FUNCIONES DE DOBLE PERIODO

Análisis Numérico II

Meneses Viveros Amilcar (Mat. 870434584)
Roldán Palacios Marisol (Mat. 912211267)
Zárate Vázquez Saul (Mat. 8413969)

Marzo 1996

Contenido

Introducción

El curso de Análisis Numérico II tiene por objetivo principal las técnicas para encontrar las raíces de un sistema de ecuaciones. Después de unos meses de trabajo duro, y casi un año después de habernos solicitado el examen, presentamos, con la poca vergüenza que aun nos queda, el resultado de un laa… aargo periodo de trabajo. Así este reporte trata del análisis de funciones de doble período[1].

Este documento esta dividido en 4 capítulos y tres apéndices: en la primera parte se mencionan algunas definiciones y teoremas concernientes a variable compleja y, específicamente, a resultados que ayudan a la comprensión de las funciones que nos interesan; en la segunda parte se proporcionan las propiedades que caracterizan a las funciones de doble período; posteriormente abordamos el análisis de una función de doble período y; en el cuarto capítulo establecemos conclusiones del análisis realizado; finalmente en los dos primeros apéndices, mostramos la forma de graficar las funciones con un programa en lenguaje C (basado en el paquete de graficación PLOT-90) y en el paquete matemático Macsyma; y el último es una colección de gráficas de la función.

[1]Nota: Cualquier parecido de los teoremas escritos en el presente reporte y los que podrá hallar en la bibliografía posteriormente mencionada, es realmente un fusil, sin embargo nos escudamos en la pequeña disculpa de haberlos “entendido”.
Atte: los que transcriben.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo trata algunos temas referentes al análisis complejo que se deben conocer para enterder el comportamiento de las funciones de doble período.

1.1 Funciones Complejas

La primera definición que haremos es la de una función compleja; de hecho se define de la misma manera que una función real.

Definición 1 (Función Compleja) *Si para cualquier valor de z en un dominio $G \subset C$, le corresponde un único valor complejo w, entonces el mapeo $\mathcal{F} : z \to w$ es una función definida en el dominio G.*

Definición 2 (Límite de una función) *Una función $\mathcal{F}(z)$ tiene un límite A cuando $z \to a$*

$$\lim_{z \to a} \mathcal{F}(z) = A$$

si y solo si se cumple lo siguiente:
Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |z - a| < \delta$$

entonces

$$|\mathcal{F}(z) - A| < \varepsilon$$

La continuidad en funciones complejas es similar a la continuidad de las funciones reales:

Definición 3 (Continuidad) *Una función $w = \mathcal{F}(z)$ es continua en el punto z si, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un un $\delta > 0$ tal que:*

$$|\mathcal{F}(z + \Delta z) - \mathcal{F}(z)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad |\Delta z| < \delta$$

Definición 4 (Continuidad Uniforme) *Se dice que una función $\mathcal{F}(z)$ es uniformemente continua en un conjunto G si a cualquier ε le corresponde un δ tal que para dos puntos cualesquiera $z, w \in G$ tales que $|w - z| < \delta$ tenemos*

$$|\mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(z)| < \varepsilon$$

Si $\mathcal{F}(z)$ es continua en un conjunto cerrado y acotado entonces es uniformemente continua.

Definición 5 (Función Holomorfa) *Si una función es uniforme y continua, y poseé una derivada definida y continua en cualquier punto, entonces se dice que es holomorfa en el punto.*

Definición 6 (Función diferenciable) *Sea la función $\mathcal{F}(z)$ definida en una vecindad del punto z. Si el cociente de la diferencia*

$$\frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta z} = \frac{\mathcal{F}(z+\Delta z) - \mathcal{F}(z)}{\Delta z}$$

tiende a un límite finito A siempre que Δz tiende a cero, entonces el número de A es llamada la derivada de F en el punto z y se denota como:

$$\mathcal{F}'(z) = A = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta z}$$

Definición 7 (Función Analítica) *Una función $\mathcal{F}(z)$ de una variable compleja z es analítica en $z = a$ si tiene una expansión como serie de potencias*

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r (z-a)^r$$

con coeficientes constantes $c_1, c_2, \ldots,$ que converge absoluta y uniformemente en algún círculo $|z-a| < k$, con $k > 0$.

Otro punto de vista de una función analítica es respecto a la diferenciabilidad.

Definición 8 (Función Analítica) *Decimos que una función $\mathcal{F}$ es analítica en una región $G \subset C$ si es diferenciable en cada punto de la región.*

De hecho una función $\mathcal{F}(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio G si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son diferenciables en G y cumplen las ecuaciones de direfenciabilidad de Cauchy-Riemann[1]:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} &= -\frac{dv}{dx} \end{aligned}$$

Si $\mathcal{F}(z)$ es analítica y diferente de cero en cualquier punto, en cualquier región, o en el plano completo, así lo es $\frac{1}{\mathcal{F}(z)}$.

[1] La ecuación original es la siguiente: $\mathcal{F}'(z) = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} - i\frac{du}{dy}$

1.2 Raíces

Una raíz de una fución compleja $\mathcal{F}$ es un punto $c \in D$ tal que

$$\mathcal{F}(c) = 0 \tag{1.1}$$

donde D es el dominio de $\mathcal{F}$.

Si una función $\mathcal{F}(z)$ es analítica en C, y si el desarrollo de Cauchy-Taylor en c es

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-c)^n \tag{1.2}$$

con $a_k \neq 0$, entonces se dice que $\mathcal{F}(z)$ tiene un cero de orden k en c.

Note que la serie inicia en el k-ésimo término, veamos porque los coeficientes $a_1, a_2, \ldots,$ a_{k-1} son ceros. Tomemos la expresión 1.2 desde el primer termino:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0+a_1(z-c)^1+a_2(z-c)^2+a_3(z-c)^3+a_4(z-c)^4+a_5(z-c)^5+a_6(z-c)^6+\cdots$$

Y puesto que si un punto c es un cero de orden k, entonces las derivadas $(k-1)$-ésimas de la función $\mathcal{F}(z)$ evaluadas en c son ceros.

Mostremos de manera explícita la forma de las derivadas, hasta la k-ésima :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(z) &= 1a_1 + 2a_2(z-c)^1 + 3a_3(z-c)^2 + 4a_4(z-c)^3 + 5a_5(z-c)^4 + 6a_6(z-c)^5 + \cdots \\
f^{(2)}(z) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(z-c)^1 + 3 \cdot 4a_4(z-c)^2 + 4 \cdot 5a_5(z-c)^3 + 5 \cdot 6a_6(z-c)^4 + \cdots \\
f^{(3)}(z) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(z-c)^1 + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(z-c)^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6a_6(z-c)^3 + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(k-1)}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k-1+i)!}{i!} a_{k-1+i}(z-c)^i \\
f^{(k)}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k+i)!}{i!} a_{k+i}(z-c)^i \qquad \text{para } k \geq 1
\end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(c) &= 0 \\
f^{(2)}(c) &= 0 \\
f^{(3)}(c) &= 0 \\
&\vdots \\
f^{(k-1)}(c) &= 0 \\
f^{(k)}(c) &= (k)!a_k
\end{aligned}$$

Así tenemos que $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ son iguales a cero y $a_k \neq 0$.

Por ejemplo: si c es un cero de orden $n = 3$, tenemos que :

$$\begin{aligned} f^{(1)}(c) &= 0 \\ f^{(2)}(c) &= 0 \\ f^{(3)}(z) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 \end{aligned}$$

entonces $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ y $a_3 \neq 0$.

La expresión 1.2 puede factorizarse respecto a el término $(z - c)$ y ésta queda como el producto de dos funciones:

$$\mathcal{F}(z) = g(z)h(z)$$

Con

$$\begin{aligned} g(z) &= (z - c) \\ h(z) &= a_k(z - c)^{k-1} + a_{k+1}(z - c)^k + \cdots \end{aligned}$$

Es decir podemos "factorizar el cero" de la función.

En esta sección solo nos resta decir que los ceros de una función no constante son *aislados* , lo que equivale a decir que si c es un cero, no hay ceros arbitrariamente próximos a c.

1.3 Singularidades

Si $\mathcal{F}(z)$ es analítica en un círculo C , excepto en el centro a del círculo, $\mathcal{F}(z)$ es analítica en el anillo entre C y cualquier círculo γ, de centro a , tan pequeño como queramos. Por consiguiente, $\mathcal{F}(z)$ admite un desarrollo de Laurent

$$\mathcal{F}(z) = \cdots \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - a)} + c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots \tag{1.3}$$

válido en todo C excepto en el mismo a.

La función 1.3 presenta una estructura muy adecuada, en el sentido en que se distinguen 2 partes en la serie, la parte principal (o infinita) y la parte finita, estas se muestran en las expresiones 1.4 y 1.5 respectivamente:

$$\cdots \frac{c_{-n}}{(z - a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - a)} \tag{1.4}$$

$$c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots \tag{1.5}$$

Si este desarrollo de Laurent contiene únicamente potencias no negativas de $z - a$, esto es, sólo está presente la parte finita, para todo z, excepto quizás para $z = a$, entonces asignando a $\mathcal{F}(z)$ el valor a_0 en $z = a$ aseguramos que la ecuación anterior es válida en todo C, luego $\mathcal{F}(z)$ es analítica en todo C, incluyendo el punto a.

Si el desarrollo de Laurent contiene potencias negativas de $z - a$, entonces se dice que $\mathcal{F}(z)$ tiene una *singularidad aislada* en a. Es decir, el punto a donde la función deja de ser analítica es llamado un *punto singular* o *crítico.* Por ejemplo $z = 0$ es una singularidad de $\frac{1}{z}$.

El que se nombre un punto singular aislado significa que puede dibujarse un círculo teniendo como centro el punto de singularidad a_0, de tal forma que no encierre a otro punto de singularidad (a_1 por ejemplo) de la misma función.

Los puntos de singularidad aislada se consideran de dos tipos:

1. Puntos de singularidad esencial. Estos puntos se caracterizan porque en su parte principal el número de coeficientes c_i distintos de cero es infinito.

2. Polos. Estos puntos tienen un número finito de coeficientes c_i distintos de cero en su parte principal. Y para determinar el orden del polo tenemos que si la serie de potencias negativas termina en el término

$$c_{-p}(z-a)^{-p}$$

la singularidad se llama *polo de orden p.*

1.3.1 Funciones Meromorfas

Definición 9 (Función Meromorfa) *Una función se dice meromorfa si es analítica en una región A excepto en los polos y, A está contenida en el dominio de la función.*

Otra forma de considerar a las funciones es anulando el punto donde se encuentra el polo a, esto es, si $\mathcal{F}(z)$ es meromorfa, entonces:

$$(z-a)^m \mathcal{F}(z)$$

cumple que es analítica en el punto a, y m es el orden del polo.

Se dice que una función es meromorfa en una región o en todo el plano, si lo és para cada punto de la región o del plano.

