\hbar} \quad (31)$$

Al considerar las potencias de μ que aparecen al substituir (26) en (25), se tiene, para el coeficiente de μ ($\ell = 1$), $[(s+1)^2 + A]a_1 = 0$, pero, de (27), ésto implica que $a_1 = 0$, lo cual implica, de (28), que todos los coeficientes de índice impar son 0.

Entonces, la solución general de (25) se puede escribir en la forma [59]:

i) Para $S_1, S_2 \ni S_1 - S_2 \neq p$ con p un entero:

$$f(\mu) = \beta_1 \mu^{s_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell} \mu^{2\ell} + \beta_2 \mu^{s_2} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell} \mu^{2\ell} \quad (32)$$

con β_1, β_2 constantes.

ii) Para $S_1, S_2 \ni S_1 - S_2 = p$, con p entero, siendo $f_1(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell} \mu^{2\ell}$:

$$f(\mu) = \gamma_1 \mu^{s_1} (f_1(\mu) \ell \mu(\mu)) + \mu^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \mu^n \quad (33)$$

Con γ_1 una constante. Los coeficientes b_n que aparecen en (33) son hallados [59] substituyendo (33) en (25).

De hecho, como se demostrará más adelante, $S_1 - S_2 = 2(K - \frac{\varepsilon}{\hbar})$ es siempre un entero, por lo que la solución adecuada a (25) será de la forma (33).

Se estudiará ahora el comportamiento de la función $f_1(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{2\ell} \mu^{2\ell}$; de dicho estudio y de uno similar para la solución correspondiente de la ec. (19), se obtendrá una fórmula para la energía.

De la ec. (28), se tiene que, para ℓ grande:

$$\frac{a_{\ell+2}}{a_{\ell}} \rightarrow -\frac{4\delta}{\ell} \quad (34)$$

Pero, del estudio de la serie de potencias para e^{bx^2} :

$$e^{bx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} X^{2n} = \sum_{\ell=0(\ell \text{ par})}^{\infty} \frac{b^{\frac{\ell}{2}}}{(\frac{\ell}{2})!} X^{\ell} = \sum_{\ell=0(\ell \text{ par})}^{\infty} d_{\ell} X^{\ell} \quad (35)$$

se tiene que, para ℓ grande:

$$\frac{d_{\ell+2}}{d_{\ell}} \rightarrow \frac{2b}{\ell} \quad (36)$$

De las expresiones (34,36), se tiene que $f_1(\mu)$ se comporta, esencialmente, como la función $e^{-2\delta\mu^2}$; pero, de la ec. (23), se tiene que $F(\mu)$ se comporta, en este caso, como la función $e^{-\delta\mu^2}$. Ya que (ec. (24)) $\delta < 0$, éste no es un comportamiento aceptable para $F(\mu)$, si se quiere integrabilidad cuadrática de la función de onda. Entonces, para obtener un comportamiento de $F(\mu)$ tal que se pueda tener integrabilidad cuadrática, es necesario cortar la serie para $f_1(\mu)$ o sea, obtener polinomios de ella, para cada valor de ℓ . Lo anterior es posible si y sólo si para un valor dado n de ℓ , $a_{n+2} = 0$ (en este caso, se obtiene un polinomio de grado n), éste es posible si y sólo si (ec. (28)):

$$4\delta(n + s + 1) + C = 0 \quad (37)$$

Haciendo para la ec. (19) el mismo análisis que para (28), se encuentra, si q toma el papel que tenía S para la ec. (25), que las ecuaciones correspondientes a (29,30,31,37) son:

$$q^2 = \left(K + \frac{\varepsilon}{\hbar}\right)^2 \quad (38)$$

$$q_1 = K + \frac{\varepsilon}{\hbar} \quad (39)$$

$$q_2 = -\left(K + \frac{\varepsilon}{\hbar}\right) \quad (40)$$

$$4\delta(j + q + 1) + D = 0 \quad (41)$$

De las ecs. (37,44,15,17,24), se obtiene la siguiente fórmula para la energía:

$$E_{n,j} = -\frac{2me_1^2 e_2^2}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{[(n+j+2) + (s+q)]^2} \right\} \quad (42)$$

Ya que n y j pueden tomar cualquier valor entero par no-negativo, se tiene de la fórmula (42) que la energía toma valores negativos de módulo arbitrariamente grande cuando $S+q$ es próximo a un entero negativo de módulo mayor o igual que 2. Esto sugiere que la suma $S+q$ debe estar cuantizada de tal manera que lo anterior no suceda. Esta última cuantización no es implicada por (42), pues puede evitarse ese resultado físicamente absurdo si $S+q$ es un número tal que $|S+q| - P \geq \eta$, siendo p un entero positivo y $\eta > 0$, sin embargo, esta condición no es nada conclusiva sobre $S+q$ y es muy artificial. De las ecs. (30, 31, 34, 40), se tiene que $S+q$ puede tomar los valores $\pm 2K, \pm 2\frac{\varepsilon}{\hbar}$; entonces, la ec. (42) sugiere la cuantización de K y $\frac{\varepsilon}{\hbar}$.

Si s y q están cuantizados según lo anterior, K y $\frac{\varepsilon}{\hbar}$ lo están también. Sin embargo, como se dijo al principio de esta sección, esta cuantización no se puede obtener de las condiciones usuales de integrabilidad cuadrática de las funciones de onda y de la finitud de la densidad de corriente de probabilidad; la razón de ésto es que dichas condiciones definen tan sólo rangos de valores para s y q , como se verá a continuación:

i) Condición de integrabilidad cuadrática de las funciones de onda.

Esta condición es equivalente a uno de los requerimientos para que las funciones de onda formen un espacio de Hilbert: convierte a su conjunto en un espacio métrico (el otro requerimiento se refiere a la completez de este espacio métrico). Tomando, por ejemplo, la función $f(\mu)$ dada por (32) (la serie que allí aparece, según se vió, debe ser cortada en un polinomio) y, para la variable ν , una solución semejante, se tiene, ya que al jacobiano en las coordenadas $[\mu, \nu, \phi]$ es [61] $\mu\nu(\mu^2 + \nu^2)$ que hay integrabilidad cuadrática para $S, q \geq 1$.

ii) Condición de finitud de corriente de probabilidad.

Tomando la función $f(\mu)$ dada por (32) de tal manera que al polinomio que aparece en el lugar de la serie se le llama $P_n(\mu)$ y considerando $\beta_2 = 0$ por simplicidad (para $\beta_2 \neq 0$ se obtiene el mismo resultado y se alargan las expresiones) y haciendo algo similar para la variable ν en cuyo caso se toma un polinomio $q_\ell(\nu)$ en el papel de $P_n(\mu)$, se tiene que:

Ya que la densidad de corriente de probabilidad se define como [57]

$$\bar{S} = -\frac{i\hbar}{2m} [\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*] \quad (42-a)$$

siendo ψ la función de onda y por la expresión del gradiente [62] en las coordenadas $[\mu, \nu, \phi]$:

$$\nabla = \left[\frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \mu}, \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{1}{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (43)$$

Y tomando en cuenta que (con $S \equiv S_1, q \equiv q_1$):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu} = \left(2\delta\mu + \frac{S}{\mu} + \frac{P_n^1(\mu)}{P_n(\mu)} \right) \psi \quad (44)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \left(2\delta\nu + \frac{q}{\nu} + \frac{q_\ell^1(\nu)}{q_\ell(\nu)} \right) \psi \quad (45)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = iK\psi \quad (46)$$

Se comprueba que, cuando $\mu \rightarrow 0$, hay finitud de \bar{S} para $s \geq 1$; cuando $\nu \rightarrow 0$, hay finitud de \bar{S} para $q \geq 1$.

Se ve entonces que, como se dijo anteriormente, la directa aplicación de las condiciones de integrabilidad cuadrática de la función de onda y de finitud de \bar{S} no implican la cuantización de $\frac{\varepsilon}{\hbar}$, que es un resultado al cual se quiere llegar en forma esencial. En lugar de usar las expresiones para $f(\mu)$ (y las correspondientes para ν) que se usaron, se pudo haber trabajado con las funciones del tipo (33), pero no se tiene ninguna razón aparente para rechazar a las que se usaron, pues dicho rechazo es a posteriori: después de demostrar la cuantización de K y $\frac{\varepsilon}{\hbar}$.

b) Solución de la ec. (18) por identificación con la ecuación confluyente hipergeométrica.

