Aproximación de e^z a través de un polinomio de Taylor

José Pedro Hernández Enríquez
Departamento de Aplicación de Microcomputadoras
Instituto de Ciencias, Universidad Autónoma de Puebla
Apartado Postal 461, (72000) Puebla, Puebla, México

4 de marzo de 1994

Abstract

Sabemos que si una función es continua y derivable se puede aproximar por un polinomio de Taylor. Las preguntas que surgen son, ¿qué tan precisa es la aproximación y si el polinomio se comporta en forma parecida a la función que aproximan?. Se responde a estas preguntas estudiando la aproximación de e^z a través de un polinomio de Taylor.

Planteamiento

Las ideas principales para la elaboración del presente documento las dió el Dr. Harold V. McIntosh durante el curso de Análisis Númerico I que impartió durante el primer semestre de 1992 en el Colegio de Computación.

Sabemos de los cursos de Cálculo que si una función es continua y derivable se puede aproximar por un polinomio de Taylor. El estudio de las propiedades de los polinomios es importante porque en algunas aplicaciones se emplean para aproximar funciones. Las preguntas que surgen es qué tan precisa es la aproximación y si se comportan en forma parecida a la función que aproximan. Recordemos que a una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde las a_i, llamadas coeficientes de P, son constantes y $a_n \neq 0$, se le llama un polinomio de grado n. Generalmente se pide encontrar los valores de la variable x que anulan a la función esto es $P(x) = 0$. A la x que anula a la función se le llama raíz.

En el curso de Análisis Numérico I se estudiaron funciones de variable compleja, se dijo también que algunas funciones de variable compleja se pueden aproximar a través de polinomios complejos, y en particular se indicó se estudiara la función exponencial y se aproximara por medio de un polinomio de Taylor. Dos preguntas nos guiarían en su estudio:

a) ¿La funcion e^z tiene ceros?

Es decir para que valores de z se tiene que $e^z = 0$.

b) ¿Cuáles son los ceros del polinomio de Taylor que aproxima a e^z?

Estas dos preguntas nos conducen a otras:

i) Si e^z tiene ceros, entonces, ¿los ceros del pol. de Taylor que la aproxima son los mismos?

ii) Si e^z no tiene ceros, entonces, ¿qué ocurre con los ceros del polinomio de Taylor que la aproxima?

iii) ¿Se puede predecir el comportamiento de los ceros del polinomio de Taylor que aproxima a e^z?

Análisis

Una de las propiedades de e^z es:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

En particular se cumple que:

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$$

como z es cualquier número complejo del resultado anterior y del teorema que dice que el producto de dos números complejos es igual a cero, sí y sólo si, al menos uno de los factores es cero, tenemos que e^z no es igual a cero.

Por lo estipulado en el párrafo anterior se da respuesta a la pregunta **a)** e **i)**, e^z no tiene ceros y por lo tanto no pueden coincidir con los del polinomio de Taylor que la aproxima.

La pregunta **b)** se basa en el resultado conocido como Teorema Fundamental del Álgebra (TFA) que dice:

> Si P es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces P(x) = 0 tiene cuando menos una raíz (posiblemente compleja).
>
> Corolario
>
> Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen constantes únicas $x_1, x_2, ..., x_k$, posiblemente complejas, y enteros positivos, $m_1, m_2, ..., m_k$ tales que $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ y

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

El TFA junto con el corolario nos dice que, todo polinomio con coeficientes complejos tiene n raíces (posiblemente complejas).

Del TFA y de la respuesta de **a)** nos ha llevado a la pregunta **ii)**.

La pregunta **iii)** es importante ya que nos podría aclarar el comportamiento del polinomio en general.

Para dar respuesta a **ii)** y **iii)** se realizó con la ayuda del programa de graficación PLOT en la versión en lenguaje 'C', los programas pexp.c, cmuller.c, gemc.c, gep.c y empleando las microcomputadoras tipo PC y los graficadores Hiplot DMP-29 del Departamento de Aplicación de Microcomputadoras.

La aproximación de la e^z por medio de un pol. de Taylor en el punto 0 es:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

donde $z = x + yi$.

La aproximación a e^z es mejor si el grado del polinomio de Taylor es grande. Sin embargo, al realizar la evaluación del polinomio para un grado alto, se tendrán dificultades debido a que intervienen potencias y factoriales cada vez más grandes.

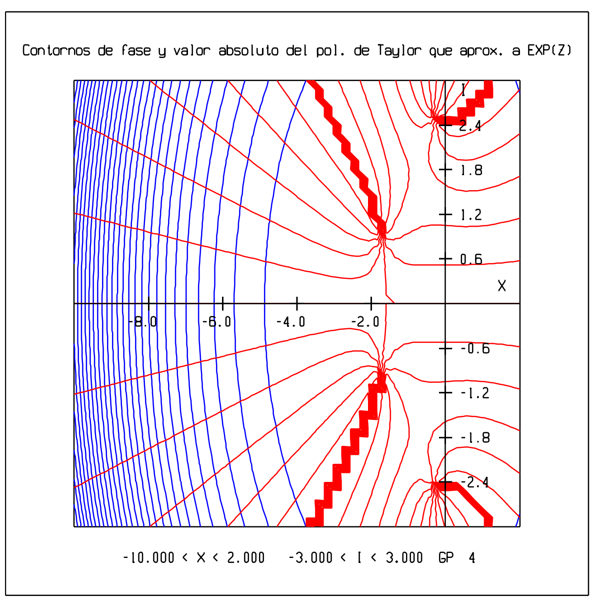
A partir de los polinomios de grado quinto no existen métodos para encontrar las raíces en función de los coeficientes. Las técnicas numéricas se emplean en la resolución de una ecuación cuando la solución exacta no se puede encontrar por métodos algebráicos.

Se inplementó una biblioteca con funciones que manejan números complejos, la cual se integró al programa PLOT.

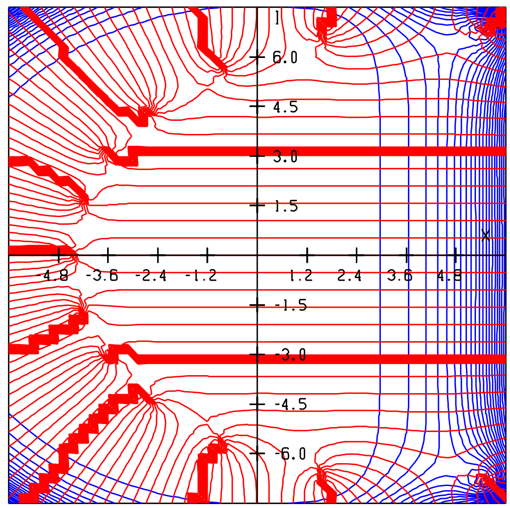
Se emplea en los programas "gemc.c" y "gep.c" el método de Gauss con pivoteo parcial, para resolver un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

Se emplea el algoritmo de Horner (división sintética) para la evaluación de los polinomios en un valor dado.