Si $\mathcal{F}(z)$ es meromorfa en una región dada o en todo el plano, también lo es $\frac{1}{\mathcal{F}(z)}$; los polos de cada una existen en los ceros de la otra, y del mismo orden.

Los polos de una función meromorfa en cualquier región son un conjunto discreto, i.e. la distancia entre los polos tiene una cota inferior; y si $\mathcal{F}(z)$ es meromorfa en cualquier región finita, incluyendo su límite, $\mathcal{F}(z)$ sólo puede tener un número fínito de polos en la región. Como $\frac{1}{\mathcal{F}(z)}$ también es meromorfa, $\mathcal{F}(z)$ sólo puede tener un número fínito de ceros en la región; y como $\mathcal{F}(z) - c$ es meromorfa (para cualquier constante c) $\mathcal{F}(z)$ sólo puede asumir un valor dado c en un conjunto finito de puntos en la región.

1.4 Funciones Enteras

Definición 10 (Función Entera) *Una función $w(z)$ se dice que es entera si es analítica en todo el plano excepto en $z = \infty$*

Ejemplos de esta clase de funciones son: $e^z, \cos z$ y sen$z$, puesto que tienen derivadas múltiples en todo el plano excepto en $z = \infty$.

Esta clase de funciones tiene propiedades interesantes como la siguiente:

Teorema 1 *Todas las funciones enteras $w(z)$ con ceros preestablecidos en los puntos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se escriben de la forma general*

$$w(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_v}\right) e^{P_v(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera arbitraria y $P_v(z)$ se define de la siguiente forma:

$$P_v(z) = \frac{z}{a_v} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_v}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{a_v}\right)^n$$

y $|a_v|$ debe ser dos veces mayor o igual que el círculo de convergencia de P.

1.5 Residuos

Se llama *residuo* de $\mathcal{F}$ en la singularidad a al coeficiente c_{-1} de la serie de Laurent, como se muestra en la expresión 1.3.

1.5.1 Cálculo del residuo

Si suponemos que una función $\mathcal{F}(z)$ tiene un polo simple en $z = a$ podemos calcular el residuo mediante la fórmula

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z - a)\mathcal{F}(z).$$

Porque $\mathcal{F}(z) = \frac{c_{-1}}{(z-a)} + g(z)$, donde $g(z)$ es analítica en a, luego

$$(z - a)\mathcal{F}(z) = c_{-1} + (z - a)g(z) \longrightarrow c_{-1}$$

cuando $z \to a$.

Si el polo $\mathcal{F}(z)$ en a es un polo doble de suerte que

$$\mathcal{F}(z) = \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z)$$

donde $g(z)$ es analítica en a , entonces naturalmente el límite de $(z-a)\mathcal{F}(z)$ ya no existe. Para determinar c_{-1} en este caso observamos que

$$(z-a)^2\mathcal{F}(z) = c_{-2} + c_{-1}(z-a) + (z-a)^2 g(z)$$

luego

$$\frac{d}{dz}\{(z-a)^2\mathcal{F}(z)\} = c_{-1} + 2(z-a)g(z) + (z-a)^2 g'(z) \to c_{-1}$$

cuando $z \to a$.

Por consiguiente, el residuo está dado ahora por la fórmula

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{d}{dz}\{(z-a)^2\mathcal{F}(z)\}$$

"Alternativamente, primero podemos determinar $c_{-2} = \lim_{z\to a}(z-a)^2 f(z)$ y después calcular el residuo del polo *simple* en a de $\mathcal{F}(z) - \{c_{-2}/(z-a)^2\}$".

Análogamente, si $\mathcal{F}(z)$ tiene un polo de orden n en a, el residuo es

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n\mathcal{F}(z)\}$$

1.6 Funciones Periódicas

1.6.1 Redes

Una red Ω de números complejos es una colección de números complejos que cumplen 2 propiedades:

1. Ω es un grupo respecto de la suma.
2. Las magnitudes absolutas de los elementos distintos de cero tienen una cota inferior.

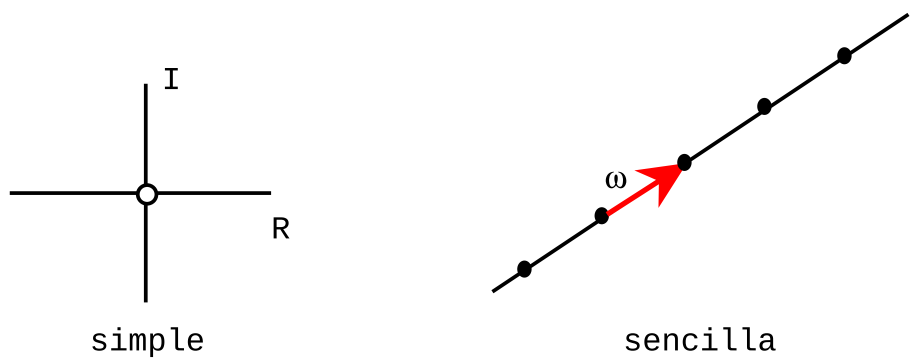


Figura 1.1: Redes sencillas y simples

Las redes pueden tener las siguientes formas:

Trivial Consiste únicamente del 0.

Simple Consiste de todos los múltiplos de $p\omega$, donde $p \in Z$ y $\omega \in C$ es el generador sencillo.

Doble Consiste de todas las combinaciones lineales con coeficientes enteros, de dos elementos generadores $\omega_1,\ \omega_2$.

Definición 11 (Clase Residuo) *Si z es cualquier valor de variable compleja, $z+\Omega$ denota el conjunto de valores $z+\omega$, $\forall \omega \in \Omega$. Este conjunto es llamado una Clase Residuo (mod Ω).*

Sumatoria sobre una RED.

Si Ω es cualquier red y $\mathcal{F}(z)$ cualquier función de una variable compleja, denotamos por :

$$\sum_{\Omega} \mathcal{F}(\omega)$$

la sumatoria de $\mathcal{F}(\omega)$ sobre los elementos $\omega \in \Omega$. Y por

$$\sum_{\Omega}{}' \mathcal{F}(\omega)$$

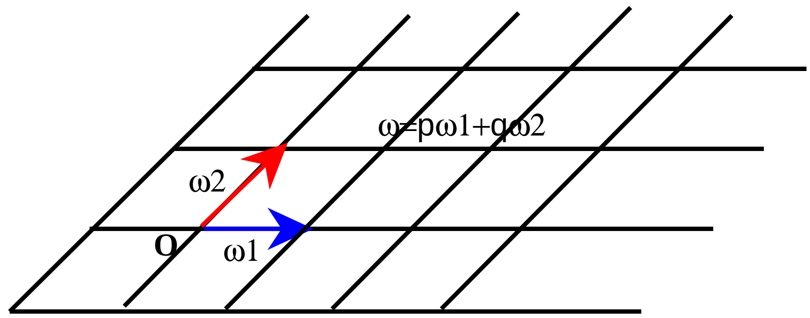


Figura 1.2: Red doble

la suma sobre todos los elementos de Ω diferentes de cero, es decir, igual a la sumatoria anterior, pero el término $\omega = 0$ es omitido.

Teorema 2 *Para cualquier red Ω y cualquier entero $n > 2$,*

$$S_n(\Omega) = \sum_{\Omega} {}' \omega^{-n} \tag{1.6}$$

converge absolutamente.

Si Ω es una red doble, los puntos de la red pueden ser distribuidos en conjuntos quedando sobre los perímetros de una secuencia de paralelogramos concéntricos, similar a la celda unidad, aquellos sobre el *r-ésimo* perímetro existen de la forma $p\omega_1 + q\omega_2$, donde $\mid p \mid, \mid q \mid$ ambos $\leq r$, y al menos uno de ellos igual a r.

Las cantidades $S_n(\Omega)$ definida como en 1.6, claramente satisface la propiedad de homogeneidad:

$$S_n(k\Omega) = k^{-n} S_n(\Omega)$$

para todos los enteros $n > 2$. Luego si n es impar $S_n(\Omega) = 0$ para cualquier red Ω, ya que $\Omega = -\Omega$, entonces

$$S_n(-\Omega) = S_n(\Omega) = -S_n(\Omega).$$

De manera similar si Ω es una red cuadrada como $\Omega = i\Omega$, cumple que $S_n(\Omega) = 0$ para todo n que no es divisible por 4.

1.6.2 Períodos

Definición 12 (Función Periódica) *Una función se dice periódica con periodo $\omega \neq 0$, si $\mathcal{F}(z + \omega) = \mathcal{F}(z) \quad \forall z$.*

Excluiremos a las funciones constantes de esta categoría.

Teorema 3 *El módulo de todos los periodos tiene un límite inferior.*

La suma de dos periodos también es un periódo, de la misma forma lo es $-\omega$. De este modo los periodos de cualquier función forman un grupo con respecto a la adición. De otra manera, a menos que la magnitud absoluta de periódos diferentes de cero esté acotada inferiormente, la función debe ser constante en cualquier región en la cual esta es diferenciable, ya que $\frac{f(u+h)-f(u)}{h} = 0$ para algún h arbitrariamente pequeño (excepto cero).Por tanto los periodos de una función meromorfa deben ser una red.

Por supuesto, cero es un periódo de toda función; y si éste es el único, la red de periodos es la red trivial, y la función es llamada no-periódica. Si una función tiene una red simple o de *periodos dobles*, esta es llamada simple o *doble periódica.*

Cerraremos este capítulo con la siguiente definición:

Definición 13 (Paralelogramo-Periódico) *Llamaremos* paralelogramo-periódico *a un celda de una red doble periódica. Un término equivalente a éste es, celda unidad.*

Capítulo 2

Funciones Elípticas

En este capítulo citamos algunos teoremas que engloban las propiedades de las funciones de doble periodo. Tratamos de estructurar lo más coherente posible la presentación de los teoremas; dado que fueron extraídos de diferentes fuentes, tal vez pueda diferir ligeramente su notación. No transcribiremos las demostraciones de los teoremas, sin embargo intentamos cubrir en su mayoría los conceptos mencionados en ellos en la sección anterior.

Primero mencionaremos la definición de función elíptica[1]:

Definición 14 *Una función elíptica es una función de una variable compleja, la cual es meromorfa en el plano completo, y doble periódica.*

Esto es, sea $\mathcal{F}$ una función meromorfa no constante tal que

$$\mathcal{F}(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \mathcal{F}(z) \qquad (m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

para cada z, donde ω_1, ω_2 es un par de periodos primitivos.

Definición 15 (Orden de la función Elíptica) *El número de polos de una función elíptica en un paralelogramo-periódico es llamado el orden de la función, hacemos incapié en que un polo de orden s es contado como s polos.*

2.1 Propiedades de funciones elípticas.

Si $\mathcal{F}(z)$ es una función elíptica, entonces las únicas singularidades posibles de $\mathcal{F}$ son un número finito de polos en cada paralelogramo-periódico. Podemos por tanto elegir un paralelogramo-periódico de tal forma que no tenga polos sobre los lados del mismo, con $\operatorname{Im} \omega_2/\omega_1 > 0$.