Como se vió anteriormente, si se supone que $F(\mu) = e^{\delta\mu^2}(f(\mu))$, $f(\mu)$ satisface la ecuación (25). Suponiendo ahora que:

$$f(\mu) = \mu^s g(\mu) \quad (47)$$

con S dada por la ec. (27), se obtiene, substituyendo en (25), que $g(\mu)$ debe satisfacer la ecuación;

$$\frac{d^2 g}{d\mu^2} + \left[\frac{2S+1}{\mu} + 4\delta\mu \right] \frac{dg}{d\mu} + [4\delta(S+1) + C]g = 0 \quad (48)$$

Haciendo ahora el cambio de variable;

$$\xi = -8\delta\mu^2 \quad (49)$$

se obtiene (S está dada por la ec. (24)) la ecuación:

$$\xi \frac{d^2 g}{d\xi^2} + [4\delta(S+1) - \xi] \frac{dg}{d\xi} - \left[\frac{1}{2}(S+1) + \frac{C}{8\delta} \right] g = 0 \quad (50)$$

La ec. (50) es idéntica a la ecuación confluyente hipergeométrica [65].

$$\xi \frac{d^2 \mu}{d\xi^2} + (b - \xi) \frac{d\mu}{d\xi} - a\mu = 0 \quad (51)$$

Haciendo las indentificaciones:

$$b = 4(S+1) \quad (52)$$

$$a = \frac{1}{2}(S+1) + \frac{C}{8\delta} \quad (53)$$

Entonces [63], la función g se puede escribir en la forma general:

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \gamma_1 \Phi(a, b, \xi) + \gamma_2 \xi^{1-b} \Phi(a-b+1, 2-b, \xi) = \\ &= \gamma_1 \Phi\left(\frac{1}{2}(S+1) + \frac{C}{8\delta}, 4(S+1), \xi\right) + \\ &+ \gamma_2 \xi^{1-b} \Phi\left(-\frac{7}{2}(S+1) + \frac{C}{8\delta} + 1, 2-4(S+1), \xi\right) \end{aligned} \quad (54)$$

con γ_1, γ_2 constantes y:

$$\Phi(a, b, \xi) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(b+n)\Gamma(n+1)} \xi^n \quad (55)$$

Entonces, de las ecs. (49,47,23), se obtiene;

$$F(\mu) = e^{\delta \mu^2} \mu^s g(-8 \delta \mu^2) \quad (56)$$

Del estudio del comportamiento de $\Phi(a, b, \xi)$ se encuentra [64] que sólo se puede cuantizar en el caso en que la serie (55) se reduce a un polinomio, lo cual sucede, siendo K_1, K_2 enteros positivos, para:

$$b \neq -K_1 \quad (57)$$

$$a = -K_2 \quad (58)$$

De las ecs. (53, 58) se obtiene:

$$\frac{1}{2}(S+1) + \frac{C}{8\delta} = -K_2 \quad (59)$$

Se puede hacer un análisis análogo al anterior para la ec. (19), en cuyo caso, según se dijo anteriormente, sólo hay que hacer los cambios $A \leftrightarrow A_1, C \leftrightarrow D$: la ecuación análoga a (59) resultante es:

$$\frac{1}{2}(q+1) + \frac{D}{8\delta} = -\ell_2 \quad (60)$$

Con q dado por la ec. (38) y ℓ_2 entero positivo. Usando las ecs. (59,60) y las definiciones (24,15,17) y llamando $n = 2K_2, j = 2\ell_2$, se obtiene una fórmula para la energía:

$$E = -\frac{2me_1^2 e_2^2}{\hbar^2} \left[\frac{1}{((n+j+2) + (s+q))^2} \right] \quad (61)$$

Esta fórmula es idéntica a la obtenida anteriormente al resolver las ecs. (18,19) por series (lo cual es un resultado obligatorio). Sin embargo, ésto indica que de las condiciones comunes sobre el comportamiento de la función obtenida, no se obtienen resultados más completos que los que da el primer método de solución. En conclusión, la cuantización de K y $\frac{\varepsilon}{\hbar}$ no puede obtenerse de propiedades directas de la función confluyente hipergeométrica.

Como se ve, entonces, hay que utilizar otros métodos para obtener el resultado de cuantización deseado.

II.C Cuantización de \mathcal{E} y de la componente Z del momento angular

Como se vió en la sección anterior, la obtención de la cuantización de \mathcal{E} y la componente Z del momento angular debe basarse en argumentos un poco menos directos que los usados. La dificultad de los argumentos empleados es un problema que se tienen desde el trabajo original de Dirac [6] y ha sido la causa de diversos trabajos al respecto [65, 66], pues es de importancia fundamental aclarar las bases de la cuantización de \mathcal{E} .

\mathcal{E} tiene la forma (sección I.B):

$$\mathcal{E} = \frac{eg}{c} \quad (1)$$

o sea, es el producto de una carga eléctrica por una magnética, dividido entre la velocidad de la luz. El resultado de que $\frac{\mathcal{E}}{\hbar} = \frac{eg}{\hbar c}$ pueda tomar sólo valores enteros (o semienteros) implica, *conociendo experimentalmente* la cuantización de la carga eléctrica, que la carga magnética, de existir, está también cuantizada. Esta es una situación única en la física; el tener que de las condiciones primarias de una teoría (la Mecánica Cuántica), se obtengan condiciones conclusivas sobre un posible observable fundamental. Siendo este resultado teóricamente tan satisfactorio, la no existencia de partículas cargadas magnéticamente, de ser verdadera, debe ser efecto de profundos requerimientos de alguna teoría más básica que la Mecánica Cuántica. Ha habido la especulación de que el problema de la cuantización de la carga magnética está estrechamente ligado con el del valor exacto de la constante de estructura fina α_f :

$$\alpha_f = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{e \cdot e}{\hbar c} = \frac{1}{137.037} \quad (2)$$

siendo el último resultado en la ec. (2), experimental. La analogía de esta cantidad con:

$$\frac{\mathcal{E}}{\hbar} = \frac{eg}{\hbar c} \quad (3)$$

es evidente. Para algunos [65, 66], una teoría satisfactoria del campo Electromagnético, debe explicar el valor de α_f y decidir sobre la existencia o no existencia de monopolos magnéticos.

En el trabajo original de Dirac [6]; se obtiene la cuantización de \mathcal{E} del estudio de los cambios de fase físicamente aceptables de las funciones de onda (aquellos que no dan lugar a ambigüedades en la interpretación de la teoría cuántica) cuando se estudia su comportamiento sobre una curva cerrada que rodea una línea en la cual una de estas funciones es 0 (estas líneas en las cuales se anulan las funciones de onda se denominan líneas nodales; trabajando no con 3 dimensiones $[x, y, z]$ sino con 4 $[x, y, z, t]$, se obtienen superficies nodales). Los cambios de fase deben, entonces, para evitar ambigüedades de interpretación, estar cuantizados de tal manera que, de acuerdo a los argumentos de Dirac, $\frac{2eg}{\hbar c}$ debe ser igual a un entero.