El programa "pexp.c" se realizó para obtener la superficie y los contornos de valor absoluto y los contornos de fase de los diferentes polinomios de Taylor que aproximan a e^z, como primer paso para la obtención de las raíces ya que los contornos de fase muestran la región del plano complejo donde se encuentran. Se obtuvieron las gráficas siguientes:

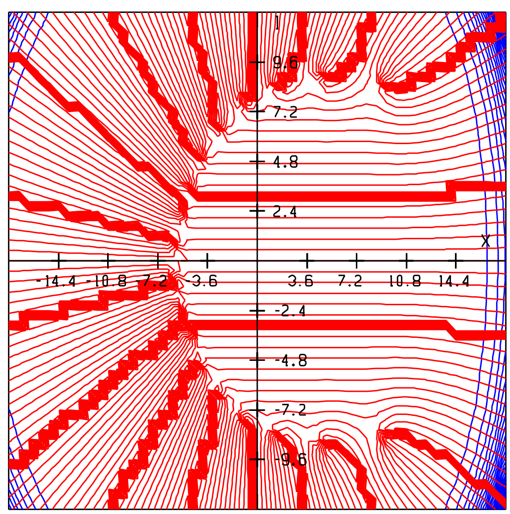


Contornos de fase y valor absoluto del pol. de Taylor que aprox. a EXP(Z)

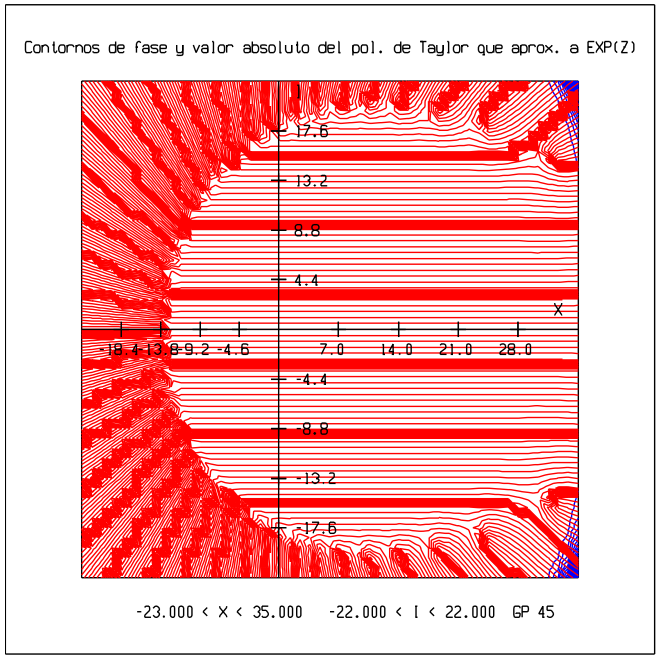


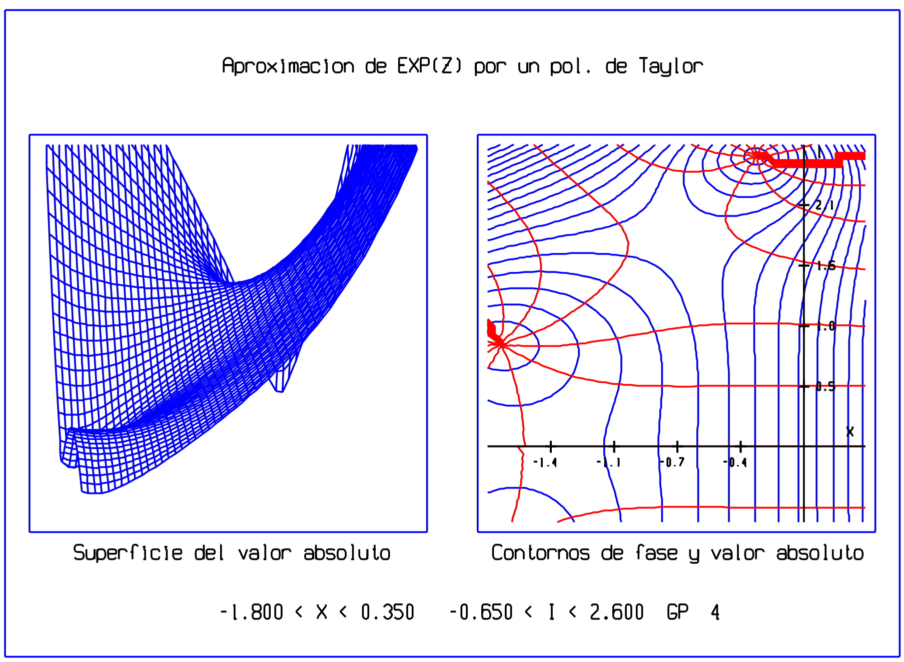
-6.000 < X < 6.000 -7.500 < I < 7.500 GP 13

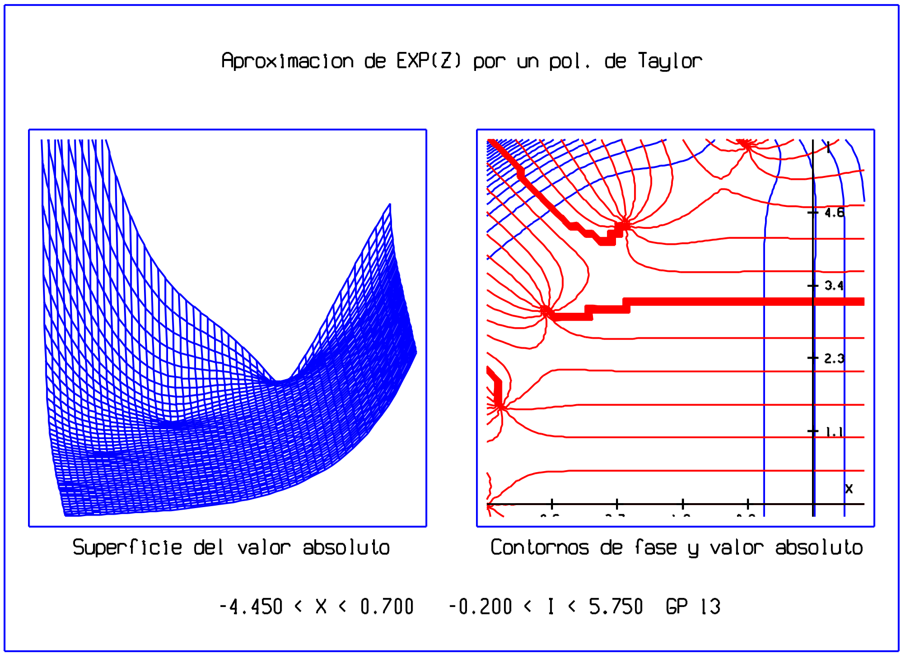
Contornos de fase y valor absoluto del pol. de Taylor que aprox. a EXP(Z)