Teorema 4 (Liouville.) *Este declara que cualquier función la cual es analítica y acotada en el plano completo es una constante.*

Teorema 5 *No hay funciones enteras doble periódicas*[2].

[1] Algunos autores manejan los términos "función de doble periodo" y "función elíptica" de manera indistinta

[2] Recuerde que una función entera por definición es analítica en todo el plano excepto en el infinito

Teorema 6 *Si dos funciones elípticas tienen la misma red de periodos, las mismas clases residuo de polos, y las mismas clases residuo de ceros, de el mismo orden en cada caso, el cociente de las dos funciones es una constante diferente de cero.*

Teorema 7 *Si dos funciones elípticas tienen la misma red de periodos, y las mismas clases residuo de polos, con igual parte infinita en cada polo, las funciones difieren por una constante.*

Teorema 8 *Sea $\mathcal{F}(z)$ una función elíptica con la red Ω de periodos, zeros de orden $m_1, \ldots, m_h$ en las clases residuo $a_1 + \Omega, \ldots, a_h + \Omega$, y polos de orden $n_1, \ldots, n_k$ en las clases residuo $b_1 + \Omega, ..., b_k + \Omega$, con residuos $r_1, ..., r_k$ respectivamente.Entonces*

i) $\sum_{j=1}^{k} r_j = 0$

ii) $\sum_{j+1}^{h} m_j = \sum_{j+1}^{k} n_j$

iii) $\sum_{j=1}^{h} m_j a_j \equiv \sum_{j=1}^{k} n_j b_j (mod\ \Omega)$

El primer punto es conocido como el teorema del residuo. El punto **ii** puede ser entendido como: "Una función elíptica no constante tiene tantos polos como ceros". Así que el orden de una función elíptica puede redefinirse como el número de ceros en un paralelogramo-periódico.

Teorema 9 *La suma de los ordenes de los polos de una función doble periódica en un paralelogramo-periódico es, al menos, 2.*

De aquí podemos concluir que el orden menor de una función elíptica es 2.

Nos parece apropiado en este momento, mencionar los dos tipos más simples de funciones elípticas:

1. Funciones con un único polo de orden 2, en el cual la parte principal es de la forma

$$\frac{c}{(z-a)^2}$$

   en cada paralelogramo-periódico. Un ejemplo de estas funciones es la $\wp(z)$ de Weierstrass.

2. Funciones con dos polos simples cuya parte principal esta conformada por

$$\frac{c}{(z-a)} \quad \text{y} \quad \frac{-c}{(z-a)}$$

   en cada paralelogramo-periódico. Las funciones de Jacobi $sn(u)$, $cn(u)$, $dn(u)$ son un ejemplo de éstas.

Teorema 10 *Si a_j y b_j son los ceros y los polos de una función de doble periodo en un paralelogramo-periódico, entonces*

$$\sum a_j - \sum b_j = \omega$$

donde ω es periodo, y donde cada a_j y b_j son contados de acuerdo a su multiplicidad.

2.2 Funciones de Weierstrass

Se denota un par de generadores para una red de periodos, de una función elíptica por $2\omega_1, 2\omega_2$; y denotamos la misma red por 2Ω, donde Ω es generada por ω_1 y ω_2. Si deseamos especificar la red de periodos con la que la función elíptica $\mathcal{F}(z)$ ha sido construida la escribiremos como $\mathcal{F}(z \mid 2\Omega)$,

Definimos para cualquier entero $n \geq 3$

$$P_n(z \mid 2\Omega) = \sum_{\Omega}(z-2\omega)^{-n}$$

Esta serie converge absoluta y uniformemente en cualquier región finita, la cual excluye de manera finita a todos los puntos de la red, tal que $|z| < K, \quad |z-2\omega| > k$ donde $K,\ k$ son constantes positivas.

Para todo z en la región, y para todo ω tal que

$$|\omega| \ > \ K \quad \text{ y } \quad |z-2\omega| \ > \ |\omega|,$$

así la serie está acotada superiormente por $S_n(\Omega)$.

Tomando K suficientemente grande y k suficentemente pequeño, se puede hacer que la región de convergencia incluya cualquier punto del plano, excepto puntos de la red de la forma $z = 2\omega$; por lo que $P_n(z)$ es analítica excepto en los puntos de la red. Estos son polos de orden n con parte infinita $(z-2\omega)^{-n}$. Ya que si omitimos el término $(z-2\omega)^{-n}$ de la serie, el punto $z = 2\omega$ puede incluirse en la región de convergencia.

Si ω_0 es cualquier elemento de Ω, $2\omega_0$ es un periodo de $P_n(z)$, ya que la substitución de $z + 2\omega_0$ por z sólo permuta los términos de la serie ya que los conjuntos $\Omega, \Omega - \omega_0$ son los mismos (y la convergencia es absoluta) por lo que la suma no se altera.

Así $P_n(z|2\Omega)$ es una **FUNCION ELIPTICA DE ORDEN** N, con red de periodos 2Ω. Además diferenciando la serie término por término, tenemos:

$$P_n'(z) = -nP_{n+1}(z).$$

Sin embargo, para $n = 2$ la serie correspondiente no converge, como debería esperarse al definir $S_2(2\Omega)$, la cual no converge. Para obtener una función elíptica de orden 2 en esta secuencia definimos:

$$\wp(z) = \wp(z \mid 2\Omega) = z^{-2} + \sum_{\Omega}{}' \{(z-2\omega)^{-2} - (2\omega)^{-2}\}$$

Esta serie converge absoluta y uniformemente en el mismo tipo de región ($|z| < K,\ |z - 2\omega| > k$ para todo $\omega \in \Omega$) como en las series definidas para $P_n(z)$ con $n \geq 3$.

Diferenciando la serie término por término obtenemos

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + \sum_{\Omega}{}' \left\{ \frac{2}{(z-2\omega)^3} \right\} = -2P_3(z)$$

De estas series, las ecuaciones

$$\begin{aligned} \wp'(z + 2\omega_1) &= \wp'(z) \\ \wp'(z + 2\omega_2) &= \wp'(z) \end{aligned}$$

se sigue inmediatamente; que $\wp'(z)$ es una *función elíptica.*

Nuevamente, integrando obtenemos

$$\wp(z+2\omega) = \wp(z) + C,$$

Ahora sea $z = -\omega$; entonces

$$\wp(\omega) = \wp(-\omega) + C = \wp(\omega) + C,$$

luego $C = 0$. Así

$$\wp(z+2\omega) = \wp(z)$$

En consecuencia, $\wp(z)$ es una función elíptica de orden 2 con red de periodos 2Ω y polos dobles en la clase residuo cero.

Corolario 1 *Si n es cualquier entero, $\wp(z)^n$ es una función elíptica.*

Teorema 11 *La derivada de una función elíptica es una función elíptica.*

2.2.1 Relación entre $\wp(z)$ y $\wp'(z)$.

$\wp(z)$ satisface la ecuación diferencial

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \tag{2.1}$$

donde g_2 y g_3 son constantes :

$$\begin{aligned} g_2 = \quad & g_2(2\Omega) & = 60S_4(2\Omega), \\ g_3 = \quad & g_3(2\Omega) & = 140S_6(2\Omega) \end{aligned}$$

2.2.2 Valores Estacionarios de $\wp(z)$

Como $\wp(z)$ tiene polos dobles en la clase residuo 0, la suma de las dos clases residuo en la que toma algun valor es cero. Esto también es consecuencia de que es una función par, $\wp(-z) = \wp(z)$.

Si una clase residuo, en la cual $\wp(z) = e$, es $2\Omega + \omega$ donde $\omega \in \Omega$ y $\omega \notin 2\Omega$, es decir es un medio-periodo de $\wp(z)$, la otra clase residuo para el mismo valor coincide con éste, es decir, cualquier punto de esta clase residuo es un doble cero de $\wp(z) - e$, y un punto estacionario de $\wp(z)$, luego también es un cero de $\wp'(z)$.

Hay tres clases residuo de medios-periodos, llamados $2\Omega + \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$, donde ω_1, ω_2 son cualquier par de generadores de Ω, y $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$; la unión de estas tres clases residuo con la clase residuo cero es la red Ω. Estas son las tres clases residuo de ceros de $\wp'(z)$, que como hemos visto es de orden 3, sus únicos polos son triples, en la clase residuo cero.

Los valores estacionarios $e_i = \wp(\omega_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ de $\wp(z)$ son todos distintos. Los valores estacionarios e_1, e_2, e_3, son las raíces de la ecuación cúbica $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$, ya que de (2.1), $\wp'(z) = 0$ si y solo si $\wp(z)$ es una raíz de esta ecuación. Luego

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \\ e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 &= -\frac{1}{4}g_2 \\ e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3. \end{aligned}$$

2.2.3 Homogeneidad de $\wp(z)$ y $\wp'(z)$

De la definición de $\wp(z), P_n(z)$ como series dobles es claro que para cualquier $m \neq 0$.

$$\begin{aligned} \wp(mz \mid 2m\Omega) &= m^{-2}\wp(z \mid 2\Omega) \\ \wp'(mz \mid 2m\Omega) &= m^{-3}\wp(z \mid 2\Omega). \end{aligned}$$

y en general

$$P_n(mz \mid 2m\Omega) = m^{-n}P_n(z|2\Omega).$$

2.2.4 Ω rectangular

Sea ω_1 real y ω_2 imaginario puro. $\wp(z)$ es real sobre todos los lados de los rectángulos formando la red Ω de medios-periodos. Como z describe continuamente el perímetro de cualquier rectángulo, de $z = 0$ a $z = \omega_1$, luego para $z = \omega_1 + \omega_2 = -\omega_3$, después para $z = \omega_2$, y finalmente regresando a $z = 0$, la $\wp(z)$ varía continuamente a través de valores reales exclusivamente, desde ∞ hasta $-\infty$; por lo tanto debe asumir cada valor real sólo una vez en el curso de la variación. Ya que la trayectoria no contiene dos valores distintos de z; z' satisface que $z \pm z' \equiv 0 \pmod{2\Omega}$. Por lo tanto la variación es un decremento uniforme de $\wp(z)$ a través de valores reales. Conforme z varia en el perímetro a través de los valores $z = \frac{1}{2}\omega_1, \omega_1, \omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2, -\omega_3, \frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2, \omega_2, \frac{1}{2}\omega_2$ tenemos $e_1 + d_1 > e_1 > e_2 - d_2 > e_3 > e_1 - d_1 > e_2 > e_2 + d_2$, todos estos valores son reales (como $e_1 > e_3 > e_2$, d_1^2, d_2^2 ambos son positivos, las raíces cuadradas de d_1, d_2, como están definidas, son positiva y negativa respectivamente; d_3^2 a su vez es negativa, así que la $\wp(\frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2) = e_3 + d_3$, $\wp(\frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\omega_2) = e_3 - d_3$ son imaginarios conjugados).

