.

Traducción

Marisol Roldán Palacios

En los diferentes cursos tomados con el Dr. Harold V. McIntosh, nos dimos a la tarea del estudio de la iteración de funciones de variable compleja; buena parte de los libros consultados dan como punto de referencia el trabajo de *Fatou y* Julia [1] por lo que al obtener una copia de una parte del trabajo de *Fatou: Sur les Equations Fonctionelles*, capítulos *I, II, III* mismo que escribió en su lengua madre; planteamos la traducción al español, como proyecto de trabajo de Servicio Social a realizar en el Departamento de Aplicación de Microcomputadoras del Instituto de Ciencias de la B. Universidad Autónoma de Puebla con el fin de ponerlo a disposición de quienes compartan nuestro interés en su estudio.

[1] quienes de manera independiente y casi simultánea obtuvieron resultados equivalentes sobre este tema de investigación

16 de febrero del 2006

Contenido

Boletín de la Sociedad Matemática de Francia

SOBRE LAS ECUACIONES FUNCIONALES[1]

Por M. P. Fatou

Tomo XLVIII, fascículo II

París, FRANCIA, 1920.

[1] SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES (première Mémoire.)

SOBRE LAS ECUACIONES FUNCIONALES INTRODUCCION

Las ecuaciones funcionales que expresan algunas igualdades entre funciones desconocidas de una o más variables, y aquellas que se deducen de éstas a través de substituciones (conocidas o desconocidas); han atraido la atención de los geómetras desde hace más de un siglo. Pero las primeras investigaciones relativas a dichas ecuaciones, investigaciones sin relación entre ellas y sin métodos bien definidos, pertenecerían casi siempre al dominio de las matemáticas recreativas. En una serie de investigaciones de una remarcada elegancia, publicadas aproximadamente en 1884, M. Kœnigs relacionó el estudio de ésas ecuaciones a la teoría general de funciones analíticas según Weierstrass. Considerando una función holomorfa de una variable compleja, M. Kœnigs estudió los límites de las funciones iteradas en la vecindad de un punto doble atractor, es decir, un punto donde la función y la variable toman el mismo valor, la derivada de la primera siendo inferior en módulo a la unidad. Es así conducido a demostrar la existencia de una solución holomorfa de la ecuación funcional de Schröder, de donde deduce la solución del problema de iteración analítica y de diversas ecuaciones funcionales en una variable. Sus investigaciones han sido seguidas por diferentes autores, principalmente por MM. Leau (–), Grévy(–) y, en el caso más difícil de funciones de dos o tres variables, por MM. Picard (–), Poincare(–), Hadamard (–) y Lattès (–).

Pero las investigaciones de éstos diferentes autores no les llevaron en general, aparte de algunos casos simples, más que a la demostración de la existencia de soluciones de las ecuaciones funcionales, que se encuentran definidas por un elemento de la función analítica. El conocer el dominio de existencia de esas funciones y el estudio de sus singularidades está en relación estrecha con el estudio de dominios de convergencia de potencias de las substituciones que figuran en la ecuación considerada. Limitandome al estudio de la iteración de substituciones racionales efectuadas sobre una sola variable compleja, y a ecuaciones funcionales relacionadas, me esforce en determinar éstos dominios de convergencia y en establecer algunas propiedades de las trascendentales uniformes que satisfacen a esas ecuaciones. En una nota publicada en 1906 di a conocer una condición de suficiencia para que las iteradas de una función racional convergan hacia un punto doble atractor en todo el plano, excepto en los puntos de un conjunto perfecto en todas partes discontinuo que forma la frontera del dominio de convergencia. De igual forma indiqué los casos donde la substitución presenta dos puntos doble atractor cuyos dominios respectivos son de una sola pieza, simplemente conexos y separados por una curva que, en general, no es analítica. Retomando recientemente el estudio de éstas cuestiones, primero he dado a conocer, una clase extensa de substituciones racionales; para las cuales el problema de la iteración, desde un punto de vista que nos ocupa, puede ser resuelto de una forma completa y sencilla. Éstas son las substituciones que admiten un círculo fundamental. Enseguida reconoci, que las recientes investigaciones con relación a las funciones analíticas que admiten valores excepcionales permitían abordar el problema en toda su generalidad; las propiedades de las funciones a las que hacemos alusión son debidas principalmente a MM. Landau y a Schottky, y son la extensión de los teorema de M. Picard sobre las funciones enteras. M. P. Montel aplicando el concepto de serie normal de funciones analíticas que le es debida, llego a teoremas elegantes y de empleo muy sencillo en las aplicaciones. En nuestras investigaciones hicimos exclusivamente uso de las proposiciones de M. Montel. Así reconocimos que la límitación de los dominios de convergencia de las iteradas de una función racional está relacionada al estudio de un conjunto perfecto, que definimos como el conjunto de puntos donde las iteradas no forman una serie normal; éste es (igualmente) el conjunto derivado de puntos frontera de los dominios donde las iteradas se distribuyen en series parciales uniformemente convergentes. Aplicando a las funciones inversas de las funciones iteradas los teoremas de M. Montel, obtuvimos además un resultado importante, a saber, la limitación del número de grupos de puntos periódicos o ciclos cuyo multiplicador es mayor o igual en módulo a la unidad. En fin hemos podido establecer, de menos en casos muy generales, que las curvas límite de los dominios de convergencia son curvas que no tienen tangente en punto alguno, ó en algunos casos particulares tangentes solamente en una infinidad de puntos no numerable; debemos exceptuar las substituciones en el círculo fundamental e hipotéticamente algunas otras substituciones particulares para las cuales la cuestión parece difícil dilucidar. Encontramos en éstas investigaciones algunos autores que llegaron de manera independiente a resultados análogos a los nuestros, particularmente MM. Ritt, Lattès y sobre todo M. G. Julia, cuyas notables investigaciones han sido objeto de una Memoria aún no publicada, reconocida por la Academia de Ciencias, y cuyos resultados han sido resumidos por el autor en diversas comunicaciones(–).

Hemos dividido esta Memoria en siete Capítulos.

El Capítulo I trata la iteración de funciones racionales desde un punto de vista puramente algebraico. Establecimos una relación fundamental entre los multiplicadores de puntos dobles de una misma substitución, lo que condujo fácilmente a la consecuencia de que siempre existe al menos un punto doble del multiplicador mayor que 1 en módulo o igual a $+1$. La misma relación aplicada a las sustituciones iteradas condujo a la consecuencia de que siempre existe una infinidad de ciclos cuyo multiplicador es mayor que 1 en módulo o igual a $+1$. Aunque éste resultado sea mucho menos preciso que aquél que resulte de la aplicación de los teoremas generales sobre las series de funciones analíticas, la manera elemental obtuvo el mérito de atraer la atención, y el método quizá podría conducir a otros resultados. Terminamos este capítulo por la exposición de algunas observaciones que se relacionan con los elementos de la teoría de funciones algebraicas y atañendo a los dominios invariantes.

El Capítulo II, el cual trato el problema local de la iteración, comprende, después de enunciar los resultados bien conocidos debidis principalmente a MM. Kœnigs y Leau, la exposición de nuevas proposiciones referentes a los puntos dobles de multiplicador igual a +1 o a una raíz p-ésima de la unidad. Damos una expresión asintótica precisa de las funciones iteradas que llevo a la demostración de la existencia de una solución de la ecuación de Abel y al estudio de las propiedades de esta solución.

El Capítulo III fué consagrado al estudio de substituciones en el círculo fundamental y de algunos otros que pueden ser estudiados de una manera análoga. Habríamos podido abreviar esta expoición utilizando los teoremas generales del capítulo siguiente; pero hemos preferido conservar esta exposición elemental, los métodos empleados pueden ser útiles en la solución de otros problemas que encontremos en ésta teoría.

El Capítulo IV contiene la aplicación de la teoría de familias normales a las funciones iteradas y a sus inversas. Damos las principales propiedades del conjunto perfecto característico F y damos a conocer la manera, por otra parte en teoría muy imperfecta, de encontrar los puntos dobles o periódicos en número limitado; que son puntos límite de consecuentes de ciertos dominios.

El Capítulo V contiene la exposición de ciertas propiedades de dominios relativos a los puntos dobles, refiriendo principalmente al orden de conección, y diversas aplicaciones numéricas.

El Capítulo VI contiene las investigaciones relativas al carácter no analítico de curvas que limitan los dominios y a la no existencia de tangentes a esas curvas. Las demostraciones empleadas recaen por una parte sobre la propiedades de la representación conforme y por la otra, sobre las propiedades de series normales debidas a M. Montel, y algunas otras que se derivan fácilmente.

El Capítulo VII es consagrado al estudio de trascendentales uniformes que verifican las ecuaciones funcionales de Schröder y de Abel y algunas ecuaciones análogas. Veremos que las investigaciones expuestas en ésta Memoria aún presentan huecos que no llegamos a satisfacer, principalmente en el estudio de ciertos casos singulares que parecen más difíciles que aquellos casos generales, y para los cuales los métodos empleados no dieron más que resultados insatisfactorios. Es entonces un deseo que sean seguidos.

Capítulo 1

1. Sea $R(z)$ una función racional de grado d ($d > 1$) de la variable compleja z; si tenemos

$$z_1 = R(z), \qquad z_n = R(z_{n-1}),$$

podemos expresar a z en función de z a través de la relación

$$z_n = R_n(z),$$

donde $R_n(z)$ designa una fracción racional cuyo grado es (exactamente) d^n. Las funciones $R, R_2, ..., R_n, ...$ son las iteradas sucesivas de R(z). Los puntos $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ son llamados *consecuentes sucesivos* del punto z; en particular $z_1 = R(z)$ es el consecuente inmediato de z. Inversamente, dada z; los puntos raíz z_{-n} de la ecuación $R_n(y) = z$ son los antecedentes de rango n del punto z; esos puntos, en total d^n, son distintos cuando z es arbitraria. En particular los antecedentes de rango 1 serán también llamados *antecedentes inmediatos* de z. Podemos escribir $z_{-n} = R_{-n}(z)$ siendo $R_{-n}(z)$ una función algebraica en d^n ramas[1] que es la función inversa de $R_n(z)$. Como consecuencia de la existencia de esos valores multiples, dos puntos pueden dar lugar, en las series de sus consecuentes respectivos, a un término común sin ser consecuente el uno del otro; si dos puntos z y z' son tales que $R_n(z) = R_{n'}(z')$ para dos valores enteros positivos convenientes n y n' decimos que son *equivalentes*; ésta es en efecto la condición necesaria y suficiente para que los puntos z y z' se deduzcan el uno del otro por una substitución del grupo G de substituciones algebraicas que se derivan de la substitución $[z \mid R(z)]$ y de su inversa; veremos que ese grupo puede ser estrictamente o no discontinuo; su estudio está estrechamente relacionado a todas las cuestiones examinadas en ésta investigación.

Uno de los problemas fundamentales que se presentan en el estudio de la iteración de substituciones racionales es la búsqueda de figuras invariantes

[1] Markushevich [1] da una amplia definición del concepto.

mediante estas substituciones y en primer lugar de los puntos invariantes. Los puntos invariantes o *puntos dobles* de substitución: $z_1 = R(z)$, corresponde a los valores finitos o infinitos de z que cumplen la relación $z = R(z)$. Para que el punto en el infinito sea un punto doble, es necesario y suficiente que el grado del numerador de $R(z)$ sea superior al grado del denominador. Llamamos *multiplicador* de un punto doble α a un número s igual a $R'(\alpha)$ si α es finito, y a $\frac{1}{(R'(\alpha))}$ si α es infinito. Verificamos inmediatamente que ese número s es relativamente invariante a toda transformación homográfica efectuada simultaneamente sobre las variable z_1 y z y más generalmente a toda transformación conforme regular y biunívoca en la vecindad de un punto doble. Tenemos[2] por otra parte, en la vecindad de α,

$$z_1 - \alpha = s(z-\alpha) + k(z-\alpha)^2 + \cdots$$

o, si α está en el infinito,

$$z_1 = \frac{z}{s} + k + \frac{l}{z} + \cdots$$

La condición necesaria y suficiente para que el punto doble α sea raíz múltiple de la ecuación $R(z) = z$ es que el multiplicador s sea igual a $+1$. Si esto se cumple tendremos; en la vecindad de ese punto doble, supuesta raíz de orden q de la ecuación $R(z) = z$,

$$z_1 - \alpha = z - \alpha + k(z-\alpha)^{q+1} + \ldots \qquad (k \neq 0)$$

o, si α está en el infinito,

$$z_1 = z + \frac{k}{z^{q-1}} + \ldots$$

El número total de puntos invariantes, cada uno contado con su grado de multiplicidad como raíz de $R(z) = z$, es igual a $d+1$.

2. Vamos a establecer una relación importante entre los multiplicadores de puntos dobles de una misma substitución racional. Podemos suponer que el punto en el infinito no es un punto doble. Suponemos, además, que los puntos dobles son todos distintos. Consideremos entonces la fracción racional:

$$\varphi(z) = \frac{1}{R(z) - z}.$$

[2]en el original: $z_1 - \alpha = s(z-\alpha) + R(z-\alpha)^2 + \cdots$

Los puntos dobles α son polos simples de $\varphi(z)$ la que, por otra parte, se anula en el infinito. Tenemos entonces

$$\varphi(z) = \frac{1}{R(z) - z} = \sum \frac{A}{z - \alpha}.$$

Encontramos inmediatamente

$$A = \frac{1}{R'(\alpha) - 1} = \frac{1}{s - 1}.$$

Igualando los términos principales (en $\frac{1}{z}$) de los dos últimos miembros, deducimos

$$\sum A = -1$$

ó

$$\sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s-1} + 1 = 0.$$

Tal es la relación fundamental que queríamos establecer.

Una consecuencia fácil de ésta relación es la existencia de al menos un punto doble de multiplicador más grande, en módulo, que la unidad.

Pongamos, en efecto,

$$\begin{aligned} s &= u + iv, \\ \sigma &= \frac{1}{s-1} = \xi + i\eta. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\xi = \frac{u - 1}{u^2 + v^2 - 2u + 1}.$$

Las relaciones

$$\xi = -\frac{1}{2}, \qquad \xi > -\frac{1}{2}, \qquad \xi < -\frac{1}{2}$$

equivalen respectivamente a

$$u^2 + v^2 = 1, \qquad u^2 + v^2 > 1, \qquad u^2 + v^2 < 1,$$

es decir que la circunferencia $\mid s \mid= 1$, el exterior y el interior de ésta circunferecia corresponden respectivamente, en el plano de la variable σ, a la recta $R(\sigma) = -\frac{1}{2}$, y a los semiplanos a derecha e izquierda de ésta recta. En virtud de la relación fundamental, tenemos

$$\sum_{1}^{d+1} \xi = -1.$$

Como $d+1$ es al menos igual a 3 $(d > 1)$, los ξ no son todos inferiores o iguales a $-1/2$, por eso resultaría $\sum \xi \leq -\frac{3}{2} < -1$. Tenemos entonces, para al menos un punto doble,

$$\Re(\sigma) > -\frac{1}{2}$$

ó

$$\mid s \mid > 1$$

Remarquemos que podemos dar valores arbitrarios a todos los multiplicadores, excepto a aquel que se encuentra determinado por la relación fundamental; es posible entonces, no tener más que un solo punto doble para el cual $\mid s \mid$ sea superior a la unidad.

Si consideramos los coeficientes de la fracción $R(z)$ de grado d como variables independientes, las s que son funciones algebraicas de esos coeficientes cumplen igualmente la relación fundamental. Si esos coeficientes tienden a valores numéricos tales que alguna s llegue a ser igual a $+1$ y por consecuencia $\frac{1}{s-1}$ infinito, existe, en virtud de la relación fundamental, otro multiplicador que tiende a $+1$.

Suponemos ahora que, no siendo el infinito un punto doble, ciertos multiplicadores sean iguales a $+1$. Tendremos entonces para la fracción $\frac{1}{R(z)-z}$ una descomposición en elementos simples de la forma

$$\frac{1}{R(z)-z} = \sum \frac{1}{s-1}\frac{1}{z-\alpha} + \sum{}' \left[\frac{a_{-q}}{(z-\beta)^q} + \frac{a_{-(q-1)}}{(z-\beta)^{q-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\beta}\right],$$

la segunda sumatoria siendo extendida a los puntos dobles del multiplicador igual a $+1$ y el entero q siendo como consecuencia > 1. De lo anterior deducimos, entre los coeficientes a_{-1} y los multiplicadores s diferentes de 1, la relación

$$\sum \frac{t}{s-1} + \sum{}'[a_{-t} + 1] = 0$$

3. Consideramos ahora una función $R_n(z)$, la iterada de $R(z)$, y las raíces de la ecuación
$$R_n(z) = z.$$
Sea α cualquier punto y p el entero más pequeño tal que $R_p(\alpha) = \alpha$; los puntos $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}$ son todos distintos, pues si tuvieramos $\alpha_h = \alpha_k$, h y k siendo más pequeñas que p, deduciríamos que
$$R_{p-h}(\alpha_h) = R_{p-h}(\alpha_k),$$
es decir
$$R_p(\alpha) = R_{p-h+k}(\alpha),$$
y como $R_p(\alpha) = \alpha$:
$$\alpha = R_{p+k-h}(\alpha) = R_q(\alpha).$$
Si $h > k$, tenemos a $q = p + k - h < p$; por otra parte $q \geq 1$. Entonces p no sería el entero más pequeño tal que $R_p(\alpha) = \alpha$.

La serie $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, ...$ es periódica, el periodo comprendiendo p términos siendo distintos todos sus términos. Diremos que los puntos $(\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1})$ forman un *ciclo de orden p*. Todos los puntos del ciclo son raíces de la ecuación $R_p(z) = z$. Considerados como puntos dobles de la substitución $Z = R_p(z)$, todos tienen el mismo multiplicador. En efecto tenemos, suponiendo que ninguno de los puntos α esté en el infinito,
$$\begin{aligned} s &= R'_p(\alpha) = R'(\alpha)R'(\alpha_1)\cdots R'(\alpha_{p-1}) \\ &= R'_p(\alpha_1) \\ &= R'_p(\alpha_2); \\ &= \\ &\vdots \end{aligned}$$
el número s es el multiplicador del ciclo.

Subrayemos que las raíces de $R_n(z) = z$ se distribuyen en ciclos cuyos ordenes son divisores de n. En particular, entre esas raíces, se encuentran aquellas de $R(z) = z$, es decir los puntos dobles. Sea α un punto doble de multiplicador s, de suerte que
$$R(z) = \alpha + s(z-\alpha) + a(z-\alpha)^q + \cdots \qquad (a \neq 0).$$
Fácilmente encontramos por recurrencia

$$\begin{aligned}R_n(z) &= \alpha \\ &+s^n(z-\alpha) \\ &+as^{n-1}[1+s^{q-1}+s^{2(q-1)}+\cdots \\ &+s^{(n-1)(q-1)}](z-\alpha)^q+\cdots\end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned}R_n(z)-z &= (s^n-1)(z-\alpha) \\ &+as^{n-1}[1+s^{q-1}+s^{2(q-1)}+\cdots+s^{(n-1)(q-1)}](z-\alpha)^q+\cdots\end{aligned}$$

Se deduce que en tanto s es diferente de la unidad, α es un cero del mismo orden de multiplicidad para $R(z)-z$ y $R_n(z)-z$ (es entonces un cero simple). Es lo mismo si $s=+1$, pues en cuyo caso tenemos

$$\begin{aligned}R(z)-z &= a(z-\alpha)^q+\cdots, \\ R_n(z)-z &= na(z-\alpha)^q+\cdots,\end{aligned}$$

es decir que α es un cero de orden q para éstas dos expresiones.

Ahora suponemos que s es una raíz primitiva de $s^r=1$ $(r>1)$. Si n no es múltiplo de r , α es una raíz simple de las dos ecuaciones. Si n es múltiplo de r, α es una raíz simple de la primera ecuación y raíz de al menos orden q para la segunda: exactamente de orden q si $s^{q-1}=+1$, es decir si $q-1$ es múltiplo de r, de orden superior a q, si $q-1$ no es múltiplo de r.

Si n es un número primo absoluto, distinto de los enteros r en número límite correspondiendo a los multiplicadores de los puntos dobles que son de la forma $e^{2i\pi\frac{m}{r}}$, los ceros de $R(z)-z$ son ceros del mismo orden de multiplicidad que los de $R_n(z)-z$; los ceros de ésta última función que no pertenecen a la primera, en total d^n-d, forman $\frac{d^n-d}{n}$ ciclos de orden n. Veamos entonces que existen ciclos de puntos de orden tan elevado como queremos, particularmente ciclos de orden n cuando n es un número primo superior a un cierto límite.

4. Consideremos una fracción racional $R(z)$ tal que $R(z)=z$ tenga todas sus raíces distintas; sea n un número primo distinto de los enteros r definidos en el parágrafo anterior y t el multiplicador de un ciclo de orden n. Si ningun t es igual a $+1$, el análisis del parágrafo 2 aplicado a $R_n(z)$ conduce a la relación
$$n\sum\frac{1}{t-1}+\sum\frac{1}{s^n-1}+1=0,$$

la primera sumatoria siendo extentida a $\frac{d^n-d}{n}$ ciclos de orden n, la segunda a $d+1$ puntos dobles de multiplicadores s.

Para $n=2$, tenemos la relación

$$2\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}}\frac{1}{t-1}+\sum_{1}^{d+1}\frac{1}{s^2-1}+1=0,$$

válida en tanto ningun s sea igual a ± 1, ni ningun t sea igual a $+1$. Multiplicamos por 2 los dos miembros de ésta relación y le sustraemos la siguiente

$$\sum\frac{1}{s-1}+1=0.$$

Con lo que obtenemos

$$4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}}\frac{1}{t-1}+\sum_{1}^{d+1}\frac{1}{-s-1}+1=0.$$

Esta relación que tiene lugar igualmente cuando los coeficientes de $R(z)$ son arbitrarios conserva un sentido cuando ciertas s tienden a $+1$ y sigue cumpliendose, como lo expondremos en detalle al final de este parágrafo, una condición para reemplazar s por $+1$ un número de veces igual a la suma de los ordenes de multiplicidad de los puntos dobles de multiplicador $+1$ como raíces de la ecuación $R(z)=z$.

Se deriva fácilmente de esta relación (donde suponemos $t\neq +1$, $s\neq -1$) que siempre existen ya sea un valor de t, ó dos valores de s superiores a la unidad en módulo, o bien un s igual a $+1$ y otro más grande en módulo que 1. En efecto si tenemos $\mid t\mid\leq 1$ para todos las parejas de orden dos, ningun s siendo igual a $+1$, y un solo s, que designamos por s', siendo superior a 1, en módulo, igualando a cero la parte real del primer miembro, la relación precedente da:

$$\begin{aligned}
4\sum_{1}^{\frac{d^2+d}{3}}\Re\left(\frac{1}{t-1}\right)+\sum_{1}\Re\left(\frac{1}{-s-1}\right)+\Re\left(\frac{1}{-s'-1}\right)+1 &= 0,\\
4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}}\left(-\frac{1}{2}-P\right)+\sum_{1}^{d}\left(-\frac{1}{2}-Q\right)+\Re\left(\frac{1}{-s'-1}\right)+1 &= 0,
\end{aligned}$$

siendo P y Q dos cantidades positivas o nulas. Como $d \geq 2$, $\frac{d^2-d}{2} \geq 1$, de lo que obtenemos:

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{1}{-s'-1}\right) &= -1 + 4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}} \frac{1}{2} + \sum_{1}^{d} \frac{1}{2} + H, \\ \Re\left(\frac{1}{-s'-1}\right) &= 2 + K, \end{aligned}$$

siendo H y K dos cantidades positivas o nulas.