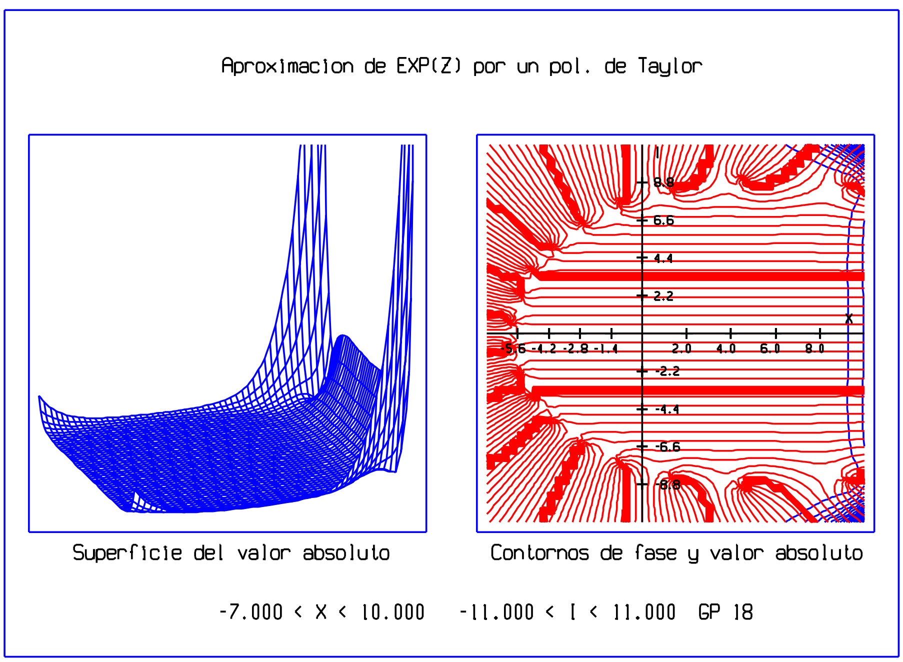


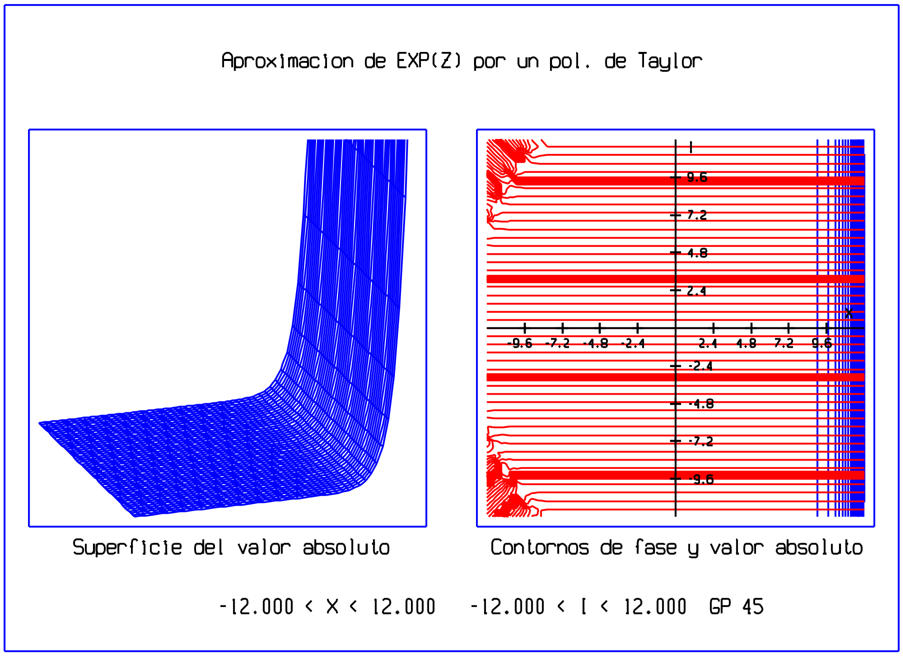
-18.000 < X < 18.000 -12.000 < I < 12.000 GP 18


Contornos de fase y valor absoluto del pol. de Taylor que aprox. a EXP(Z)
17.6
13.2
8.8
4.4
X
-18.4
-13.8
-9.2
-4.6
7.0
14.0
21.0
28.0
-4.4
-8.8
-13.2
-17.6
-23.000 < X < 35.000   -22.000 < I < 22.000   GP 45


Aproximacion de EXP(Z) por un pol. de Taylor
2.1
1.6
1.0
0.5
X
-1.4
-1.1
-0.7
-0.4
Superficie del valor absoluto
Contornos de fase y valor absoluto
-1.800 < X < 0.350   -0.650 < I < 2.600   GP 4


Aproximacion de EXP(Z) por un pol. de Taylor
4.6
3.4
2.3
1.1
X
Superficie del valor absoluto
Contornos de fase y valor absoluto
-4.450 < X < 0.700   -0.200 < I < 5.750   GP 13


Aproximacion de EXP(Z) por un pol. de Taylor
8.8
6.6
4.4
2.2
-5.6 -4.2 -2.8 -1.4
2.0 4.0 6.0 8.0
X
-2.2
-4.4
-6.6
-8.8
Superficie del valor absoluto
Contornos de fase y valor absoluto
-7.000 < X < 10.000   -11.000 < I < 11.000   GP 18



Con la ayuda de las gráficas previas y el programa "cmuller.c" se calcularon las raíces del polinomio de Taylor que aproxima a la exponencial.

El programa "cmuller.c" encuentra una raíz compleja de un polinomio por el Método de Müller, solicita se le proporcione una aproximación a la raíz, la cual se puede obtener al observar los contornos de fase generados por el programa "pexp.c".

El método de Müller usa tres aproximaciones iniciales x_0, x_1 y x_2 y determina la siguiente aproximación x_3 considerando la intersección del eje x con la parábola que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Una vez que se determina x_3, se repite el proceso usando x_1, x_2 y x_3 en lugar de x_0, x_1 y x_2 para determinar la siguiente aproximación x_4. El método continúa hasta que se obtiene una aproximación a la raíz.

La selección de las aproximaciones iniciales no es un factor crítico y se pueden seleccionar cualesquier valores para x_1, x_2 y x_3 siempre que estén cerca del cero. Además con este método se pueden encontrar raíces complejas.