Además un resultado curioso es que si $Re(z)$ es la mitad de un múltiplo impar de ω_1, $|\wp(z) - e_1| = d_1$; si $z - \frac{1}{2}k\omega_1$ es un imaginario puro y k es un entero impar, entonces la $Re(z+z) = k\omega_1$, es decir $\overline{z} \equiv \omega_1 - z \pmod{2\Omega}$ y $|\wp(z) - e_1|^2 = (\wp(z) - e_1)(\wp(\overline{z}) - e_1) = d_1^2$. Similarmente $z - \frac{1}{2}k\omega_2$ es real, donde nuevamente k es un entero impar, $|\wp(z) - e_2| = -d_2$, ya que $\overline{z} \equiv \omega_2 - z \pmod{2\Omega}$.

Las regiones de valores reales de la $\wp(z)$ en el plano Z son las líneas horizontales y verticales a través de todos los puntos de la red 2Ω, y también las líneas horizontales y verticales que están en medio de éstas. Sobre las primeras horizontales los valores de $\wp(z)$ oscilan entre $+\infty$ y el mínimo e_1, y sobre las otras horizontales oscilan entren $\max(e_3)$ y el $\min(e_2)$; sobre las primeras líneas verticales oscilan entre $-\infty$ y el $\max(e_2)$ y sobre las otras verticales entre el $\max(e_1)$ y el $\min(e_3)$. Note que cada valor estacionario es un valor máximo real sobre la línea horizontal o vertical que pasa por el punto estacionario, y un mínimo sobre el otro.

Capítulo 3

Análisis de una función.

En los capítulos anteriores hemos hecho referencia a definiciones, propiedades y teoremas de las funciones complejas, principalmente a las relacionadas con las funciones elípticas. En este capítulo nos centramos en el análisis de una función para mostrar si es o no elíptica. Primero definiremos la función a estudiar y mostraremos algunas de sus representaciones gráficas en las que nos basaremos para iniciar nuestro análisis.

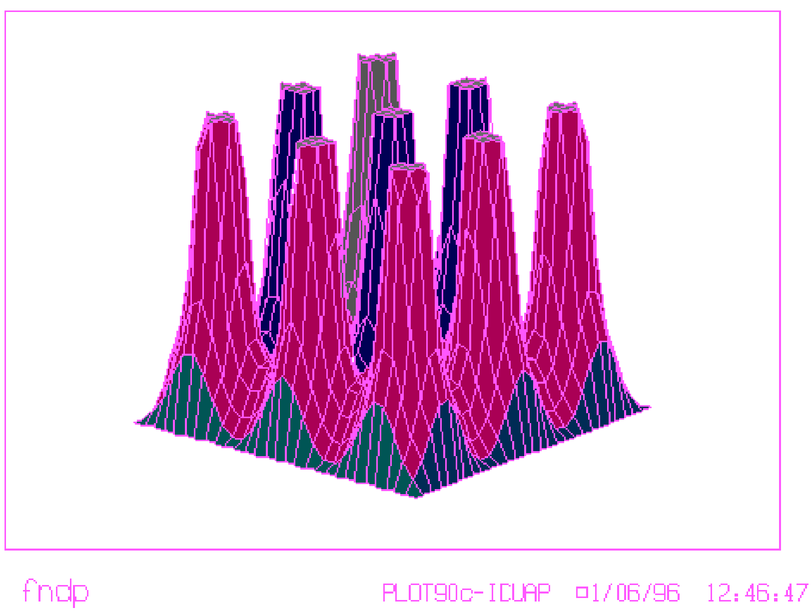


Figura 3.1: Superficie de la función

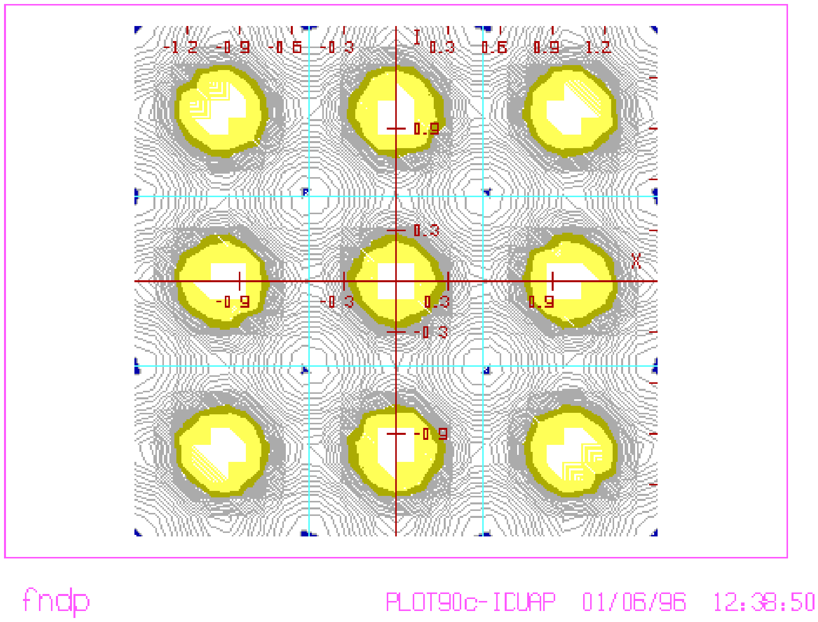


Figura 3.2: Contorno de nivel

3.1 Definición de la función

La función que se propone analizar es la siguiente:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0 - j - ik)^2} \tag{3.1}$$

Donde $z \in C$, z_0 es una constante compleja, y los índices $j, k \in Z$ forman el número complejo $w = j + ik$. Es fácil ver que $\Omega = \{w | w = j + ik, \ \ j \ , \ k \in Z\}$ es una red doble en el plano complejo con generadores $(1,0)$ y $(0,1)$. La constante z_0 indica un corrimiento de la gráfica, así que originalmente consideramos $z_0 = 0$, con lo que la ecuación 3.1 queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - j - ik)^2} \tag{3.2}$$

Y sus representaciones gráficas del valor absoluto de la función son las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 para la superficie, contorno de nivel y contorno de fase, respectivamente.

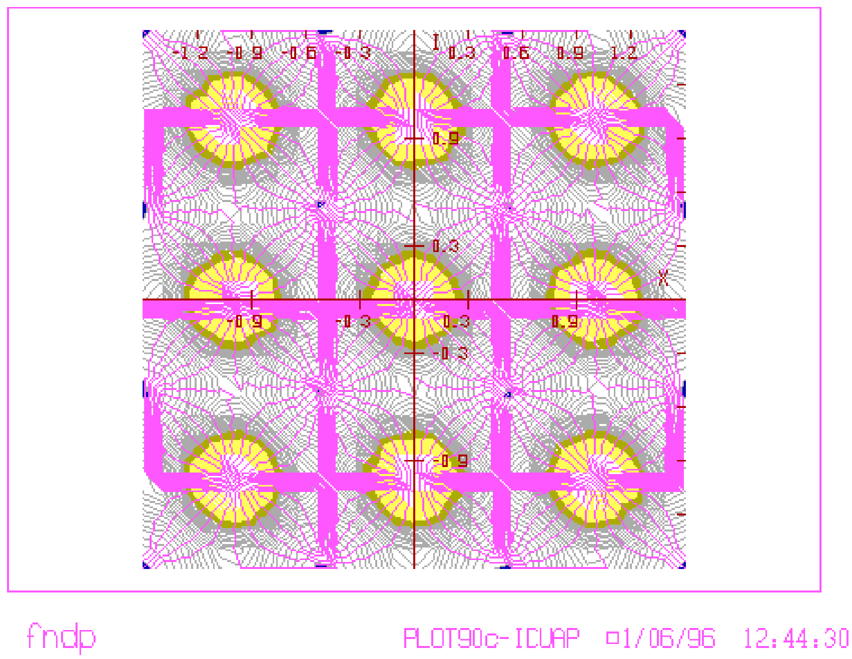


Figura 3.3: Contorno de fase

3.2 Períodos de la función

Observando el comportamiento de la función en las gráficas anteriores y centrandonos en la que muestra el contorno de fase, interpretamos las trayectorias como una conexión entre puntos aislados (ceros o polos[1]) de la función en la región de estudio.

Se espera que para puntos en vecindades entorno a $\omega \in \Omega$ el módulo de la función tenga una tendencia al infinito, esto es, que

$$|F| \to \infty \quad \text{cuando} \quad z \to \omega \in \Omega$$

También podemos deducir que los puntos $.5 + .5i$, $.5 - .5i$ y en general aquellos de la forma $\pm.5 \pm .5i + \omega$, $\omega \in \Omega$, son raíces de la función.

Note la densidad en las trayectorias horizontales que unen a los polos y en las verticales que unen las raíces; esta densidad indica que la función toma valores reales positivos.

La figura 3.5 muestra una ampliación de la celda primitiva de Ω.

Como es mencionado en el capítulo anterior, es conveniente definir [2] la red de periodos de tal forma que no existan polos sobre los lados del paralelogramo-periódico. Así que

[1] Ver referencia [2], página 129.

[2] Para mayor claridad en el análisis gráfico de los periodos de la función.

nuestra red de periodos será:

$$\Omega' = \omega + \Omega \qquad\qquad \text{donde} \quad \omega = 0.5 + i0.5$$

Observemos que nuestra red de periódos Ω' es una clase residuo mod Ω, con esto sólo aplicamos un desplazamiento al conjunto de puntos en Ω, y la distancia sigue siendo de módulo 1 en los generadores. Para que esto sea claro observese la figura 3.2 en donde, nos parece, se aprecian bien los periodos de la función.

Es importante subrayar que nuestro paralelogramo periódico sólo será cerrado en su lado inferior, lado izquierdo, y en el vértice que une éstos lados.

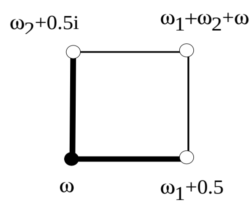


Figura 3.4: Paralelogramo periódico

.

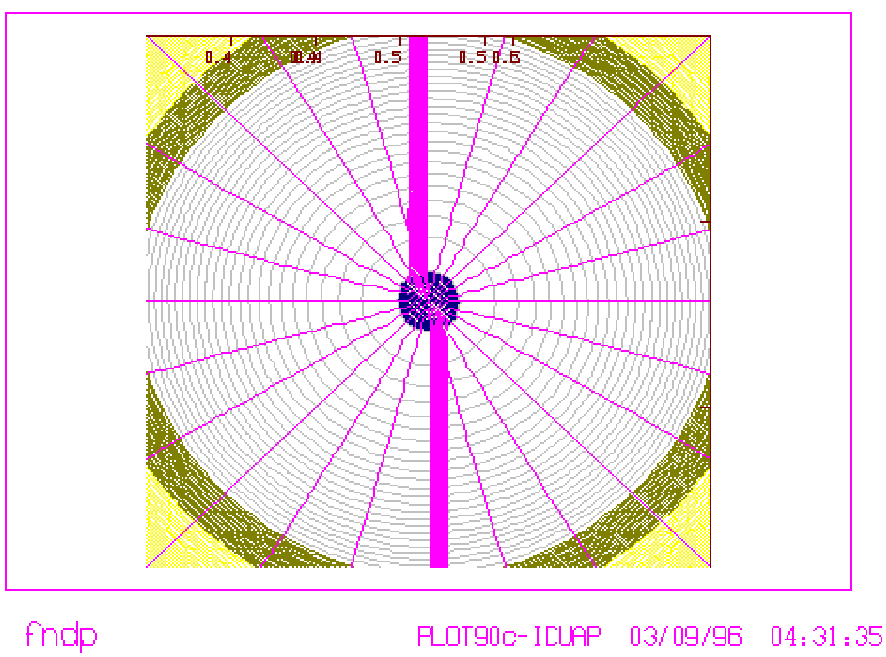


Figura 3.5: Cero de la función.