Por otra parte, la relación fundamental del parágrafo 2 da

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{d}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{s'-1} + 1 &= 0, \\ \sum_{1}^{d}\left(-\frac{1}{2} - L\right) + \Re\left(\frac{1}{s'-1}\right) + 1 &= 0 \ \ (L \geq 0), \\ \Re\left(\frac{1}{s'-1}\right) &= -1 + \sum_{1}^{d}\left(-\frac{1}{2}\right) + \Sigma L, \\ \Re\left(\frac{1}{s'-1}\right) &= M \geq 0. \end{aligned}$$

Tendremos entonces simultáneamente

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{1}{s'-1}\right) &\geq 0, \\ \Re\left(\frac{1}{-s'-1}\right) &\geq 2 > 0. \end{aligned}$$

Estas dos desigualdades son incompatibles. En efecto, teniendo $s' = u + iv$, deduciríamos

$$u - 1 \geq 0$$

y

$$u + 1 < 0,$$

que son evidentes.

Suponemos ahora un s igual a $+1$ (conservando las hipótesis $t \neq +1$, $s \neq -1$). La igualdad

$$4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}} \Re\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1}^{d+1} \Re\left(\frac{1}{-s-1}\right) + 1 = 0$$

muestra entonces, que existe un $\mid t \mid$ o un $\mid s \mid$ superior a 1 lo que se deriva del análisis del parágrafo 2.

Combinando estos resultados con aquellos de la sección 2, veamos en definitiva que *siempre existe ya sea dos puntos dobles distintos, o un punto doble y una pareja periódica de orden* 2 *cuyos multiplicadores son superiores a* 1 *en módulo o iguales a* ± 1.

Ahora suponemos que n es un número primo cualquiera distinto de los enteros r considerados anteriormente. Tenemos la relación

$$n \sum_{1}^{\frac{d^n-d}{n}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s^n-1} + 1 = 0,$$

si ningún s ni ningún t es igual a $+1$. Se sigue, como veremos, que para n suficientemente grande, existe al menos un t superior en módulo a la unidad, pues igualando a cero la parte real del primer miembro, tenemos

$$n \sum_{1}^{\frac{d^n-d}{n}} \Re\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1}^{d+1} \Re\left(\frac{1}{s^n-1}\right) + 1 = 0.$$

El segundo término del primer miembro queda acotado cualquiera que sea n; pues la parte real de $\frac{1}{s^n-1}$ tiende a -1 para n infinito si $\mid s \mid > 1$, a cero si $\mid s \mid < 1$ y es igual a $-\frac{1}{2}$ si $\mid s \mid = 1$, tenemos entonces para cualquiera que sea n,

$$-A < \sum_{1}^{d+1} \Re\left(\frac{1}{s^n-1}\right) + 1 < +A,$$

siendo A fija. Si todos los $\mid t \mid$ fueran inferiores a 1, tendríamos

$$n \sum_{1}^{\frac{d^n-d}{n}} \Re\left(\frac{1}{t-1}\right) < -\left(\frac{d^n-d}{2}\right)$$

en valor algebraico; y por consiguiente

$$\frac{d^n-d}{2} < A,$$

lo que es claramente imposible, $\frac{d^n-d}{2}$ tiende a infinito junto con n. Así que, si una substitución racional no tiene más que puntos invariantes distintos, posee ciclos de orden n cuyo multiplicador es más grande que 1 en módulo o igual a $+1$, en el supuesto que n sea un número primo suficientemente grande.

Vamos a mostrar que la conclusión subsiste cuando la substitución tiene puntos invariantes idénticos, es decir de multiplicador igual a $+1$. En efecto, si primeramente los coeficientes de $R(z)$ son arbitrarios, tenemos las dos relaciones

$$\begin{aligned} n\sum_{1}^{\frac{d^n-d}{n}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s^n-1} + 1 &= 0, \\ \sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s-1} + 1 &= 0, \end{aligned}$$

de donde deducimos

$$n\sum_{1}^{\frac{d^n-1}{n}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{d+1} \beta_n(s) + 1 - \frac{1}{n} = 0,$$

expresando

$$\beta_n(s) = \frac{1}{s^n-1} - \frac{1}{n}\frac{1}{s-1}.$$

$\beta_n(s)$ no tiene polo en $s=1$; su valor en ese punto es igual a $-\frac{n-1}{2n}$.

La identidad precedente, que tiene lugar cuando los coeficientes de $R(z)$ son arbitrarios, subsiste cuando ciertos multiplicadores s llegan a ser iguales a $+1$, teneniendo en cuenta que los valores de s son múltiplos. Igualando a cero la parte real del primer miembro, tenemos

$$\sum_{1}^{\frac{d^n-d}{n}} \Re\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1}^{d+1} \Re[\beta_n(s)] + 1 - \frac{1}{n} = 0.$$

Vemos fácilmente que $\Re[\beta_n(s)]$ tiende a cero si $\mid s \mid > 1$, a -1 si $\mid s \mid < 1$, y a $-\frac{1}{2}$ si $\mid s \mid = 1$, sin excluir el valor $s=+1$. El análisis precedente muestra entonces que aunque n sobrepase un cierto límite, existe al menos un valor $\mid t \mid > 1$, que es la conclusión por defecto solamente si existe un $t=+1$. Es importante justificar de una manera precisa la sustitución de s por $+1$ en la última fórmula, aunque haya puntos invariantes idénticos. Sea $R(z)$ una fracción racional tal que la ecuación $R(z)=z$ admite la raíz $z=0$ con un orden de multiplicidad igual a $q>1$, de suerte que

$$R(z) = z + az^q + bz^{q+h} + \cdots$$

Reemplazemos $R(z)$ por $R(z)+\lambda$, siendo λ un parámetro arbitrario; $R_n(z)$ llega a ser $R_n(z,\lambda)$, función racional de z y de λ. Las raíces de las ecuaciones

$$R_n(z,\lambda)=z$$

y

$$R(z)+\lambda=z$$

son funciones algebraicas de λ que son holomorfas para $\lambda=0$ si las expresiones

$$\frac{\partial}{\partial z}[R_n(z,\lambda)-z]$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z}[R_n(z)+\lambda-z]$$

no son nulas para $\lambda=0$, es decir si los multiplicadores t y s son diferentes de $+1$ para $\lambda=0$; si es así los multiplicadores de los puntos dobles y los ciclos de orden n, para λ cualquiera, teniendo para las expresiones

$$\frac{\partial}{\partial z}R_n(z,\lambda)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z}[R(z)+\lambda]=R'(z),$$

son igualmente funciones holomorfas de λ, continuas por consecuencia para $\lambda=0$.

Consideremos ahora el punto doble $z=0$ raíz de orden q de la ecuación $R(z)=z$. Para λ infinitamente pequeño, la ecuación $R(z)+\lambda=z$ es decir

$$\lambda+az^q+bz^{q+h}+\cdots=0$$

admite q raíces infinitamente pequeñas, formando un ciclo, y derivables según las potencias de $\lambda^{\frac{1}{q}}$,

$$z=A\lambda^{\frac{1}{q}}+B\lambda^{\frac{2}{q}}+\cdots$$

Los multiplicadores correspondientes tienen por expresión

$$s=R'(z)1+qaz^{q-1}+(q+h)bz^{q+h-1}+\cdots=1+()\lambda^{\frac{q-1}{q}}+\cdots.$$

Estos q multiplicadores toman el valor de 1 y son continuos para $\lambda = 0$. Vemos aquí que el paso al límite efectuado en el curso de este parágrafo es una legítima condición de reemplazar s por $+1$ en las fórmulas un número de veces igual a

$$q + q' + q'' + \cdots,$$

siendo q, q', q'' los ordenes de multiplicidad de los diversos puntos dobles de multiplicador $+1$, en calidad de raíces de $R(z) = z$. Entonces esto demuestra en todos los casos que *existe una infinidad de ciclos cuyos multiplicadores son superiores a la unidad en valor absoluto o iguales a* $+1$. Demostraremos más tarde un teorema mucho más preciso, a saber que existe solamente un número finito de ciclos cuyos multiplicadores son mayores o iguales a la unidad en valor absoluto; pero éste último resultado no podrá ser obtenido más que por métodos trascendentales, a saber, por la aplicación de los teoremas recientes referentes a las series de funciones analíticas. El resultado demostrado aquí, el cual nos servirá para los desarrollos ulteriores; ha sido obtenido, por el contrario, a través de un método algebraico elemental mismo que puede ser susceptible de desarrollo posterior.

5. Ahora vamos a abordar otra investigación igualmente elemental, a saber aquella de los puntos que solamente tienen un número finito de antecedentes. Sea a uno de tales puntos y $R(z)$ la fracción racional considerada. Es claro que a es un punto periodico, pues teniendo a dos antecedentes de rangos diferentes p y $p + q$ que coinciden, tendremos

$$\begin{aligned} R_{p+q}(a_{-p+q}) &= a, \\ R_{p+q}(a_{-p}) &= R_q[R_p(a_{-p})] = R_q(a). \end{aligned}$$

Como $a_{-p} = a_{-p-q}$, tenemos también: $a = R_q(a)$, es decir que a es un punto doble de substitución $[z \mid S(z)]$, expresando

$$S(z) = R_q(z).$$

Esta última substitución da lugar a una cadena de antecedentes de a que designaremos por

$$a, a_{-1}, a_{-2}, \ldots, a_{-n}, \ldots,$$

y cada uno de éstos es antecedente inmediato de aquel que está escrito a su izquierda, es decir tenemos

$$S(a_{-n}) = a_{-(n-1)},$$

de donde deducimos

$$S_k(a_{-n}) = a_{-(n-k)} \qquad\qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

Siendo finito el número de antecedentes distinto de a, tendremos

$$a_{-p} = a_{-p-q} \qquad (q \geq 1),$$

de donde

$$S_{p+q-1}(a_{-p}) = S_{p+q-1}(a_{-p-q}).$$

Ahora bien, evidentemente

$$S_{p+q-1}(a_{-p}) = S_{q-1}[S_p(a_{-p})] = S_{q-1}(a) = a,$$

$$S_{p+q-1}(a_{-p-q}) = a_{-1}.$$

Por consiguiente,

$$a = a_{-1}.$$

Entonces todos los antecedentes inmediatos de a son iguales a a. Si procuramos que, para una transformación homográfica previa, a sea el punto en el infinito, la ecuación $S(z) = \infty$ teniendo solamente raíces infinitas, $S(z)$ es un polinomio.

Entonces somos llevados a tratar el problema siguiente:

Encontrar las funciones racionales $R(z)$ para la cual una de las iteradas $R_q(z)$ sea un polinomio.

Si $R(z)$ no es un polinomio, sea ϖ un polo de $R(z)$ a distancia finita. En virtud de la identidad

$$R[R_{q-1}(z)] = S(z) = \text{ polinomio en } \; z,$$

la ecuación

$$R_{q-1}(z) = \varpi$$

produce

$$S(z) = \infty \qquad \text{y} \qquad z = \infty.$$

De lo anterior se sigue que la fracción racional $\frac{1}{R_{q-1}(z)-\overline{\omega}}$ no tiende a infinito más que para z en el infinito, ésto es entonces un polinomio $P(z)$, y tenemos

$$R_{q-1}(z) = \overline{\omega} + \frac{1}{P(z)}.$$

Si R(z) tuviera otro polo $\overline{\omega}'$ a una distancia finita, tendríamos

$$R_{q-1}(z) = \overline{\omega} + \frac{1}{P(z)} = \overline{\omega}' + \frac{1}{P'(z)}.$$

siendo P' otro polinomio, esto es imposible, porque deduciríamos

$$\overline{\omega} - \overline{\omega}' = \frac{P(z) - P'(z)}{P(z)P'(z)}.$$

No siendo constantes P y P', el grado del numerador en el segundo miembro es inferior al grado del denominador; la igualdad puede tener lugar solo si ambos miembros son identicamente nulos; $\overline{\omega} = \overline{\omega}'$. $R(z)$ tiene entonces un polo único a distancia finita, y podemos escribirlo

$$R(z) = \frac{A}{(z-\overline{\omega})^h} + B,$$

siendo A y B dos polinomios en z de los cuales el primero es de grado inferior a h. Vemos que B es una constante, si no el infinito sería un punto doble de la sustitución $Z = R(z)$ y de todas sus iteradas, en particular de $Z = R_{q-1}(z)$, que es incompatible con la igualdad $R_{q-1}(z) = \overline{\omega} + \frac{1}{P(z)}$ que da $R_{q-1}(\infty) = \overline{\omega}$. Vamos a ver que A también es una constante. Tenemos, en efecto,

$$R_{q-1}[R(z)] = S(z) = \text{ polinomio en } \; z.$$

Invirtiendo la regla de las funciones R y R_{q-1} en el razonamiento hecho anteriormente , vemos que $R_{q-1}(z)$ tiene un polo único ρ a distancia finita, y además

$$R(z) = \rho + \frac{1}{Q(z)},$$

siendo $Q(z)$ un polinomio. Igualando las dos expresiones obtenidas para $R(z)$, tenemos

$$\rho + \frac{1}{Q(z)} = \frac{A}{(z-\overline{\omega})^h} + B,$$

de donde, para $z = \infty$

$$\rho = B,$$

y como A no es divisible por $(z - \overline{\omega})$ obtenemos enseguida

$$A = \text{const.}$$

Tenemos entonces

$$R(z) = \frac{A}{(z - \overline{\omega})^h} + \rho.$$

Pero también tenemos para $R_{q-1}(z)$, que admite el único polo ρ a distancia finita, la expresión siguiente, donde C y D son polinomios:

$$R_{q-1}(z) = \frac{C}{(z - \rho)^k} + D,$$

siendo C de grado inferior a k y no divisible por $z - \rho$. Igualando las dos expresiones de $R_{q-1}(z)$, tenemos

$$\frac{C}{(z - \rho)^k} + D = \overline{\omega} + \frac{1}{P(z)}.$$

Haciendo $z = \infty$ vemos que D es igual a la constante $\overline{\omega}$; de donde se deduce que C es también una constante. Obtenemos[3] finalmente

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{A}{(z - \overline{\omega})^h} + \rho, \\ R_{q-1}(z) &= \frac{C}{(z - \rho)^k} + \overline{\omega}, \end{aligned}$$

siendo A y C dos constantes. La identidad

$$R_{q-1}[R(z)] = R[R_{q-1}(z)]$$

da entonces

$$\frac{A}{C^h}(z - \rho)^{kh} + \rho = \frac{C}{A^k}(z - \overline{\omega})^{kh} + \overline{\omega}.$$

[3] en el original $R_{q-1}(z) = \frac{A}{(z-\rho)^k} + \overline{\omega}$

Deducimos, igualando en los dos miembros los términos en z^{kh} y z^{kh-1} (no hay lugar para detenerse en el caso trivial donde $k = h = 1$),

$$\begin{aligned} \frac{A}{C^h} &= \frac{C}{A^k}, \\ \overline{\omega} &= \rho. \end{aligned}$$

Obtenemos finalmente la expresión de $R(z)$:

$$R(z) = \frac{A}{(z - \overline{\omega})^h} + \overline{\omega}$$

ó

$$R(z) - \overline{\omega} = \frac{A}{(z - \overline{\omega})^h}.$$

Bajo esta forma, es evidente que las iteradas de orden par de $R(z)$ son polinomios, mientras que las iteradas de orden impar admiten el polo $z = \overline{\omega}$.

De lo anterior se sigue fácilmente que dada una substitución racional $Z = R(z)$, todo punto a admite una infinidad de antecedentes, salvo en los casos siguientes: 1∘ Si la substitución se lleva a la forma polinomial, existe un punto: el punto en el infinito, que es igual a todos sus antecedentes; 2∘ Si la substitución se lleva a la forma $Z = Az^m$, existen dos puntos 0 e ∞ gozando de ésta misma propiedad; 3∘ Si la substitución se lleva a la forma $Z = \frac{A}{z^m}$, hay dos puntos 0 e ∞ formando un ciclo de orden dos que constituyen el conjunto de antecedentes de cada uno de ellos.

6. Haremos intervenir frecuentemente, en los capítulos siguientes, los puntos críticos de las funciones inversas $R_{-n}(z)$. Vamos a mostrar que esos puntos son los consecuentes hasta el rango $n-1$ de los puntos críticos de la función $R_{-1}(z)$. En efecto, los puntos críticos c de $R_{-1}(z)$ son los valores de c para los cuales la ecuación $R(z) = c$ tiene dos raíces iguales. De igual forma los puntos críticos de $R_{-n}(z)$ son los números c' para los cuales la ecuación

$$R_n(z) = R_{n-1}[R(z)] = c'$$

tiene dos raíces iguales. Esta última ecuación equivale al sistema

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= c', \\ R(z) &= x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Que tendrá una raíz doble si alguna de éstas ecuaciones tiene una raíz doble; y si es la segunda, x es igual a un punto crítico c de $R_{-1}(z)$ y tenemos

$$c' = R_{n-1}(c).$$

Si la primera ecuación es la que tiene una raíz doble, c' es un punto crítico de la función $R_{-(n-1)}(z)$. Así se deduce que si la proposición enunciada es verdadera cuando reemplazamos n por $n-1$, aún es verdadera para n, pues los puntos críticos de $R_{-n}(z)$ son entonces los puntos: $c, R(c), ..., R_{n-2}(c), R_{n-1}(c)$. Ahora bien, para $n = 1$, la proposición es una simple tautología; la cual es entonces general.

Tendremos que completar éstas notas sobre puntos críticos, pero debemos dar ciertas definiciones y propiedades simples referentes a los dominios invariantes para una substitución racional. Sea D un dominio conexo y abierto, es decir un conjunto de puntos bien conectados y no teniendo más que puntos interiores; los puntos frontera de D son los puntos que, no pertenecen a D, son límites de puntos de D; si z describe D, $z_1 = R(z)$ describe D_1 que es también un dominio conexo y abierto (la demostración es inmediata); los puntos frontera de D_1 provienen de puntos frontera de D, lo recíproco no siempre es verdadero (a menos que se considere D_1 extendida sobre una superficie de Riemann a distintas capas[4] [5]). Si D y D_1 coinciden, diremos que D es invariante para la substitución $[z \mid R(z)]$. Por consecuencia no tendremos que considerar más que dominios invariantes con frontera invariante, es decir tales que $R(\varepsilon)$ sea punto frontera de D si también lo es de ε. En adelante asumiremos, para simplificar las discusiones, que se cumple esta condición.

Ahora vamos a definir la función inversa de $R(z)$ restringida a D; esto es, para cada punto z en D, el conjunto de los valores de la función $R_{-1}(z)$ cuyos puntos representativos son ellos mismos interiores a D, los diversos valores de ésta función, que designamos por $R_{-1}^{(D)}(z)$, se permutan entre sí evolucionando a lo largo de líneas cerradas interiores a D: pues si b y b' son dos valores de esta función en el punto a, tenemos

$$R(b) = R(b') = a;$$

b y b', siendo interiores a D, pueden estar unidas por una línea simple L interior a D; z describiendo a L, $z_1 = R(z)$ describiendo a L_1 igualmente interior

[4]N.T. hojas

[5]en el libro de Markushevich [2] encontramos una amplia explicación

a D que se cierra en a: inversamente, z describiendo el camino cerrado L_1 en D, la función $R^D_{-1}(z)$ que toma en a el valor b prolongado analíticamente a lo largo de la línea L_1, tomará el valor b' en la extremidad de esta línea recorrida por completo. Recíprocamente si hablamos de a con la determinación b de $R_{-1}(z)$ (siendo b interior a D), mientras z describe caminos interiores a D, lo mismo sucede con el punto $z_{-1} = R_{-1}(z)$, si no z_{-1} alcanzaría la frontera de D y lo mismo sucedería con z, pues suponemos invariante la frontera.

Deducimos que la función $R^{(D)}_{-1}(z)$ posee γ valores, con γ independiente de z, y éstos valores de γ siendo aquellos que se obtienen a partir de uno de los valores de la función en un punto de D por prolongación analítica[6] a lo largo de cualquier camino interior a D. Si ahora consideramos la función $R_n(z)$ que deja invariante el dominio D y su frontera, la función inversa restringida a D posee γ^n valores: tenemos, por otra parte, la identidad

$$R^{(D)}_{-(n+n')}(z) = R^{(D)}_{-n}[R^{(D)}_{-n'}(z)],$$

atribuyendo al segundo miembro de las funciones $R^{(D)}_{-n}$ y $R^{(D)}_{-n'}$ sus diversos valores en número γ^n y $\gamma^{n'}$ respectivamente.

Los puntos críticos de la función $R^{(D)}_{-1}(z)$ son los puntos c interiores a D tales que la ecuación $R(z) = c$ tenga al menos dos raíces idénticas e interiores a D. La misma observación se hace para la función $R^{(D)}_{-n}(z)$. De ésto y del razonamiento hecho al inicio de éste parágrafo se puede deducir que los puntos críticos de la función $R^{(D)}_{-n}(z)$ son los consecuentes hasta el rango $n-1$ incluyendo los puntos críticos de la función $R^{(D)}_{-1}(z)$.

Ahora vamos a introducir una noción igualmente útil para los desarrollos de los capítulos siguientes, el de *dominio completamente invariante*; llamaremos también un dominio que no solamente es invariante por la substitución considerada, sino que aún contiene todos los antecedentes de cada uno de sus puntos. Un dominio completamente invariante tiene siempre una frontera invariante. Vamos a establecer que, si un dominio completamente invariante es simplemente conexo, siempre encierra al menos $d-1$ puntos críticos de la función $R_{-1}(z)$. Dejando de lado los casos fáciles donde D contiene todo el plano o bien posee un punto frontera único. Podemos suponer que D no contienen el punto en el infinito: concluyendo que $R(z)$ no tiene polos interiores a D. Si a es un punto interior a D podemos trazar en D un contorno cerrado simple ϵ (constituido si queremos por un arco regular y sin punto

[6] para aclarar este concepto podemos referirnos a George Polya [3], Walter Rudin [4] y Markushevich [2].

doble de curva analítica) comprendiendo a a en su interior y cuyos puntos están tan próximos a la frontera de D como queremos, para convencernos, podemos utilizar la representación conforme de D sobre un círculo de radio 1 tomando para ϵ la curva que corresponde en D a una circunferencia de radio $1 - \epsilon$ concéntrica al círculo representativo; o aún hacer un razonamiento directo viendo a D como límite de dominios acotados por arcos de círculo. Sentado esto, decimos que si ϵ es suficientemente cercano a la frontera, todas las ramas de la función $R_{-1}(z)$ se permutan circularmente sobre ϵ. En el caso general, las diversas ramas de una función algebraica, cuando el punto representativo de la variable describe un contorno cerrado, forman un cierto número de ciclos distintos y los valores que corresponden a un mismo ciclo se permutan circularmente entre sí cuando la variable regresa a su punto de partida. Sea un ciclo de orden γ de los valores de $R_{-1}(z)$ sobre ϵ al cual le co-rres-pon-de una curva ϵ_1 descrita por el punto representativo de $R_{-1}(z)$ y que se cierra cuando z ha descrito γ veces ϵ en el mismo sentido; resulta del caracter completamente invariante de la frontera y de la continuidad de funciones algebraicas que las curvas ϵ_{-1} tienden uniformemente a la frontera al mismo tiempo que ϵ. Ahora consideremos las diversas raíces a_{-1} de la ecuación $R(z) = a$; que son interiores a D y que pueden estar unidas de dos en dos por las líneas λ interiores a D cuya distancia a la frontera es superior al número positivo ϵ; como podemos suponer que todos los puntos del contorno cerrado ϵ_{-1} están a una distancia de la frontera menor que ε, ϵ_{-1} no encuentra las líneas λ; los puntos a_{-1} son pues todos interiores ó todos exteriores a ϵ_{-1}; o cuando z describe una vez ϵ_{-1}, $R(z)$ describe γ veces seguidas en el mismo sentido el contorno cerrado ϵ que encierra a a en su interior; entonces el argumento de $R(z) - a$ a variado de $2\gamma\pi$ y, puesto que $R(z) - a$ no tiene polos en D; concluimos que el número de ceros de esta función en el interior de ϵ_{-1} es igual a γ; como tenemos $\gamma \geq 1$, entonces hacemos que todos los puntos a_{-1} sean interiores al contorno ϵ_{-1}; pues $\gamma = d$ y todas las ramas de la función $R_{-1}(z)$ se permutan circularmente entre sí a lo largo de ϵ.