Las raíces son:

```
GP   =  1                          GP   =  2

R1   = -1.0                        R1   = -1.0 + 1.0i
                                   R2   = -1.0 - 1.0i
```

```
GP  = 3

R1  = -1.596072
R2  = -0.701964 + 1.807339i
R3  = -0.701964 - 1.807339i

GP  = 4

R1  = -1.729444 + 0.888974i
R2  = -1.729444 - 0.888974i
R3  = -0.270556 + 2.504776i
R4  = -0.270556 - 2.504776i

GP  = 5

R1  = -2.180607
R2  = -1.649503 + 1.693933i
R3  = -1.649503 - 1.693933i
R4  =  0.239806 + 3.128335i
R5  =  0.239806 - 3.128335i

GP  = 6

R1  = -2.361810 + 0.838350i
R2  = -2.361810 - 0.838350i
R3  = -1.441801 + 2.434523i
R4  = -1.441801 - 2.434523i
R5  =  0.803612 + 3.697702i
R6  =  0.803612 - 3.697702i

GP  = 7

R1  = -2.759003
R2  = -2.379884 + 1.628999i
R3  = -2.379884 - 1.628999i
R4  = -1.147201 + 3.124039i
R5  = -1.147201 - 3.124039i
R6  =  1.406586 + 4.225067i
R7  =  1.406586 - 4.225067i

GP  = 8

R1  = -2.964600 + 0.808878i
R2  = -2.964600 - 0.808878i
R3  = -2.286429 + 2.377712i
R4  = -2.286429 - 2.377712i
R5  = -0.788794 + 3.771811i
R6  = -0.788794 - 3.771811i
R7  =  2.039822 + 4.718615i
R8  =  2.039822 - 4.718615i

GP  = 9

R1  = -3.333551
R2  = -3.038648 + 1.586801i
R3  = -3.038648 - 1.586801i
R4  = -2.110840 + 3.089911i
R5  = -2.110840 - 3.089911i
R6  = -0.381070 + 4.384645i
R7  = -0.381070 - 4.384645i
R8  =  2.697333 + 5.184162i
R9  =  2.697333 - 5.184162i

GP  = 10

R1  = -3.553876 + 0.789422i
R2  = -3.553876 - 0.789422i
R3  = -3.015536 + 2.335224i
R4  = -3.015536 - 2.335224i
R5  = -1.871660 + 3.770190i
R6  = -1.871660 - 3.770190i
R7  =  0.066202 + 4.967679i
R8  =  0.066202 - 4.967679i
R9  =  3.374870 + 5.626020i
R10 =  3.374870 - 5.626020i

GP  = 11

R1  = -3.905452
R2  = -3.664152 + 1.557044i
R3  = -3.664152 - 1.557044i
R4  = -2.917051 + 3.056372i
R5  = -2.917051 - 3.056372i
R6  = -1.581441 + 4.422355i
R7  = -1.581441 - 4.422355i
R8  =  0.546078 + 5.524905i
R9  =  0.546078 - 5.524905i

GP  = 12

R1  = -4.135608 + 0.775542i
R2  = -4.135608 - 0.775542i
R3  = -3.688897 + 2.302757i
R4  = -3.688897 - 2.302757i
R5  = -2.757989 + 3.752548i
R6  = -2.757989 - 3.752548i
R7  = -1.249125 + 5.049555i
R8  = -1.249125 - 5.049555i
R9  =  1.053424 + 6.059491i
```

```
GP  = 11

R10 =  4.069291 + 6.047492i
R11 =  4.069291 - 6.047492i
```

```
GP  = 12

R10 =  1.053424 - 6.059491i
R11 =  4.778196 + 6.451176i
R12 =  4.778196 - 6.451176i
```

```
GP  = 13

R1  = -4.475412
R2  = -4.271244 + 1.534856i
R3  = -4.271244 - 1.534856i
R4  = -3.644807 + 3.027344i
R5  = -3.644807 - 3.027344i
R6  = -2.548921 + 4.425908i
R7  = -2.548921 - 4.425908i
R8  = -0.881341 + 5.654417i
R9  = -0.881341 - 5.654417i
R10 =  1.584315 + 6.574007i
R11 =  1.584315 - 6.574007i
R12 =  5.499704 + 6.839159i
R13 =  5.499704 - 6.839159i
```

```
GP  = 14

R1  = -4.712587 + 0.765103i
R2  = -4.712587 - 0.765103i
R3  = -4.330708 + 2.277236i
R4  = -4.330708 - 2.277236i
R5  = -3.543834 + 3.731923i
R6  = -3.543834 - 3.731923i
R7  = -2.297698 + 5.078392i
R8  = -2.297698 - 5.078392i
R9  = -0.483159 + 6.239149i
R10 = -0.483159 - 6.239149i
R11 =  2.135677 + 7.070568i
R12 =  2.135677 - 7.070568i
R13 =  6.232309 + 7.213148i
R14 =  6.232309 - 7.213148i
```

```
GP  = 15

R1  = -5.043887
R2  = -4.866962 + 1.517629i
R3  = -4.866962 - 1.517629i
R4  = -4.327165 + 3.002771i
R5  = -4.327165 - 3.002771i
R6  = -3.394874 + 4.417704i
R7  = -3.394874 - 4.417704i
R8  = -2.010333 + 5.711727i
R9  = -2.010333 - 5.711727i
R10 = -0.058552 + 6.805624i
R11 = -0.058552 - 6.805624i
R12 =  2.705050 + 7.550940i
R13 =  2.705050 - 7.550940i
R14 =  6.974781 + 7.574562i
R15 =  6.974781 - 7.574562i
```

```
GP  = 18

R1  =  -5.8577  - 0.75037i
R2  =  -5.8577  + 0.75037i
R3  =  -5.56162 - 2.23972i
R4  =  -5.56162 + 2.23972i
R5  =  -4.95881 - 3.69359i
R6  =  -4.95881 + 3.69359i
R7  =  -4.02589 - 5.08382i
R8  =  -4.02589 + 5.08382i
R9  =  -2.72141 - 6.3739i
R10 =  -2.72141 + 6.3739i
R11 =  -0.97416 - 7.51123i
R12 =  -0.97416 + 7.51123i
R13 =   1.34476 - 8.41049i
R14 =   1.34476 + 8.41049i
R15 =   4.50281 - 8.90883i
R16 =   4.50281 + 8.90883i
R17 =   9.252   - 8.59442i
R18 =   9.252   + 8.59442i
```

```
GP  = 25                          GP  = 45

R1  = -7.872305                   R1  = -13.495993
R2  = -7.766255 + 1.468153i       R2  = -13.437175 + 1.429999i
R3  = -7.766255 - 1.468153i       R3  = -13.437175 - 1.429999i
R4  = -7.446171 + 2.923836i       R4  = -13.260398 + 2.855943i
R5  = -7.446171 - 2.923836i       R5  = -13.260398 - 2.855943i
R6  = -6.906072 + 4.353857i       R6  = -12.964656 + 4.273694i
R7  = -6.906072 - 4.353857i       R7  = -12.964656 - 4.273694i
R8  = -6.135313 + 5.743473i       R8  = -12.548259 + 5.678978i
R9  = -6.135313 - 5.743473i       R9  = -12.548259 - 5.678978i
R10 = -5.117405 + 7.075286i       R10 = -12.008747 + 7.067274i
R11 = -5.117405 - 7.075286i       R11 = -12.008747 - 7.067274i
R12 = -3.827918 + 8.327622i       R12 = -11.342847 + 8.433738i
R13 = -3.827918 - 8.327622i       R13 = -11.342847 - 8.433738i
R14 = -2.230771 + 9.471931i       R14 = -10.546330 + 9.773075i
R15 = -2.230771 - 9.471931i       R15 = -10.546330 - 9.773075i
R16 = -0.271319 + 10.468207i      R16 =  -9.613880 + 11.079406i
R17 = -0.271319 - 10.468207i      R17 =  -9.613880 - 11.079406i
R18 =  2.137688 + 11.256085i      R18 =  -8.538871 + 12.346087i
R19 =  2.137688 - 11.256085i      R19 =  -8.538871 - 12.346087i
R20 =  5.148669 + 11.735090i      R20 =  -7.313089 + 13.565479i
R21 =  5.148669 - 11.735090i      R21 =  -7.313089 - 13.565479i
R22 =  9.072662 + 11.711350i      R22 =  -5.926329 + 14.728637i
R23 =  9.072662 - 11.711350i      R23 =  -5.926329 - 14.728637i
R24 = 14.778359 + 10.692981i      R24 =  -4.365845 + 15.824892i
R25 = 14.778359 - 10.692981i      R25 =  -4.365845 - 15.824892i
                                  R26 =  -2.615537 + 16.841249i
                                  R27 =  -2.615537 - 16.841249i
                                  R28 =  -0.654771 + 17.761519i
                                  R29 =  -0.654771 - 17.761519i
                                  R30 =   1.543451 + 18.365004i
                                  R31 =   1.543451 - 18.365004i
                                  R32 =   4.015429 + 19.224413i
                                  R33 =   4.015429 - 19.224413i
                                  R34 =   6.811744 + 19.702392i
                                  R35 =   6.811744 - 19.702392i
                                  R36 =  10.006375 + 19.945319i
                                  R37 =  10.006375 - 19.945319i
                                  R38 =  13.715056 + 19.871167i
                                  R39 =  13.715056 - 19.871167i
                                  R40 =  18.137762 + 19.342547i
                                  R41 =  18.137762 - 19.342547i
                                  R42 =  23.680466 + 18.094022i
                                  R43 =  23.680466 - 18.094022i
                                  R44 =  31.474447 + 15.453220i
                                  R45 =  31.474447 - 15.453220i
```