Posteriormente, en 1944, Fierz [65] obtuvo el mismo resultado usando otro método, el cual se basa en el requerimiento de que las funciones de onda aceptables formen parte de un espacio de representación del grupo de rotaciones $O(3)$; el requerimiento realmente esencial consiste en que las funciones de onda deben ser cuadráticamente integrables (elementos de un espacio de Hilbert), el cual proviene directamente de los postulados de la Mecánica Cuántica [68]. Recientemente Hurst [66] ha seguido un procedimiento análogo al de Fierz, pero desde un punto de vista más algebraico; en su trabajo, Hurst menciona la manera en que el problema de la cuantización de \mathcal{E} está ligado con el de las condiciones bajo las cuales un álgebra de Lie se puede integrar para obtener el grupo de Lie correspondiente. Se describen a continuación los métodos de Fierz y Hurst con los pormenores relevantes; dicha descripción se basa en uso de coordenadas esféricas $[\rho, \theta, \phi]$ (las mismas que usaron ellos) por razones que se explican al final de la parte concerniente al trabajo de Fierz.

i) Procedimiento de Fierz. Escribiendo la solución para la coordenada ϕ en la forma:

$$\Phi(\phi) = e^{i(k + \frac{\mathcal{E}}{\hbar})\phi} \quad (4)$$

se demuestra que K y $\frac{\mathcal{E}}{\hbar}$ deben ser enteros o semienteros para obtener soluciones físicamente aceptables, si se usa como “potencial vectorial” para el campo magnético el mismo empleado por Dirac [65], el cual es el \bar{A}_2 anotado anteriormente (ec.(20), Introducción):

$$\bar{A}_2 = \frac{g}{p(p+z)}(-y, x, 0) \quad (5)$$

El argumento se basa en la observación de que la observable representada por el operador siguiente es una constante del movimiento:

$$\overline{\mathcal{D}} = \overline{\rho} \times \left(\overline{p} - \frac{e_2}{c} \overline{A}_2 \right) - \varepsilon \widehat{\rho} \quad (6)$$

($\overline{\mathcal{D}}$ es el análogo cuántico del vector \overline{D} de “momentum angular total”, cuya constancia en el caso clásico se demostró en las secciones I.B y I.C. \overline{D} está dado por (ec. 7, sección I.B): $\overline{D} = \overline{\rho} \times \left(\overline{p} - \frac{e_2}{c} \overline{A} \right) - \varepsilon \widehat{\rho}$). Las cantidades que aparecen en la ec. (6) representan realmente operadores, pero se usará la notación del caso clásico mientras no haya confusiones. La constancia de $\overline{\mathcal{D}}$ se demuestra más adelante, en la sección II.D.

Además, como se verá en la sección II.D, las componentes de $\overline{\mathcal{D}}$ satisfacen las relaciones de conmutación (análogas a las de paréntesis de Poisson del caso clásico, ec. (179), sección I.C):

$$[\mathcal{D}_\ell, \mathcal{D}_j] = i \hbar \varepsilon_{\ell j k} \mathcal{D}_k \quad (7)$$

Las relaciones anteriores corresponden a las de el Álgebra de Lie de los generadores del grupo $O(3)$, o sea, son las relaciones comúnmente llamados de momentum angular. Siguiendo el procedimiento de rutina para el momento angular [69], se definen ahora los operadores de escalera dados por:

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_x + i \mathcal{D}_y \quad (8)$$

$$\mathcal{D}_- = \mathcal{D}_x - i \mathcal{D}_y \quad (9)$$

Se puede escribir, en coordenadas esféricas [65]:

$$\mathcal{D}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \phi} - \varepsilon \quad (10)$$

$$\mathcal{D}_+ = \hbar e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) \quad (11)$$

$$\mathcal{D}_- = \hbar e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) \quad (12)$$

En las ecuaciones anteriores, $\varepsilon = \frac{e_2 q}{c}$, de acuerdo con la sección I.B. Ahora, se encontrará un conjunto de funciones que son eigenfunciones de \mathcal{D}_z y que forman un espacio que es base para una representación de $O(3)$. Es claro que estas eigenfunciones pueden escogerse como funciones de onda (eigenfunciones del Hamiltoniano H) pues \mathcal{D}_z y H conmutan: $[\mathcal{D}_z, H] = 0$. Pero, de acuerdo con los postulados de la Mecánica Cuántica [68], las eigenfunciones de H deben ser cuadráticamente integrables; como se mencionó anteriormente, éste es el requerimiento esencial, del cual se implica la cuantización buscada.

Se debe tener, entonces, que las eigenfunciones ψ_m de \mathcal{D}_z (que lo son, de acuerdo con lo anterior, de H) satisfacen la condición:

$$\int_I |\psi_m(q)|^2 dq < \infty \quad (13)$$

en la cual q denota el argumento de ψ_m e I el conjunto de integración.

Si se describen las funciones de onda en la forma:

$$\psi = R(p) Y_k(\cos \theta) e^{i(k + \frac{\varepsilon}{\hbar})\phi} \quad (14)$$

se obtiene para Y_k , ya que \mathcal{D}_+ es operador de escalera y siendo $x = \cos\theta$:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dx} + \frac{kx + \frac{\varepsilon}{h}}{1-x^2} \right) Y_k = Y_{k+1} \quad (15)$$

Usando ahora la ecuación (de comprobación trivial desarrollando el lado derecho):

$$Y^1 + fY = \left\{ e^{-\int f dx} \right\} \left\{ \frac{d}{dx} \left[(e^{\int f dx}) Y \right] \right\} \quad (16)$$

Al comparar con (15) se tiene que $f = \frac{kx + \frac{\varepsilon}{h}}{1-x^2}$ y el resultado:

$$Y_{k+1} = (1-x^2)^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} (1-x^2)^{-\frac{k}{2}} Y_k \right\} \quad (17)$$

Usando ahora D_- , se obtiene una fórmula que tiene a Y_{k-1} en el lado izquierdo. Por aplicación repetida de estas dos fórmulas se obtiene:

$$Y_{k+n} = (1-x^2)^{\frac{k+n}{2}} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} (1-x^2)^{-\frac{k}{2}} Y_k \right] \quad (18)$$

$$Y_{k-n} = (1-x^2)^{\frac{n-k}{2}} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} (1-x^2)^{\frac{k}{2}} Y_k \right] \quad (19)$$

En términos de $x = \cos\theta$, la expresión (13) se convierte en:

$$\int_{-1}^1 |Y_k(x)|^2 dx < \infty \quad (20)$$

En general, si los términos encerrados por los corchetes de las ecs. (18,19) contienen potencias de x que *no* son números enteros positivos; por aplicación del operador de derivada, a medida que n crece se tendrá que Y_{k+n} y Y_{k-n} contienen potencias de x negativas con módulos arbitrariamente grandes; o sea para cada k , existirá un valor de n a partir del cual la condición (20) no se cumple para Y_{k+n} y Y_{k-n} , por lo que la función de onda asociada (ec. (14)) no será físicamente aceptable. Entonces, la única manera de que la condición (20) se cumpla para todo valor de n en Y_{k+n} , Y_{k-n} , es que los términos encerrados por los corchetes en (18) y (19) sean polinomios; sean estos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, definidos por:

$$p(x) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} (1-x^2)^{-\frac{k}{2}} Y_k \quad (21)$$

$$q(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\varepsilon}{2h}} (1-x^2)^{\frac{k}{2}} Y_k \quad (22)$$

De (21) y (22):

$$q(x) = (1+x)^{(k-\frac{\varepsilon}{h})} (1-x)^{(k+\frac{\varepsilon}{h})} p(x) \quad (23)$$

Si $p(x)$ es un polinomio, $q(x)$ lo será también si y sólo si $k - \frac{\varepsilon}{h} = \ell_1$ y $k + \frac{\varepsilon}{h} = \ell_2$ con ℓ_1, ℓ_2 números enteros, los cuales pueden ser positivos o negativos, sujetos en este último caso a la condición de que $p(x)$ tenga como factor un polinomio divisible entre $(1-x)^{-\ell_2} (1+x)^{-\ell_1}$ en el anillo de polinomios.

Lo anterior implica, ya que $k = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ y $\frac{\varepsilon}{h} = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, que k y $\frac{\varepsilon}{h}$ deben ser los dos enteros o los dos semienteros. Este es el mismo resultado de Dirac.