Ahora suponemos que $R_{-1}(z)$ no tuviera más que los puntos críticos simples alrededor de los cuales se permutan solamente dos soluciones de esta función, que es el caso general. Llamemos Δ al dominio limitado por ϵ e interior a D, puesto que D es simplemente conexo; a partir de cada uno de los puntos críticos de $R_{-1}(z)$ contenido en Δ, tracemos un corte extendiendose hasta el contorno ϵ; cuando cruzamos un corte, dos ramas u_i y u_k de la función son permutadas entre si; decimos que el corte tiene el *caracter (ik)*. Sean $L_1, ..., L_p$ los diversos cortes escritos en el orden donde se suceden sus puntos de intersección con ϵ descrito en sentido directo. Sea $T = (i_1, k_1)(i_2, k_2)...(i_p, k_p)$ la tabla de caracteres de éstos cortes. Podemos cambiar el trazo de los cortes de tal manera que se reestablezca la tabla T a la forma canónica

$$T = (1,2)^{\lambda_1}(2,3)^{\lambda_2}...(d-1,d)^{\lambda_{d-1}},$$

siendo los λ_i enteros positivos o nulos. Esos enteros son impares, pues, si λ_1 fuese par, describiendo ϵ con la solución inicial u_1, encontraríamos a u_1 como solución final después de una vuelta completa y no habría permutación circular de u_i sobre ϵ. Siendo λ_1 impar, lo mismo sucede con λ_2 si no al describir ϵ con la solución inicial u_1 obtendríamos u_2 como determinación final y viceversa, de suerte que los dos valores u_1 y u_2 formarían un ciclo sólo para ellos sobre ϵ. Siendo λ_1 y λ_2 impares, lo mismo sucede con λ_3, si no los tres valores u_1, u_3, u_2 se permutarían circularmente sobre ϵ, y sin interrupción. Entonces existen al menos $d-1$ cortes distintos y de carateres distintos, de los cuales al menos $d-1$ puntos críticos pertenecen a Δ y *a fortiori a* D.

Si los puntos críticos de $R_{-1}(z)$ no son simples, la conclusión subsiste, un punto crítico al cual le corresponden diferentes ciclos de raíces de ordenes $\gamma, \gamma', \gamma'', ...$ respectivamente siendo vistos como la reunión de $(\gamma-1)+(\gamma'-1)+(\gamma''-1)+\cdots-$ puntos críticos simples. Bastará, para convencerse, hacer variar infinitamente poco los coeficientes de $R(z)$, lo que hará variar infinitamente poco la posición de los puntos críticos sin modificar la propiedad que tienen las ramas de $R_{-1}(z)$ de ser todas permutadas entre sí sobre ϵ.

$2(d-1)$ es el número total de puntos críticos de $R_{-1}(z)$, resulta de lo anterior que *no pueden existir más de dos dominios simplemente conexos y completamente invariantes para substitución* $[z \mid R(z)]$, si dejamos de lado los dominios que no tienen más de un punto frontera. Ese resultado es fundamental más tarde. Ahora consideremos el caso donde el dominio D es invariante para una cierta potencia de la substitución dada, de suerte que denotando como $D_1, D_2, ...$ a sus consecuentes sucesivos tendríamos $D = D_p, D_1 = D_{p+1}, ...$; el conjunto de dominios $D, D_1, ..., D_{p-1}$ forman entonces un ciclo de dominios invariantes; siempre suponemos que las fronteras de esos dominios tienen el mismo caracter de invarianza que los dominios mismos. Cuando z es interior a uno de ellos, D por ejemplo, existen ramas de $R_{-1}(z)$ cuyos puntos representativos son interiores a D_{p-1}; esas diversas ramas, cuyo número es independiente de la posición de z en D, son aquellas que se deducen de una de ellas por prolongación analítica a lo largo de los caminos interiores a D; definimos también la función $R_{-1}(z)$ restringida a D_{p-1} y pasamos fácilmente de ahí a la definición de la función $R_{-n}(z)$ restringida al dominio D_{p-h}, siendo h el residuo de $n(modp)$; los puntos críticos de ésta última función en D son los consecuentes hasta el rango $n-1$ de los puntos críticos de las funciones restringidas $R_{-1}(z)$ correspondiendo a los diversos dominios D_i. Tomamos por ejemplo $n=4, p=3$. Los puntos críticos interiores a D de la función restringida $R_{-4}(z)$ son los puntos $c, R_3(c), R(c'')$y$R_2(c')$ llamando c, c', c'' a los puntos críticos de las funciones restringidas $R_{-1}(z)$ cuando z varía sucesivamente en los dominios D, D_1, D_2 que forman un ciclo de orden 3. La nocion de dominio completamente invariante se extiende partiendo de si misma a un ciclo de dominios. Por lo anterior es claro que si un ciclo de dominios de orden p es completamente invariante y formado por dominios simplemente conexos, p no puede más que tener los valores 1 ó 2; pues los dominios simplemente conexos $D, D_1, ..., D_{p-1}$ son completamente invariantes para la subsitución $[z \mid R_p(z)]$ luego entonces su número no puede sobrepasar a dos. Las nociones de dominio invariante o completamente invariante se extienden sin dificultad a conjuntos cualquiera. Veremos sin esfuerzo que un conjunto invariante que no comprende más que un número finito de puntos está formado por la unión de un número finito de ciclos. Un conjunto completamente invariante y que no comprende más que un número finito de puntos está formado de uno o de dos puntos excepcionales (n°3).

Capítulo 2

7. En este capítulo estudiaremos los límites de las funciones iteradas en la vecindad de un punto doble cuando el índice de la iteración crece indefinidamente; no supondremos en general, que la función de la cual hacemos la iteración sea racional, sino solamente holomorfa en la vecindad del punto doble.

   Debemos recordar, antes de otra cosa, los resultados relativos a los puntos dobles de multiplicador inferior, en módulo, a la unidad a los que llamaremos *puntos dobles atractores*; regresando, para más detalle, a las investigaciones ya citadas de M. Kœnings. Sea α un punto doble atractor en la vecindad del cual $R(z)$ puede desarrollarse en serie de Taylor:

$$R(z) = \alpha + s(z-\alpha) + ()(z-\alpha)^2 + \cdots \qquad (\mid s \mid < 1).$$

   Existe un número $\rho > 0$ y un número k comprendido entre $\mid s \mid$ y 1 tal que de la desigualdad $\mid z-\alpha \mid \leq \rho$ se deriva

$$\begin{aligned} \mid R(z)-\alpha \mid &< k \mid z-\alpha \mid, \\ \mid R_n(z)-\alpha \mid &< k^n \mid z-\alpha \mid. \end{aligned}$$

   De lo cual se obtiene que, estando z en el cículo γ de radio ρ y de centro α, su n-ésimo consecuente tiende uniformemente hacia α para n infinito. Además, si $s \neq 0$, la relación $\dfrac{R_n(z)-\alpha}{s^n}$ tiende uniformemente hacia una función $F(z)$ holomorfa en γ y satisfaciendo la ecuación funcional de Schröder

$$F[R(z)] = sF(z)$$

   con las condiciones $F(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 1$. El cambio de variable $t = F(z)$ que equivale a la representación conforme y biunivoca en la vecindad de $z = \alpha$, permite llevar la sustitución $z_1 = R(z)$ a la forma canónica $t_1 = st$. De lo anterior deducimos

$$t_n = F[R_n(z)] = s^n t.$$

Del grupo de substituciones lineales $t_n = s^{\pm n} t$, siendo estrictamente discontinuo en todo dominio limitado que no encierra el punto $t = 0$, deduciremos que el grupo $G(n \geq 1)$ no es estrictamente discontinuo en toda corona comprendida entre dos círculos de radio suficientemente pequeño. Lo mismo sucede en todos lo dominios antecedentes de este dominio coronal.

Consideremos ahora el caso de un punto doble de multiplicador nulo. Podemos, por una transformación lineal simple, regresar la substitución a la forma

$$z_1 = z^q + az^{q+r} + \cdots = R(z) \qquad (q > 1),$$

con el punto doble en el origen. Consideremos entonces un círculo γ con centro en el origen y de radio suficientemente pequeño para contener en su interior los consecuentes de todos los puntos y para que, por otra parte, la funcion $R(z)$ no posea más que un solo cero en el origen. Las funciones $[R_n(z)]^{\frac{1}{q^n}}$ son entonces, holomorfas en este círculo; el radical es elegido de manera que el término principal en el origen sea igual a z. Decimos que estas funciones convergen uniformemente hacia una función holomorfa en γ. Establezcamos, en efecto,

$$\begin{aligned} u_n = \quad & [R_n(z)]^{\frac{1}{q^n}} && = z_n^{\frac{1}{q^n}}, \\ u_{n+1} = \quad & [R_{n+1}(z)]^{\frac{1}{q^{n+1}}} && = [R^{\frac{1}{q}}(z_n)]^{\frac{1}{q^n}}, \end{aligned}$$

de lo que se obtiene

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left[\frac{1}{z_n} R^{\frac{1}{q}}(z_n)\right]^{\frac{1}{q^n}} = [H(z_n)]^{\frac{1}{q^n}}$$

llamando a la función holomorfa $H(z)$

$$\frac{1}{z} R^{\frac{1}{q}}(z) = 1 + lz + \cdots.$$

Por otra parte, evidentemente tenemos

$$u_{n+1} = z \prod_{i=0}^{i=n} \frac{u_{i+1}}{u_i} = z \prod_{i=0}^{i=n} [H(z_i)]^{\frac{1}{q^i}}.$$

Es suficiente entonces, probar la convergencia uniforme del producto infinito cuyo término general es $[H(z_n)]^{\frac{1}{q^n}}$, es decir, de la serie cuyo término general es $\frac{1}{q^n}\log[H(z_n)]$, tomando la determinación del logaritmo la cual es nula en el origen. Como z_n tiende uniformemente a cero cuando z está en γ y lo mismo sucede para $H(z_n)$, tendremos, a partir de un cierto rango n',

$$\mid H(z_n) - 1 \mid < \frac{1}{2}$$

y

$$\mid H(z_n) - 1 \mid < A \mid z_n \mid \qquad (A,\ \text{constante positiva}).$$

Debido a que $\mid w \mid < \frac{1}{2}$

$$\mid \log(1+w) \mid <\mid w \mid + \mid w \mid^2 + \mid w \mid^3 + \cdots < 2 \mid w \mid,$$

de lo anterior obtenemos

$$\mid \log H(z_n) \mid < 2A \mid z_n \mid .$$

Luego entonces, la convergencia uniforme de la serie $\sum \dfrac{2A}{q_n} \mid z_n \mid$ se demuestra inmediatamente, estando los $\mid z_n \mid$ limitados en su conjunto y decreciendo más rápido que los términos de una progresión geométrica convergente. Vemos finalmente que la serie de funciones $[R_n(z)]^{\frac{1}{q^n}}$ converge hacia una función holomorfa en γ cuyo desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen comienza por un término igual a z. Si $\Phi(z)$ designa esta función límite, tenemos[1]

$$\begin{aligned} \Phi[R(z)] &= \lim\nolimits_{n=\infty} [R(z)_{n+1}]^{\frac{1}{q^n}}, \\ \Phi^q(z) = \lim\nolimits_{n=\infty} \left\{[R(z)_{n+1}]^{\frac{1}{q^{n+1}}}\right\}^q &= \lim\nolimits_{n=\infty} [R(z)_{n+1}]^{\frac{1}{q^n}}, \end{aligned}$$

de donde

$$\Phi[R(z)] = \Phi^q(z).$$

[1]en el original está:

$$\begin{aligned} \Phi[R(z)] &= \lim\nolimits_{n=\infty} [R(z)n+1]^{\frac{1}{q^n}}, \\ \Phi^q(z) = \lim\nolimits_{n=\infty} \left\{[R(z)n+1]^{\frac{1}{q^{n+1}}}\right\}^q &= \lim\nolimits_{n=\infty} [R(z)n+1]^{\frac{1}{q^n}}, \end{aligned}$$

La existencia de esta función $\Phi(z)$ parece haber sido demostrada por primera vez por M. Böttcher; dicha función desempeña un rol análogo a aquel de la función de Schröder[2] para el caso de $s \neq 0$. Si establecemos $t = \Phi(z)$, obtenemos una representación conforme y biunívoca de un círculo de centro O del plano z sobre un dominio del plano de los t rodeando el origen y la substitución $z_1 = R(z)$ es llevada nuevamente a la forma canónica: $t_1 = t^q$. Podemos llamar *puntos asociados* a dos puntos que tienen igual el consecuente de rango n; en el plano de los t, los asociados de un punto t son los puntos $te^{\frac{2i\phi N}{q^n}}$ que aunque damos a los enteros N y n todos los valores positivos, forman un conjunto denso sobre toda la circunferencia de radio $\mid t \mid$ teniendo su centro en el origen. Si regresamos al plano de la variable z vemos que, en un cierto dominio entorno al origen, los asociados de un punto son densos sobre una curva cerrada analítica que pasa por este punto. Como dos puntos asociados son equivalentes respecto al grupo G (n^o 1) se sigue que este grupo no es estrictamente discontinuo en un cierto dominio entorno del origen y, por consecuencia, también en todos los dominios antecedentes, es decir en definitiva en todo dominio cerrado en el cual los $R_n(z)$ convergen uniformemente hacia un punto doble de multiplicador nulo. Existe entonces, desde este punto de vista, una diferencia esencial entre los puntos dobles de multiplicador nulo y los puntos dobles atractores de multiplicador no nulo.

Daremos ahora algunas indicaciones sobre las curvas analíticas invariantes pasando por un punto doble atractor. Si el multiplicador no es nulo, somos llevados a buscar las curvas analíticas invariantes mediante la substitución $t_1 = st$, y que pasan por el origen; si s es real, las rectas que pasan por el origen responden a la cuestión y son las únicas curvas regulares en el origen que gozan de esas propiedades. Les corresponde en el plano de la variable z un haz de curvas analíticas pasando por el punto doble, regulares en ese punto e invariantes bajo la substitución $z_1 = R(z)$. Si, por el contrario, s es imaginaria, no existe curva regular en el punto doble que responda a la cuestión, sino solamente curvas analíticas para las cuales este punto es un punto singular aislado, las más simples son aquellas que corresponden a las espirales logarítmicas del plano de la variable t representadas por la ecuación $t = s^\lambda t_0$, donde λ designa una variable real en t_0 un punto fijo cualquiera, las curvas correspondientes del plano de las z son igualmente las espirales que

[2]N.T. cuya expresión es:

$$F(f(z)) = \lambda F(z) \qquad \text{ecuación de Schröder}$$

tienen el punto doble por punto asintótico.

En el caso $s = 0$, somos llevados al estudio de curvas invariantes mediante la substitución $t_1 = t^q$. Hay $q-1$ curvas regulares en el origen, que responden a la cuestión; estas son las rectas de argumento $\dfrac{N\pi}{q-1}$. Existen, además, espirales logarítmicas invariantes que tienen el origen por punto asintótico y cuya ecuación en coordenadas polares es

$$\rho = e^{c\left(\omega + \frac{2N\pi}{q-1}\right)},$$

siendo c una constante real arbitraria, N un entero al cual basta dar los valores $0, 1, 2, \ldots, q-2$. Regresando a la variable z concluiremos con la existencia de $q-1$ curvas analíticas invariantes, regulares en el punto doble y cuyas tangentes en este punto forman un haz isogonal, estas son las únicas curvas invariantes que son regulares en el punto doble. Hay, además, $q-1$ haces de curvas. Existen, además, $q-1$ haces de curvas espirales invariantes que tienen el punto doble por punto asintótico y cuyas ecuaciones se escriben simplemente con ayuda del módulo y del argumento de la función $\Phi(z)$.

Consideremos ahora un ciclo de puntos $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ de multiplicador más pequeño, en módulo, que la unidad; sean δ un pequeño dominio circular de centro α; $\delta_1, \delta_2, \ldots$ los dominios consecuentes que encierran respectivamente los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Si el diámetro de δ es suficientemente pequeño, los dominios $\delta, \delta_p, \delta_{2p}, \ldots$ son encajados unos en otros; lo mismo sucede para $\delta_1, \delta_{p+1}, \delta_{2p+1} \ldots$ y en general de $\delta_h, \delta_{p+h}, \delta_{2p+h}, \ldots$. Además, el diámetro de δ_n tiende a cero con $\dfrac{1}{n}$, de suerte que z siendo interior a uno de los dominios $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$, $R_n(z)$ converge periódicamente y de manera uniforme hacia el sistema de las p constantes $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$. Si el multiplicador no es nulo, demostramos que existe un sistema de p funciones holomorfas respectivamente en los dominios $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ y de derivadas no nulas en estos puntos que satisfacen las ecuaciones funcionales

$$\begin{array}{rcl} F[R(z)] & = & R'(\alpha)F_1(z), \\ F_1[R(z)] & = & R'(\alpha_1)F_2(z), \\ F_2[R(z)] & = & R'(\alpha_2)F_3(z), \\ & \vdots & \\ F_{p-1}[R(z)] & = & R'(\alpha_{p-1})F_p(z), \end{array}$$

de donde

$$F[R_p(z)] = sF(z) \qquad [s = R'(\alpha)R'(\alpha_1)\ldots R'(\alpha_{p-1})].$$

Todo lo anterior supone a $R(z)$ definida y uniforme en todo el plano, por ejemplo racional. Este resultado se deduce fácilmente de la ecuación de Schröder en el caso de un punto doble, señalando que los puntos $\alpha, \alpha_1, \ldots$ son puntos dobles de la substitución $[z \mid R_p(z)]$.

8. Ahora vamos a estudiar la iteración de una substitución uniforme en la vecindad de un punto doble de multiplicador igual, en módulo, a la unidad, comenzando por el caso más simple, aquel de $s = +1$. Este estudio ha sido realizado por M. Leau en su Tesis; vamos a retomar su análisis bajo una forma diferente y completar, sobre muchos puntos, los resultados obtenidos por este eminente geómetra.

   Sea α un punto doble en la vecindad del cual tenemos

$$z_1 = R(z) = z + \frac{1}{2}R''(\alpha)(z-\alpha)^2 + \cdots$$

   Primero nos situaremos en el caso donde $R''(\alpha)$ no es nulo (con esta condición demostramos muy fácilmente el caracter de invariancia) y para mayor comodidad asumiremos que α está confinada al infinito por una transformación homográfica previa. Tendremos entonces

$$z_1 = z + a + \frac{b}{z} + \cdots \qquad (a \neq 0).$$

   Siempre podemos orientar los ejes de manera que a sea real y positiva. Finalmente existe interés en estudiar el caso un poco más general donde la substitución es de la forma

$$z_1 = z + a + \psi(z),$$

   siendo $\psi(z)$ una función que puede tener un punto crítico en el infinito, pero tal que

$$\mid \psi(z) \mid < \frac{C}{\mid z \mid^{\gamma}} \qquad (C, \gamma: \text{ constantes positivas})$$

   Además el infinito, para esta función, es un punto singular aislado. Sea r el radio de un círculo Γ de centro O tal que $\psi(z)$ sea holomorfo y uniforme en el dominio D exterior a dicho círculo donde hemos trazado un corte del punto $z = -r$ al infinito negativo siguiendo el eje real. Sea z un punto de este dominio y busquemos en que condición los consecuentes sucesivos de z, estarán aún contenidos en el mencionado dominio. Llamemos μ al módulo máximo de $\psi(z)$ en este dominio; si ρ es suficientemente grande, tendremos $\mu < a$, que es lo que supondremos. El punto z_1 está en el interior de un círculo de centro $z + a$ y de radio μ[3]; z es exterior a este círculo. Si este círculo es interior al dominio $\mathcal{D}$, el punto z_2 se encontrará en el interior de un segundo círculo teniendo por centro $z+2a$ y por radio 2μ; en general, el punto z_n será interior al círculo de centro $z+na$ y radio $n\mu$, siempre que todos los círculos precedentes sean interiores a $\mathcal{D}$. Todos estos círculos están comprendidos en el ángulo de dos semirectas resultantes del punto z y haciendo con Ox un ángulo agudo α cuyo seno es igual a μ/a (figura I).

Para que la condición buscada esté completa, basta que este ángulo no tenga ningún punto en común con Γ. Los puntos z para los cuales así es, son interiores al dominio ε definido como sigue: tracemos las dos tangentes al círculo Γ que hacen con Ox ángulos iguales a $\pm\alpha$ y que se cortan sobre la parte positiva de Ox; sean BT, $B'T'$ las partes de estas tangentes comprendidas entre los puntos de contacto y el infinito hacia las x negativas; el dominio ε está limitado por BT, $B'T'$, el arco BAB' y se extiende al infinito hacia las x positivas (figura I). Enseguida podemos hacer crecer el radio de círculo Γ desde su valor inicial r hasta el infinito; tendremos, en virtud de las hipótesis hechas sobre $\psi(z)$:

$$\mu < \frac{C}{\rho\gamma}$$

para todos los valores de ρ de radio comprendido en el intervalo $(r, +\infty)$. Como podemos reemplazar el máximo μ de $\mid \psi(z) \mid$ por un número más grande, podemos definir constantemente la inclinación ω de la recta BT por la fórmula

$$\sin\omega = \frac{C}{a}\frac{1}{\rho^\gamma}.$$

Esta recta, que tiene por ecuación $x\sin\omega + y\cos\omega = \rho$ incluye un arco de curva parabólica cuyo radio de curvatura no cambia de signo, pues tiene por

[3]en el original: de radio ρ

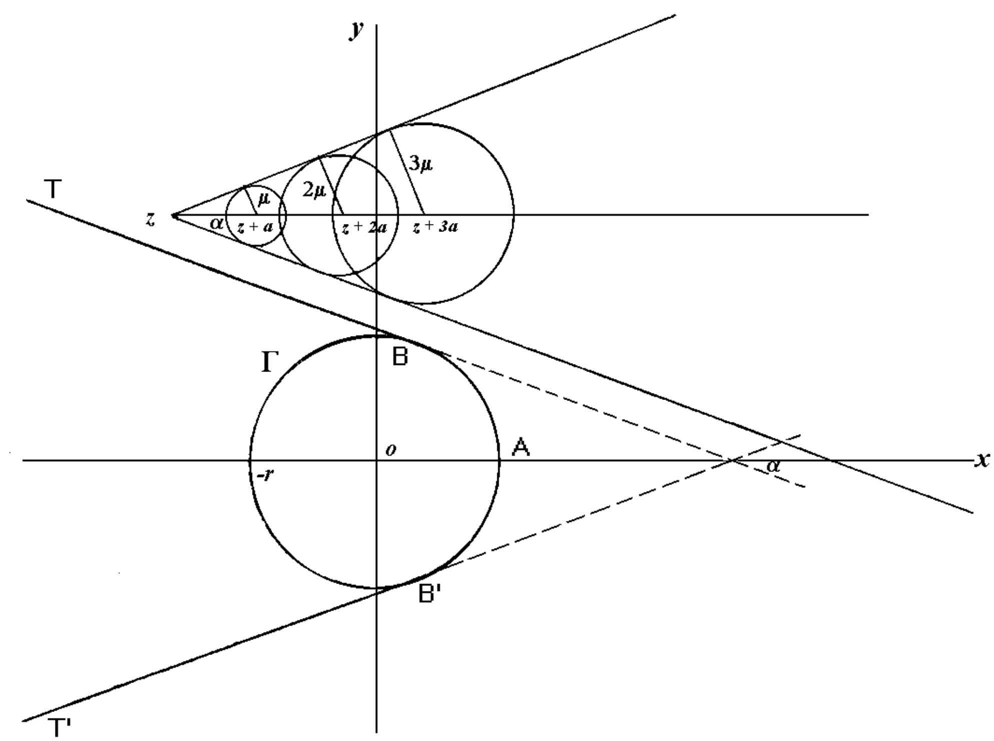

Figura I:

expresión $\rho + \dfrac{d^2\rho}{d\omega^2}$ o, en virtud de la relación entre ρ y ω,

$$\gamma\rho\left[1 + (\gamma+1)\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\right],$$

cantidad esencialmente positiva. La curva es entonces convexa. De lo cual podemos deducir que el dominio total, suma de los dominios análogos a ε, cuando hacemos variar ρ, está limitado por los dos arcos parabólicos ML, $M'L'$ extendiendose al infinito por la izquierda, los dos segmentos de recta MB, $M'B'$ y el arco del círculo BAB' (figura II).