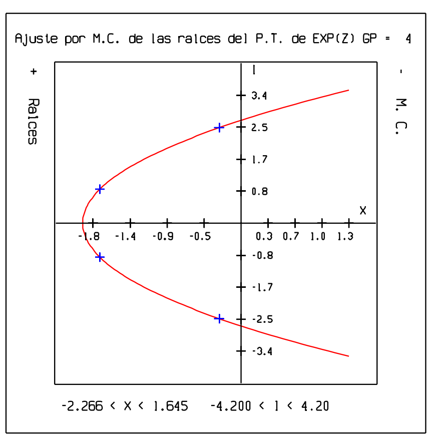
Analizando las gráficas anteriores y las raíces se concluyó lo siguiente:

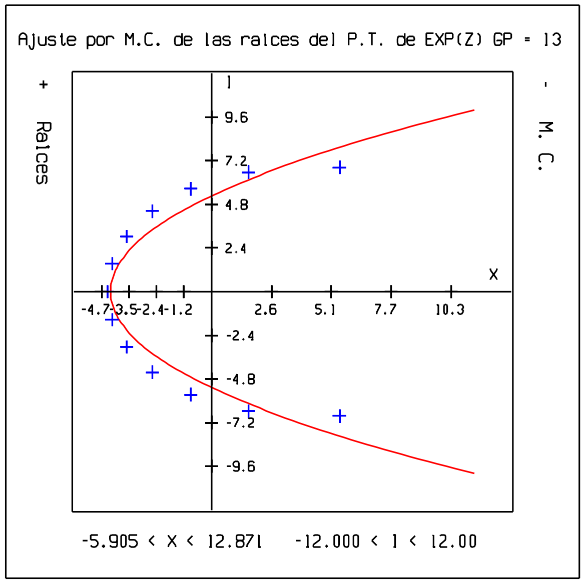
- Cuando el grado del polinomio de Taylor es par, todas las raíces son complejas.
- Cuando el grado del polinomio de Taylor es impar, una raíz es real y las restantes son complejas.
- Los ceros reales son negativos.
- Los ceros reales se alejan hacia menos infinito conforme el grado del polinomio crece. Por ejemplo:

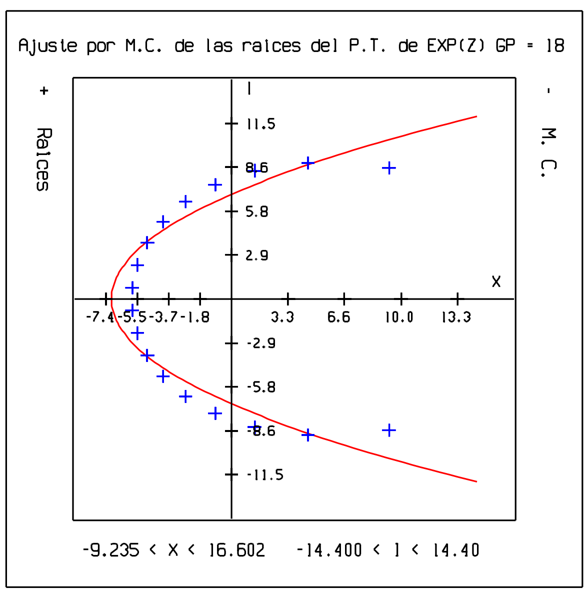
Grado	1	5	15	25	45
Raíz	-1.0	-2.180607	-5.043887	-7.872305	-13.495993