No se presenta el tratamiento anterior en las coordenadas cuadrático parabólicas originales pues, haciendo un exámen del mismo, se ve que su éxito está basado en que fue posible obtener

ecuaciones del tipo (15) para las Y_k 's, o sea, ecuaciones diferenciales de una sola variable. Esto se debe a que las coordenadas esféricas contienen una de longitud (ρ) y dos de ángulo, teniendo que las eigenfunciones de \mathcal{D}_z tienen las dependencias en (ρ) y en (θ, ϕ) completamente diferenciadas, lo cual permite, tomando ventaja de la sencilla dependencia en ϕ (ec. (14)), obtener una ecuación diferencial ordinaria para Y_k . Sin embargo, al usar las coordenadas $[\mu, \nu, \phi]$, se obtiene que \mathcal{D}_\pm contienen derivadas con respecto a μ, ν, ϕ . La derivada con respecto a ϕ no causa ningún problema (desaparece) por la misma razón considerada en coordenadas esféricas, pero las derivadas con respecto a μ y ν aparecen en forma más o menos simétrica, por lo que se obtienen para las Y 's ecuaciones diferenciales parciales con 2 variables.

ii) Procedimiento de Hurst. Realmente, el método de Fierz se ha incluido por dos razones principales: para aclarar las características básicas del procedimiento de Hurst y para obtener un tipo de cuantización que es fundamentalmente distinto del que se obtendrá ahora para ε usando el potencial \bar{A} . Usando el “potencial vectorial” \bar{A}_2 (ec. (5)), se obtiene el resultado de que $\frac{\varepsilon}{\hbar}$ puede tomar valores enteros y semienteros; al usar el potencial \bar{A} (ec. (2-a), sección I.C), se obtiene, como se verá a continuación, que $\frac{\varepsilon}{\hbar}$ sólo puede tomar valores enteros. Ya que \bar{A} y \bar{A}_z difieren tan sólo en una norma (gauge) (ec. (21), Introducción), éste es un resultado realmente inesperado. Se volverá sobre este punto en la sección de conclusiones.

En lugar de considerar las ecuaciones para los operadores de escalera (ecs. (18), (19)) se trabaja con la ecuación de eigenvalores para el operador $\bar{\mathcal{D}}^2 = \bar{\mathcal{D}} \cdot \bar{\mathcal{D}}$ con $\bar{\mathcal{D}}$ dado por la ec. (6). Ya que $\bar{\mathcal{D}}$ es una constante del movimiento, lo es también $\bar{\mathcal{D}}^2$, por lo que sus eigenfunciones se pueden escoger como funciones, de onda. Escribiendo estas funciones de onda en la forma:

$$\Psi(\rho, \theta, \phi) = R(\rho) \Phi(\theta, \phi) \quad (24)$$

y usando el hecho de que al emplear \bar{A} dado por la ec. (2-a) de la Introducción se tiene:

$$\bar{\mathcal{D}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\text{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\ell i \frac{\varepsilon}{\hbar} \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 \text{sen}^2\theta} \right] \quad (25)$$

se obtiene para la ecuación de eigenvalores de $\bar{\mathcal{D}}^2$:

$$\bar{\mathcal{D}}^2 \Phi(\theta, \phi) = \hbar^2 \lambda \Phi(\theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) \Phi(\theta, \phi) \quad (26)$$

en el cual el eigenvalor λ correspondiente se ha escrito como $\ell(\ell+1)$.

Escribiendo ahora:

$$\Phi(\theta, \phi) = \varepsilon^{ik\phi} \Psi_1(\theta) \quad (27)$$

se obtiene de (26) y (27) la siguiente ecuación para $\Psi_1(\theta)$:

$$\frac{d^2\Psi_1}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Psi_1}{d\theta} - \left(\frac{k^2}{\text{sen}^2\theta} + \frac{2k\varepsilon}{\hbar} \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2 \text{sen}^2\theta} \right) \Psi_1 + (\ell)(\ell+1)\Psi_1 = 0 \quad (28)$$

Sea:

$$u = \cos\theta \quad (29)$$

Escribiendo:

$$\Psi_1(\theta) = \Psi_2(u) = \left(\frac{1-u}{2} \right)^{\frac{k+\frac{\varepsilon}{\hbar}}{2}} \left(\frac{1+u}{2} \right)^{\frac{1}{2}(k-\frac{\varepsilon}{\hbar})} f\left(\frac{1-u}{2} \right) \quad (30)$$

resulta, usando las ecs. (28,29) y la notación:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar} \quad (31)$$

la ecuación:

$$(1 - u^2) \frac{d^2 \Psi_2}{du^2} - 2u \frac{d\Psi_2}{du} - \frac{k^2 + 2k\omega u + \omega^2}{1 - u^2} \Psi_2 + \ell(\ell + 1) \Psi_2 = 0 \quad (32)$$

con el cambio de variable:

$$Z = \frac{1 - u}{2} \quad (33)$$

se obtiene, de la ec. (30):

$$\Psi_1(\theta) = \Psi_2(u) = \Psi(Z) = Z^{\frac{1}{2}(k+\omega)}(1 - Z)^{\frac{1}{2}(k-\omega)} f(Z) \quad (34)$$

Usando las ecs. (33,34) en (32) resulta la siguiente ecuación diferencial para $f(Z)$:

$$Z(1 - Z) \frac{d^2 f}{dZ^2} + [(\omega + k + 1) - (2k + 2)Z] \frac{df}{dZ} - [(k - \ell)(k + \ell + 1)] f = 0 \quad (35)$$

Pero la ecuación (35) es idéntica a la ecuación hipergeométrica [70]:

$$Z(1 - Z) \frac{d^2 f}{dZ^2} + [d - (a + b + 1)Z] \frac{df}{dZ} - a b f = 0 \quad (36)$$

haciendo las identificaciones:

$$a = k - \ell \quad (37)$$

$$b = k + \ell + 1 \quad (38)$$

$$d = k + \omega + 1 \quad (39)$$

La solución de (36) se escribe en la forma [70]:

$$f(Z) = \delta_1 F(a, b, d, Z) + \delta_2 Z^{1-d} F(b - d + 1, a - d + 1, 2 - d, Z) \quad (40)$$

con δ_1, δ_2 constantes.

Usando las ecs. (37-39, 34) se obtiene para $\Psi(Z)$:

$$\begin{aligned} \Psi(Z) = & Z^{\frac{1}{2}(k+\omega)}(1 - Z)^{\frac{1}{2}(k-\omega)} [\delta_1 F(k - \ell, k + \ell + 1, k + \omega + 1, Z) + \\ & + \delta_2 Z^{(-k-\omega)} F(\ell - \omega + 1, -\ell - \omega, 1 - k - \omega, Z)] \end{aligned} \quad (41)$$

De acuerdo con las ecuaciones (25,26), la función $\Psi(Z)$ debe ser regular (debe existir su derivada - la cual debe ser derivable también, según (25)-) en todo su dominio de definición. En coordenadas esféricas, θ se define entre 0 y π . Entonces, usando las ecuaciones (33,29) se tiene que el intervalo de definición de Z es $[0, 1]$. Entonces, la función $\Psi(Z)$ debe ser regular en el intervalo $[0, 1]$; en particular, la regularidad de Ψ en 0 y en 1 implica, como se verá en lo siguiente, la cuantización de k y ω .

En el análisis que sigue, sea $\omega > 0$; como se verá al final del mismo, este requerimiento no implica ninguna restricción sobre la validez general del estudio y se hace sólo por razones de concretez en los argumentos. Hay que considerar los siguientes casos:

Caso 1 $k > \omega$

- i) Para $Z = 0$, la regularidad de Ψ implica $\delta_2 = 0$.
- ii) Para $Z = 1$, usando la fórmula (71) para desarrollar la función hipergeométrica con respecto al punto $Z = 1$:

$$F(a, b, d, Z) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(d-a-b)}{\Gamma(d-a)\Gamma(d-b)}F(a, b, a+b-d+1, 1-Z) + \frac{\Gamma(d)\Gamma(a+b-d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-Z)^{d-a-b}F(d-a, d-b, d-a-b+1, 1-Z) \quad (42)$$

se obtiene regularidad de $\Psi(Z)$ en $Z = 1$ si y sólo si $a = -p$, con p un entero positivo ó 0 (en cuyo caso la serie que se tiene en (41) se reduce a un polinomio); o sea, si y sólo si (usando la ec. (37)):

$$\ell = k + p \quad (44)$$

La razón de lo anterior es la siguiente: al usar la fórmula (42)) aparece en el 2do. término del lado derecho de la misma una potencia de $(1 - Z)$ de la forma: $(1 - Z)^{d-a-b} = (1 - Z)^{(\omega-k)}$, lo cual implica que la potencia de $(1 - Z)$ que aparece en la ec. (41) es $(1 - Z)^{\frac{1}{2}(\omega-k)}$. Entonces, la condición $k > \omega$ implica $\omega - k < 0$, lo cual implica que hay regularidad de $\Psi(Z)$ en $Z = 1$ si y sólo si el segundo término del lado derecho, de la ec. (42) es 0; ésto es posible si y sólo si a ó b (o ambas) son enteros negativos ó 0, pues $\Gamma(a)$ y $\Gamma(b)$ aparecen en el denominador del término que se quiere anular; la condición sobre a ó b es necesaria y suficiente pues la función Γ , para argumento real, nunca [72] es 0, por lo que, para anular términos de la forma $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)}$ como el que aparece en la expresión que se desea anular, la única manera de hacerlo es haciendo (y) un entero negativo ó 0, pues sólo en estos casos [72] $\Gamma(y) \rightarrow \pm \infty$.