Sea D el dominio así limitado y extendiendose hacia la derecha. Vamos a mostrar que los consecuentes de un punto de D tienden hacia infinito, siendo la convergencia uniforme en todo dominio cerrado Δ interior a D y limitado hacia las x negativas. El dominio D, según la manera en que ha sido obtenido, contiene los consecuentes de todos sus puntos, igual que los dominios ε; además, todo dominio tal que Δ forma parte de un dominio ε; finalmente, en todo el dominio D, los módulos de las cantidades $\psi(z), \psi(z_1), \psi(z_2), \ldots$ permanecen inferiores a un número fijo μ inferior a a. Hechas estas observaciones, la proposición anunciada es inmediata. Tenemos en efecto,

$$\begin{aligned} z_1 &= z + a + \psi(z), \\ z_2 &= z_1 + a + \psi(z_1), \\ &\vdots \\ z_n &= z_{n-1} + a + \psi(z_{n-1}), \end{aligned}$$

de donde

$$z_n = z + na + \sum_0^{n-1} \psi(z_i),$$

y, tomando las partes reales de los dos miembros,

$$x_n = x + na \sum_0^{n-1} \Re[\psi(z_i)] \qquad (z_n = x_n + iy_n).$$

Como la parte real de $\psi(z_i)$ queda comprendida entre $+\mu$ y $-\mu$ y además por otra parte, en Δ tenemos $x > -A$, con A finita y positiva, obtenemos de la igualdad precedente

$$x_n > n(a-\mu) - A$$

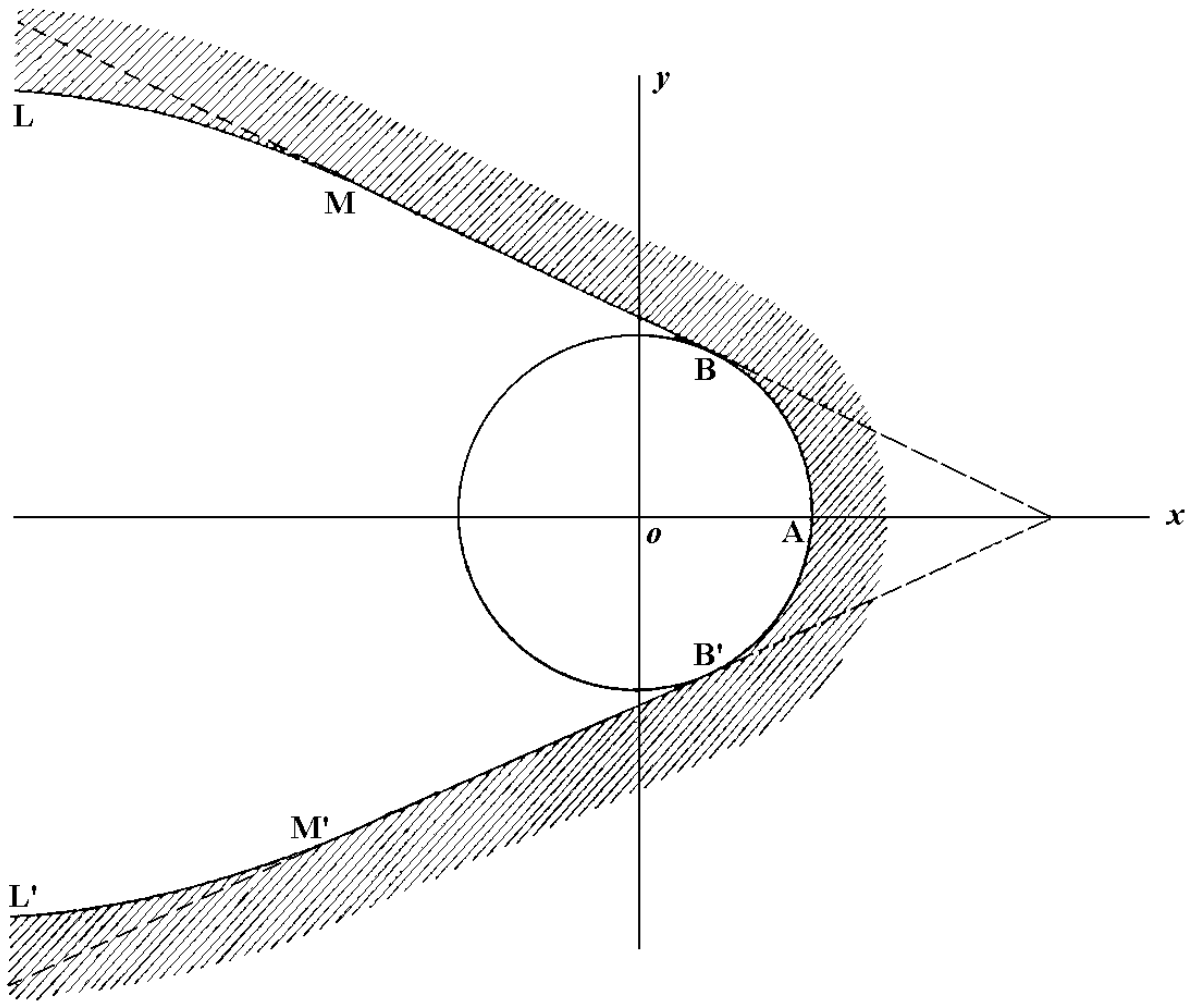

Figura II:

y esta última expresión es infinita positiva al mismo tiempo que n, ya que $a-\mu<0$. Entonces x_n y $\mid z_n \mid$ tienden uniformemente hacia infinito cuando z está en Δ. Podemos señalar que tendremos, a partir de un cierto rango, $\mid z_n \mid > (a-\mu\varepsilon)n$, si $\varepsilon>0$; podemos también escribir $\dfrac{\mid 1 \mid}{z_n} < \dfrac{B}{n+1}$ para todos los valores de n, siendo B una constante. Es entonces fácil obtener el valor asintótico de z_n, pues según la igualdad

$$z_n = z + na + \sum_0^{n-1} \psi(z_i),$$

tendremos

$$z_n = z + na + \theta \sum_1^n \frac{C'B\gamma}{n\gamma} \qquad (\mid \theta \mid < 1)$$

ó

$$z_n = z + na + H_n \sum_1^n \frac{1}{n\gamma},$$

siendo H_n una cantidad uniformemente acotada. De lo que resulta, suponiendo $0<\gamma<1$,

$$z_n = z + na + \theta_n n^{1-\gamma}$$

siendo θ_n uniformemente acotada. Si el dominio Δ es acotado, también podemos escribir

$$z_n = na + \Lambda_n n^{1-\gamma}$$

siendo siempre Λ_n uniformemente acotado; z_n tiene entonces por valor asintótico na y el argumento de z_n tiende uniformemente hacia cero. Para $\gamma=1$ las dos últimas fórmulas permanecen exactas si reemplazamos $n^{1-\gamma}$ por $\mathcal{L}n$ (logaritmo neperiano de n).

9. Es importante precisar más, la expresión asintótica obtenida en la hipótesis de $\gamma=1$. De una manera más precisa, supondremos

$$\psi(z) = \frac{b}{z} + \chi(z), \qquad \mid \chi(z) \mid < \frac{k}{\mid z \mid^{1+\beta}} \qquad (k, \beta > 0).$$

Establezcamos

$$\begin{aligned} z_n &= an + \tfrac{b}{a}\mathcal{L}n + u_n, \\ z_{n+1} &= an + a + \tfrac{b}{a}\mathcal{L}(n+1) + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Reemplazando z_n y z_{n+1} por expresiones en la ecuación

$$z_{n+1} = z_n + a + \frac{b}{z_n} + \chi(z_n),$$

obtenemos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{n} - \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] + b\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{an}\right) + \chi(z_n).$$

En el segundo miembro, el primer término es el término general de una serie numérica absolutamente convergente; tenemos, en efecto,

$$\frac{1}{n} - \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \cdots = \frac{\lambda_n}{2n^2}(\lim \lambda_n = 1)$$

El segundo término es el de una serie uniformememte convergente en el dominio acotado Δ, ya que puede ser escrito

$$-\frac{b(z_n - na)}{naz_n},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mid z_n \mid \quad &> \quad Kn \\ \mid z_n - a \mid \quad &< \quad K'\mathcal{L}n; \end{aligned}$$

con K y K' independientes de n y de z; este término es entonces comparable a $\dfrac{\mathcal{L}n}{n^2}$, término general de una serie convergente.
La misma observación para el tercer término, ya que tenemos

$$\mid \chi(z_n) \mid < \frac{K}{\mid z_n \mid^{1+\beta}} < \frac{K'}{n^{1+\beta}}.$$

Como tenemos

$$u_n = u_1 + \sum_{1}^{n-1}(u_{i+1} - u_i),$$

u_n tiene un límite para n infinito que es la suma de una serie uniformemente convergente de funciones holomorfas en Δ el cual es entonces él mismo una función en Δ. Si $F(z)$ designa esta función, holomorfa en todo punto interior a D, podemos escribir

$$z_n = an + \frac{b}{a}\mathcal{L}n + F(z) + \varepsilon_n(z) \qquad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

Cambiemos n por $n-1$ y z por $R(z)$, en esta desigualdad, con lo que tenemos

$$z_n = a(n-1) + \frac{b}{a}\mathcal{L}(n-1) + F(z_1) + \varepsilon_{n-1}(z_1).$$

Cercenando miembro a miembro y pasando al límite, obtenemos la ecuación funcional

$$F(z_1) = F[R(z)] = F(z) + a$$

que es la ecuación de Abel.

Así la ecuación de Abel, relativa a la substitución $[z \mid R(z)]$, es satisfecha por una función $F(z)$ holomorfa en D, para la cual el punto en el infinito es además un punto singular transcendente.

Señalemos de inmediato que si $R(z)$ tiene simplemente como singularidad un polo en el punto al infinito, podremos elegir el círculo Γ suficientemente grande para que el exterior de este círculo $R(z)$ no tome más que una sola vez cada valor; lo mismo sucederá en el dominio D para las funciones iteradas, y por consecuencia también para las funciones

$$R_n(z) - na - \frac{b}{a}\mathcal{L}n;$$

siendo $F(z)$ el límite uniformemente alcanzado de estas últimas funciones, también no tomará más que una vez cada valor en D[4]. Vamos a estudiar los valores asintóticos de esta función cuando z tiende al infinito permaneciendo en un dominio Δ acotado hacia las x negativas, por ejemplo en el dominio definido por $x > A$ $(A > r)$. Tendremos en estas condiciones

$$F(z) = z + o(\mathcal{L} \mid z \mid),$$

con $o(\mathcal{L} \mid z \mid)$ designando un (término) infinitamente grande que es a lo más del orden de $\mathcal{L} \mid z \mid$. Para el denominador, señalemos que tenemos por definición

$$F(z) = \lim_{n=\infty} \left[z_n - \frac{b}{a}\mathcal{L}n - na \right].$$

Enseguida tenemos

$$z_n = z + na + \sum_{0}^{n-1} \frac{b}{z_i} + \sum_{0}^{n-1} \chi(z_i),$$

[4]Cf. MONTEL, Sur la représentation conforme (Journ. Math; t. III, 1917, Chap. I, n^0 5).

de donde

$$F(z) - z = \lim_{n=\infty} \left[\sum_0^{n-1} \frac{b}{z_i} - \frac{b}{a}\mathcal{L}n + \sum_0^{n-1} \chi(z_i) \right].$$

La serie $\sum \chi(z_i)$ converge uniformemente en el dominio no acotado Δ y representa una función acotada en ese dominio; podemos entonces ignorarla. Podemos por otra parte reemplazar $\frac{b}{a}\mathcal{L}n$ por $\frac{b}{a}\sum_1^n \frac{1}{i}$, puesto que la diferencia de estas dos cantidades tiende a una constante finita. Podemos por último ignorar el factor b y somos llevados a estudiar la función representada por la serie

$$G(z) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{na} \right)$$

(suprimiendo el primer término en $1/z$).

Podemos admitir que los $\mid z_n \mid$ van creciendo con n[5], es decir (dado que el dominio Δ contiene sus consecuentes) siempre tenemos $\mid z_1 \mid > \mid z \mid$. Vemos fácilmente, por una representación geométrica, que esta condición será cumplida si

$$\frac{\pi}{2} - \arg .z > \arcsin \frac{\mid \psi(z) \mid}{a} \qquad [\psi = z_1 - z - a]$$

ó

$$\frac{x}{\mid z \mid} > \frac{\mid \psi(z) \mid}{a}.$$

Como tenemos $\mid \psi(z) \mid < \frac{C}{\mid z \mid}$, basta que tengamos $x > \frac{C}{a}$. Supondremos entonces, para simplificar el análisis siguiente, que tomamos $A > \frac{C}{a}$. Así que $\mid z_n \mid$ van creciendo con n. Sentado lo anterior, podemos escribir

$$G(z) = \sum_1^{\infty} \frac{na - z_n}{naz_n}.$$

Pero, en virtud del parágrafo precedente, tenemos

$$z_n = z + na + \Theta_n \mathcal{L}n,$$

[5] N.T. i.e. $\mid z_{n+1} \mid > \mid z_n \mid$

los Θ_n siendo uniformemente acotados cuando z está en Δ. La serie que define $G(z)$ se descompone en dos

$$G(z) = \sum_1^\infty \frac{-z}{naz_n} + \sum_1^\infty \frac{-\Theta_n \mathcal{L}n}{naz_n}.$$

Como tenemos $\mid \Theta_n \mid < \Theta$ y $\mid z_n \mid > Kn$, la segunda serie representa una función de z acotada (inferior a $\frac{\Theta}{aK} \sum_1^\infty \frac{\mathcal{L}n}{n^2}$, cantidad finita). Basta entonces considerar la primera.

Establezcamos

$$\sum_1^\infty \frac{z}{naz_n} = \sum_1^N + \sum_{N+1}^\infty,$$

siendo el entero n la parte entera de $\mid z \mid$. La primera suma parcial es inferior en módulo a $\sum_1^N \frac{1}{na}$, puesto que $\mid z \mid < \mid\ z_n \mid$; luego entonces $\sum_1^N \frac{1}{n}$ es igual, ignorando las cantidades acotadas, a $\mathcal{L}N$ ó a $\mathcal{L}(\mid\ z\ \mid)$. La segunda suma parcial es inferior en módulo a

$$\frac{\mid z \mid}{aK} \sum_{N+1}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{\mid z \mid}{NaK},$$

cantidad acotada ya que $\frac{\mid z \mid}{N}$ tiende a 1.

Obtenemos entonces finalmente

$$\mid G(z) \mid < C' \mathcal{L} \mid z \mid,$$

con C' *constante* finita positiva y, lo que viene a ser lo mismo que,

$$F(z) = z + o(\mathcal{L} \mid z \mid).$$

En el caso particular donde $b = 0$, igual obtenemos

$$F(z) = z + \text{func. acotada}.$$

Vamos a demostrar ahora que, aunque z tiende hacia el infinito permaneciendo siempre en el mismo dominio Δ $(x > A)$ considerado anteriormente, la derivada $F'(z)$ tiende hacia la unidad. Admitiremos que $R(z)$ es desarrollable en serie ordenada según las potencias decrecientes de z:

$$R(z) = z + a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^p} + \frac{d}{z^q} + \cdots,$$

ciertos exponentes $p, q, \ldots$ pudiendo además no ser enteros, aunque siendo el segundo miembro derivable término a término,

$$R'(z) = 1 - \frac{b}{z^2} - \frac{pc}{z^{p+1}} - \cdots$$

Para no descartar el caso de $b = 0$, llamemos $\frac{1}{z^h}$ la primera potencia de z cuyo coeficiente no sea nulo en ese desarrollo. Para valores grandes de $\mid z \mid$, $R'(z) - 1$ estará comprendido entre $\dfrac{C}{\mid z \mid^h}$ y $\dfrac{C'}{\mid z \mid^h}$ siendo C y C' constantes finitas positivas[6] con h al menos igual a 2. Tendremos entonces

$$1 - \frac{C'}{\mid z \mid^h} <\mid \ R'(z) \mid < 1 + \frac{C}{\mid z \mid^h}.$$

Luego entonces $F'(z)$ es el límite de $R_n(z)$ para z infinito y tenemos

$$R'_n(z) = R'(z)R'(z_1)\ldots R'(z_{n-1});$$

z y por consecuencia todos los z_n siendo asumidos suficientemente grandes para que las desigualdades precedentes sean aplicables, tendremos

$$\prod_{p=0}^{n-1}\left(1 - \frac{C'}{\mid z_i \mid^h}\right) <\mid \ R'_n(z) \mid < \prod_{0}^{n-1}\left(1 + \frac{C}{\mid z_i \mid^h}\right)$$

$\mid F'(z) \mid$ tiene entonces un valor comprendido entre aquellos dos productos infinitos

$$\prod\left(1 - \frac{C'}{\mid z_n \mid^h}\right) \quad \text{y} \quad \prod\left(1 + \frac{C}{\mid z_n \mid^h},\right)$$

y, para probar que $F'(z)$ tiende a 1 para z infinito, basta probar que la suma de la serie

$$\frac{1}{\mid z \mid^h} + \frac{1}{\mid z_1 \mid^h} + \cdots + \frac{1}{\mid z_n \mid^h} + \cdots$$

[6] Estas constantes pueden diferir de aquellas así ya denominadas

tiende a cero con $\frac{1}{|z|}$. De lo anterior resultan desigualdades bien conocidas

$$\begin{array}{rcl} (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\dots & < & e^{a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots}, \\ (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)\dots & > & 1-(a_1+a_2+\cdots), \end{array}$$

donde las a_n están comprendidas entre 0 y 1. Luego entonces este último punto es muy fácil de establecer, pues si dividimos esta serie en dos partes como anteriormente

$$\sum_0^\infty = \sum_0^N + \sum_{N+1}^\infty,$$

siendo N la parte entera de $\mid z \mid$, la primera suma parcial es inferior a $\dfrac{N+1}{\mid z \mid^h}$ (puesto que $\mid z_n \mid < \mid z \mid$ a partir de $n=1$), cantidad que tiende a cero debido a que es el producto de $\dfrac{N+1}{\mid z \mid}$ que tiende hacia 1 para $\dfrac{1}{\mid z \mid^{h-1}}$, que tiende a cero. En cuanto a la segunda, en virtud de $\mid z_n \mid > K_n$ y $h > 1$, representa el resto de una serie convergente que tiende a cero con $\frac{1}{N}$. La proposición es entonces demostrada[7]

Relativamente a esta demostración y a aquella que precede, señalemos que el resultado subsiste si z tiende hacia el infinito pemaneciendo en un dominio Δ interior a D y acotado hacia los x negativos, sin que sea necesaria la condición suplementaria $\left(A > \frac{C}{a}\right)$ impuesta a la frontera inferior de las x de los puntos de Δ. Pues el p-ésimo consecuente de algún dominio de Δ será siempre interior a un dominio Δ' que satisface esta condición suplementaria siempre que p sea suficientemente grande, y las ecuaciones funcionales

$$\begin{array}{rcl} F[R(z)] & = & F(z)+a, \\ F'[R(z)] & = & \frac{1}{R'(z)}F'(z) \end{array}$$

muestran que las funciones $F(z)$ y $F'(z)$ satisfacen las proposiciones límite que acabamos de examinar, la longitud de un camino $\mathcal{L}$, si satisfacen las proposiciones límites la longitud del camino consecuente $\mathcal{L}_1$. Por ejemplo, si

$$F(z_1) = z_1 + o(\mathcal{L} \mid z_1 \mid),$$

tenemos

$$F(z) = F(z_1) - a = z_1 + o(\mathcal{L} \mid z_1 \mid),$$

[7]Deducimos fácilmente de este análisis la igualdad asintótica más precisa $F'(z) = 1 + o(\frac{1}{z})$, pero no tendremos necesidad de ella.

que puede ser escrito $z + o(\mathcal{L} \mid z \mid)$, puesto que z_1 y z no difieren más que por una cantidad acotada.

Ahora vamos a estudiar, en un dominio $\Delta(x > A)$, las curvas invariantes para la substitución dada. Supongamos $R(z) - z$ regular en el infinito. En estas condiciones podemos tomar a A suficientemente grande para que, en el dominio cerrado Δ : $1^0 R_n(z)$ tienda uniformemente hacia el infinito; 2^0 la función $F(z)$ de Abel no tome más que una sola vez cada valor; 3^0 la parte real de $F'(z)$ sea positiva (puesto que tiende hacia 1 cuando la parte real de z tiende hacia $+\infty$). Si establecemos entonces $Z = F(z)$, obtenemos una representación conforme y biunívoca del dominio Δ sobre una región simplemente conexa y no acotada del plano de las Z, teniendo por frontera la curva $\mathcal{E}$ que corresponde a la recta $x = A$. Esta curva $\mathcal{E}$ es cortada en un punto y en uno solo por toda paralela al eje de las X; en efecto, sea

$$Z = F(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

La curva $\mathcal{E}$ es representada por

$$\begin{aligned} X &= P(A, y) \\ Y &= Q(A, y). \end{aligned}$$

En razón de la expresión asintótica $Z = z + o(\mathcal{L} \mid z \mid)$, Y toma valores infinitamente grandes al mismo tiempo que y es del mismo signo; Y toma entonces todos los valores reales cuando y crece de $-\infty$ a $+\infty$. Si $\mathcal{E}$ estuviera cortada en dos puntos por una paralela al eje de las X, tendríamos en estos dos puntos

$$Y_1 = Q(A, y_1) = Q(A, y_2) \qquad (y_1 < y_2)$$

Tendríamos entonces, para un valor y_3 comprendido entre y_1 y y_2,

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(A, y_3) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}(A, y_3),$$

lo que es imposible, ya que $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ permanece positiva sobre la recta $x = A$. Vemos también que la dirección límite de la tangente a $\mathcal{E}$, cuando se aleja al infinito, es paralela al eje de las Y, puesto que tenemos sobre esta curva

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}(A, y)}{\frac{\partial P}{\partial y}(A, y)} = \frac{-\frac{\partial P}{\partial x}(A, y)}{\frac{\partial P}{\partial x}(A, y)},$$

y esta relación tiende al infinito con y puesto que el numerador tiende a -1 y el denominador hacia cero. Esta curva Γ particiona entonces el plano de las Z en dos regiones, una de las cuales es Δ', aquella se extiende al infinito hacia las x positivas, corresponde al dominio Δ. En el haz de las rectas paralelas al eje de las X en Δ' corresponde en Δ un haz de curvas invariantes para la substitución $[z \mid R(z)]$. Estas curvas tienen por ecuación $Q(x, y) =$const. Pasa una y sólo una curva por cada punto de Δ y se extienden desde la recta $x = A$ hasta el infinito. Tenemos sobre esas curvas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial y}} = \frac{-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial P}{\partial x}};$$

$\frac{dy}{dx}$ no es entonces jamás infinita y tiende a cero cuando nos alejamos al infinito sobre la curva; la dirección límite de la tangente es entonces paralela a Ox. Dicha tangente contiene naturalmente los consecuentes de todos los puntos y también los antecedentes hasta un cierto rango; estos puntos corresponden a los puntos $Z + na$ del plano de las Z, tomando n todos los valores enteros positivos (lo que da los puntos homólogos de los consecuentes de z) y ciertos valores negativos para los cuales $Z + na$ permanece interior a Δ' (lo que da los homólogos de los antecedentes de z interiores a Δ). Esta representación da inmediatamente el medio para definir $R_n(z)$ para los valores no enteros de z. Basta substituir en el grupo discontinuo de translaciones $(Z \mid Z + na)$, el grupo continuo de las translaciones representadas por la misma fórmula, siendo n un parámetro continuo. Resolvemos así el problema de la iteración analítica. En efecto, sea $z = G(Z)$ la función inversa de $F(z)$ que da la representación conforme de Δ' sobre Δ_1. De la ecuación de Abel

$$F[R(z)] = F(z) + a,$$

deducimos

$$\begin{aligned} R(z) &= G(Z + a), \\ R_n(z) &= G(Z + na). \end{aligned}$$

Esta última igualdad permite definir $R_n(z)$ para un n cualquiera a través de una función analítica de n y de z. Tendremos siempre

$$R_n[R_{n'}(z)] = R_{n+n'}(z),$$

puesto que los dos miembros de esta igualdad designan dos puntos que tienen por homólogos, en el plano de las Z,

$$z + n'a + na \qquad \text{y} \qquad Z + (n + n')a,$$

es decir el mismo punto.