3.3 Orden de los polos

El orden de los polos en nuestra función es 2, para apreciarlo de manera gráfica hemos obtenido la superfice y los contornos de nivel de valor absoluto; y los contornos de fase de la función 3.3 (ver fig. 3.6, 3.7 y 3.8 respectivamente) correspondiente a $(z-a)^2\mathcal{F}(z)$, esto es, gráficamos:

$$(z-a)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j-ik)^2} \tag{3.3}$$

en valor absoluto, donde a es un polo de la función y es de la forma $a = j + ik$, con lo que estamos anulando un polo en a de la función $\mathcal{F}$. La superficie es mostrada con un corte para apreciar como es anulado el polo en $a = 1 + i$.

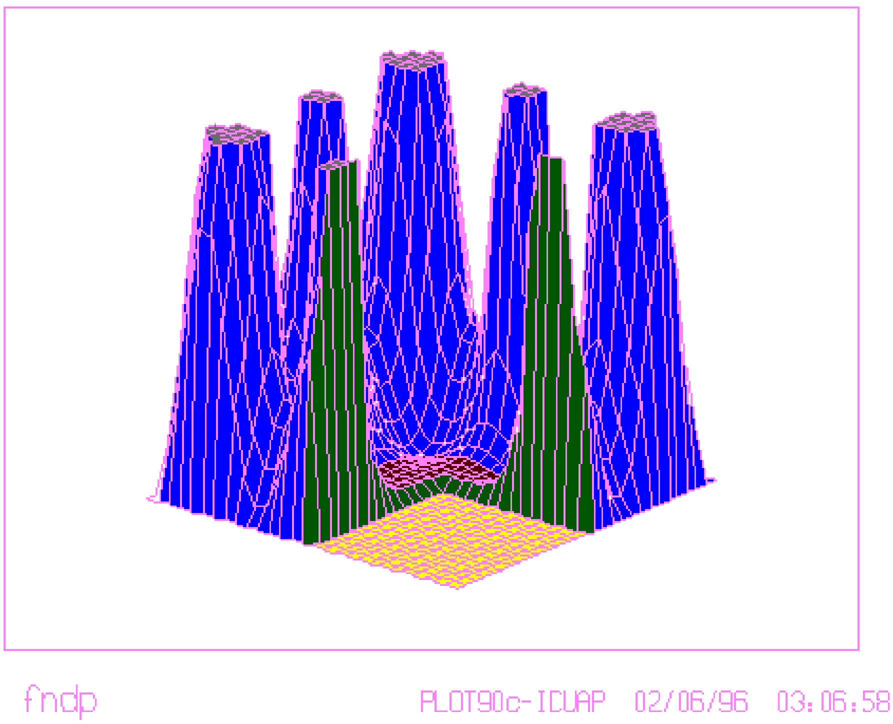


Figura 3.6: $(z-a)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j-ik)^2}$. Factorización del polo en $a = 1 + i$.

También se muestran las gráficas donde hemos factorizado únicamente un orden de un polo en el mismo punto: $a = 1 + i$ (ver figuras 3.9 y 3.10).

Y como ya hemos determinado los periodos de la función, sabemos que sólo encontramos un polo por cada paralelogramo-periódico, y siendo éste de orden 2, obtenemos que el residuo de el polo en a es cero (ver sección 2.1).

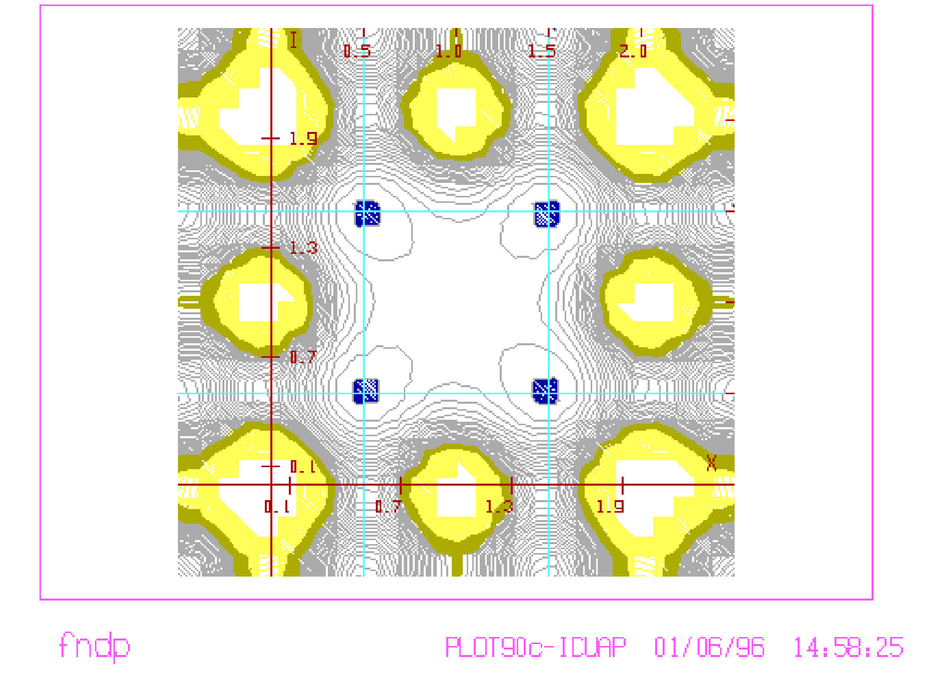


Figura 3.7: $(z-a)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j-ik)^2}$. Factorización del polo en $a = 1 + i$.

Y analíticamente se obtiene

$$\lim_{z \to a} \frac{d}{dz}\{(z-a)^2 \mathcal{F}(z)\} = \lim_{z \to a}\{2(z-a)\mathcal{F}(z) + (z-a)^2 \mathcal{F}'(z)\} = 0$$

3.4 Orden de las raíces

Realizando un análisis de la función, como en la sección 1.2; logramos la factorización de una raíz [3]. Y no sólo eso, sino que podemos apreciar el orden de ésta.

Primero se muestran la gráfica de contornos de valor absoluto de

$$\frac{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j-ik)^2}}{(z-a)}$$

dado que nuestra raíz es de orden 2, gráficamente vemos que estamos anulando sólo un orden de la raíz, esto es, seguiremos teniendo una raíz en el punto a; pero ahora de orden 1.

En la gráfica siguiente anulamos por completo a la raíz.

[3] tener siempre presente que "el análisis de la función es realizado sobre un paralelogramo periódico"

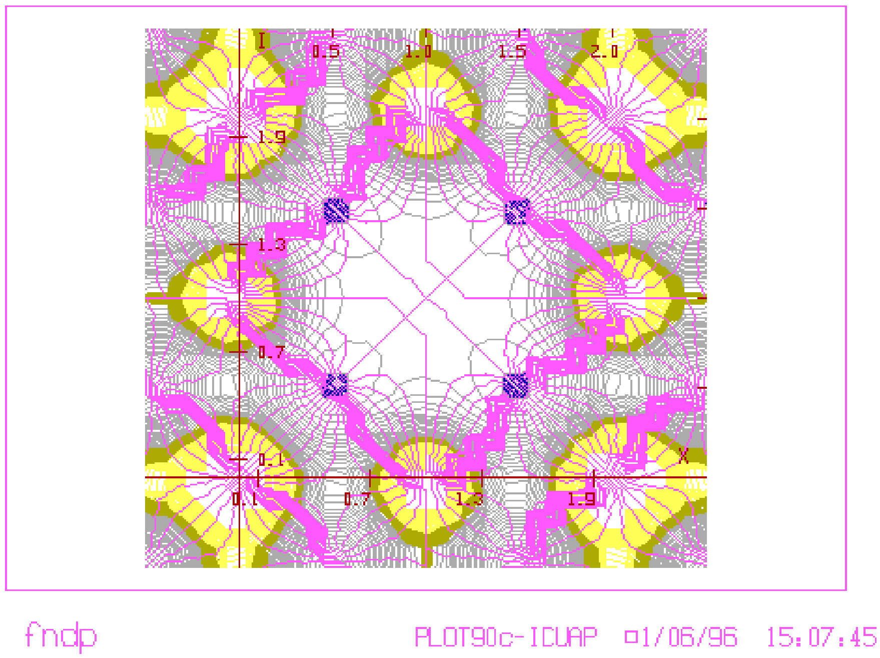


Figura 3.8: $(z-a)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-j-ik)^2}$. Factorización del polo en $a = 1+i$.

Dado nuestros resultados anteriores, hemos mostrado que:

1. La suma de los órdenes de los polos es igual a la suma de los órdenes de las raíces; este resultado es del teorema 8. De manera explícita, en cada paralelogramo-periódico tenemos en cero de orden 2 y un polo de orden 2.

2. El orden de nuestra función es 2, aplicando la definición 15.

3.5 Convergencia de la función

Sabemos que para que una serie sea convergente es condición necesaria y suficiente que

$$\lim_{n\to\infty} (U_{n+p} - U_n) = 0$$

para todo entero $p > 0$ (ver referencia [7, pags. 222–223]).