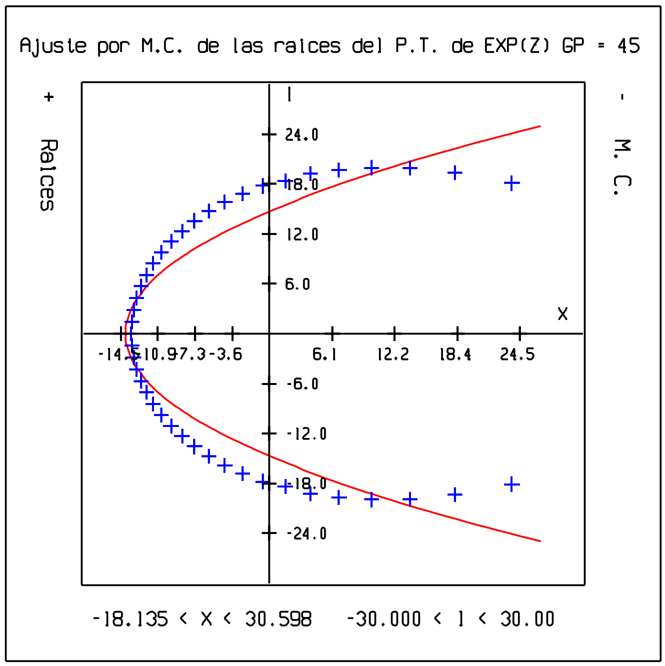
- Los ceros complejos se distribuyen simétricamente alrededor del eje real y un poco más de la mitad de ellos tienen parte real negativa.
- McIntosh observó que en las gráficas de las superficies de valor absoluto de los diferentes polinomios de Taylor que aproximan a e^z, se observa que el polinomio aproxima a la exponencial adecuadamente dentro del círculo de convergencia de las raíces, fuera del círculo el polinomio toma valores cada vez más grandes y no aproxima a e^z.

McIntosh comentó que en la Biblioteca del Departamento se encuentra una referencia en la cual se establece que los ceros del polinomio de Taylor que aproxima a e^z tienden a infinito en forma parabólica. Se buscó la referencia pero no se encontró (la búsqueda no fue exhaustiva), por lo que se realizó un programa llamado "gemc.c" que ajusta la raíces obtenidas del polinomio de Taylor que aproxima a e^z por el método de mínimos cuadrados con un polinomio de grado dos y grafica éste y las raíces. Se obtuvieron las siguientes gráficas:




Ajuste por M.C. de las raices del P.T. de EXP(Z) GP = 13
+ Raices
- M. C.
-5.905 < X < 12.871 -12.000 < I < 12.00

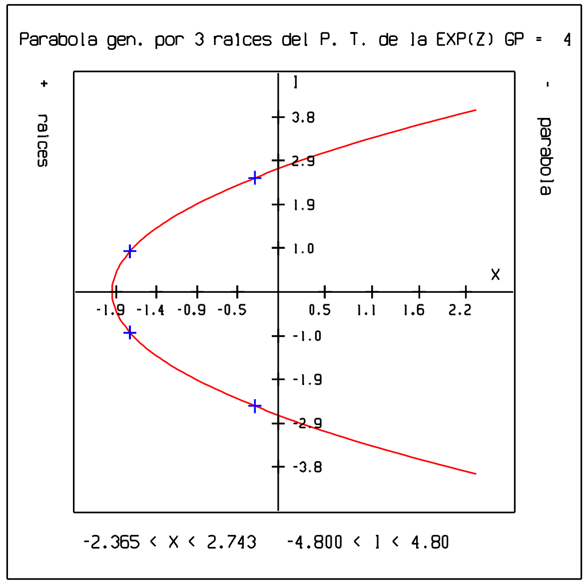

Ajuste por M.C. de las raices del P.T. de EXP(Z) GP = 18
+ Raices
- M. C.
-9.235 < X < 16.602 -14.400 < I < 14.40

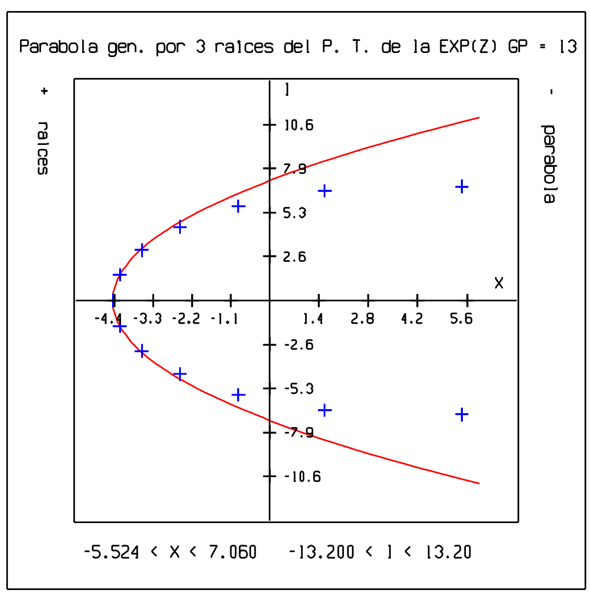


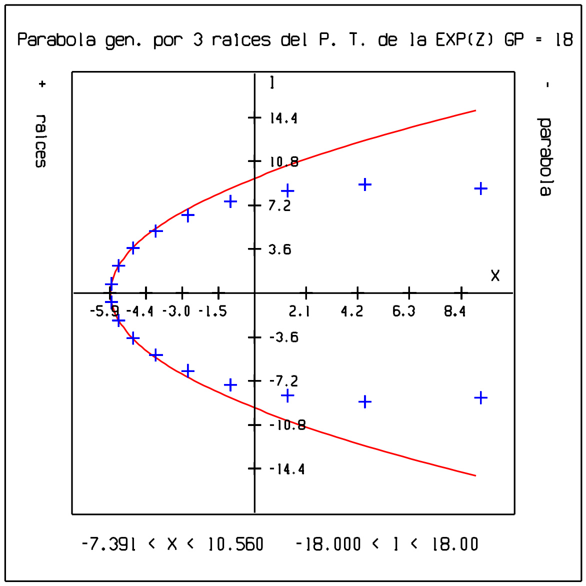
Analizando las gráficas previas se concluyó que:

- El polinomio de mínimos cuadrados de segundo grado únicamente coincide con los polinomios de Taylor de grado tres y cuatro.
- En los polinomios de Taylor de mayor grado las raíces complejas con parte real más positiva tienden a cerrar y a no seguir al polinomio de ajuste de mínimos cuadrados.