10. Ahora examinemos como se desarrollan las cosas cuando el punto doble α de multiplicador $+1$ [con $R''(\alpha) \neq 0$] está a una distancia finita. Podemos suponer $\alpha = 0$ y

$$z_1 = R(z) = z - az^2 + bz^3 + \cdots,$$

estando orientados los ejes de manera que a sea real y positiva. El cambio de variables $\left(z = \frac{1}{t}, z_1 = \frac{1}{t_1}\right)$ nos lleva a la forma

$$t_1 = t + a + \frac{a^2 - b}{t} + \cdots.$$

Basta entonces aplicar los resultados del parágrafo precedente para poder enunciar lo siguiente: Existe un dominio D limitado por un contorno simple, formado por ejemplo de arcos analíticos, y presentando en O un punto reentrante[8] con una tangente dirigida siguiendo la parte negativa del eje real que goza de la propiedad de que los consecuentes de un punto de D (incluidos los puntos frontera junto con el origen) son interiores a D y tienden hacia el origen cuando el índice de iteración crece indefinidamente; la convergencia es uniforme en todo dominio cerrado interior a D cuya frontera no contiene el origen. Existen además otros dominios Δ formados, por ejemplo, por el interior de un círculo tangente en O al eje imaginario del lado de las x positivas, y gozando de las mismas propiedades que D, la convergencia uniforme de los consecuentes de un punto que tiene lugar además para todo el dominio cerrado Δ (incluido el origen).

Si aplicamos estos resultados a la función inversa de $R(z)$, o más exactamente a la rama de la función inversa nula en el origen y representada por la serie

$$z_{-1} = z + az^2 + \cdots,$$

obtenemos un resultado análogo, a aquel excepto que los dominios D' y Δ' que reemplazan a D y Δ tienen una disposición simétrica de estos últimos con relación al origen; estos son dominios de convergencia simple o uniforme para los antecedentes de un punto obtenidos a través de la rama de la función $R_{-1}(z)$ que acabamos de definir (figura III).

Los dominios D y Δ' tienen en común dos sectores de ángulo en el vértice $\frac{\pi}{2}$ en los cuales los z_n convergen hacia cero (uniformemente o no), mientras

[8]punto que en repetidas ocasiones es intersectado por la trayectoria de los arcos

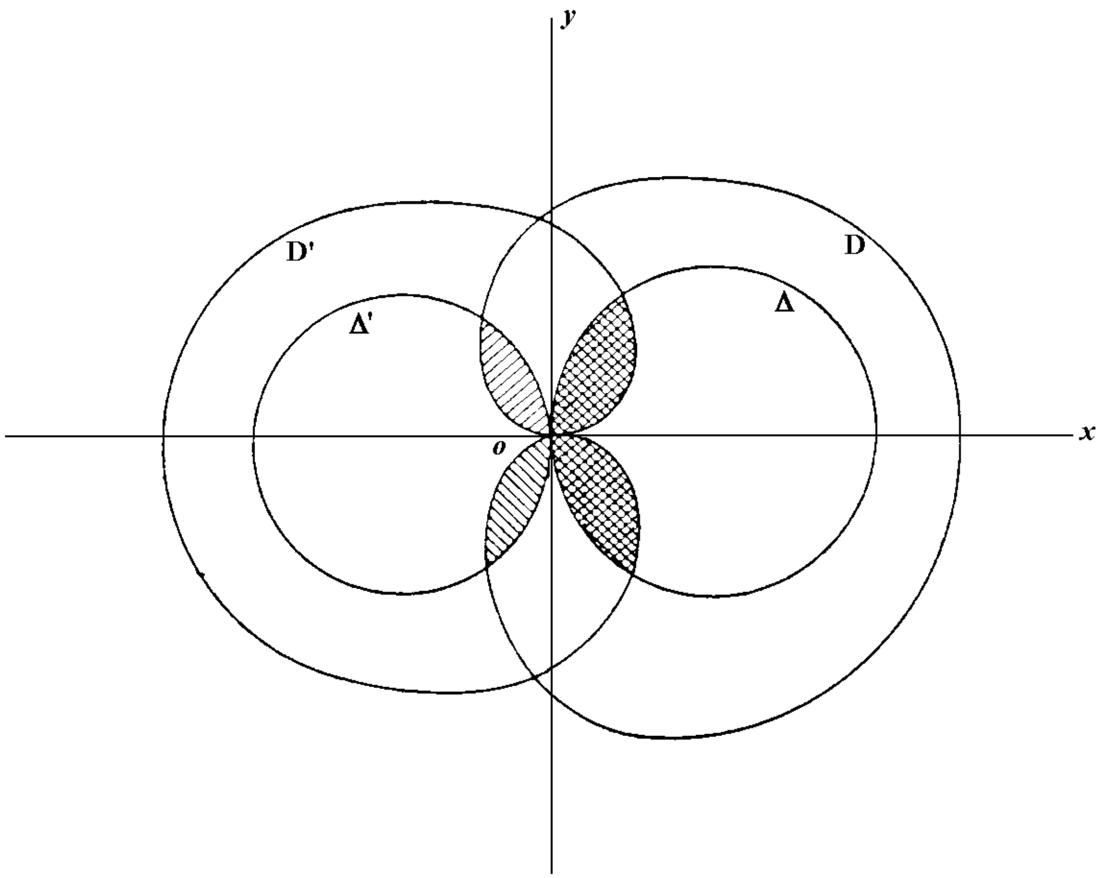

Figura III:

que los z_{-n} convergen uniformemente hacia cero. De igual manera D' y Δ tienen en común dos sectores de ángulo en el vértice $\frac{\pi}{2}$ en los cuales los z_n convergen uniformemente hacia cero, mientras que los z_{-n} convergen hacia cero (uniformemente o no).

Los consecuentes de un punto de D están distribuidos sobre las curvas invariantes tangentes en O en el eje real del lado de las x positivas; observación análoga para los antecedentes.

Los z_n tienen por expresión asintótica

$$z_n = \frac{1}{na + \frac{a^2-b}{a}\mathcal{L}n + F(z) + \varepsilon_n} \qquad (\lim \varepsilon_n = 0),$$

siendo $F(z)$ una función holomorfa en el interior de D, que satisface la ecuación de Abel

$$F[R(z)] = F(z) + a.$$

Si z tiende hacia el origen permaneciendo en el interior del círculo Δ, tenemos

$$F(z) = \frac{1}{z} + o\left(\log \mid \frac{1}{z} \mid\right).$$

11. Ahora vamos a estudiar el caso de un punto doble para el cual tenemos

$$s = 1, \quad R''(\alpha), \quad \ldots, \quad R^{(p)}(\alpha) = 0, \quad R^{p+1}(\alpha) \neq 0.$$

Llevando este punto al origen, tenemos

$$z_1 = z - az^{p+1} + \cdots.$$

Se asume que los ejes están orientados de manera que a sea real y positiva. Cambiando z y z_1 por $\frac{1}{z}$ y $\frac{1}{z_1}$ de manera que confinemos al punto doble al infinito, tenemos

$$z_1 = R(z) = z + \frac{a}{z^{p-1}} + \frac{b}{z^p} + \cdots = z\left(1 + \frac{a}{z^p} + \frac{b}{z^{p+1}} + \cdots\right).$$

Establecemos

$$\begin{aligned} z &= t^{\frac{1}{p}}, \\ z_1 &= t_1^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

de lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
t_1^{\frac{1}{p}} &= t^{\frac{1}{p}}\left(1+\tfrac{a}{t}+\tfrac{b}{t^{1+\frac{1}{p}}}+\cdots\right), \\
t_1 &= t\left(1+\tfrac{a}{t}+\tfrac{b}{t^{1+\frac{1}{p}}}+\cdots\right)^p &= t\left(1+\tfrac{pa}{t}+\tfrac{pb}{t^{1+\frac{1}{p}}}+\cdots\right), \\
t_1 &= t+pa+\tfrac{pb}{t^{\frac{1}{p}}}+\cdots &= S(t).
\end{aligned}$$

Con $S(t)$ ordenada, a partir del tercer término según las potencias negativas descendentes de $t^{\frac{1}{p}}$ cae nuevamente en la categoría de las funciones estudiadas en el parágrafo 8 que dan lugar a un algoritmo convergente en un dominio D que hemos descrito y que deja en su exterior la parte negativa del eje real. Si t varía en este dominio, su argumento varía entre $-\pi$ y $+\pi$ límites excluidos, y las p determinaciones de $t^{\frac{1}{p}}$ quedan respectivamente en el interior de p sectores de vértice O de ángulo $\dfrac{2\pi}{p}$. Elijamos una de estas determinaciones, por ejemplo aquella cuyo argumento está comprendido entre $\dfrac{\pi}{p}$ y $\dfrac{3\pi}{p}$, y llevemos este valor de t a la fórmula

$$t_1 = S(t)$$

que equivale a $t_1 = [R(z)]^p$, llamando z a la determinación que acabamos de elegir $t^{\frac{1}{p}}$. Con t_1 interior a D $t_1^{\frac{1}{p}}$ admite una determinación cuyo argumento está comprendido (límites excluidos) entre $\dfrac{\pi}{p}$ y $\dfrac{3\pi}{p}$ como aquel de $t^{\frac{1}{p}}$. Tenemos entonces para esta elección del radical

$$t_1^{\frac{1}{p}} = \omega R(z) = \omega z_1,$$

siendo ω una raíz p-ésima de la unidad. Decimos que $\omega = 1$. En efecto, si t, permanece interior a D, se aleja hacia el infinito, por ejemplo siguiendo la parte positiva del eje real; de la forma $S(t)$ se obtiene que t_1 llega a ser infinito con el mismo argumento límite que t. Es decir cero. Por otra parte, $t_1^{\frac{1}{p}}$ y $t^{\frac{1}{p}} = z$ tendrán argumentos límites iguales a $\frac{2\pi}{p}$ según la elección. Por último según la forma de $R(z)$, z_1 tendrá el mismo argumento límite que z. Entonces finalmente con $t_1^{\frac{1}{p}}$ y z_1 teniendo el mismo argumento límite, tenemos $\omega = +1$, es decir $t_1^{\frac{1}{p}} = z_1$, cumpliendose esta igualdad mientras t esté en D. Si ahora calculamos poco a poco:

$$t_1 = S(t), \quad t_2 = S(t_1), \quad \cdots, \quad t_n = S(t_{n-1}), \quad \cdots$$

tomando siempre en los segundos miembros los valores de $t^{\frac{1}{p}}, t_1^{\frac{1}{p}}, \ldots, t_n^{\frac{1}{p}}, \ldots$ cuyos argumentos pertenecen al mismo intervalo $\left(\dfrac{\pi}{p}, \dfrac{3\pi}{p}\right)$, tendremos también

$$z_1 = R(z), \quad z_2 = R(z_1), \quad \ldots, \quad z_n = R(z_{n-1}),$$

siendo $z, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ los valores seleccionados para $t^{\frac{1}{p}}, t_1^{\frac{1}{p}}, \ldots, t_n^{\frac{1}{p}}, \ldots$. Luego entonces los t_n así calculados convergen hacia el infinito en el dominio D, los $z_n = R_n(z)$ convergen hacia el infinito en los p dominios distintos que se derivan de D por la transformación $z = \sqrt[p]{t}$.

Podemos además llevar el punto doble a una distancia finita. Obtenemos así p dominios de convergencia congregados en torno al origen teniendo cada uno como frontera una curva formada de arcos analíticos que tienen en O un vértice de ángulo $\dfrac{2\pi}{p}$. Cada uno de estos dominios encierra en su interior los consecuentes de todos sus puntos, comprendidos los puntos frontera además del origen. En el interior de estos dominios de convergencia elementales que corresponden a D, encontramos además otros que corresponden a Δ (parágrafos 8, 9, 10); estos dominios igualmente congregados en torno al origen presentan en O un vértice[9] de ángulo dos veces menor que $\left(\frac{\pi}{p}\right)$ y de igual bisectriz que los precedentes; en estos dominios la convergencia de las z_n es uniforme (frontera incluida). Por último, si reemplazamos $R(z)$ por la rama de la función inversa representada por la serie

$$z_{-1} = R_{-1}(z) = z + az^{p+1} + \cdots,$$

obtenemos un ensamblaje análogo de dominios de convergencia simple o uniforme D' y Δ' que ofrecen una disposición parecida a aquella de los dominios D y Δ por una rotación de $\frac{\pi}{p}$; las bisectrices de los ángulos en O de los dominios del primer ensamblaje coinciden con las tangentes en O a las curvas límites de los dominios del segundo. Los dominios D de convergencia simple relativos a los consecuentes de un punto y los dominios Δ' de convergencia uniforme relativos a los antecedentes tienen aún sectores comunes de ángulo en el vértice $\dfrac{p}{2\pi}$, en total siendo $2p$. Igual para los dominios D' y Δ.

Señalemos finalmente que tendremos para las z_n, cuando z está en un dominio D, una expresión asintótica de la forma

$$z_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n\,p\,a + o(n^{1-\frac{1}{p}})}}.$$

[9]N.T. punto anguloso

Damos (figura IV) una figura esquemática del conjunto de

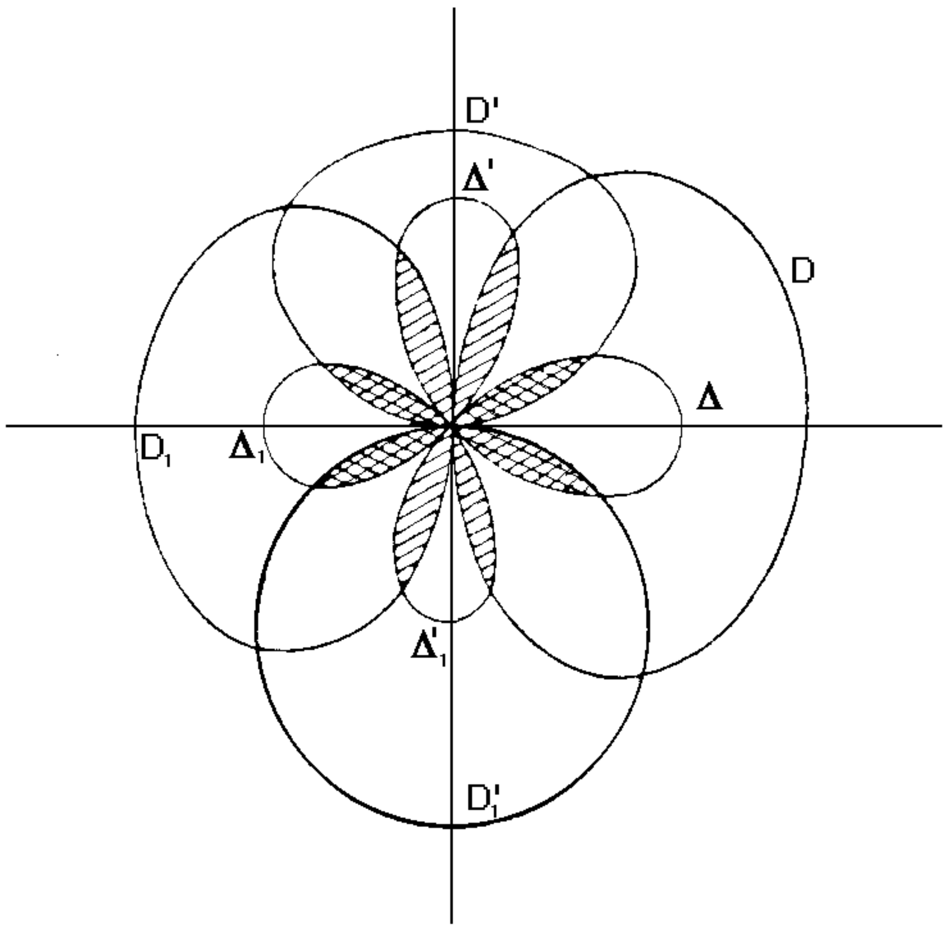

Figura IV:

los diversos dominios D, Δ, D', Δ' en el caso de $p = 2$. Daremos frecuentemente a este ensamblaje de dominios el nombre de *estrella* relativa o punto doble. Es bueno señalar a propósito de esta estrella: 1^0 que los dominios que la componen son interiores a un círculo cuyo radio puede ser tomado tan pequeño como se requiera; 2^0 que la forma y la naturaleza de las curvas que les limitan pueden ser variadas de una infinidad de maneras sin tener la menor importancia. Falta solamente tener en cuenta el hecho de que son simplemente conexas y la medida de los ángulos que representan en el punto O.

12. El análisis precedente no da una expresión asintótica de las z_n quienes permiten demostrar la existencia de una función que satisface la ecuación de Abel. Para conseguirlo haremos preceder el empleo de la transformación conforme ($t^p = z$) de otra transformación destinada a hacer desaparecer un cierto número de términos de $R(z)$. Suponiendo en el origen el punto doble, estableceremos

$$z_1 = R(z) = z + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \cdots + a_{2p}z^{2p} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \cdots$$

y haremos el cambio de variables

$$\begin{aligned} w &= P(z) = z + \lambda_2 z^2 + \cdots + \lambda_p z^p, \\ w_1 &= P(z_1). \end{aligned}$$

De donde extraemos las expresiones de z y z_1 en función de ω y ω_1 bajo la forma de serie entera comenzando por los términos ω y ω_1. Llevando estos valores a la ecuación $z_1 = R(z)$, obtenemos una relación entre ω y ω_1 que, resuelta con respecto a ω, aún será de la forma

$$w_1 = w + A_{p+1}w^{p+1} + A_{p+2}w^{p+2} + \cdots,$$

lo que verificamos fácilmente. Buscaremos determinar las λ de manera que $A_{p+2} = A_{p+3} = \cdots = A_{2p} = 0$. Escribiremos entonces *a priori*

$$w_1 = w + A_{p+1}w^{p+1} + A_{2p+1}w^{2p+1} + \cdots,$$

es decir

$$\begin{aligned} R(z) + \lambda_2 R^2(z) + \cdots + \lambda_p R^p(z) = \; & z + \lambda_2 z^2 + \cdots + \lambda_p z^p \\ & + A_{p+1}(z + \lambda_2 z^2 + \cdots + \lambda_p z^p)^{p+1} \\ & + A_{2p+1}(z + \cdots)^{2p+1} + \cdots. \end{aligned}$$

Los coeficientes de las potencias de z hasta z^p son identicos en los dos miembros; igualando los términos en z^{p+1}, obtenemos $A_{p+1} = a_{p+1}$. La igualdad precedente puede entonces ser escrita

$$\begin{aligned} & (z + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \cdots + a_{2p}z^{2p} + \cdots) \\ & + \lambda_2 z^2(1 + a_{p+1}z^p + a_{p+2}z^{p+1} + \cdots + a_{2p}z^{2p-1} + \cdots)^2 \\ & + \lambda_3 z^3(1 + a_{p+1}z^p + \cdots + a_{2p}z^{2p-1} + \cdots)^3 + \cdots \\ & + \lambda_p z^p(1 + a_{p+1}z^p + a_{p+2}z^{p+1} + \cdots + a_{2p}z^{2p-1} + \cdots)^p \\ & = z + \lambda_2 z^2 + \cdots \\ & \quad + \lambda_p z^p + a_{p+1}z^{p+1}(1 + \lambda_2 z + \cdots + \lambda_p z^{p-1})^{p+1} + Hz^{2p+1}. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de $z^{p+2}, z^{p+3}, \ldots, z^{2p}$ en los dos miembros, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} a_{p+2} + 2a_{p+1}\lambda_2 & = & (p+1)a_{p+1}\lambda_2, \\ a_{p+3} + 2\lambda_2 a_{p+2} + 3a_{p+1}\lambda_3 & = & \frac{p(p+1)}{2} a_{p+1}\lambda_2^2 + (p+1)a_{p+1}\lambda_3, \\ & \vdots & \\ F_k(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}) + ka_{p+1}\lambda_k & = & \Phi_k(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}) + (p+1)a_{p+1}\lambda_k, \\ F_p(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}) + pa_{p+1}\lambda_p & = & \Phi_k(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}) + (p+1)a_{p+1}\lambda_p. \end{array}$$

En estas ecuaciones, los F_k y los Φ_k son polinomios en $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}$ que dependen de los coeficientes a hasta a_{2p} a lo más. Estableciendo $a_{p+1} = a$ $(a \neq 0)$ obtenemos de lo anterior

$$\begin{array}{rcl} (p-1)a\lambda_2 & = & a_{p+2}, \\ (p-2)a\lambda_3 & = & a_{p+3} + 2\lambda_2 a_{p+2} - \frac{p(p+1)}{2} a\lambda_2^2, \\ & \vdots & \\ (p-k+1)a\lambda_k & = & \Psi_k(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}), \\ a\lambda_p & = & \Psi_p(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}). \end{array}$$

Obtenemos entonces poco a poco los valores de los coeficientes $\lambda_2, \lambda_3, \ldots,$ λ_p. Siendo así determinados los λ, el cambio de la variable $w = P(z)$, $w_1 = P(z_1)$ conduce bien a una relación de la forma

$$w_1 = w - aw^{p+1} + A_{2p+1}w^{2p+1} + \cdots = Q(w),$$

siendo convergente, el segundo miembro, en un círculo de radio no nulo, como resulta de la teoría de funciones implícitas. (Hemos cambiado el signo de a para adaptarnos a las notaciones anteriormente empleadas.) Efectuamos ahora el cambio de las variables ya empleadas $w = t^{-\frac{1}{p}}$, $w_1 = t_1^{-\frac{1}{p}}$. Obtenemos

$$t_1 = S(t) = t + pa + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^{1+\frac{1}{p}}} + \cdots.$$

Estamos entonces en el caso donde el desarrollo de $S(t)$, ordenado según las potencias descendentes de t, tiene por primer término un exponente negativo un término en $\frac{1}{t}$. Las consideraciones del parágrafo 10 sobre los valores asintóticos de $S_n(t)$ y la ecuación de Abel son entonces aplicables. Si t está en el dominio D, tenemos para

$$t_n = S_n(t)$$

la expresión asintótica

$$t_n = p\,a\,n + \frac{b}{pa}\mathcal{L}n + F(t) + \varepsilon_n,$$

con $F(z)$ satisfaciendo la ecuación de Abel. Si t permanece en un dominio $\Delta[R(t) > A]$, tenemos para grandes valores de t

$$F(t) = t + o[\mathcal{L}(t)].$$

A estos dominios D y Δ la transformación conforme $w = t^{-\frac{1}{p}}$ hace corresponder en el plano de la variable compleja w un ensamblaje de $2p$ dominios $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(p)}$; $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(p)}$ cuya disposición ha sido descrita anteriormente y en los cuales las funciones $Q_n(w)$, resultando de la iteración $R(w)$, convergen ya sea simplemente o uniformemente hacia cero $(n^0 11)$[10] Podemos además suponer a esta *estrella* interior al círculo de convergencia de la serie $w - \lambda_2 w^2 + \cdots$ para la cual hacemos la inversión de la función $P(z)$. A esta estrella, la transformación conforme $w = P(z)$, regular cuando n está en este círculo, hace corresponder una estrella presentando una distribución análoga , la transformación conserva los ángulos al igual que las direcciones en torno al origen. En los nuevos dominios así obtenidos $D_{(1)}, D_{(2)}, \ldots, D_{(p)}$; $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \ldots, \Delta_{(p)}$; los $R_n(z)$ convergen ya sea simplemente o uniformemente hacia cero. Señalemos de paso que esta estrella no es necesariamente idéntica a aquella que hubieramos obtenido por el procedimiento del parágrafo 11, sin hacer uso de la transformación auxiliar $w = P(z)$. Sea lo que fuere, tendremos en el dominio $D_{(1)}$ por ejemplo una expresión asintótica que se obtiene eliminando las variables auxiliares entre las ecuaciones

$$\begin{gathered} w_n = P(z_n), \qquad w = P(z), \\ w_n = t_n^{-\frac{1}{p}}, \qquad w = t^{-\frac{1}{p}}, \\ t_n = n\,p\,a + \tfrac{b}{a}\ \mathcal{L}n + F(t) + \varepsilon_n; \end{gathered}$$

de donde

$$P(z_n) = \frac{1}{\sqrt[p]{npa + \frac{b}{a}\mathcal{L}n + f(z) + \varepsilon_n}},$$

[10] A pesar de la presencia de términos con exponente fraccionario en el desarrollo de $S(t)$, podemos suponer que D y Δ permanecen iguales cualquiera que sea la elección del argumento de $t^{\frac{1}{p}}$. Los dominios $D^{(i)}$, por ejemplo, son entonces las imagenes de un mismo dominio D para las transformaciones $w = \dfrac{1}{\omega t^{\frac{1}{p}}} \left(\omega = e^{\frac{2ik\pi}{p}}\right)$.

con

$$f(z) = F\left[\tfrac{1}{P^p(z)}\right],$$
$$f[R(z)] = f(z) + pa.$$

A propósito de estas fórmulas, son necesarias diversas observaciones:

1^0 Para obtener la expresión asintótica explícita de z_n, hay que resolver la ecuación $P(z_n) = w_n$ con respecto a z_n a través de la serie convergente

$$z_n = w_n + \mu_2 w_n^2 + \cdots + \mu_p w_n^p + \mu_{p+1} w_n^{p+1} + \cdots$$

y reemplazar w_n por $t_n^{-\frac{1}{p}} = \dfrac{1}{\sqrt{n\,a\,p + \frac{b}{a}\mathcal{L}n + C(z) + \varepsilon_n}}$. Podemos conservar solamente los $p+1$ primeros términos del desarrollo. En efecto, con ε_n infinitamente pequeño cuyo orden de trabajo nos es desconocido, el primer término w_n no es conocido más que en una cantidad cerca del orden de $\dfrac{1}{t_n^{\frac{1}{p}}} - \dfrac{1}{(t_n+\varepsilon_n)^{\frac{1}{p}}}$ o de $\dfrac{\varepsilon_n}{t_n^{1+\frac{1}{p}}}$, es decir de un orden inferior al de w_n^{v+1}, pero además desconocido. Es entonces inútil escribir los términos en $w_n^{p+2}, \ldots$.