Definiremos U_n en términos de nuestra serie:

$$U_n = \sum_{\Omega_n} \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

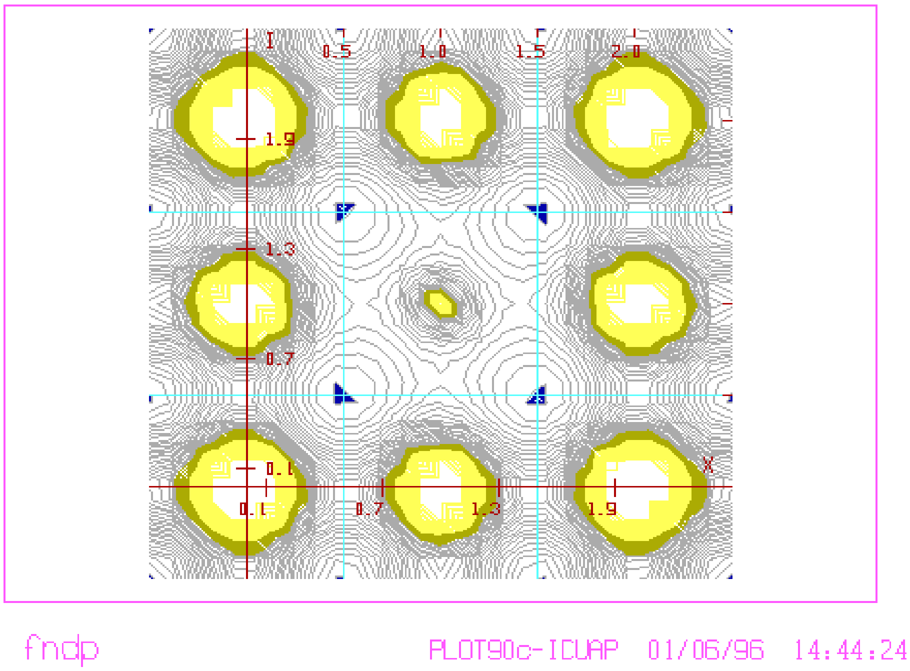


Figura 3.9: $(z-a)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-j-ik)^2}$. Factorización de un orden del polo en $a = 1+i$.

donde Ω_n representa la suma de los n primeros paralelogramos concéntricos a partir del origen. Así realizando las computaciones pertinentes, tenemos que, si $|z| < 1$:

$$
\begin{aligned}
& 0 && < \lim_{n\to\infty}\left(|U_{n+p}| - |U_n|\right) \\
\Longrightarrow & && < \lim_{n\to\infty}\left(|U_{n+p} - U_n|\right) \\
\Longrightarrow & && = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{\Omega_{n+p}}\frac{1}{(z-\omega)^2} - \sum_{\Omega_n}\frac{1}{(z-\omega)^2}\right| \\
\Longrightarrow & && = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{\Omega_{n+1\ldots n+p}}\frac{1}{(z-\omega)^2}\right| \\
\Longrightarrow & && \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{\Omega_{n+1\ldots n+p}}\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}\right|
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

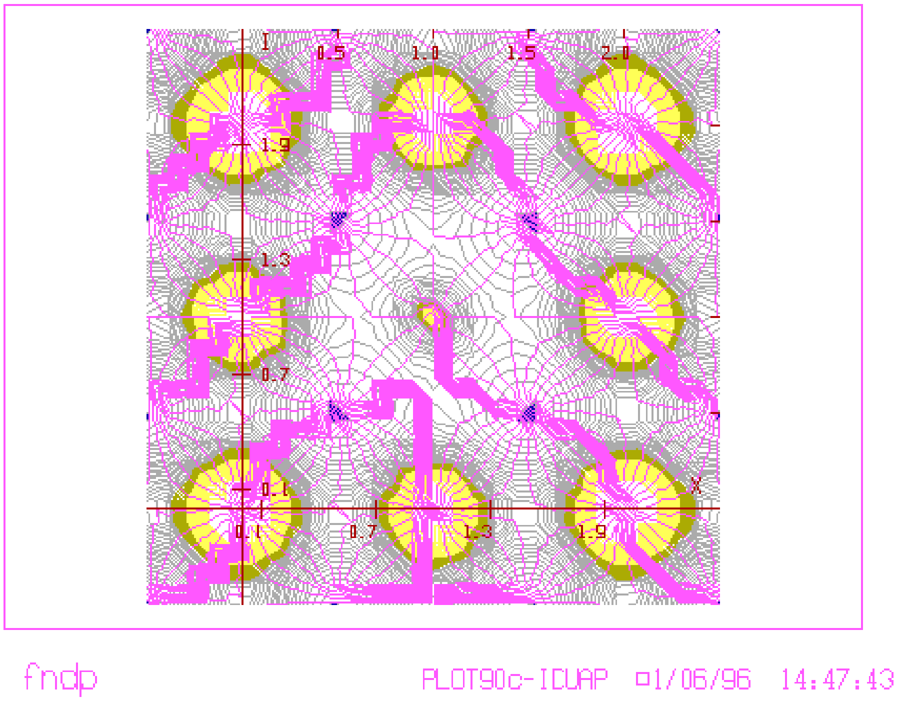


Figura 3.10: $(z-a)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-j-ik)^2}$. Factorización de un orden del polo en $a = 1 + i$.

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & < \lim_{n\to\infty}\sum_{r=n+1}^{n+p}\frac{8(r)}{(r-1)^2} && (3.5)\\
\Longrightarrow \quad & < \lim_{n\to\infty}\frac{8p(n+p)}{n^2} && (3.6)\\
\Longrightarrow \quad & = \lim_{n\to\infty}(\frac{8p}{n}+\frac{p}{n^2})\\
\Longrightarrow \quad & = 0
\end{aligned}
$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}(|U_{n+p}| - |U_n|) = 0$$

entonces

$$U = \sum_{\Omega}\frac{1}{(z-\omega)^2}$$

converge.

En la desigualdad de 3.4 a 3.5 la cota se da en términos de $(r-1)^{-2}$ para establecer las cotas máximas en cada uno de los paralelogramos concéntricos. Y para obtener la

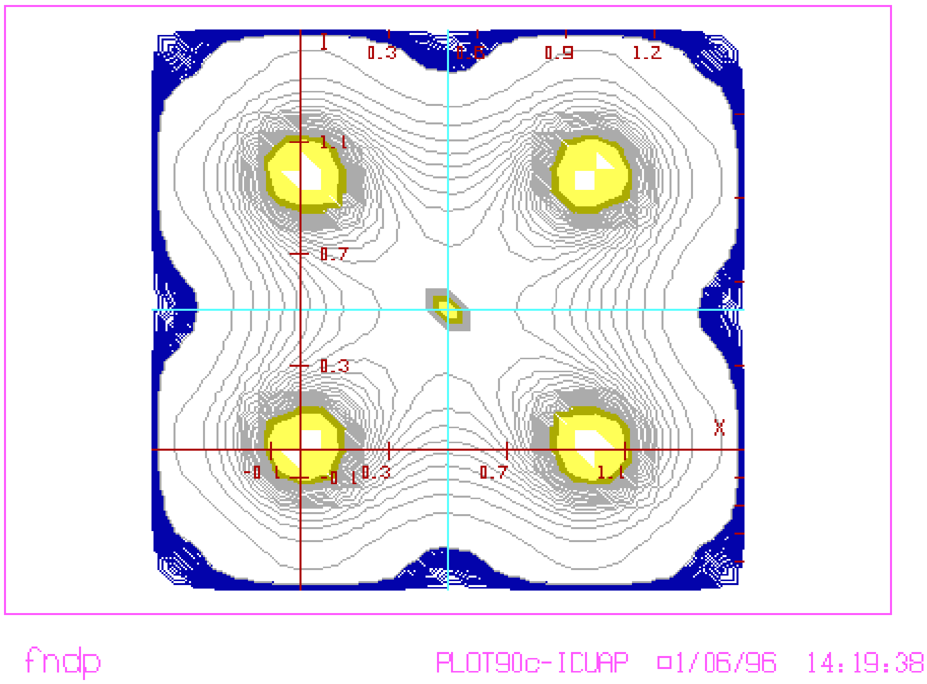


Figura 3.11: Anulando un Orden de la Raíz.

siguiente desigualdad (eq. 3.6) se utilizó la menor de las cotas mayores, que es la que corresponde al último paralelogramo $(n+p)$.

3.6 Observaciones

En la definición de la función los índices de ambas sumatorias barren de $(-\infty, \infty)$. Por lo anterior en los programas se redujo el valor de los índices a intervalos cortos, por ejemplo de $[-50, 50], [-10, 10], [-5, 5]$, inclusive $[-1, 1]$.

Detectamos en un inicio que los ceros de la funcón 3.1 no estaban precisamente distribuidos de una forma ideal, tal que formaran una red, sino que se encontraban, aparentemente, 2 ceros de orden 1, no muy alejados del punto donde nosotros suponíamos debía hallarse un solo cero de orden 2 ($(x+iy) \in \Omega'$), ver figura 3.13.

Además observamos tenían cierta alineación dependiendo del cuadrante y distancia a un eje donde estuvieramos observando las raíces. Dado lo anterior decidimos ir aumentando los índices de las sumatorias, de forma proporcional 1 a 1, lo que no alteraba la alineación observada, sin embargo sí influía sobre la distancia entre los "dos ceros", acortandola de forma proporcional.

Al alterar los índices en una proporción 12 a 1 (o 1:12), logramos captar una alineación

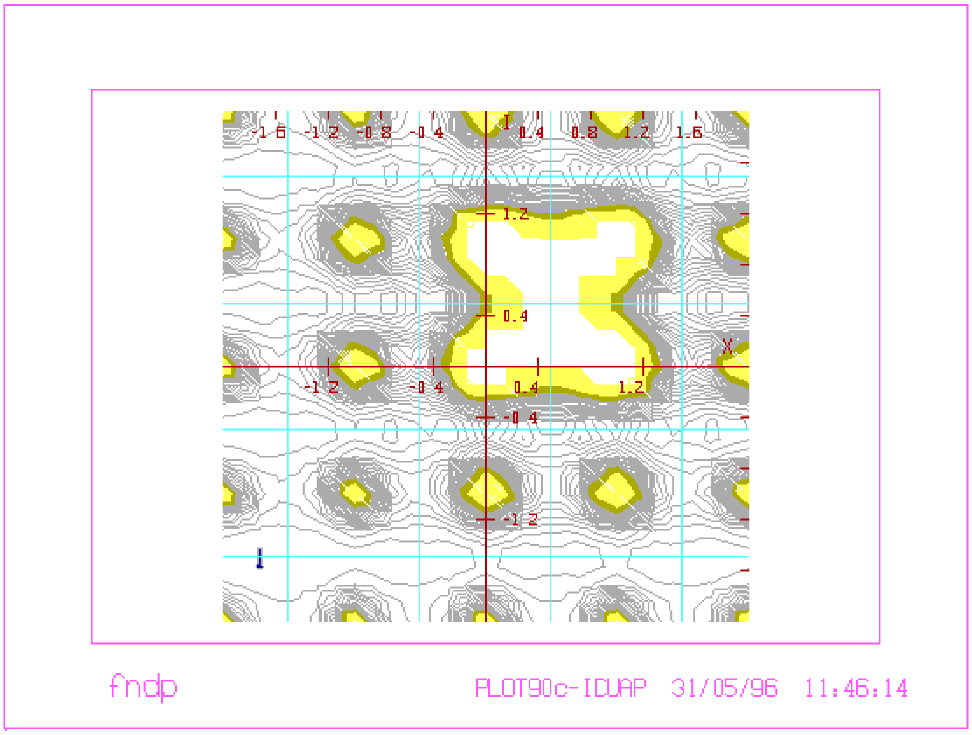


Figura 3.12: Anulando una Raíz.

completamente paralela al eje real (o al imaginario) estando el punto no muy cerca de alguno de los ejes (ésta alineación sólo la apreciabamos cuando el punto por analizar se encontraban los más cercano posible a un eje).

Concluimos que la apreciación de los "los dos ceros de orden 1" es un error de precisión númerica.

Obtuvimos una gráfica con índices de $[-100, 100]$ y observamos que se llega a notar una "fusión" de estos ceros, ya que para llegar a ver la "separación" entre éstos se utiliza una escala tan pequeña, como para atrevernos a decir que la distancia entre ellos es prácticamente nula.