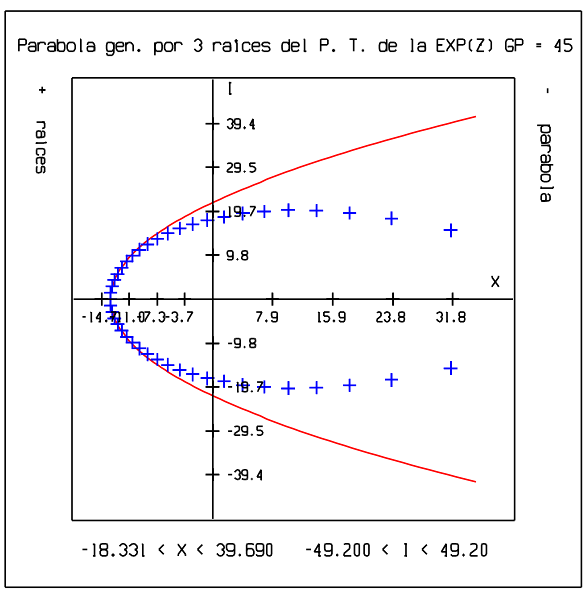
Con respecto al punto anterior, se procedió en otra dirección. Conociendo el eje de la parábola y teniendo tres puntos se puede generar una parábola que pase por los tres puntos. Por lo cual se procedió a tomar las tres raíces que están más cerca del eje real, y tomando el eje real como eje, se generó la parábola que pasa por las tres raíces. Esto se realiza con el programa "gep.c" que toma tres de las raíces obtenidas del polinomio de Taylor que aproxima a e^z y traza la parábola que pasa por esos tres puntos. Se obtuvieron las siguientes gráficas:


Parabola gen. por 3 raices del P. T. de la EXP(Z) GP = 4
+ raices
- parabola
X
-1.9 -1.4 -0.9 -0.5 0.5 1.1 1.6 2.2
3.8 2.9 1.9 1.0 -1.0 -1.9 -2.9 -3.8
-2.365 < X < 2.743 -4.800 < I < 4.80


Parabola gen. por 3 raices del P. T. de la EXP(Z) GP = 13
+ raices
- parabola
X
-4.4 -3.3 -2.2 -1.1 1.4 2.8 4.2 5.6
10.6 7.9 5.3 2.6 -2.6 -5.3 -7.9 -10.6
-5.524 < X < 7.060 -13.200 < I < 13.20



Parabola gen. por 3 raices del P. T. de la EXP(Z) GP = 18
+ raices
- parabola
-7.391 < X < 10.560 -18.000 < I < 18.00



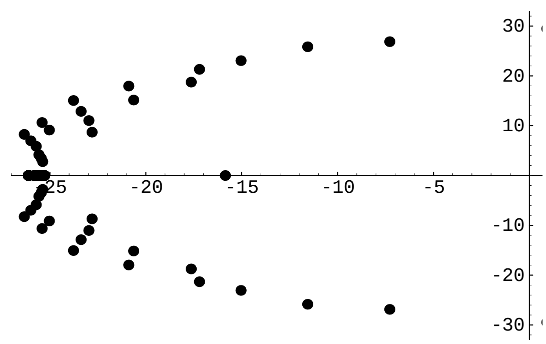
Parabola gen. por 3 raices del P. T. de la EXP(Z) GP = 45
+ raices
- parabola
-18.331 < X < 39.690 -49.200 < I < 49.20

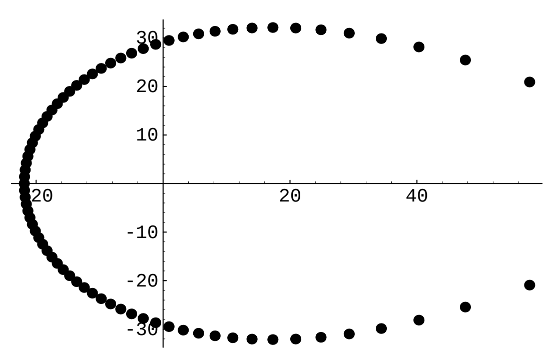
Con respecto a estas gráficas podemos decir:

- Las gráficas muestran que la raíces caen dentro de la parábola generada y que no la ajustan adecuadamente. Sin embargo, se puede pensar en un comportamiento asintótico de las raíces con respecto a la parábola.
- Las raíces del polinomio de Taylor que tienen mayor desviación de la parábola, podrían indicar que posiblemente había errores de redondeo y de truncamiento en la evaluación del polinomio.

Con respecto al último punto se decidió emplear el programa Mathematica para estudiar esa posibilidad. Se calculó las raíces del polinomio de Taylor que aproxima a e^z con precisión de mil dígitos significativos, comparando este resultado con los obtenidos previamente con el programa "cmuller" los resultados concuerdan. A menos que se requiera una precisión mayor podemos tomar los valores de las raíces como correctos.

Para ilustrar los errores que se generan cuando falla la precisión con el programa Mathematica calculamos la aproximación de la exponencial de grado setenta y cinco (poly := Normal[Series[Exp [z], z, 0, 75]]) en la forma estándar (NSolve[poly==0, z]) y en la forma que se define mayor precisión (NSolve[poly==0, z, 50]) se obtuvieron las siguientes gráficas:





El programa en Mathematica que genera las gráficas previas es:

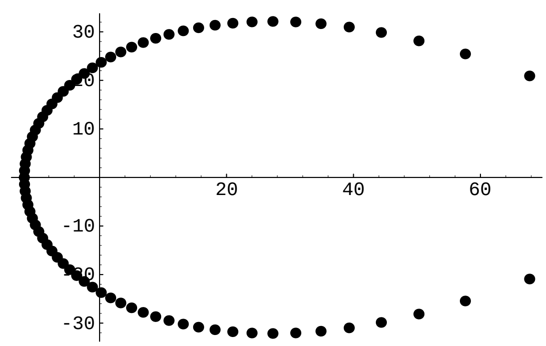
```
RootPlot[poly_, z_] :=
     ListPlot[ {Re[z], Im[z]} /.
               NSolve[poly==0, z, 50],
               Prolog -> PointSize[0.02] ] /;
               PolynomialQ[poly,z]
```

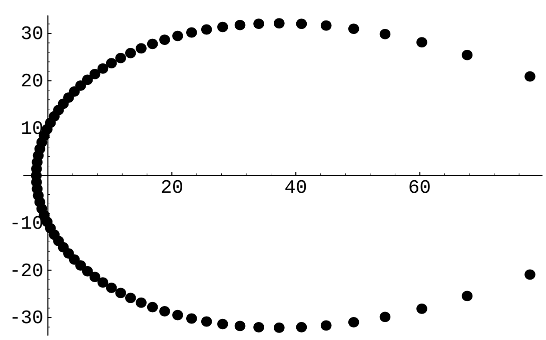
y se le llama así:

```
RootPlot[poly, z]
```

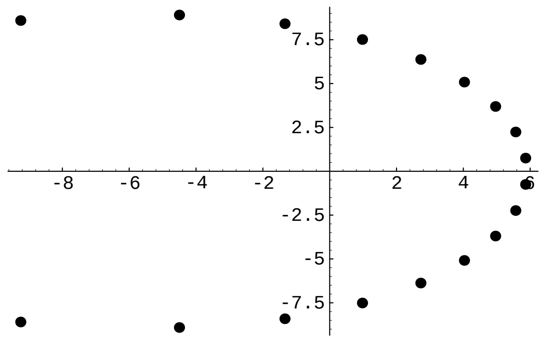
.