2^0 Recordemos que a es el coeficiente, con signo contrario, de z^{p+1} en el desarrollo de $R(z)$; los coeficientes b, λ_i y μ_i, por otra parte son funciones racionales de los coeficientes de $R(z)$ hasta el término en z^{2p}.

3^0 La elección de los radicales en estas fórmulas depende de aquella de los dominios $D_{(i)}$. Señalemos además que la función de Abel $F(t)$ en el plano de la variable t no es en general la misma para las determinaciones de $t^{\frac{1}{p}}$; será la misma en el caso particular donde $S(t)$ no contenga términos en exponente fraccionario, es decir si $Q(w)$ no contiene más que términos en w^{hp+1}. Las p funciones de Abel $f(z)$, relativas a la substitución $[z \mid R(z)]$ y deducidas de F por la fórmula $F\left[\frac{1}{P^p(z)}\right] = f(z)$, están definidas y son holomorfas en los p dominios $D_{(i)}$ respectivamente. En los dominios $\Delta_{(i)}$ satisfacen la condición asintótica

$$f(z) = \frac{1}{z} + o\left(\mathcal{L}\frac{1}{\mid z \mid}\right).$$

Demostraremos fácilmente que los dominios $\Delta_{(i)}$ pueden ser elegidos de manera que no tomen más que una sola vez cada valor, y extenderemos fácilmente las propiedades demostradas en el parágrafo 9 refiriendo las curvas invariantes y la iteración analítica . Veremos por ejemplo que los consecuentes de un punto del dominio $D_{(i)}$ están repartidos sobre una curva invariante teniendo por tangente en O la bisectriz del ángulo formado por el contorno de $D_{(i)}$ en ese punto.

Ejemplo: $R(z) = z + \frac{1}{z}$. — El punto en el infinito es un punto doble de multiplicador igual a 1 para el cual el entero $p = 2$. Verificaremos que $R_n(z)$ converge uniformemente hacia el infinito en todo dominio acotado no conteniendo ningún punto del eje de las cantidades imaginarias. En cada uno de los dos semiplanos $(x > 0)$ y $(x < 0)$ tenemos

$$R_n(z) = \sqrt{2n + f(z) + \varepsilon_n},$$

con $f(z)$ satisfaciendo la ecuación de Abel

$$f\left(z + \frac{1}{z}\right) = f(z) + 2.$$

$f(z)$ es holomorfa tanto a la derecha como a la izquierda del eje imaginario. Mostraremos que esta recta es una línea singular esencial de $f(z)$, a lo que regresaremos posteriormente.

13. Así, dado un punto doble de multiplicador $+1$, hemos aprendido a encontrar regiones del plano para las cuales este punto es un punto frontera y en las cuales hay convergencia de los consecuentes desde un punto cualquiera hacia este punto doble. Debemos preguntarnos ahora si los puntos así obtenidos, agregando sus antecedentes, son los únicos puntos para los cuales $R_n(z)$ convergen hacia el punto doble. Estando siempre, el punto doble, confinado en el infinito,

$$R(z) = z + \frac{a}{z^{p-1}} + \frac{b}{z^p} + \cdots \qquad (a \text{ real positiva})$$

y z un punto cuyos consecuentes tienden hacia el infinito; estando los z_n a partir de un cierto rango en el dominio de convergencia en la serie que precede, podemos suponer que así sucede a partir de la misma z. Si establecemos $z^p = t, z_n^p = t_n$, tenemos

$$t_n = S(t_{n-1}),$$
$$S(t) = t + pa + \frac{b'}{t^{\frac{1}{p}}} + \frac{c'}{t^{\frac{2}{p}}} + \cdots.$$

La parte infinitamente pequeña de $S(t)$ tiene en general determinaciones multiples, pero no tendremos necesidad de saber de que manera hay que elegir las determinaciones de los radicales. Nos basta señalar que se puede asumir a $\Psi(t) = \frac{b'}{t^{\frac{1}{p}}} + \cdots$ más pequeña, en módulo, que $\dfrac{pa}{2}$ cuando reemplazamos t por $t, t_1, \ldots, t_n$.

Tendremos entonces

$$\begin{array}{ll} t_1 = t + pa + \theta \frac{pa}{2}, & \\ t_2 = t_1 + pa + \theta_1 \frac{pa}{2}, & \\ \vdots & \mid \theta_i \mid \leq 1, \\ t_n = t_{n-1} + pa + \theta_{n-1} \frac{pa}{2}; & \end{array}$$

de donde

$$t_n = t + npa + n\theta' \frac{pa}{2} \qquad \mid \theta' \mid \geq 1;$$

o, tomando la parte real de los dos miembros,

$$\begin{array}{ll} \Re(t_n) = \Re(t) + npa + n\theta'' \frac{pa}{2} & \qquad \mid \theta'' \mid \leq 1, \\ \Re(t_n) > \Re(t) + n\frac{pa}{2}. & \end{array}$$

esta última expresión es infinita positiva al mismo tiempo que n. Si entonces los puntos t_n no coinciden jamás con el punto en el infinito, permanecen a partir de un cierto rango, en sentido estricto interiores al dominio D al igual que al dominio Δ; podemos agregar que el argumento de t_n tiende a cero. Los puntos z_n serán entonces a partir de un cierto rango constantemente interiores a uno de los p dominios $\Delta_{(i)}$ que se deducen por la transformación conforme $z^p = t$; que será naturalmente siempre el mismo dominio $D_{(i)}$. Los puntos buscados son entonces, por una parte, los antecedentes del punto doble; y por otra, los puntos interiores en sentido estricto a los dominios $\Delta_{(i)}$ o $D_{(i)}$ y sus antecedentes. Los puntos de la segunda categoría son cada uno el centro de un dominio en el cual hay convergencia uniforme puesto que hay convergencia unifome en los dominios cerrados $\Delta_{(i)}$. Los puntos de la categoría, es decir los antecedentes del punto doble que son una infinidad numerable (asumiremos para mayor claridad que $R(z)$ es racional) no gozan de esta propiedad. Vamos a mostrar en efecto que los $R(z_n)$ no pueden formar una serie uniformemente convergente en un dominio que comprende el punto doble en su interior. Esta vez supongamos que el punto doble está en el origen. En el círculo de centro O, hay regiones donde las funciones $R_n(z)$ convergen uniformemente hacia cero. Sea ξ un punto interior a una de estas regiones. En un círculo γ de centro O y de radio ρ arbitrario, existen entonces puntos ξ_{-n} para los cuales

$$R_n(\xi_{-n}) = \xi \neq 0,$$

cualquiera que sea el entero n, las funciones $R_n(z)$ no pueden entonces converger uniformemente hacia cero en γ. Pero existen también regiones de γ donde las $R_n(z)$ convergen uniformemente hacia la constante cero. De lo que se deduce que las $R_n(z)$ no convergen uniformemente en todo el círculo γ.

Podemos demostrar la misma proposición de una manera más directa y más instructiva. Para mayor claridad siempre se asume a $R_n(z)$ racional, decimos que en el círculo γ de centro O y de radio ρ arbitrario, las $R_n(z)$ no pueden ser formadas uniformemente. Pues si lo fueran, serían holomorfas en γ cualquiera que sea n; tendríamos entonces en γ el desarrollo convergente (§ 3)

$$R_n(z) = z - naz^{p+1} + bz^{p+2} + \cdots.$$

Sea $M(r)$ el módulo máximo de $R_n(z)$ sobre la circunferencia de centro O y de radio $r < \rho$. Tenemos

$$M^2(r) > r^2 + n^2 \mid a \mid^2 r^{2(p+1)} + \mid b \mid^2 r^{2(p+2)} + \cdots.$$

El segundo miembro llega a ser infinito con n. Entonces, en el círculo γ, o bien las funciones $R_n(z)$ tienen polos, o bien toman valores infinitamente grandes con n. Por otra parte, siempre tenemos $R_n(0) = 0$. Entonces en un círculo cualquiera de centro O los $R_n(z)$ y, más generalmente, una serie cualquiera extraída de las $R_n(z)$ no pueden converger uniformemente.

Sucederá lo mismo para todo dominio en torno a un antecedente del punto doble. Sabemos de antemano que en ciertos dominios cerrados simplemente conexos que tienen el punto doble (o uno de sus antecedentes) sobre su frontera, hay convergencia uniforme.

14. Ahora vamos a estudiar lo que sucede alrededor de un punto doble cuyo multiplicador tiene por módulo la unidad con un argumento *conmensurable* a 2π. Sea entonces

$$R(z) = sz - a_2 z^2 + \cdots + a_h z^h + \cdots,$$

donde $s = e^{i\alpha} = e^{2i\pi \frac{m}{p}}$, siendo m y p enteros primos entre sí. Tendremos

$$R_n(z) = s^n z + \cdots$$

y en particular

$$R_p(z) = z + A_h z^h + A_{h+1} z^{h+1} + \cdots.$$

Suponemos $A_h \neq 0$, es decir que $A_h z^h$ es el primer término no nulo que sigue al término en z; dejamos entonces de lado por el momento el caso particular donde $R_p(z)$ sería igual a z. Decimos que h es de la forma $pp'+1$. En efecto, en virtud de la identidad

$$R_p[R(z)] = R[R_p(z)],$$

tendremos

$$\begin{aligned}&(sz + a_2z^2 + \cdots + a_hz^h + \cdots) + A_h[sz + a_2z^2 + \cdots + a_hz^h + \cdots]^h\\&+Hz^{h+1}\\&= s[z + A_hz^h + A_{h+1}z^{h+1} + \cdots] + a_2[z + a_hz^h + \cdots]^2 + a_h[z + \cdots]^h\\&+Kz^{h+1},\end{aligned}$$

siendo H y K series enteras. Igualando los términos en z^h, tenemos

$$a_h + A_hs^h = A_hs + a_h,$$

de donde

$$A_hs(s^{h-1} - 1) = 0.$$

Como $A_hs \neq 0$, tenemos entonces $s^{h-1} = 1$, y como s es raíz primitiva de $s^p = 1$, $h - 1$ es múltiplo de p o $h = pp' + 1$.

Dado lo anterior, la transformación $[z \mid R(z)]$ es, en un dominio suficientemente pequeño alrededor del origen, una transformación conforme sin puntos singulares que equivalen para z infinitamente pequeño a una rotación del ángulo $n\alpha$ alrededor del origen. Por otra parte sabemos que las funciones iteradas de $R_p(z)$ convergen hacia cero en pp' dominios congregados en torno de O y forman una estrella; estos dominios tienen en O un extremo del ángulo $\dfrac{2\pi}{pp'}$. Consideramos a p' de estos dominios encontrados sucesivamente sobre una circunferencia infinitamente pequeña de centro O y congregados en un sector de ángulo $\dfrac{2\pi}{p}$. Sean $D^0, D^1, \ldots, D^{p'-1}$, estos p' dominios que vamos a transformar sucesivamente por $R(z), R_2(z), \ldots, R_{p-1}(z)$. Obtenemos así pp' dominios que son designados por la Tabla siguiente

$$\left\{\begin{array}{llll} D^0 & D^1 & \ldots & D^{p'-1}, \\ D^0_1 & D^1_1 & \ldots & D^{p'-1}_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^0_{p-1} & D^1_{p-1} & \ldots & D^{p'-1}_{p-1}, \end{array}\right.$$

Se puede asumir que estos dominio son interiores al círculo $\mid z' \mid \leq \rho$, siendo las funciones $R_n(z)$ hasta $n = p-1$, todas regulares y no tomando más que una sola vez cada valor en este círculo. Se sigue que los dominios de esta Tabla son dominios simples que no se translapan a sí mismos. Están por otra parte congregados en torno de O y todos presentan en O un extremo de ángulo $\frac{2\pi}{pp'}$, las tangentes a estos puntos en O forman un haz isogonal cuyos ángulos recubren sin doble empleo un intervalo igual a 2π. Decimos además que estos pp' dominios no tienen punto en común.

En efecto, sea z un punto que pertenece a un dominio inscrito en la primera línea $D^{(i)}$. Sabemos que $R_{np}(z)$ tiende a cero y que su argumento tiene por límite el ángulo ω de Ox con la bisectriz del extremo del dominio $D^{(i)}$ en punto O; para $R_n(z)$, n no siendo necesariamente múltiplo de p, este argumento tendrá por valor límite $\omega + \frac{2n\pi}{p}$; la misma propiedad subsiste para todos los dominios de la Tabla; de lo que se deduce fácilmente que dos puntos perteneciendo a dos dominios diferentes tienen sus consecuentes distintos a partir de un cierto rango. Estos dos dominios no tienen entonces puntos comunes y coinciden solamente en O. Los dominios de la tabla forman entonces un ensamblaje estrella de igual estructura que la estrella considerada al inicio. Los dominios de una misma columna forman un ciclo, los consecuentes sucesivos de un punto de uno de estos dominios siendo periódicamente interiores a los p dominios del ciclo. Al contrario, dos dominios perteneciendo a dos columnas distintas están formados de puntos que nunca son iguales para las potencias de la substitución $[z \mid R(z)]$.

Finalmente, todos los puntos del plano cuyos consecuentes tienden hacia el origen son antecedentes de los puntos interiores a los dominios de la Tabla, o del origen mismo. Dejaremos de lado las extensiones fáciles de las propiedades demostradas en los parágrafos anteriores refiriendo los valores asintóticos de z_n y la ecuación de Abel. Demostramos además muy fácilmente que ni las $R_n(z)$, ni ninguna de las series infinitas que podemos extraer, converge uniformemente en un círculo de centro O. Pues si existiera tal serie, podríamos extraer otra donde todos los enteros n serían congruentes entre ellos $\pmod p$ y de la forma $\lambda p - q$; las funciones $R_{\lambda p - q} = f_\lambda(z)$ convergiendo uniformemente en un círculo de centro O, y sería lo mismo para las funciones $R_q[f_{\lambda p}(z)] = R_\lambda(z)$ que son las iteradas de una función de multiplicador $+1$ en el punto doble O. Entonces somos llevados a una cuestión ya resuelta. Señalemos también que podríamos completar la estrella obtenida por un conjunto análogo de dominios relativos a los antecedentes de un punto.

Hemos dejado de lado el caso donde $R_p(z)$ es idéntica a z. Si es así, las funciones $R_n(z)$ son periódicamente iguales a las funciones $z, R(z), R_2(z), \ldots,$ $R_{p-1}(z)$ y entonces no convergen a cero. Esta circunstancia se presenta para las substituciones de primer grado $z = sz = e^{\frac{2i\pi m}{p}} z$, y para aquellas que deducimos por la misma transformación conforme, $z = f(z), z_1 = f(t_1)$, con $f(t)$ holomorfa y nula, pero de derivada no nula para $t = 0$. La relación $z_1 = sz$ da entonces

$$f(t_1) = sf(t) \quad \text{de donde} \quad t_1 = F[sf(t)].$$

esta última ecuación será de la forma $t_1 = st$ solamente si $f(st) = sf(t)$; desechemos esta hipótesis; tendremos entonces una substitución $t_1 = Q(t)$, donde Q no es de primer grado, cuya iteración indefinida conduce solamente a p substituciones distintas. Por ejemplo para $p = 2$, podremos tomar $Q(t) = L(2-e^t)$, con la determinación del logaritmo nulo para $t = 0$. Además esta circunstancia no puede presentarse si $R(z)$ es una fracción racional de grado superior a 1, o una función uniforme teniendo puntos singulares esenciales aislados, pues la inversa de dicha función jamás es uniforme según los teoremas de Picard.

Consideremos ahora el caso de un punto periódico cuyo multiplicador es de la forma $e^{2i\pi\frac{m}{p}}$; si q es el periodo, seremos llevados al caso precedente que considera la substitución $[z \mid R_q(z)]$. Obtendremos así alrededor de los q puntos del ciclo q ensamblajes de dominios o estrellas en las cuales las $R_n(z)$ convergen periódicamente hacia los puntos del ciclo; si z pertenece a uno de estos dominios, el punto z_q pertenecerá a la misma estrella pero a un dominio diferente si $p > 1$; el punto R_{pq} pertenecerá al mismo dominio que z; los puntos $z_{\lambda pq}$ tienden hacia el punto doble correspondiente sin salir de este dominio; de cualquier manera hay una doble periodicidad, una de posición la otra de orientación. Los dominios de las q estrellas forman así p' grupos o ciclos ($p' \geq 1$); dos puntos que pertenecen a dominios de dos ciclos distintos jamás son iguales para las potencias de la substitución dada.

Resta estudiar los puntos dobles cuyo multiplicador es de la forma $e^{i\alpha}$, siendo α un número inconmensurable a π. Conocemos muy poco sobre estos puntos dobles, cuyo estudio desde el punto de vista que nos ocupa parece muy dificil. Consideremos primero una substitución de primer grado $z_1 = e^{i\alpha}z$; la iteración da $z_n = e^{in\alpha}z$; los puntos z_n están distribuidos de una manera densa sobre toda la circunferencia de centro O pasando por z y la serie de las funciones $R_n(z)$ admite como funciones límite todas las funciones $e^{i\beta}z$, donde β es un número real cualquiera. Si establecemos como anteriormente

$z = f(t), z_1 = f(t_1)$ con $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, obtenemos una nueva substitución $t_1 = Q(t)$ con $Q(0) = 0, Q'(0) = e^{i\alpha}$, que en general no es de primer grado y es tal, que los consecuentes de un punto están distribuidos de una manera densa sobre una curva cerrada analítica en torno al punto doble. Entonces en la vecindad del punto doble, los consecuentes de un punto (además del punto doble) no tienden jamás a ese punto. Pero dada la subtitución $z_1 = R(z) = e^{i\alpha} z + \cdots$, no es fácil ver si cae en la categoría anterior. Supongamos que no sea así: ¿existen entonces dominios cuyos consecuentes tienden hacia el punto doble? En este momento no podemos ni dar un ejemplo, ni probar que el hecho sea imposible[11].

15. Ahora solamente vamos a estudiar los puntos dobles *repulsores* cuyo multiplicador es más grande que 1, en módulo. Si α es un punto de esta especie, existe un número real k comprendido entre 1 y $\mid s \mid > 1$, tal que para todo punto z interior al círculo ($\mid z - \alpha \mid \leq \rho$), tendríamos

$$\mid z_1 - \alpha \mid = \mid R(z) - \alpha \mid > k \mid z - \alpha \mid .$$

Si los puntos $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ son todos interiores a este mismo círculo, tendremos también $\mid z_n - \alpha \mid > k^n \mid z - \alpha \mid$, cantidad que crece infinitamente con n; los puntos z_n terminan entonces por salir del círculo. Es claro que aparte del mismo punto doble, los consecuentes de un punto del círculo jamás tienden hacia el punto doble. Si $R(z)$ está definido y es uniforme en todo el plano y también racional para fijar las ideas, tendremos sobre una circunferencia de centro α y de radio ρ

$$M_n(\rho) > k^n \rho,$$

con $M_n(\rho)$ designando el módulo máximo de $R_n(z)$ que se asume holomorfa para $\mid z - \alpha \mid \leq \rho$. Si esta última ecuación no es satisfecha, $R_n(z)$ tiene al menos un polo sobre la circunferencia o en el interior. Por consecuencia, en todo círculo de centro α, $R_n(z)$ toma valores de módulo indefinidamente creciente con n. Como, por otra parte, siempre tenemos $R_n(\alpha) = \alpha$, ninguna serie infinita extraída de los $R_n(z)$ puede converger uniformemente en un círculo de centro α.

La función inversa de $R(z)$, igual a α para $z = \alpha$, es desarrollable para $\mid z = \alpha \mid$ suficientemente pequeño en serie entera:

$$z_{-1} = R_{-1}(z) = \alpha + \frac{1}{s}(z - \alpha) + ()(z - \alpha)^2 + \cdots .$$

[11]Frecuentemente daremos, a los puntos dobles o periódicos de multiplicador igual a 1, en módulo, el nombre de puntos dobles o periódicos *neutros*.