Caso 2 $-\omega < k < \omega$

- i) Para $z = 0$, hay regularidad de Ψ si $\delta_2 = 0$
- ii) Para $z = 1$, usando nuevamente la expresión (42), se obtiene regularidad de $\Psi(Z)$ si $d - b = -p$, con p un entero positivo ó 0; sea, si:

$$\ell = \omega + p \quad (45)$$

La razón es la siguiente: la potencia de $(1 - Z)$ que aparece en (42) es $(1 - Z)^{(\omega-k)}$, lo cual implica que, en (41), la potencia de $(1 - Z)$ que es factor del primer término de (42) es $(1 - Z)^{\frac{1}{2}(k-\omega)}$ y la que es factor de 2o. término de (42) es $(1 - Z)^{\frac{1}{2}(\omega-k)}$; con la segunda de estas potencias no hay problema de regularidad en $Z = 1$, pues $\omega - k > 0$ sin embargo, ya que $k - \omega < 0$, se obtiene regularidad de $\Psi(Z)$ si y sólo si el primer término en la ec. (42) se anula, si y sólo si $(d - a)$ ó $(d - b)$ son enteros negativos ó 0.

Caso 3 $k < -\omega$

- i) Para $Z = 0$, la regularidad de $\Psi(Z)$ implica $\delta_1 = 0$.
- ii) Para $Z = 1$, hay regularidad de $\Psi(Z)$ si:

$$\ell = p - k \quad (46)$$

El resultado (45) se obtiene de considerar la ec. (42) para el segundo sumando del lado derecho en (41); al hacerlo, se obtiene que, en (41), la potencia de $(1 - Z)$ que es factor del primer sumando en (42) es $(1 - Z)^{\frac{1}{2}(k-\omega)}$ y la que es factor del segundo sumando es $(1 - Z)^{\frac{1}{2}(\omega-k)}$; con esta segunda potencia no hay problema de regularidad en $Z = 1$, pues $\omega - k > 0$; sin embargo, ya que $k - \omega < 0$, para obtener regularidad de $\Psi(Z)$, se debe tener que el 1er. sumando que resulta de la aplicación de (42) sea 0, lo cual se logra si y sólo si $(-\ell - k)$ ó $(\ell - k + 1)$ (ó ambas) son enteros negativos ó 0; trabajando con $(-\ell - k)$, se tiene que, si p es un entero positivo ó 0, la condición de regularidad de $\Psi(Z)$ en $Z = 1$ es $-\ell - k = -p$, de la cual se obtiene la relación (45).

Usando las relaciones (43,44,45) se obtiene la siguiente gráfica de ℓ contra k :

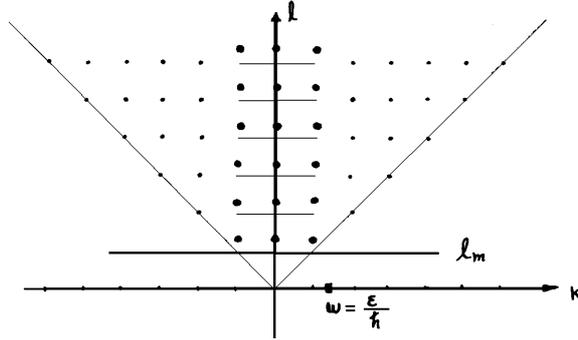


Figura II.1:

Un exámen de la gráfica anterior indica que las funciones $\Phi(\theta, \phi) = \varepsilon^{ik\phi} \Psi_1(\theta)$ dan una base de representación del grupo $0(3)$ si y sólo si:

$$\omega = [\omega] \tag{47}$$

donde $[\omega]$ es el entero menor que ω más próximo a él; ésto se obtiene ya que solamente en este caso desaparece la discontinuidad de los puntos marcados en la figura: solamente en este caso, para cada valor de ℓ existen $(2\ell + 1)$ valores posibles [69] de k (k es el eigenvalor del operador \mathcal{D}_z , según es evidente de las ecs. (27, 10)).

De la fig. 1, es claro que el único efecto de cambiar el valor de ω consiste en un cambio en el nivel de la línea marcada ℓ_m . Cuando se toman valores negativos de ω , el único cambio que resulta es que (44) se convierte en $\ell = p - \omega$ y que en (46) $[\omega]$ representa al entero mayor que ω más próximo a él. También es claro, de la fig. 1 y de estas últimas consideraciones, que:

$$\ell \geq |\omega| = \frac{|\varepsilon|}{\hbar} \tag{48}$$

El resultado anterior implica:

$$[\ell(\ell + 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar \geq |\varepsilon| \tag{49}$$

Las expresiones (47, 48) indican que el momento angular total siempre es mayor que $|\varepsilon| = |\frac{e_2 g}{c}|$. Este resultado ya fué mencionado en la sección I.B, en relación con su análogo clásico (ecs. (11,12, 12-a), sección I.B).

II.D Grupo de simetría cuántico del problema

El problema de la simetría cuántica del Hamiltoniano de la ec. (3) (sección II.B) es bien conocido [12, 13], por lo cual la discusión se limita aquí a dar un método (tal vez el más corto) de obtener el grupo de simetría para el mismo.

En coordenadas polares, la ecuación (1-d) de la sección I.C tienen el análogo cuántico [12]:

$$\mathcal{H}_2 = \frac{P_\rho^2}{2m} + \frac{\mathcal{D}^2}{2m\rho^2} - \frac{\varepsilon^2}{2m} \left(\frac{1}{\rho^2} \right) + e_2 V \quad (1)$$

En la ec. (1), P_ρ representa al operador asociado al P_ρ clásico en la representación de coordenadas.

Definiendo, en analogía con el caso clásico, los operadores:

$$\overline{\mathcal{D}} = \overline{\rho} \times \left(\overline{\mathbf{p}} - \frac{e_2 \overline{\mathbf{A}}}{c} \right) - \varepsilon \widehat{\rho} \quad (2)$$

$$\overline{\mathcal{R}}_\varepsilon = (-2mE)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} \right) (\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\pi} - \overline{\pi} \times \overline{\mathcal{D}}) - m e_1 e_2 \widehat{\rho} \right] \quad (3)$$

se demuestra que conmutan con el Hamiltoniano del problema: representan constantes del movimiento. $\overline{\mathcal{D}}$ es el análogo cuántico del vector $\overline{\mathcal{D}}$ definido en la ec. (123), sección I.C; $\overline{\mathcal{R}}_\varepsilon$ lo es del vector definido por la ec. (171), sección I.C. En cuanto al operador $\overline{\mathcal{R}}$, hay que aclarar que la E que aparece en su definición representa realmente un eigenvalor de la energía: para cada eigenvalor existe un operador $\overline{\mathcal{R}}_\varepsilon$, el cual actúa tan sólo en el subespacio del espacio de Hilbert de las eigenfunciones del Hamiltoniano, tal que todas las funciones de onda que lo forman pertenecen al mismo eigenvalor E ; esta consideración es análoga a la que se hace en el tratamiento de Pauli del problema cuántico del átomo de Hidrógeno [41].

Que $\overline{\mathcal{D}}$ y $\overline{\mathcal{R}}$ conmutan con el Hamiltoniano puede demostrarse usando la ec. (1) o la ec. (3) de la sección II.B; en ambos casos, la demostración es larga. Se ahorra un poco de trabajo tomando ventaja del hecho de que, para cualquier función de la magnitud del radio (ρ , $f = f(\rho)$), se tiene que:

$$[\overline{\mathcal{D}}, f(\rho)] = 0 \quad (4)$$

Esto implica que $\overline{\mathcal{D}}$ es constante del movimiento independientemente del potencial que se use en el Hamiltoniano, siempre que sea función sólo de ρ ; este resultado ya fue anotado en su versión clásica en la sección I.B. Como se vió en la sección II.C, la cuantización de $\frac{\varepsilon}{\hbar}$ y k se basa en que el operador $\overline{\mathcal{D}}$ es una constante del movimiento; el hecho de que la constancia de $\overline{\mathcal{D}}$ sea independiente del potencial escalar usado, indica que dicha cuantización es un fenómeno general que depende tan sólo del “potencial vectorial” (de interacción magnética) empleado.