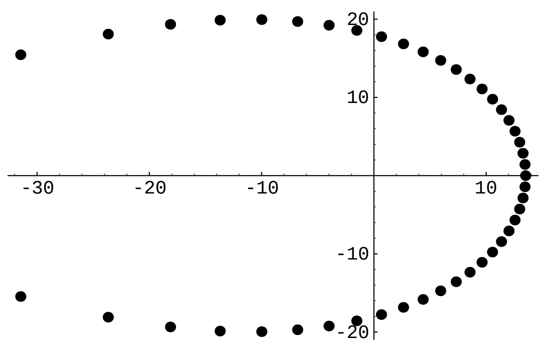
Para observar cómo se comportaba el polinomio de Taylor que aproxima a la exponencial alrededor de puntos distintos al cero, graficamos con Mathematica los ceros de los polinomios de grado 75 en el punto diez y en el punto veinte. Las gráficas correspondientes son:





Para ver si había alguna simetría con respecto a la distribución de las raíces graficamos los ceros de los polinomios de Taylor de grado dieciocho y cuarenta y cinco que aproximan a e^{-z}, la gráficas correspondientes son:





Buscando en la Biblioteca del Departamento, McIntosh encontró otra referencia titulada, “Zero-Free Parabolic Regions for Sequences of Polynomials” de E. B. Saff y R. S. Varga. En ese artículo se establece la existencia de regiones parabólicas en el plano complejo libres de ceros para algunas secuencias generales de polinomios, y dan como ejemplo de sus resultados que la región:

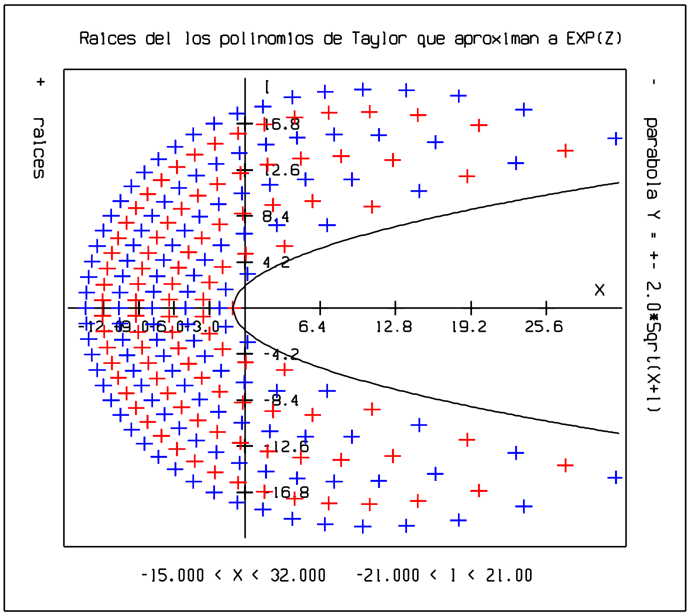
$$y^2 \leq 4(x+1)\ , \quad x > -1$$

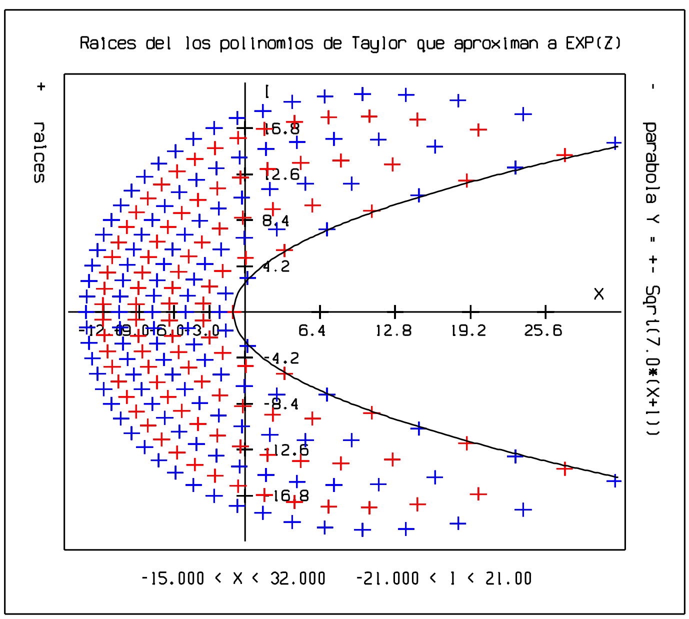
no tiene ceros para todas las sumas parciales de la función exponencial, dada por la aproximación de Padé. Tomando en consideración lo anterior se generaron dos gráficas, en ambas se muestran las raíces de los polinomios (de grado 1, 5, 10, 15, 20, 25, 20, 35, 40 y 45) de Taylor que ajustan a e^z en el plano complejo junto con la parábola que dan Saff y Varga en un caso, y en el otro se encontró que la región libre de ceros está dada por:

$$y^2 \leq 7(x+1)\ , \quad x > -1$$

Se determinó este valor tomando como referencia las raíces del polinomio de Taylor de grado sesenta con la parte real más positiva, y como vértice de la parábola $-1 + 0i$ y el programa “gep.c”.

Las gráficas mencionadas son:


Raices del los polinomios de Taylor que aproximan a EXP(Z)
+ raices
- parabola Y = +- 2.0*Sqr(X+1)
16.8
12.6
8.4
4.2
-4.2
-8.4
-12.6
-16.8
6.4
12.8
19.2
25.6
X
-15.000 < X < 32.000   -21.000 < I < 21.00


Raices del los polinomios de Taylor que aproximan a EXP(Z)
+ raices
- parabola Y = +- Sqr((7.0*(X+1))
16.8
12.6
8.4
4.2
-4.2
-8.4
-12.6
-16.8
6.4
12.8
19.2
25.6
X
-15.000 < X < 32.000   -21.000 < I < 21.00

Bibliografía

Ahlfors, Lars V., “Complex Analysis”
McGRAW-HILL, Third Edition, 1979.

Burden, Richard L., J. Douglas Faires, “Análisis Numérico”
Grupo Editorial Iberoamérica, Primera Edición, 1985.

Churchill, R. V., J. W. Brown, R. F. Verhey, “Variables Complejas y sus Aplicaciones”
McGRAW-HILL, 2a. Edición, 1978.

Hornbeck, Robert W., “Numerical Methods”
Quantum Publishers, Inc. 1975.

Kempf, James, “Numerical Software Tools in C”
Prentice-Hall Software Series. 1987.

Lehmann, Charles H., “Geometría Analítica”
UTEHA, 1977

Saff, E. B., R. S. Varga, “Zero-Free Parabolic Regions for Sequences of Polynomials”
SIAM J. MATH. ANAL., Vol 7, No. 3, May 1976