Otra observación que podemos hacer y consideramos importante como para subrayarla es:

Nuestra red de ceros es ideal como para darnos la pauta para definir nuestra red de períodos.

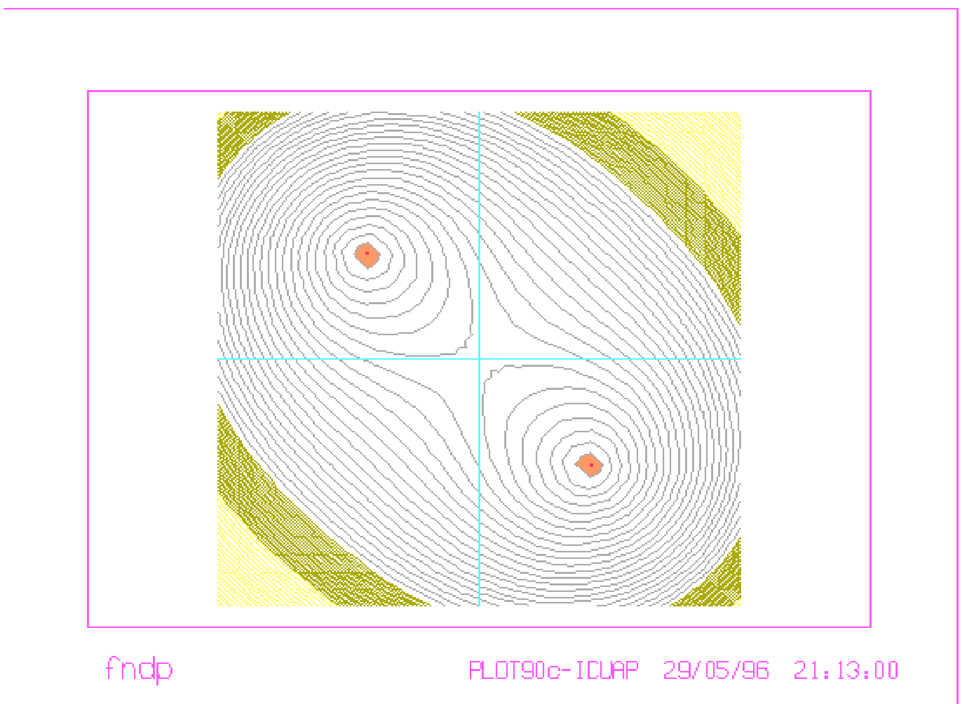
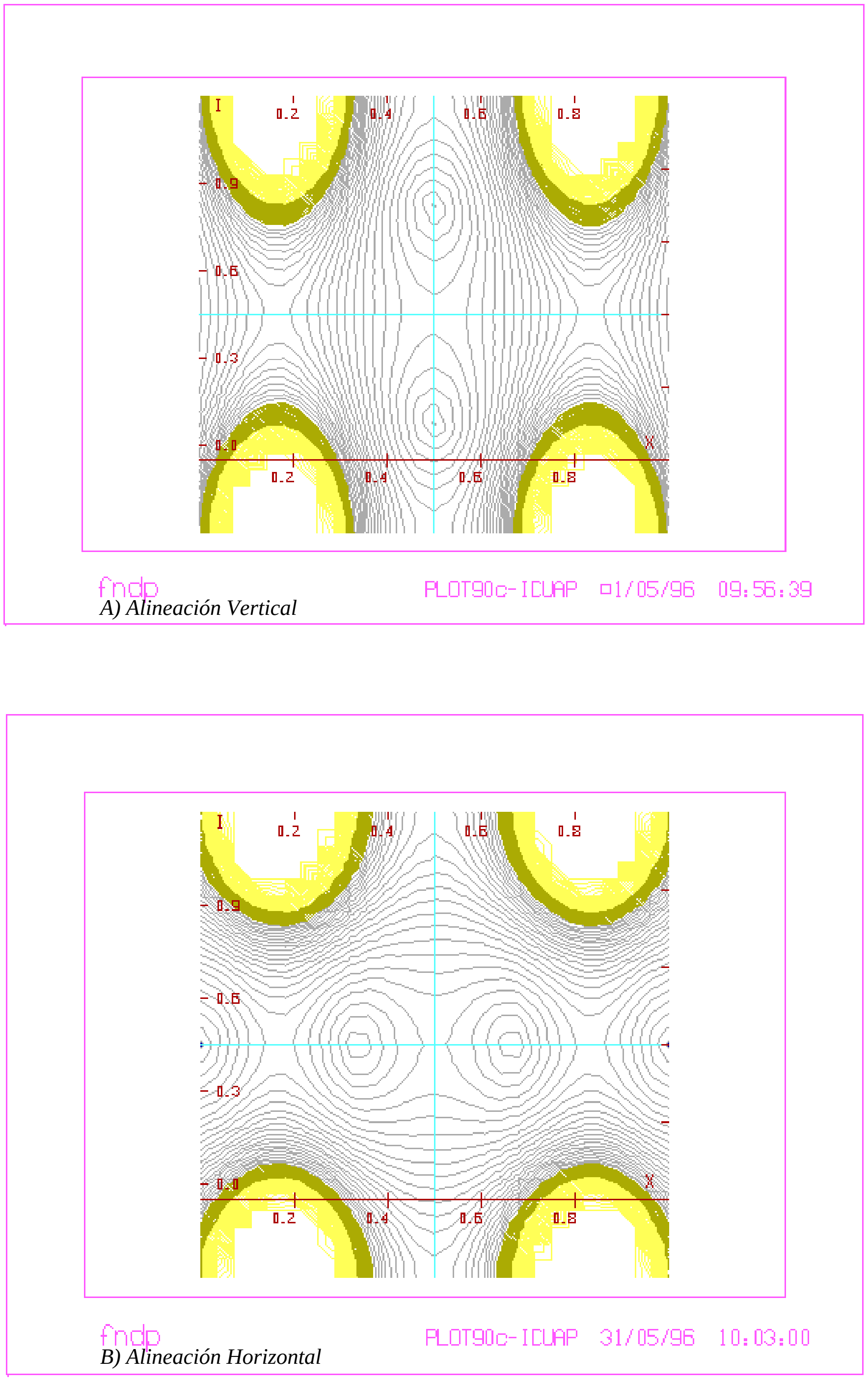


Figura 3.13: ¿Ceros de orden 1?.



A) Alineación Vertical

B) Alineación Horizontal

Figura 3.14: Alineación de los ceros.

Capítulo 4

Conclusiones

Dado el análisis hecho en el capítulo anterior podemos concluir lo siguiente:

1. La función que hemos analizado (función 3.1) es elíptica, que por cierto, es una de las más sencillas.
2. Utilizando la "factorización" de las raíces se puede obtener su orden.
3. Aplicando la idea anterior se buscó la forma de hacer analítica la función 3.1 en el punto a (que es un polo de ésta) y con ello establecer el orden del polo.
4. Se puede hallar el orden de la función con sólo encontrar el número y orden de los polos o los ceros, en un paralelogramo periódico.
5. Para conocer el comportamiento de la función en todo su dominio basta estudiar su comportamiento en un paralelogramo periódico.
6. De no tenerse cuidado en el manejo de los índices en la definición de la función podemos llegar a fijarnos un conocimiento erróneo, como el afirmar tener ceros de orden 1.
7. No es recomendable usar la serie Cauchy-Taylor para mostrar la convergencia de la función en la vecindad del cero.