Es un problema de álgebra demostrar las siguientes relaciones de conmutación entre los componentes de $\overline{\mathcal{D}}$ y $\overline{\mathcal{R}}_\varepsilon$:

$$[\mathcal{D}_\ell, \mathcal{D}_j] = i \hbar \varepsilon_{\ell j k} \mathcal{D}_k \quad (5)$$

$$[\mathcal{R}_{E_\ell}, \mathcal{R}_{E_j}] = i \hbar \varepsilon_{\ell j k} \mathcal{D}_k \quad (6)$$

$$[\mathcal{D}_\ell, \mathcal{R}_{E_j}] = i \hbar \varepsilon_{\ell j k} \mathcal{R}_{E_k} \quad (7)$$

Aparte del factor $i \hbar$, estas relaciones de conmutación son idénticas a las de paréntesis de Poisson de las componentes de las cantidades clásicas $\overline{\mathcal{D}}$ y $\overline{\mathcal{R}}$ (ecs. (178,179,180), sección I.C). Indican las relaciones (5,6,7), entonces [13], que $\overline{\mathcal{D}}_1, \overline{\mathcal{D}}_2, \overline{\mathcal{D}}_3, \overline{\mathcal{R}}_{E_1}, \overline{\mathcal{R}}_{E_2}, \overline{\mathcal{R}}_{E_3}$ son generadores del grupo $O(4)$. O sea, igual que en el caso clásico, $O(4)$ es el grupo de simetría del problema.

III

Conclusiones

La sección de conclusiones es, en cierto sentido, la más personal de un trabajo. Por ésto, cambiaré el tono más o menos impersonal del lenguaje usado en las secciones anteriores, más técnicas. Enumeraré a continuación las conclusiones que considero más relevantes sobre la presente tesis.

1. En la Introducción, las ecuaciones (3,4) son generalizaciones de las (1,2) las cuales no tienen más base que un propósito de simetrización; por lo tanto, los resultados que se obtienen de su aplicación tienen tan sólo este fundamento. Entonces, la definición misma de monopolo magnético no es obvia. Por ejemplo, se puede definir un monopolo magnético puntual como “algo” cuya presencia implica la veracidad de la cuarta de las ecuaciones (3) de la Introducción en el punto en el cual se supone su existencia; en este caso, integrando la ecuación mencionada en una esfera de radio ρ , aplicando consideraciones de simetría radial y la expresión para la fuerza de Lorentz generalizada (o sea, siguiendo un procedimiento análogo al empleado en Electroestática para obtener la ley de Coulomb a partir de la de Gauss), se obtiene una expresión para la fuerza entre dos monopolos magnéticos análoga a la obtenida en el caso eléctrico, la cual indica que dos monopolos con igual signo se repelen y dos con signos contrarios se atraen. Sin embargo, algunas personas, como Miller y Gamblin [73], partiendo de consideraciones un poco distintas a las referentes puramente a razones de simetría, han obtenido resultados más bien inesperados: Gamblin [73] requiriendo la existencia de un principio de acción (densidad Lagrangiana) satisfactorio, obtiene, de las ecuaciones del campo, el resultado de que monopolos de signos iguales se deben atraer, existiendo repulsión entre los signos opuestos; este resultado está en oposición completa al mencionado anteriormente.

Lo anterior, da una idea de tipo de dificultades que se tienen en la construcción de una teoría de partículas hipotéticas: distintos requerimientos implican teorías con resultados en ocasiones opuestos. Sin embargo, se necesita, en cada caso, una base de partida; en el caso de monopolos magnéticos, me parece que la original, consiste en razones de simetría, es la más satisfactoria.

Se debe tener en cuenta, entonces, la base, débil, sobre la cual se hace la generalización de las ecuaciones (1,2) a las (3,4) de la introducción. Esto implica especiales dificultades para la detección experimental de monopolos magnéticos; en cualquier arreglo diseñado para este fin, se trata de identificarlos por alguna propiedad particular (por ejemplo, la fuerza de Lorentz sobre ellos en el campo eléctrico de un condensador o la corriente eléctrica a que dan lugar según la Ley de Farady); sin embargo, puede ser que una de las fallas fundamentales en los métodos experimentales empleados hasta hoy es el hecho de suponer de los monopolos propiedades que realmente no tienen. En este caso, debido a que se debe suponer algo respecto a ellos para poder principiar su estudio, no queda más remedio que probar la mayor cantidad posible de métodos de detección.

Respecto al caso particular de este trabajo, vale la pena remarcar que los resultados obtenidos no dependen de la veracidad de las ecuaciones (3,4) de la Introducción, pues se supuso que la partícula móvil solo tiene masa y carga eléctrica y que el monopolo magnético se encuentra fijo, por

lo cual la interacción electromagnética de la partícula móvil con el campo magnético (cuyo origen no importa) está descrita por la fórmula de Lorentz común (ec. (2), Introducción, la cual es, como diría un publicista, de comprobada eficacia. El procedimiento pierde esta base de veracidad fundamental si se supone algún monopolo magnético móvil, pues su ecuación de movimiento involucra entonces la fuerza de Lorentz generalizada (ec. (4), Introducción).

Un dato un poco curioso sobre la aparente escasez (o no existencia) de monopolos magnéticos se relaciona con la teoría de la radiación cósmica de Fermi [78]. De acuerdo con ésta, los rayos cósmicos adquieren sus elevadas energías de campos magnéticos galácticos. De existir monopolos en suficiente abundancia (y estando sujetos a la fuerza de Lorentz generalizada de la ecuación (4) de la Introducción), neutralizarían con el tiempo todos estos campos galácticos (de la misma manera que las partículas eléctricas neutralizan los campos eléctricos que aparecen en diversas zonas de la galaxia), dejando así de producirse los rayos cósmicos. De acuerdo con esto puede pensarse que, si la teoría de Fermi es correcta, los monopolos magnéticos deben ser escasos no solamente en una vecindad de la tierra, sino en toda nuestra galaxia. también, de acuerdo con lo mencionado en la conclusión (5), un monopolo acelerado en los campos antes mencionados, adquiriría una energía mucho más elevada que las que adquieren las partículas eléctricas (rayos cósmicos) que detectamos. La escasez de monopolos antes referida tendría entonces relación con la no observación de ellos en los rayos cósmicos, los cuales constituyen una fuente posible para ellos.

2. Con respecto al método especial empleado para determinar el grupo de simetría clásico del problema, se puede tener la idea de que es demasiado largo y tedioso, debido a lo cual no se justificaría (aunque la comprobación directa de que las componentes, de \bar{D} y \bar{R} (ecs. (123,171), sección I.C) son generadores del grupo de simetría en un ejercicio algebraico también bastante largo). Sin embargo, se tiene en favor de su uso que es un método sistemático en cuanto a que sólo depende de la forma funcional del Hamiltoniano respecto a las variables de acción [28]. En lo concerniente a la consideración que se hizo de ε su “variable canónica conjugada” como nuevos grados de libertad (nuevas dimensiones del espacio fase) para, al final, tomar como una restricción su constancia, sin usar multiplicadores de Lagrange en el proceso de solución del problema, es claro que esto es análogo a tener un problema de máximos y mínimos (las ecuaciones de la Mecánica se obtienen de un principio variacional, el de Hamilton), con restricciones, en el cual se usan estas últimas hasta el final, sin emplear el método de Lagrange. El mérito del procedimiento seguido consiste en que se evitó el formalismo un poco tedioso (cuando se trabaja con varias dimensiones) de Lagrange y en que se obtiene un poco de libertad (desde el punto de vista psicológico) para tratar como parámetros lo que para la mayoría de las personas son sólo constantes, con lo cual se está un poco mejor preparado con respecto a cambios de puntos de vista en lo que se refiere a la verdadera condición de lo que comúnmente se considera como constantes (ejemplos, el concepto clásico de masa, el método de obtener al límite clásico en Mecánica Cuántica haciendo tender formalmente la constante de Planck a 0; el procedimiento para obtener el límite no relativista haciendo tender formalmente, en las fórmulas relativistas, la velocidad de la luz a infinito, etc).