El punto doble α es entonces un punto doble atractor de multiplicador $\frac{1}{s}$ para la substitución $[z \mid R_{-1}(z)]$. Entonces, en cierto dominio del punto α, los antecedentes de z obtenidos a través de la rama de la función $R_{-1}(z)$ que acabamos de definir convergen uniformemente hacia α. Existe una función holomorfa y nula en α, de derivada igual a 1 en el punto que verifica la ecuación funcional de Schröder

$$F[R_{-1}(z)] = \frac{1}{s}F(z),$$

de donde

$$sF(z) = F[R(z)].$$

La función inversa de $F(z)$, $G(z)$ igual a α para $Z = 0$ y holomorfa en este punto verifica la ecuación funcional

$$R[G(Z)] = G(sZ).$$

Ahora vamos a demostrar un teorema referente al conjunto E''[12] obtenido de los consecuentes de un punto, suponiendo siempre para evitar confusión $R(z)$ racional. Supongamos que este conjunto contiene el punto doble α de multiplicador s tal que $\mid s \mid \geq 1$. Si este conjunto encierra otros puntos además de α (que es ciertamente el caso, como acabamos de ver, cuando $\mid s \mid > 1$ y cuando z no es un antecedente de α), encierra una infinidad que tiene a α por punto límite. En efecto, no siendo z un antecedente de α tendrá todos sus consecuentes distintos, sino z sería el antecedente de un punto periódico que coincidiría necesariamente con α, ya que α es un punto invariante y límite de ciertos consecuentes de z. Sentado lo anterior, tendremos, en un círculo de centro α y de radio r,

$$\mid R(z) - \alpha \mid < k \mid z - \alpha \mid,$$

siendo k un número finito pero más grande que 1; r debe ser asumido suficientemente pequeño para que exista en el exterior del círculo un punto límite β de los z_n, lo que es posible ya que α no es el único punto límite. Siendo ρ un número comprendido entre 0 y $\frac{r}{k}$, y z_λ un consecuente de z tal que $\mid z_\lambda - \alpha \mid < \rho$; puesto que los z_n tienen a β entre sus puntos límite, hay consecuentes de z_λ cuya distancia a α es superior a ρ. Sea $z_{\lambda+\mu}$ el primer consecuente de z_λ para el cual $\mid z_{\lambda+\mu} - \alpha \mid > \rho$; como $\mid z_{\lambda+\mu-1} - \alpha \mid \leq \rho$, tendremos

[12] en el original no se da esta notación, sin embargo se utiliza más adelante

$| z_{\lambda+\mu} - \alpha | < k\rho$. El punto $z_{\lambda+\mu}$ es entonces interior a la corona $(\rho, k\rho)$. Sea $z_{\lambda'}$, el primer consecuente de z después $z_{\lambda+\mu}$ para el cual $| z_{\lambda'} - \alpha | < \rho$; $z_{\lambda'}$ existe ya que α es punto límite de los z_n. Deduciremos como antes la existencia de $z_{\lambda'+\mu'}$ comprendidos en la corona $(\rho, k\rho)$. Obtenemos así la serie de puntos $z_{\lambda+\mu},\ z_{\lambda'+\mu'},\ z_{\lambda''+\mu''},\ \ldots$ cuyos índices van creciendo, que son entonces todos distintos y todos interiores a la corona $(\rho, k\rho)$. Tienen entonces al menos un punto límite en esta corona o sobre su contorno. Haciendo sucesivamente $\rho = \frac{r}{k}, \frac{r}{k^2}, \cdots, \frac{r}{k^n}, \cdots$, obtenemos una serie de coronas que tienden hacia el punto α y que todas contienen al menos un punto límite de las z_n. El conjunto E'' contiene entonces al menos un punto.

Vamos a dar, para terminar, algunos ejemplos de las diversas suertes de los puntos dobles que hemos estudiado en este capítulo.

Tomemos $R(z) = z^2 + 5$. Hay un punto doble atractor, que es el punto doble en el infinito y dos puntos dobles repulsores que son los puntos $\alpha = \dfrac{1 + i\sqrt{19}}{2}$ y $\beta = \dfrac{1 - i\sqrt{19}}{2}$, cuyos multiplicadores son respectivamente 2α y 2β. Los z_n convergen hacia el infinito para $| z | \geq 3$. En efecto, si $| z | \geq 3$ tenemos

$$\begin{aligned}
&| z_1 | \geq | \ z |^2 -5 \geq 4,\\
&| z_2 | \geq | \ z_1^2 | -5 > 8,\\
&\quad \vdots\\
&| z_n | > 2^{n+1},\\
&| z_{n+1} | > 2^{2n+2} - 5 > 2^{2n+2} - 8 = 8(2^{2n-1} - 1)\\
&\cdots > 8 \cdot 2^{2n-2} = 2^{2n+1} > 2^{n+2}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces $\lim z_n = \infty$ para $| z | \geq 3$. Estudiaremos más tarde este ejemplo de una manera más concreta.

Tomamos en seguida $R(z) = z^2 - \frac{5}{4}$. Tenemos siempre el punto atractor $z = \infty$, y los dos puntos dobles repulsores $z = \dfrac{+1 \pm \sqrt{6}}{2}$, de multiplicador $1 \pm \sqrt{6}$. Encontramos enseguida un ciclo de orden 2 correspondiendo a los puntos raíces α y β, la ecuación

$$z^2 + z - \frac{1}{4} = 0,$$

y cuyo multiplicador es igual a $R'(\alpha)R'(\beta) = 4\alpha\beta = -1$. La estrella del punto $\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ se compone de dos dominios D_0, D_2 colocados a uno y otro lado de la paralela al eje imaginario conducido por α y cuyos contornos son tangentes a esta recta; la estrella del punto $\beta = \dfrac{-1\sqrt{2}}{2}$ se compone de los dominios D_1, D_3 ofreciendo una disposición análoga . Los consecuentes de un punto z de D_0 son los puntos z_{4n} interiores a D_0, z_{4n+1} exteriores a D_1, z_{4n+2} interiores a D_2 y z_{4n+3} a D_3. Tienden hacia α o hacia β permaneciendo sobre curvas tangentes al eje real (figura V).

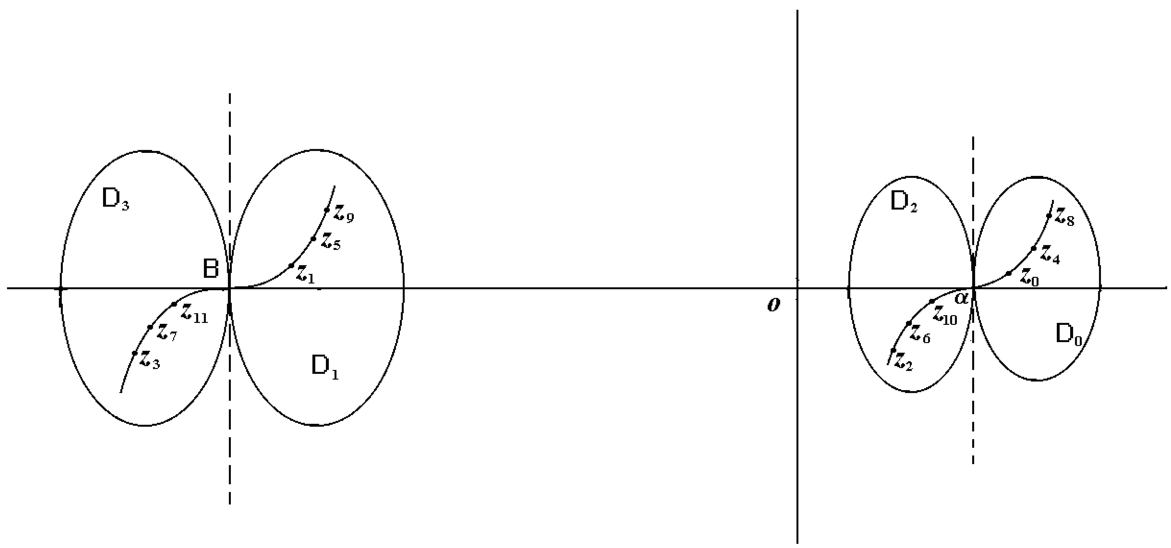

Figura V:

Por último consideremos el ejemplo un poco más general $R(z) = z^d + a$. Los puntos periódicos de orden n, siendo n primo, son los puntos raíces de la ecuación

$$U_n(z) = \frac{R_n(z) - z}{R(z) - z} = z^{d^n - d} + \cdots + P_n(a) = 0.$$

$P_n(a)$ es un polinomio en a, que tienen como primer término a $a^{d^{n-1}-1}$ y como último término la unidad. Los puntos raíces de la ecuación precedente se distribuyen en $\dfrac{d^n - d}{n}$ ciclos de orden n.

Sea $(z, z_1, \ldots .z_{n-1})$ uno de estos ciclos. Su multiplicador será

$$t = R'(z)R'(z_1)\ldots R'(r_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n=1} dz_i^{d-1} = d^n(\Pi z_i)^{d-1}.$$

El producto de los multiplicadores de los diferentes ciclos en número $\dfrac{d^n - d}{n}$ será entonces

$$d^{nd-d}\Pi(z)^{d-1},$$

el producto Π siendo extendido a todas las raíces de $U_n(z) = 0$ es decir

$$\pm d^{dn-d}[P(a)]^{d-1}.$$

Si a es arbitrario, podemos disponer de manera que esta expresión tome el valor que queramos. Si este valor es más pequeño que 1, en módulo, habrá al menos un $(t) < 1$, entonces al menos un ciclo atractor de orden n.

Capítulo 3

16. En este capítulo estudiaremos una clase particularmente simple e importante de substituciones racionales, aquellas que transforman en sí mismas respectivamente el interior y la circunferencia de un círculo y por consecuencia también el exterior del círculo. Vamos a buscar la expresión general de tal substitución suponiendo primero que para una inversión previa hubieramos transformado el círculo en el semi-plano: $I(z) \geq 0$. $Z = R(z)$ es una substitución buscada, la función $R(z)$ que es evidentemente real para z real tiene todos sus polos sobre el eje real; pues si tuviera un polo z_0 en el semi-plano superior, con z describiendo alrededor de z_0 una circunferencia infinitamente pequeña, Z describiría un contorno exterior a un círculo de radio infinitamente grande, de manera que habiendo aumentado el argumento de $z - z_0$ en 2π, el de Z hubiera disminuido en $2q\pi \quad (q \geq 1)$ y el lugar de Z tendría puntos en el semi-plano inferior, lo cual es imposible, ya que z permanece en el semi-plano superior. Además, los polos de $R(z)$ no pueden ser sino polos simples, pues si z describe alrededor del polo real z_0 una semi-circunferencia de radio muy pequeño en el semi-plano superior de suerte que el argumento de $z - z_0$ cruze de 0 a π, Z describirá una curva exterior a un círculo de radio muy grande de manera que el argumento de Z disminuye aproximadamente en $q\pi$, si z_0 es un polo de orden n. Si $q \geq 2$, esta curva tendrá puntos en el semi-plano inferior, lo cual es imposible. Veamos de una manera análoga que el infinito es un polo simple de $R(z)$. Tenemos entonces

$$R(z) = kz + h - \sum \frac{A}{z - a},$$

siendo los a reales; lo mismo que las constantes A, h, k, ya que

$$A = \lim_{z=a} R(z)(z - a),$$

$$k = \lim_{z=\infty} \frac{R(z)}{z}$$

además de que $R(z)$ es real. Finalmente, afirmamos que las A y las k son positivas, pues para $z = x + iy$ cerca de a, la parte principal de $R(z)$ es

$$-\frac{A}{z-a} = -\frac{A(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{Aiy}{(x-a)^2 + y^2},$$

que se reduce para $x = a, y > 0$ en $\frac{Ai}{y}$. Debemos entonces tener $\frac{A}{y} > 0$, por lo tanto $A > 0$. Lo mismo para $z + iy$ donde y es positiva e infinitamente grande, tenemos $R(Z) = kiy+$ cantidad acotada, por consecuencia $ky > 0$. Claro está que, k puede ser nulo. Entonces el infinito ya no es un polo, de modo que ya no es un punto doble de la substitución.

Recíprocamente, toda fracción racional de la forma anterior responde a la cuestión, ya que estableciendo $Z = X + iY$, se obtiene

$$Y = ky + \sum \frac{Ay}{(x-a)^2 + y^2} \qquad (k \geq 0, A > 0),$$

Y e y son siempre del mismo signo y nulos al mismo tiempo.

Vamos a buscar los puntos dobles de la substitucion estableciendo $k = 0$ lo que debe ser visto como el caso general; de otro modo, siendo el infinito un punto doble, estableceremos

$$\frac{-1}{Z-\alpha} = T, \qquad \frac{-1}{z-\alpha} = t,$$

con α una constante real; tendremos entonces una relación de la misma forma entre T y t, dejando de ser un punto doble el infinito si α es convenientemente seleccionada.

Estableceremos entonces

$$R(z) = h - \sum_{1}^{d} \frac{A}{z-a}$$

y tendremos que discutir la ecuación

$$z = R(z) = h - \sum \frac{A}{z-a}$$

donde

$$f(z) = R(z) - z = h - z - \sum \frac{A}{z-a} = 0$$

Haremos variar z de $-\infty$ a $+\infty$ señalando los valores de discontinuidad a

de $f(z)$; tenemos la tabla de variación siguiente:

$z \cdots$	$-\infty$	a_1	a_2	$\cdots$ a_{d-1}	a_d	$+\infty$
$f(z) \cdots$	$+\infty \quad +\infty$	$-\infty \quad +\infty$	$-\infty \quad +\infty$	$-\infty \quad +\infty$	$-\infty \quad -\infty$	

Según la cual hay un número impar de raíces reales, al menos una, en cada uno de los intervalos (a_j, a_{j+1}), lo que da al menos $d-1$ raíces reales y distintas, y un número par que no puede ser entonces más que 0 ó 2 en los intervalos extremos (el número total de raíces, distintas ó no, es $d+1$, incluyendo las raíces imaginarias).

La ecuación tiene así $d-1$ raíces reales y distintas respectivamente en los intervalos $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots$, y además siguiendo los casos:

1⁰ Dos raíces imaginarias conjugadas.

Hay entonces una raíz simple real y única en cada uno de los intervalos (a_j, a_{j+1}). Para cada una de estas raíces $\alpha, f(z)$ pasa de negativa a positiva, entonces $f'(\alpha) > 0$ ó $R'(\alpha) > 1$. Las α son entonces puntos dobles repulsores. Consideremos enseguida las dos raíces imaginarias conjugadas, entonces los multiplicadores s y s' son igualmente imaginarios conjugados. Según la relación conocida entre los multiplicadores, tenemos

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s'+1} + \sum_{1}^{d-1} \frac{1}{s_i - 1} + 1 = 0$$

la $\sum$ siendo extendida a los puntos dobles reales para los cuales s_i es real y > 1. No consideramos más que substituciones de grado ≥ 2, entonces $d-1 \geq 1$. Igualando a cero la parte real del primer miembro, tenemos

$$\Re\left(\frac{1}{s-1}\right) + \Re\left(\frac{1}{s'-1}\right) + 1 + P = 0 \qquad (P > 0)$$

ó

$$2u + 1 + P = 0.$$

Estableciendo

$$\frac{1}{s-1} = u + iv, \qquad \frac{1}{s'-1} = u - iv.$$

Tenemos entonces $u < -\frac{1}{2}$, de donde resulta como sabemos

$$|\, s \,| \; = |\, s' \,| \; < 1.$$

Tenemos dos puntos dobles atractores imaginarios conjugados.

2⁰ Dos raíces reales distintas entre ellas y de las anteriores, entonces en total $d+1$ raíces reales y distintas.

Entonces necesariamente hay o tres raíces reales y distintas en un intervalo (a_j, a_{j+1}), o dos raíces reales y distintas en uno de los intervalos extremos. Si hay tres raíces $\alpha < \alpha' < \alpha''$ entre a_j y a_{j+1}, para α y α'', $f(z)$ es creciente

$$R'(\alpha) > 1, \qquad R''(\alpha'') > 1;$$

para α', $f(z)$ es decreciente y $R'(\alpha') < 1$. Si hay dos raíces reales y distintas en el intervalo $(a_d, +\infty)$, por ejemplo, tendremos $R'(\alpha) > 1$ y $R'(\alpha') < 1$ $(\alpha < \alpha')$. En los dos casos, hay d puntos dobles para los cuales s es real y mayor que 1, entonces $\dfrac{1}{s-1} > 0$. Para el $(d+1)$-ésimo, tendremos, en virtud de la relación conocida,

$$\frac{1}{s-1} = -1 - \sum{}' \frac{1}{s-1} = -1 - P \quad (P > 0),$$

de donde

$$0 < s < 1.$$

Hay entonces un punto doble atractor y sólo uno sobre el eje real.

3⁰ Dos raíces reales iguales entre sí o a una de las anteriores, es decir $d-1$ raíces reales y distintas y una raíz doble.

Para la raíz doble, tenemos $s = R'(\alpha) = +1$. Vemos fácilmente que $s > 1$ para las otras.

4⁰ Dos raíces reales iguales entre sí y a una de las anteriores, es decir, en total una raíz triple perteneciendo entonces a uno de los intervalos (a_j, a_{j+1}) y $d-2$ raíces reales distintas perteneciendo respectivamente a los $d-2$ intervalos restantes. Para la primera, tenemos $s = R'(\alpha) = +1$, $R''(\alpha) = 0$. Para las restantes tenemos siempre $s > 1$.

Resumamos estas conclusiones considerando un círculo cualquiera en lugar de la parte superior del semi-plano. Podemos decir que toda substitución racional de grado $d > 1$ admitiendo un *círculo fundamental* Γ poseé:

Ya sea 1^0 dos puntos dobles atractores que son imagen uno del otro con respecto a Γ y $d-1$ puntos dobles repulsores situados sobre la circunferencia;

Ya sea 2^0 un punto doble atractor y d puntos dobles repulsores, todos situados sobre la circunferencia;

Ya sea 3^0 un punto doble de multiplicador igual a $+1$ que equivale a dos o a tres puntos dobles iguales y $d-1$ ó $d-2$ puntos dobles repulsores, todos sobre la circunferencia.

Señalemos que el multiplicador de un punto doble situado sobre la circunferencia es siempre real y positivo, lo que es poco más o menos *a priori*. Al contrario de los multiplicadores de los puntos dobles atractores no situados sobre la circunferencia, si existen, pueden tener cualquier valor real o complejo (con modulo menor que uno).

17. Podemos entender la noción de substitución en el círculo fundamental considerando también el caso donde $R(z)$ permutan entre si el interior y el exterior del círculo, la circunferencia permanece invariante. Si transformamos la circunferencia en el eje real, tenemos como consecuencia la expresión de $R(z)$ señalando que $-R(z)$ deja invariante el semi-plano superior:

$$R(z) = -kz - h + \sum \frac{A}{z-a},$$

las A y las k siendo aún positivas. Podríamos proseguir como en la discusión anterior de la ecuación $R(z) = z$; pero es inútil. Basta señalar: 1^0 que siendo permutados entre si los dos semi-planos, no hay punto invariante imaginario; 2^0 que los puntos dobles situados sobre el eje real tienen sus multiplicadores reales y negativos por la misma razón; que $Z = R_2(z)$ define una substitución en el círculo fundamental del tipo ya estudiado.

Según lo anterior, si $R_2(z)$ es de la primera especie, es decir poseé dos puntos dobles imaginarios, estos puntos forman un ciclo de orden 2 para $R(z)$. Siendo, además, el resto de los puntos dobles de $R_2(z)$ todos reales y repulsores, igual que para $R(z)$. La substitución propuesta tiene entonces todos sus puntos invariantes sobre el eje real con multiplicadores reales y negativos; tiene además un ciclo atractor de orden 2.

Si $R_2(z)$ es de la segunda especie, es decir poseé un punto invariante atractor sobre el eje real, siendo los restantes repulsores e igualmente reales. $R(z)$ tiene igualmente un punto invariante atractor de multiplicador comprendido entre 0 y -1 (límites excluidos) y d puntos invariantes repulsores, siendo todos estos puntos reales.

Si $R_2(z)$ es de la especie singular, es decir poseé un punto doble de multiplicador igual a $+1$, $R(z)$ tendrá sobre el eje real un punto doble de multiplicador igual a -1 [para el cual $R''_2(z) = 0$]. El resto de los puntos dobles son reales y repulsores.

Hay correspondencia entre las diversas especies para los dos tipos de substitución, excepto a la que concierne las substituciones singulares del primer tipo con un punto doble α donde $R'(y) = +1$, $R''(\alpha) \neq 0$ que no tiene correspondientes en el segundo tipo.

18. Si $R(z)$ es una función en el círculo fundamental, lo será $R_n(z)$ cualquiera que sea el entero n; $R_n(z)$ será del segundo tipo si $R(z)$ cumple lo anterior y si n es impar.

Se obtiene por consecuencia que todos los ciclos de orden n son repulsores y están formados de los puntos reales mientras $n > 2$ o bien $n = 2$, a excepción de las substituciones del segundo tipo de la primera especie.

De una manera general, formando entre ellas substituciones que admiten el mismo círculo fundamental Γ, en un orden cualquiera, tenemos aún una substitución que admite el mismo círculo fundamental; estas substituciones forman un grupo si les agregamos sus inversas que, naturalmente, no son racionales.

Las propiedades de los puntos dobles que acabamos de estudiar caracterizan las substituciones en el círculo fundamental y permiten expresarlas de alguna otra manera.

Supongamos que $[z, R(z)]$ admite $d-1$ puntos dobles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1}$ situados sobre una circunferencia Γ, de multiplicadores reales y mayores que 1, y dos puntos dobles α, α' de multiplicadores s y s' conjugados, siendo α y α' imagen uno del otro con respecto a Γ; los s están ligados por la relación

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s'-1} + \sum_{1}^{d-1} \frac{1}{s_i - 1} + 1 = 0,$$

que arrastra, como ya lo hemos visto,

$$\mid s \mid \; = \mid s' \mid \; < 1.$$

Decimos que la substitución admite a Γ como círculo fundamental. Sabemos en efecto que

$$\frac{1}{R(z) - z} = \frac{1}{(s-1)(z-\alpha)} + \frac{1}{(s'-1)(z-\alpha')} + \sum_{1}^{d-1} \frac{1}{(s_i-1)(z-\alpha_i)}.$$

Podemos suponer, sin restar generalidad, que Γ es el eje real, entonces α_i real, α y α' imaginarios conjugados. Establecemos $R(z) = A$ en la igualdad anterior; tenemos una ecuación en z que tendrá todas sus raíces reales si A es real. En efecto, esta ecuación puede escribirse

$$\sum_1^{d-1} \frac{1}{(s_i - 1)(z - \alpha_i)} + \frac{1}{z - A} + \Phi(z) = 0,$$

con $\Phi(z)$ real y acotada para z real, pues es una fracción racional de la forma $\dfrac{Cz + C'}{(z-a)^2 + b^2}$, donde $b > 0$. Por otra parte, los coeficientes $\dfrac{1}{z - a_i}$ son positivos ya que $s_i > 1$, al igual que el coeficiente de $\dfrac{1}{z - A}$ que es igual a 1. Entonces, si consideramos los $d - 1$ intervalos determinados por los d números $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1}, A)$; cuando el primer miembro toma valores infinitos de signos contrarios a los dos extremos de un intervalo se anula una vez en este intervalo; así pues tenemos $d-1$ raíces reales, y como la ecuación es de grado d (a causa de la relación entre los multiplicadores), hay d raíces reales. Entonces $R(z) = A$ tiene todas sus raíces reales para A real; pero coincidiendo $Z = R(z)$ con z para $z = \alpha = a + bi$, si z describe un camino cualquiera en el semi-plano superior a partir de α, Z permanecerá también en este semi-plano, de otra forma Z atravesaría el eje real en el punto $Z = A$ y la ecuación $R(z) = A$ tendría una raíz imaginaria. Por otra parte $R(z)$ tiene coeficientes reales. Entonces $Z = R(z)$ define una substitución en el círculo fundamental y de la primera especie.

Ahora supongamos que todos los puntos dobles están sobre la circunferencia, y que sus multiplicadores son reales y mayores que 1, en valor algebráico, para d de entre ellos, pero real y comprendido entre 0 y 1 para el $(d+1)^{\text{ésimo}}$ como resulta de la relación

$$\frac{1}{s-1} + \sum_1^d \frac{1}{s_i - 1} + 1 = 0$$

que debemos suponer se satisface. Decimos que tendremos una substitución del primer tipo y de la segunda especie. Lo que lleva a demostrar igual que antes que $R(z) = A$ tiene sus raíces reales para A real; esta ecuación puede escribirse

$$\sum_1^d \frac{1}{s_i - 1} \frac{1}{z - \alpha_l} + \frac{1}{z - A} - \frac{1}{1 - s} \frac{1}{z - \alpha} = 0.$$

Tenemos aún $\dfrac{1}{s_i - 0} > 0$. Consideremos los d intervalos determinados por $d+1$ números $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, A)$ excluyendo toda vez a aquel, si hay uno, que contenga a α. En los $d-1$ intervalos restantes, el primer miembro es continuo salvo en los dos extremos donde se anula una vez debido a que pasa de $+\infty$ a $-\infty$; entonces las $d-1$ raíces son reales lo mismo que d. Terminamos el razonamiento como antes señalando que $R(z)$, definida por

$$\frac{1}{R(z)-z} = \frac{1}{s-1}\frac{1}{z-\alpha} + \sum_1^d \frac{1}{s_i - 1}\frac{1}{z-\alpha_i},$$

toma valores de igual signo que z por lo que se refiere a la parte imaginaria en la vecindad de los puntos dobles debido a que $s > 0$.