Apéndice A

Programa en C

```
/*
   UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA
       COLEGIO DE COMPUTACION
        ANALISIS NUMERICO II
*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <ctype.h>
#include "plotp.h"
#include "arcom.c"

#define NF   29
#define NC   29

complex inc, z0;
double XMI, XMA, IMI, IMA, DMIx, DMAx, DMIi, DMAi, N, NDIVX, NDIVI;

 void ejesri()
 { pltig( XMI, IMI, 1, pltca);
   pltig( XMA, IMA, 2, pltca);
   pltig( XMI, 0.0, 3, pltca);
   pltig( XMA, 0.0, 8, pltca);
   pltig( 0.0, IMI, 3, pltca);
   pltig( 0.0, IMA, 9, pltca);
   return;  }

complex func(z) complex z; {                           /*  Calculo de la funci\'on   */
complex fz={0.0,0.0},caux,ca={1.0,0.0},com;
com.x=DMIx;  com.i=DMIi;
  for(com.x=DMIx; com.x<=DMAx; com.x+=inc.x)
    for(com.i=DMIi; com.i<=DMAi; com.i+=inc.i) {
      caux=dfnc(dfnc(z,com),z0);
      fz=adnc(fz,divnc(ca,mulnc(caux,caux))); };
/*  return(divnc(ca,fz)); */                            /* 1/f(z)                    */
  return(fz);                                           /* f(z)                      */
com.x=1; com.i=1;
/*return(mulnc(fz, mulnc(dfnc(z, com),dfnc(z, com))));*/ /*factorizando el polo       */
/*return(mulnc(fz, dfnc(z, com)));                   */ /*factorizando un orden del polo*/
/*com.x=0.5; com.i=0.5;
```

```
  return(divnc(fz, mulnc(dfnc(z,com), dfnc(z,com))));*/ /* factoriznado un cero      */
/*return(divnc(fz, dfnc(z,com)));              */ /*factorizando un orden del cero*/
  }


double acota(double n)
{
  if (n>N) return (N);
  else if( n<-N ) return (-N);
  return (n);
}

void main()
{ int i,j,decis;
  complex aux;
  double mfdp[NC][NF], mcf[NC][NF];
  double dx,di,zmi,zma,x,ic,dz;
  double micx, macx, mici, maci, smicx, smacx, smici, smaci, sdct;

printf("Proporcionar XMI, XMA, IMI, IMA, z0 :   ");
scanf("%lf %lf %lf %lf %lf %lf", &XMI, &XMA, &IMI, &IMA, &z0.x, &z0.i);
printf("Proporcionar Cota, NDIVX, NDIVI, DMIx, DMAx, DMIi, DMAi: ");
scanf("%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf", &N, &NDIVX, &NDIVI, &DMIx, &DMAx, &DMIi, &DMAi);

printf("Rango de primer corte :  ");
scanf("%lf %lf %lf %lf", &micx, &macx, &mici, &maci);

printf("Rango de segundo corte :  ");
scanf("%lf %lf %lf %lf", &smicx, &smacx, &smici, &smaci);

inc.x=(DMAx-DMIx)/(NDIVX); inc.i=(DMAi-DMIi)/(NDIVI);
  dx=fabs(XMA-XMI)/(double)(NF-1);
  di=fabs(IMA-IMI)/(double)(NC-1);
  zmi=acota(modnc(func(XMI,IMI)));
  zmi=(zmi<0.0) ? 0.0 : zmi;
  zma = zmi;

  sdct=N/4;

  ic = IMI;
  for(i=0; i<NC; i+=1)
  {
    x = XMI;
    for(j=0; j<NF; j+=1) {
    if((micx<=x && x<=macx) && (mici<=ic && ic<=maci)) {   /*Para primer corte        */
      mfdp[i][j]=-1;
      x+=dx;
      continue;  };
    aux=arg_mod(func(x,ic));
    mcf[i][j]=aux.i;
    aux.x=x;   aux.i=ic;
    aux.x=acota(modnc(func(aux)));
    if((smicx<=x&&x<smacx) && (smici<=ic&&ic<smaci))       /*Para segundo corte       */
      mfdp[i][j] = (aux.x>sdct)?sdct:aux.x;
    else
      mfdp[i][j] = aux.x;

    if (mfdp[i][j] < zmi) zmi=mfdp[i][j];
    if (mfdp[i][j] > zma) zma=mfdp[i][j];
```

```
    x+=dx;   }
    ic+=di;
   }

if(toupper(decis)=='S') {
for(i=0;i<NC;i+=NC-1)                                         /*Para los bordes          */
  for(j=0;j<NF;mfdp[i][j++]=zmi);
for(j=0;j<NF;j+=NF-1)
  for(i=0;i<NC;mfdp[i++][j]=zmi);  }

for(i=0;i<NC;i++)                                             /*Para primer corte        */
  for(j=0;j<NF;j++) {
    if(mfdp[i][j]!=-1)
      continue;
    mfdp[i][j]=zmi;  };

   dz = fabs(zma-zmi)/8.0;
   x = zmi - dz;
   i = zma + dz;

decis = 'a';
while(decis != 'X') {
printf("\n\t-S- Superficie\n\t-F- cont. Fase\n\t-2- 2contorno\n\t-C- Contorno");
decis=toupper(getche());
   pltdk(3);
   plt00();
   plotf(-1);
   pltfr(3);
   pltso(3.0, 3.0, 0.0, 0.0);
   switch (decis) {
     case 'C':
          ejesri();
          pltcolor(14);                               /*  YELLOW                    */
          pltkp(zmi,&mfdp[0][0],(zma-zmi)/150,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
          pltcolor(8);                                /*  DARKGRAY                  */
          pltkp((zma-zmi)/150,&mfdp[0][0],(zma-zmi)/2,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
          pltcolor(9);                                /* BROWN                      */
          pltkp((zma-zmi)/2,&mfdp[0][0],2*(zma-zmi)/3,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
          pltcolor(1 | 0);                            /* BLUE | BLACK               */
          pltkp(2*(zma-zmi)/3,&mfdp[0][0],zma,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);

            /* Para graficar la red de periodos  */
          pltcolor(4);                                /* RED                        */
          DMAx=(DMAx>XMA)?DMAx:XMA;
          DMAi=(DMAi>IMA)?DMAi:IMA;
          DMIx=(DMIx<XMI)?DMIx:XMI;
          DMIi=(DMIi<IMI)?DMIi:IMI;
          for(dx=DMIx+(inc.x/2); dx<=DMAx; dx+=inc.x)  {
            pltig(dx,DMIi, 3, pltca);
            pltig(dx,DMAi, 4, pltca);         }
          for(di=DMIi+(inc.x/2); di<=DMAi; di+=inc.i)  {
            pltig(DMIx, di, 3, pltca);
    pltig(DMAi, di, 4, pltca);        }
            pltcolor(11);
    ejesri();
            break;
     case 'F':
          ejesri();
          pltkc(zmi,&mcf[0][0],zma,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
```

```
         break;
     case '2':
          ejesri();
  pltcolor(14);                                   /* YELLOW                   */
          pltkp(zmi,&mfdp[0][0],(zma-zmi)/150,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
          pltcolor(8);                            /* DARKGRAY                 */
          pltkp((zma-zmi)/150,&mfdp[0][0],(zma-zmi)/2,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
  pltcolor(9);                                    /* BROWN                    */
          pltkp((zma-zmi)/2,&mfdp[0][0],2*(zma-zmi)/3,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
  pltcolor(1 | 0);                                /* BLUE | BLACK             */
          pltkp(2*(zma-zmi)/3,&mfdp[0][0],zma,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
          pltcolor(2);                            /* GREEN                    */
  pltkc(zmi,&mcf[0][0],zma,25,(NF/64)+1,NF,(NC/64)+1,NC,pltca);
  pltcolor(11);
  ejesri();
  break;
     case 'S':
          for(i=0;i<NC;i+=NC-1)                   /* Para los bordes          */
     for(j=0;j<NF;mfdp[i][j++]=zmi);
     for(j=0;j<NF;j+=NF-1)
for(i=0;i<NC;mfdp[i++][j]=zmi);
          pltrv(x,&mfdp[0][0], i, NF, NC, -40.0, pltca);
          break;
     case 'X':
          exit(0);
     default :
          printf("No detecto");
          break;  };

   getchar();
   pltcolor(2);
   plotr();
   pltla(" fndp ",6);
   pltho();
   closeplt(); }
   }
```

Apéndice B

Macsyma

Este capítulo muestra la forma de tratar el problema de graficación de una función de doble período utilizando Macsyma.

Macsyma es un paquete matemático que permite realizar computaciones aritméticas, simbólicas, además tiene una interfaz gráfica y permite incorporar programas escritos en FORTRAN. El programa de Macsyma que utilizamos es PC Macsyma (Macsyma 2.0).

En en calpítulo referente al análisis de la función se mencionó que la expresión que se desea analizar es:

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-(j+ik))^2}$$

Para empezar debemos representar a $\mathcal{F}$ como una función compleja. Para lo cual primero debemos declarar a z como un número complejo de la siguiente forma:

```
(c1) z:a + %i*b$
```

Donde $(c1)$ es un número de línea de comando que el usuario ejecuta, z es el nombre de la varible, : es el símbolo que representa una declaración de variable, `a+%i*b` es la expresión para z, particularmente `%i` representa la parte imaginaria de la expresión. El símbolo `$` significa que z debe declararse y no mostrarse en la terminal[1].

Una vez declarada z como un número complejo, entonces se procede a declarar a f como la función que deseamos.

```
(c2) f(z) := sum(sum(1/(z-(j+%i*k))^2, j, -10, 10), k, -10, 10)$
```

Note que una función se declara con el símbolo = y no con : (como el caso de las variables). La función `sum()` tiene la siguiente sintaxis:

```
sum( expresion , variable, minimo, maximo)
```

La definición de $\mathcal{F}$ no representa problemas para cálculos de límites y otras computaciones algebráicas, pero la función para graficar tiene problemas por la definición de z, por

[1] Si la expresión termina con el símbolo `;` entonces se muestra en la terminal la computación algebráica de la expresión.

lo que se decidió partir la función en su parte real y su parte imaginaria:

$$
\begin{aligned}
g(a,b) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{((a-k)^2-(b-j)^2)}{((a-k)^2+(b-j)^2)^2} \\
t(a,b) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-2*(b-j)*(a-k)}{((a-k)^2+(b-j)^2)^2} \\
\mathcal{F}(a,b) &= g(a,b) + it(a,b)
\end{aligned}
$$

donde a y b son la parte real e imaginaria de z, g y t son la parte real e imaginaria de $\mathcal{F}$, así la representación en Macsyma de $\mathcal{F}$ quedó de la siguiente forma:

```
(c4)  g(a,b) := sum(sum(((a-k)^2-(b-j)^2)/((a-k)^2+(b-j)^2)^2,j,-1,1),k,-1,1)$
(c5)  t(a,b) := sum(sum(-2*(b-j)*(a-k)/((a-k)^2+(b-j)^2)^2 ,j,-1,1),k,-1,1)$
(c6)  f(a,b) := f(a,b) := cabs( g(a,b) + %i*t(a,b))$
```

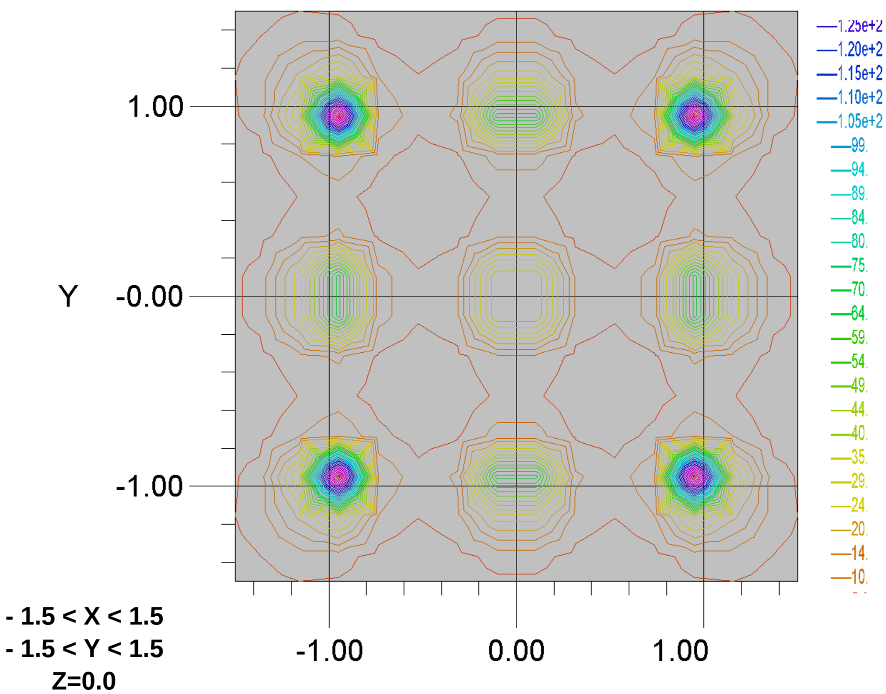


Figura B.1: Función de doble periodo

Posteriormente, para graficar la expresión utlizamos la siguiente secuencia de instrucciones:

```
(c7)  contours:30$
```

```
(c8)  labelcontours:true$
(c9)  contourplot(f(a,b), a, -2,2, b,-2,2);
```

Donde *contours* indica el número de superfices de nivel que deseamos observar en la figura; *labelcontours:true* muestra las etiquetas para cada contorno y; *contourplot* manda a graficar los contornos de la función.

Bibliografía

[1] Patrick Du Val; Elliptic Functions and Elliptic Curves; London Mathematical Society Lecture Note Series; Cambridge University Press, 1973.

[2] Lars V. Ahlfors; Complex Analisys; McGraw Hill; Third Edition, 1979.

[3] Rolf Nevanlinna, Veikko Paatero; Introduction to COMPLEX ANALISYS; Addison Wesley, 1969.

[4] E. T. Whittaker and G. N. Watson; A Course of MODERN ANALYSIS; Combridge, University Press; 1963.

[5] Thomas M. Macrobert; FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE; MACMILLAN AND CO., LIMITED; LONDON, 1917.

[6] R. L. Goodstein; Funciones Complejas, Teoría de funciones de una variable compleja; URMO, 1975.

[7] Alberto E. Sagastume Berra y Germán Fernández; Algebra y Calculo Numérico; Ed. Kapelusz; Buenos Aires; Mayo 1960.

[8] A.G. Kurosch; Curso de Algebra Superior; Editorial MIR; Primera edición, 1968.