3. El procedimiento que se sigue usualmente en la obtención de un grupo dinámico consiste (ver referencias en la sección I.D) en definir arbitrariamente funciones de las variables y momenta canónicos y comprobar después que cumplen relaciones de paréntesis de Poisson (clásicamente) y de conmutación (cuánticamente) correspondientes a las de los generadores de un grupo de Lie, el cual es grupo dinámico del problema. En el presente trabajo, se identifica un grupo dinámico para el problema clásico de una manera distinta: del conjunto de eigenfunciones (bajo paréntesis de Poisson) de ε se construyen productos (ecs. (101 - 108), sección I.C; ecs. (1-8), sección I.D) que resultan ser los generadores de un grupo dinámico; o sea, no tuvieron que definirse funciones con el especial y único fin de construir los generadores del grupo deseado. Me parece este método de trabajo más satisfactorio que el primero citado y, observando que se basa, realmente, en la consideración de ε como una variable canónica más, se puede conjeturar que sea ésta una manera fructífera de trabajar, aunque la comprobación de esto tiene que hacerse aplicándola a más problemas y viendo

si los resultados obtenidos corroboran la certeza de la suposición.

4. Un resultado, estudiado en este trabajo, que es el que considero el más interesante, es el referente a la cuantización de la cantidad $\varepsilon = \frac{e_2 g}{c}$. Es sencillo verificar que este resultado, junto con la evidencia experimental de que existe una carga eléctrica de magnitud mínima (la carga electrónica), implica la cuantización de la carga eléctrica y de la magnética. La comprobación es la siguiente: supongamos que $\varepsilon = \hbar$ y que $e_2 = e$, siendo e la carga electrónica (estas hipótesis son usados tan solo por concretez; si se usa $\varepsilon = -\hbar$ o la cuantización obtenida al usar \bar{A}_2 en la sección II.C, en cuyo caso habría que tomar $\varepsilon = \pm \frac{\hbar}{2}$, los resultados obtenidos son idénticos), entonces g será igual, en magnitud, a la cantidad mínima de carga magnética que se puede tener en la naturaleza; llamamos g_0 a este cuanto de carga magnética. Supongamos ahora que colocamos en el campo del monopolo con carga g_0 una partícula cargada eléctricamente. Según lo demostrado en la sección II.C, sólo será posible físicamente este sistema dinámico para $\varepsilon = n\hbar$, con n un entero; pero, para g_0 fijo, esto se cumple si y sólo si la carga eléctrica de la partícula es igual a ne . Supongamos ahora que tenemos fija una partícula con carga eléctrica e y que traemos a su campo un monopolo magnético con carga magnética g ; Dirac [6] trató entre problema y encuentro que también en este caso se implica la condición de cuantización de ε . Para el caso físicamente aceptable de tener que g es tal que $\varepsilon = \hbar$, se tendrá que $g = g_0$. Si ahora traemos un monopolo con carga g arbitraria, ya que la carga eléctrica es fija (e), la condición $\varepsilon = n\hbar$ implica que $g = ng_0$.

Respecto a la cuantización de ε , hay un hecho que considero importante, el cual es para mí bastante obscuro. Como se demostró en la sección II.C, al usar dos potenciales vectoriales \bar{A} y \bar{A}_2 que dan el mismo campo magnético \bar{B} (o sea, que difieren tan sólo en una norma, de acuerdo con las ecs. (13, 20, 21) de la Introducción), se obtienen diferentes cuantizaciones para ε . La diferencia entre éstas es fundamental; pues implica que los cuantos de carga magnética g_0 serán distintos en los dos casos: en uno de ellos (usando \bar{A}) será doble que en el otro (usando \bar{A}_2), pues existe sólo un cuanto de electricidad. El efecto de las transformaciones de norma sobre las eigenfunciones del Hamiltoniano es bien conocido y fácil de obtener [14], resultando ser irrelevante, en cuanto a la localización (en este caso particular) de la partícula móvil, pues añaden una fase en la función de onda ψ , la cual desaparece al considerar el producto $\psi^* \psi$, que es el que tiene significado físico. Sin embargo, el efecto, en lo que se refiere al cálculo de valores de expectación de operadores tales que no tienen a las funciones de onda como eigenfunciones (o sea, que no representan constantes del movimiento) no ha sido estudiado en forma adecuada. Además, el efecto exacto de la inclusión de funciones de norma en la definición de los operadores cuánticos tampoco ha sido estudiado, hasta donde yo conozco el tema.

5. Cuando se emprende un trabajo que implica algún tiempo (meses) de ocupación, se debe tener idea, creo, de las causas que lo motivan y de los fines perseguidos. Los comentarios a este respecto, como es lógico, debí incluirlos al principio del presente trabajo, pero, ya que los libros deben leerse en muchas ocasiones del final al principio (invariablemente, el prólogo se escribe al final), no creo faltar demasiado el orden lógico incluyendo aquí los comentarios antes mencionados. Como siempre que se dan argumentos sobre algo, se deben incluir dos puntos de vista: el que se refiere al aspecto puramente personal y el concerniente a la relación con el grupo humano del cual se forma parte. Con respecto al interés personal por realizar el presente trabajo, mencionaré el deseo de conocer, en forma directa, algo sobre el movimiento esperado clásicamente en el campo de una partícula hipotética, además de las características exactas de la cuantización de una de las propiedades fundamentales de dicha partícula (su carga magnética) para que pueda dar lugar a un campo físicamente aceptable, o sea, un campo tal que se obtengan estados del sistema dinámico (monopolo electromagnético + partícula móvil) físicamente aceptables. El otro aspecto mencionado, el referente a la relación que pueden tener los resultados obtenidos con algún beneficio del grupo humano del cual formo parte, es de discusión mucho más difícil. Aunque estoy muy lejos de tener un punto de vista 100% utilitario (algunos comentarios provechosos al respecto pueden verse en la referencia (75)), mencionaré algunas razones, altamente especulativas y descriptivas, por cierto, con el propósito

de demostrar que la motivación de este trabajo no fué 0% utilitaria. Dichas razones dependen de utilidades que considero posibles en México (tomando en cuenta su situación tecnológica actual) de monopolos magnéticos, en caso de que éstos existan:

i) Pueden usarse como proyectiles en procesos de fisión de diversos núcleos. Aunque esta utilización depende vitalmente de la sección eficaz de los monopolos magnéticos en los varios procesos involucrados, sobre la cuál no se tienen datos teóricos, puede esperarse que ésta sea adecuadamente grande. La ventaja esencial que se obtiene al usar monopolos magnéticos en lugar de las partículas comúnmente empleados (protones, neutrones, electrones) estriba en que los monopolos son partículas suficientemente raras (al menos en esta parte del universo), que pueden, por lo tanto, recobrase después de usadas [9], ya que no se pierden en un ambiente de partículas idénticas. Se les puede recuperar, por ejemplo, rodeando el ambiente del experimento de fisión con un material ferromagnético, en el cual quedan absorbidos los monopolos, sujetos a las fuerzas magnéticas dentro del material, pues producen un agregado de dipolos magnéticos dentro del cual quedan atrapados. Para recuperarlos, se puede calentar la substancia ferromagnética usada y volverlos así a emplear una y otra vez. Además, debido a que el cuanto de carga magnética es aproximadamente 137 veces mayor que el correspondiente eléctrico (ecs. (2,46) sección II.C), de acuerdo con la ec. (4) de la Introducción (fuerza de Lorentz generalizada), las interacciones del cuanto magnético con campos eléctricos y magnéticos son aproximadamente 137 veces más fuertes que las análogas de partículas eléctricas, debido a lo cual los aceleradores de monopolos magnéticos pueden construirse de dimensiones correspondientemente menores, siendo, entonces, más baratos que los gigantes actuales para partículas eléctricas, teniéndose energías comparables de los proyectiles producidos (existe la alternativa, claro, de obtener proyectiles magnéticos con energías fantásticamente elevadas comparadas con las usuales, construyendo aceleradores de dimensiones apropiadas).

ii) Debido a la gran masa que (de existir) tienen los monopolos pues se han hecho experimentos que indican [9] que dicha masa debe ser mayor que el triple de la del protón, se les puede emplear en la construcción de una versión “magnética” del microscopio iónico [76], con la ventaja de obtener, de acuerdo con la fórmula DeBroglie para la longitud de onda asociada ($\lambda = \frac{h}{p}$), valores del momentum p mayores que los usuales y, por consiguiente, longitudes de onda menores, aumentando así el poder de resolución. El uso inmediato de tal aparato sería en el estudio de la estructura de materiales. En Cristalografía podrían emplearse también monopolos en arreglos de difracción. En cada caso, existe la ventaja adicional de poder recuperar los monopolos empleados. Hay que aclarar que los problemas de enfoque son no-triviales [77].

Podría seguirse especulando de esta manera puramente descriptiva, extendiéndose demasiado la lista; sin embargo, considero las dos aplicaciones posibles mencionadas suficientemente generales.

Bibliografía

- [1] V. A. Dulock, Ph. D. Thesis, University of Florida, (1964).
- [2] H. Weyl, *Symmetry*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1952).
- [3] *The Feynman Lectures on Physics*, Ed. Addison Wesley, Vol. 1, cap. 52, (1964),
M. I. Petrashen, E. D. Trifonov; *Applications of Group Theory in Quantum Mechanics*, The M.I.T. Press, pág. 3-12, (1969).
- [4] Feinberg and M. Goldhaber, *Scientific American*; Vol. 209, number 4, 36-45, (1963).
- [5] D. Zwanziger, *Phys. Rev.* 176, 1489 (1968).
J. Schwinger, *Science* 165, 757 (1969).
M.Y.Han, C.Bierderharn, *Il Nuovo Cimento* 2A, 544 (1971).
- [6] P. A. M. Dirac, *Proc. Royal Society (London)* A133, 60 (1931)
- [7] I. Tamm, *Z. Physik* 71, 141 (1931).
M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* 17, 27 (1944).
P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.* 78, 817 (1948).
D. Zwanziger, *Phys. Rev.* 3, 880 (1971); 176, 1489 (1968).
D. T. Miller, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 69, 449 (1971).
- [8] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 144, 1087 (1966); 151, 1048, (1966).
- [9] L. W. Alvarez, P. H. Eberhard, R.R. Ross, R. D. Watt, *Science* 167, 701, (1970).
Kenneth W. Ford, *Scientific American* 209, number 6, 122-131, (1963).
- [10] *The Feynman Lectures on Physics*, Ed. Addison Wesley, Vol. 2, Cap. 14, (1964).
- [11] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley Pub. Co., Cambridge, Mass., Cap . 1, pág. 14-22, (1950)
- [12] D. Zwanziger, *Phys. Rev.* 176, 1480, (1968).
- [13] M. Berrondo and H. V. McIntosh, *Journal of Math. Phys.* 11, 125-141 (1970).
A. Cisneros and H. V. McIntosh, *Journal of Math. Phys.* 11, 896-916 (1970).
- [14] D. Saxon, *Elementary, Quantum Mechanics*, Holden Day Inc., pág. 373-377, (1968).
- [15] Ref. 11, pág. 21.
- [16] Ref. 11. Cap. 7.
- [17] Ref. 11, pág. 259.

- [18] E. T. Whittaker, *Analytical of Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, pág. 83, (1965).
- [19] Ref. 11, pág. 300.
- [20] A. Cisneros, Tesis Profesional, E.S.F.M., pág. 146, (1968).
- [21] M. R. Spiegel, *Vector Analysis*, Schaum Pub. Co., New York, pág. 167, (1959).
- [22] Ref. 11, pág. 240-241.
- [23] Ref. 11, pág. 273-277.
- [24] Ref. 11, pág. 284-286.
- [25] Ref. 11. pág. 54.
- [26] V. A. Dulock and H. V. McIntosh, *American Journal of Phys.* 33, 109-118, (1965).
- [27] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Toronto Univ. Press. Cap. 2.
- [28] V. A. Dulock and H. V. McIntosh, *Pacific Journal of Math.* 19, 39-55, (1966).
- [29] Ref. 11, pág. 258-263.
- [30] Ref. 11, pág. 288-299.
- [31] Ref. 11 pág. 304.
- [32] Ref. 11, pág. 250-255.
- [33] H. V. McIntosh, *The Geometry of Phase Space* (Notas no publicadas) pág. 12-32.
- [34]
- [35] Ref. 11, pág. 258-263.
- [36] G. Györgyi, *Il Nuovo Cimento* 53 A, 717, (1968).
- [37] P. Budini, *Algebraic formulation of Dynamical Problems*, *Acta Physica Austriaca Suppl.* 4, 118-144, (1967).
- [38] H. Bacry, *Il Nuovo Cimento* 41 A, 222, (1966).
G. Györgyi, *Il Nuovo Cimento* 62 A, 449, (1969).
- [39] R. C. Hwa, J. Nuyts, *Phys. Rev.* 145, 1188, (1966).
- [40] V. Fock, *Zeits. F. Physik* 98, 145, (1935).
- [41] W. Pauli, *Zeits F. Physik* 36, 336-363, (1926).
L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw Hill, pág. 236-239, (1955).
- [42] Y. Dothan, *Phys. Rev. D2*, 2944, (1970).
- [43] Y. Dothan, M. Gell-Mann, y Neéman, *Phys. Letters* 17, 148, (1965).
- [44] W. H. Flemming, *Calculus of Several Variables*, Addison Wesley, pág. 116-120, (1965).
- [45] H. Bacry, *Il Nuovo Cimento* 41 A, 222, (1966)
a). P. Cordero, G. C. Ghiraddi, *Il Nuovo Cimento* 2A, 217-235, (1971).

- [46] Penelope A. Rowlatt, *Group Theory and Elementary Particles*, Am. Elsevier Pub. Co. (1966), pág. 37-52.
- [47] Ref. 46, pág. 20-21.
- [48] Ref. 46, pág. 16-27.
- [49] Linus Pauling. E. B. Wilson, *Intr. to Quantum Mechanics*, McGraw Hill, pág. 50-76, (1935).
- [50] B. Podolsky, Phys. Rev. 32, 812, (1928).
- [51] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., pág. 342-345, (1970),
- [52] P. Stehle, *Quantum Mechanics*, Ed. Holden-Day, pág. (39-47), (1966).
- [53] Ref. 21, pág. 137.
- [54] Ref. 49, pág. 108.
- [55] Ref. 49, pág. 67-69.
- [56] P. Dennerly, A. Krzwicki, *Mathematics for Physicists*, Harper & Row, pág. 264-274, (1967).
- [57] Ref. 51, pág. 37.
- [58] Ref. 52, pág. 34-39.
- [59] Ref. 56, pág. 296-301.
- [60]
- [61] Ref. 21, pág. 137,139.
- [62] Ref. 21, pág. 137.
- [63] Ref. 56, pág. 316-319.
- [64] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Ed. Dover, pág. 504.
- [65] M. Fierz, Helvetica Physica Acta 17, 27-34, (1944).
- [66] C. A. Hurst, Annals of Physics (New York) 50, 51-75, (1968).
- [67]
- [68] V. Rojansky, *Introductory Quantum Mechanics*, Ed. Prentice-Hall, pág. 72-90, 442, (1938).
- [69] Ref. 14, pág. 299-327.
- [70] Ref. 56, pág. 306-307.
- [71] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, pág. 546, (1953).
- [72] Ref. 64, pág. 255.
- [73] D. T. Miller Proc. Camb. Phill Sec. 69, 449, (1971).
- [74] W. Pauli, Helvetica Physica Acta 12, 147-168, (1939).
M. L. Whippman, Am. J. Phys. 34, 656-659 ,(1966).
- [75] M. Jaffe, Michelson y la Velocidad de la Luz.

[76] *Ciencia e Investigación*, Ed. Montaner y Simón S.A., Barcelona, pág. 291-293, (1966).

[77] Ref. 10, Cap. 29.

[78] A Beiser, *The World of Physics*, McGraw Hill, pág. 229-246, (1960).