Consideremos finalmente el caso donde damos sobre la circunferencia un punto doble α para el cual

$$s = R'(\alpha) = +1, \qquad R''(\alpha) \neq 0$$

y $d-1$ puntos dobles para los cuales $s > 1$. Las cosas son un poco menos simples en este caso; la subtitución $R(z)$, admitiendo los puntos dobles dados con sus multiplicadores y de grado d, no está completamente determinada y depende de una constante arbitraria. Tenemos en efecto (§2)

$$\frac{1}{R(z)-z} = \frac{l}{(z-\alpha)^2} + \frac{h}{z-\alpha} + \sum_1^{d-1} \frac{1}{s_i-1}\frac{1}{z-\alpha_i},$$
$$h + \sum_1^{d-1} \frac{1}{s_i - 1} + 1 = 0.$$

Vemos que l permanece indeterminada. Si suponemos a las α sobre el eje real, para que $R(z)$ deje esta recta invariante, falta que l sea real. Tenemos además, en la vecindad de α,

$$R(z) = \alpha + (z-\alpha) + \frac{1}{l}(z-\alpha)^2 + \cdots \qquad \left(R''(\alpha) = \frac{2}{l}\right).$$

Suponer a l real lleva a suponer que la tangente a Γ coincide con la tangente de rebotadura (rebroussement) a la curva que limita el dominio de convergencia elemental relativo a α (§10). Bajo esta forma, la condición es invariante con relación a toda transformación conforme[1]. Si es satisfecha, aún vemos

[1]Lo que quiere decir que la dirección determinada por el argumento de $R^u(\alpha)$ es aquella de la tangente en α en el círculo.

fácilmente que $R(z)$ pertenece a la clase que estudiamos y define una substitución singular de primer tipo. El procedimiento es siempre el mismo. Tenemos que demostrar que

$$\frac{l}{(z-\alpha)^2}+\frac{h}{z-\alpha}+\sum_{1}^{d-1}\frac{1}{(s_i-1)}\frac{1}{(z-\alpha_i)}+\frac{1}{z-A}=0$$

admite d raices reales para A real. Siendo las s_i-1 positivas, aún consideramos los $d-1$ intervalos determinados por $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{d-1},A)$. Si ninguno de ellos contiene a α, vemos que todos contienen una raíz. Si alguno de ellos contiene a α, sea por ejemplo $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$ en uno de los dos intervalos (α_1,α) y $(\ \alpha,\alpha_2)$, el primer miembro pasará de $+\infty$ a $-\infty$ porque llega a ser infinito sin cambiar de signo para $z=\alpha$. Tendremos entonces $d-1$ e incluso d raíces reales y la conclusión se obtiene.

Dejaremos de lado el caso donde se tiene

$$R'(z)=+1,\qquad R''(z)=0,$$

que da lugar a una discusión análoga.

Finalmente, para las substituciones de segundo tipo, tendremos resultados semejantes. Por ejemplo, si damos $d+1$ puntos dobles sobre la circunferencia con $s<-1$ en valor algebráico, tendremos para la fórmula de descomposición en elementos simples una expresión de $R(z)$ que dará una subsitución de segundo tipo y de la primera especie.

19. Puede ser favorable elegir como círculo fundamental Γ al círculo unitario $\mid t\mid\leq 1$. Pasemos de este círculo al semi-plano superior del plano de las Z por la transformación

$$t=\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}},\qquad T=\frac{Z-\beta}{Z-\bar{\beta}},$$

siendo β y $\bar{\beta}$ imaginarias conjugadas y β teniendo su parte imaginaria positiva. La relación $Z=R(z)$ da entonces $T=\Phi(t)$. Es claro que si $\Phi^{(1)}$ y $\Phi^{(2)}$, dejan invariante el círculo $\mid t\mid\leq 1$, lo mismo sucede con $\Phi=\Phi^{(1)}\Phi^{(2)}$. A las funciones $\Phi^{(1)}(t)$ y $\Phi^{(2)}$(t) les corresponden $R^{(1)}(z)$ y $R^{(2)}(z)$. Un cálculo simple muestra que la $R(z)$ que corresponde a $\Phi(t)=\Phi^{(1)}\Phi^{(2)}$ está dada por la fórmula

$$R(z)=\frac{R^{(1)}(z)R^{(2)}(z)-\mid\ \beta\mid^2}{R^{(1)}(z)+R^{(2)}(z)-2\Re(\beta)}.$$

Si β es puramente imaginaria e igual a bi, la fórmula llega a dar

$$R(z) = \frac{R^{(1)}(z)R^{(2)}(z) - b^2}{R^{(1)}(z) + R^{(2)}(z)}.$$

Supongamos en particular que $T = \Phi(t)$ tuviera el origen por punto doble; $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ siendo holomorfa en el origen, e igual en módulo a la unidad para $\mid t \mid = 1$, será más pequeña, en módulo, que la unidad para $\mid t \mid < 1$. Entonces $\Psi(t) = \dfrac{\Phi(t)}{t}$ deja Γ invariante. Tomemos $\Phi^{(1)}(t) = \Psi(t)$ y $\Phi^{(2)}(t) = t$; les corresponden las funciones $R^{(1)}(z) = \lambda(z)$ y $R^{(2)}(z) = z$. Tenemos entonces

$$R(z) = \frac{z\lambda(z) - b^2}{z + \lambda(z)}.$$

Vamos a deducir de esta fórmula una consecuencia importante a saber que $\mid \Phi'(t) \mid$ es superior a la unidad sobre la circunferencia Γ. Tenemos en efecto

$$\Phi'(t) = R'(z) \left[\frac{z + bi}{R(z) + bi} \right]^2.$$

Encontramos para $R'(z)$ la expresión

$$R'(z) = \frac{\lambda'(z)(z^2 + b^2) + b^2 + \lambda^2(z)}{[z + \lambda(z)]^2}$$

Reemplazando $R(z)$ y $R'(z)$ por sus valores en función de $\lambda(z)$ en la expresión de $\Phi'(t)$, encontramos después de algunas reducciones

$$\Phi'(t) = \frac{\lambda'(z)(z^2 + b^2) + \lambda^2(z) + b^2}{[\lambda(z) + bi]^2}.$$

Para $\mid t \mid = 1$, z es real al igual que $\lambda(z)$; tenemos entonces

$$\mid \Phi'(t) \mid = 1 + \lambda'(z) \frac{z^2 + b^2}{\lambda^2(z) + b^2}.$$

Conocemos la expresión de $\lambda(z)$:

$$\lambda(z) = kz + h - \sum \frac{A}{z - a} \qquad (k, A, > 0)$$

entonces

$$\lambda'(z) = k + \sum \frac{A}{(z-a)^2}$$

$\lambda'(z)$ es entonces positiva para z real. La expresión de $\mid \Phi'(t) \mid$ muestra entonces que $\mid \Phi'(t) \mid \geq 1$. Se afirma que jamás tendremos $\mid \Phi'(t) \mid = 1$. Para ello faltaría que z ó $\lambda(z)$ llegarán a ser infinitas. Ahora bien, cuando z llega a coincidir con un polo a, encontramos que el valor límite de $\Phi'(t)$ es igual a $1+\dfrac{a^2+b^2}{A} > 1$. Para $z = \infty$, obtenemos el valor límite $1 + \frac{1}{K}$ si K no es nulo, y $1+ \sum \dfrac{A}{b^2+h^2}$ si $K = 0$.

Entonces siempre tenemos

$$\mid \Phi'(t) \mid > C > 1 \quad \text{para} \quad \mid t \mid = 1.$$

20. Las consideraciones anteriores permiten resolver el problema límite de la iteración, es decir encontrar el conjunto obtenido de los consecuentes de un punto, por la substitución de las diversas especies que hemos considerado.

Consideremos primero una substitución de primer tipo y de primera especie. La cual admite dos puntos dobles atractores que supondremos están, como antes, en el origen y en el punto en el infinito, el círculo Γ siendo $\mid t \mid \leq 1$.

Sea $Z = R(z)$ esta substitución. Se tiene que los consecuentes de todo punto situado en el círculo γ concéntrico a Γ de radio más pequeño tienden uniformemente a cero. En efecto, el módulo máximo para $\mid z \mid = \rho$ de $\dfrac{R(z)}{z}$ siendo una función creciente cuando ρ varía de 0 a 1 para $\mid z \mid = 1$, tenemos uniformemente

$$\mid R(z) \mid < c \mid z \mid \qquad (0 <\mid c \mid < 1)$$

en γ. Los consecuentes de un punto de γ permanecen en γ y tenemos

$$\mid z_n \mid < c^n \mid z \mid, \qquad \lim z_n = 0$$

uniformemente en γ. Igual, en el exterior de todo círculo de radio más grande que 1, z_n tiende uniformemente hacia el infinito.

Inversamente, dado un conjunto cerrado cualquiera K los antecedentes de todo punto de E tienden uniformemente hacia la circunferencia, suponiendo que E no contiene los puntos dobles 0 e ∞. Pues, si fuera de otra manera, habría antecedentes de diversos puntos de E de rango indefinidamente creciente, exteriores a la corona $(1-a, 1+a)$ e interiores, por ejemplo, al círculo Γ. Sean $z', z'', \dots$ estos antecedentes, tendríamos entonces:

$$\begin{array}{rcl} R_{n_1}(z') & = & \xi', \\ R_{n_2}(z'') & = & \xi'', \\ & \vdots & \\ R_{n_p}[z^{(p)}] & = & \xi^{(p)}. \end{array}$$

Pero siendo $\mid z^{(p)} \mid$ para p suficientemente grande $< 1-a$, implica que $R_{n_p}(z) < C^{n_p} \mid 1-a \mid$, $(C < 1)$, cantidad que tiende hacia cero con $\dfrac{1}{n_p}$; o los ξ siendo puntos de E, tenemos por hipótesis

$$\mid \xi^{(p)} \mid > K > 0;$$

con lo que tenemos una contradicción.

Podemos precisar más la manera en que los antecedentes de un punto se aproximan a la circunferencia.

Consideremos la circunferencia γ de centro 0 y de radio $\rho < 1$. Se cumple que si ρ es suficientemente cercano a 1, las diferentes ramas de $R_1(z)$ se permutan circularmente cuando z describe γ. Supongamos a r superior en módulo a todas las raíces de $R(z) = 0$, y sea γ_{-1} la curva (comprendida entre γ y Γ) descrita por una determinación de $R_{-1}(z)$ cuando z describe a γ; γ_{-1} se cierra cuando z describe v veces γ; recíprocamente, si z describe γ_{-1} una sola vez, $R(z)$ describe v veces γ en el sentido directo, su argumento aumenta en $2z\pi$ el cual debe representar el número de ceros de $R(z)$ comprendida en el interior de γ_{-1}, multiplicada por 2π. Entonces este número es al menos 1 (ya que $v \geq 1$); entonces γ_{-1}, rodea el origen y, por consecuencia, ya que es exterior a γ, todos los puntos raíces de $R(z) = 0$. Tenemos $v = d$, grado de $R(z)$, y las d ramas de $R_{-1}(z)$ se permutan circularmente cuando z describe γ; esto subsiste cuando deformamos γ sin atravesar los puntos críticos de $R_{-1}(z)$.

Consideremos entonces la corona (γ, Γ) que no contiene punto crítico alguno de $R_{-1}(z)$, ni por consecuencia de $R_{-n}(z)$, y tracemos un corte, por ejemplo, siguiendo un radio; los $R_{-n}(z)$ llegan a ser uniformes en el dominio así obtenido δ. Los antecedentes δ_{-1} del dominio δ son cuadriláteros curvilineos yuxtapuestos en la corona comprendida entre γ_{-1} y Γ; los antecedentes δ_{-2} del dominio δ, es decir los antecedentes inmediatos de los δ_{-1}, son cuadrilateros curvilíneos yuxtapuestos en la corona comprendida entre γ_{-2} y Γ y así sucesivamente, las curvas $\gamma_{-1}, \gamma_{-2}, \ldots, \gamma_{-n}, \ldots$ desarrollandose mutuamente y tendiendo hacia Γ. Se afirma que las dimensiones lineales de las δ tienden hacia cero junto con $\frac{1}{n}$; ya que la diferencial del arco del contorno de δ_{-n} está designada por $d\sigma_{-n}$ tenemos para un delta δ_{-n} y un $\delta_{-(n-1)}$ convenientemente asociados

$$d\sigma_{-(n-1)} = \mid R'(z) \mid d\sigma_{-n},$$

siendo z un punto de σ_{-n}. Pero hemos demostrado en el parágrafo anterior que $\mid R'(z) \mid > K > 1$ sobre Γ y, por consecuencia, en una corona alrededor de Γ. Como las curvas γ_{-n} tienden hacia Γ, tendremos para $n > n'$

$$d\sigma_{-n} < \frac{1}{K} d\sigma_{-(n-1)},$$

la misma relación aplicandose a las longitudes finitas de los contornos de δ_{-n} y δ_{-n-1}; estas longitudes decrecen entonces como los términos de una progresión geométrica convergente y tienden cero. En particular, los lados de los cuadriláteros δ_{-n} yuxtapuestos sobre la circunferencia tendiendo a cero cuando su número d^n crece indefinidamente tendrán por puntos límites todos los puntos de la circunferencia; sucederá lo mismo para los dominios superficiales δ_{-n}. Si tomamos un punto m sobre la circunferencia, en la parte de Γ comprendida en un círculo de centro m y de radio ϵ arbitrariamente pequẽno, habrá un dominio δ_{-n}; para n suficientemente grande.

Los mismos fenómenos se producen para el exterior del círculo en razón de la simetría con relación al círculo. Entonces el n-ésimo consecuente de un dominio circular de radio tan pequeño como lo queramos, teniendo su centro en un punto cualquiera de la circunferencia Γ, cubrirá para un valor finito de n toda una corona de grosor finito rodeando Γ. Pero los consecuentes de orden p de esta corona recubrirán todo el plano para un valor finito de p, excepto quizá el entorno de los dos puntos dobles 0 e ∞, esta última excepción produciendose solamente si estos puntos no tienen más antecedente que ellos mismos, es decir son puntos excepcionales de los cuales hemos hablado en el Capítulo I; esto no tendrá lugar mas que para $R(z) = Az^d$. De lo que se puede concluir:

1^0 *El consecuente de orden n de un dominio arbitrariamente pequeño rodeando un punto de la circunferencia cubrirá todo el plano para un valor finito de* n (excepto, en el caso donde $R(z) = Az^d$, el interior de un círculo de radio arbitrariamente pequeño y el exterior de un círculo arbitrariamente grande de centro 0);

2^0 *El consecuente de orden n de un arco tan pequeño como se quiera de la circunferencia la recubrirá completamente para un valor finito de n.*

Así el conjunto derivado de los antecedentes de un punto cualquiera del plano (salvo los dos puntos excepcionales, si existen) está formado por toda la circunferencia.

Conocemos entonces el conjunto derivado de los antecedentes y de los consecuentes de un punto del plano de una manera muy precisa, salvo él de los consecuentes de un punto de la circunferencia; la búsqueda del conjunto derivado de los consecuentes de un punto de Γ es un problema de naturaleza aritmética que se relaciona a la aproximación de los inconmensurables y que no buscaremos a profundidad aquí. Solamente mostraremos, sobre ejemplos, cuales son las principales circunstancias que pueden presentarse.

Consideremos entonces los consecuentes de un punto m de Γ; estos puntos son todos distintos a menos que m sea el antecedente de un punto doble o periódico; tales antecedentes son densos sobre Γ y para cada uno de ellos el conjunto E' derivado de los consecuentes de m puede ser visto como formado por los puntos de un ciclo, o como no conteniendo ningún punto, según veamos, formando parte o no de E' los puntos donde son iguales una infinidad de consecuentes. Éste es en general el primer punto de vista que parece ser el más natural de adoptar.

Voy a demostrar que los mismos puntos periódicos son densos sobre Γ. En efecto, siendo σ un arco cualquiera de Γ, existe una rama de la función $R_{-h}(z)$, para h suficientemente grande, que da como imagen de σ el arco σ_{-h}, completamente interior a σ cuando transformamos por R_{-h} el arco σ y el arco σ_{-h}, que ahí está contenido, obtenemos como imagen de σ_{-h} un arco σ_{-2h} interior a σ_{-h}; el arco σ_{-2h} tendrá en su contorno una transformada σ_{-3h} y así sucesivamente; los arcos σ_{-nh} encajados los unos en los otros y de longitudes tendiendo a cero como los términos de una progresión geométrica convergente tienden hacia un punto ξ; como siempre se tiene simbólicamente

$$\sigma_{(n-1)h} = R_h(\sigma_{-nh}),$$

se tiene también

$$\xi = R_h(\xi).$$

El punto ξ forma parte entonces de un ciclo cuyo orden es un divisor de h; con el arco σ siendo arbitrario, vemos que todo punto de Γ es punto periódico o límite de puntos periódicos; siempre es límite de puntos periódicos y de periodo indefinidamente creciente ya que no hay un número finito de tales puntos cuyo periodo no sobrepase un número dado.

Podemos señalar que aquí siempre hay puntos de periodo n cualquiera que sea n; en efecto, como no hay puntos periódicos cuyo multiplicador sea de la forma $e^{\frac{2pi\pi}{q}}$, el caso de excepción examinado en el parágrafo 3 no se presenta y las ecuaciones $R_n(z) = z$ no tienen más que raíces simples. El número $P(n)$ de los puntos periódicos de orden n se obtienen entonces haciendo la inversión de la fórmula

$$\sum_{\delta/n} P(n) = d^n + 1,$$

donde la sumatoria es extendida a los divisores[2] δ de n ; de lo que obtenemos, como sabemos,

$$P(n) = \sum_{\delta/n} \mu(\delta) \left[d^{\frac{n}{\delta}} + 1 \right] = \sum_{\delta/n} \mu(\delta) d^{\frac{n}{\delta}}$$

donde $\mu(\delta)$ es la función aritmética bien conocida igual a ± 1 o a 0, según si δ es un producto de un número par o impar de factores primos distintos o divisible por un cuadrado; tenemos, además, $\mu(1) = 1$. Obtenemos así:

$$P(n) = \sum \mu(\delta) d^{\frac{n}{\delta}} \equiv 0 \pmod{n},$$

siendo $\dfrac{P(n)}{n}$ el número de los ciclos de orden n. Esta propiedad aritmética se relaciona a los teoremas de Fermat y de Euler.

Tenemos entonces en todo arco de Γ una infinidad numerable de puntos periódicos para los cuales por consiguiente E' se reduce a un número finito de puntos.

Vamos a mostrar que podemos encontrar igualmente en todo arco de Γ puntos para los cuales E' está formado por la circunferencia completa. Consideremos una infinidad numerable de arcos de Γ sea $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$ que escribiremos en el siguiente orden, tal que cada uno de ellos figure una infinidad de veces:

$$\sigma,\ \sigma',\ \sigma,\ \sigma',\ \sigma'',\ \sigma,\ \sigma',\ \sigma'',\ \sigma''',\ \sigma,\ \sigma',\ \ldots.$$

Hay un antecedente de σ contenido en σ': sea σ_{-a_1} el primer arco que satisface esta condición; hay un antecedente de σ_{-a_1} contenido en σ, sea σ_{-a_2}; de igual

[2] en el original el índice de la sumatoria en el segundo miembro está expresada como fracción $\frac{\delta}{n}$

manera hay un antecedente de σ_{-a_2} contenido en σ', sea σ_{-a_3}; un antecedente de σ_{-a_3} en σ'', sea σ_{-a_4}; elegiremos enseguida un antecedente de σ_{-a_4} no solamente interior a σ, sino también interior a σ_{-a_2} que ha sido ya introducido en σ y así sucesivamente. Formamos entonces la tabla siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\sigma & \sigma' & \sigma & \sigma' & \sigma'' & \sigma & \sigma' & \sigma'' & \sigma''' & \sigma & \ldots \\
 & & X & & & X & & & & X & \\
 & \sigma_{-a_1} & \sigma_{-a_2} & \sigma_{-a_3} & \sigma_{-a_4} & \sigma_{-a_5} & \sigma_{-a_6} & \sigma_{-a_7} & \sigma_{-a_8} & \sigma_{-a_9} & \ldots
\end{array}$$

en la cual los términos de la segunda línea designan arcos interiores a aquellos que están inscritos encima; además, aquellos σ_{-a_n} que están inscritos abajo de σ se encajan unos en otros; finalmente, cada uno de los σ_{-a_n} es un consecuente de todos aquellos que están inscritos a su derecha.

Los arcos

$$\sigma, \quad \sigma_{-a_2}, \quad \sigma_{-a_5}, \quad \sigma_{-a_9}, \quad \ldots, \quad \sigma_{-a_{\frac{n(n+1)}{2}-1}}, \quad \ldots,$$

encajados unos en otros y tendiendo a cero, tienen un punto límite ξ interior a cada uno de ellos. ξ tiene entonces consecuentes de rango tan elevado como queramos, contenido en $\sigma^{(K)}$ cualquiera que sea K.

Hay así puntos de E' en $\sigma, \sigma', \sigma'', \ldots$; si estos arcos han sido elegidos de manera que hubiera una infinidad que fueran completamente exteriores unos de otros, E' contendría una infinidad de puntos.

Para fijar las ideas, consideremos la infinidad numerable de los arcos que tienen por término medio los puntos de argumento $2\pi\dfrac{p}{q}$ y de longitud $\dfrac{1}{q}$, tomando todos los pares de enteros p y q tales que $p < q$, no primos entre ellos; habrá puntos de E' en todos los arcos que tienen por mitad un punto dado $2\pi\dfrac{p}{q}$ y una longitud $\dfrac{1}{Nq}$ $(N = 1, 2, 3, \ldots)$; este punto es entonces de E' o límite de puntos de E'; pues bien es E' el cual es cerrado y comprende así toda la circunferencia ya que encierra todos los puntos de argumento comensurable a 2π.

Así E' puede comprender toda la circunferencia o estar formado de un número finito de puntos. Pueden producirse casos intermedios; pero es conveniente señalar que E' siendo un conjunto invariante que comprende los consecuentes de todos sus puntos comprenderá toda la circunferencia si comprende un arco tan pequeño como queramos. Si lo anterior no tiene lugar, E' es por todas partes, discontinuo. Vamos a mostrar sobre un ejemplo que E' puede ser un conjunto perfecto discontinuo. Consideremos la substitución $Z = z^3$, y un punto z_0 de argumento Θ_0 sobre la circunferencia Γ tal que $\frac{\Theta_0}{2\pi}$ se escribe en el sistema de numeración de base 3 no empleando más que las cifras 0 y 2; $\frac{\Theta_0}{2\pi}$ pertenece entonces al conjunto perfecto P, ejemplo clásico debido a Cantor de un conjunto perfecto que no es denso en ningún intervalo. Los valores de $\frac{\Theta_0}{2\pi}$ correspondiendo a los consecuentes del punto de z_0 se obtienen desplazando la *coma* hacia la derecha y, anulando la parte entera en el desarrollo que corresponde al punto inicial; los números obtenidos pertenecen siempre a P. Llamemos Π al conjunto perfecto de puntos de la circunferencia que corresponde a P; los puntos de E siendo de Π, al igual que los puntos de E' ya que Π es perfecto. Podemos elegir Θ de manera que E' sea idéntica a Π. Consideremos los números que se escriben empleando solamente las cifras 0 y 2 un número finito de veces y son ordenados en una serie lineal tal que cada uno de ellos figure una infinidad de veces: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$. Basta establecer

$$\frac{\Theta_0}{2\pi} = 0, \qquad (\alpha)0(\beta)00(\gamma)000(\delta)0000(\varepsilon), \ldots,$$

llamando a $(\alpha), (\beta), (\gamma), \cdots$ las series de cifras en número limitado que pertenecen respectivamente a la expresiónes de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ en el sistema de base 3; intercalemos un número creciente de ceros entre estos grupos de cifras. Vemos, fácilmente que para esta elección los consecuentes de z_0 tendrán por límites todas los extremos de arcos contiguos a Π correspondiendo a los números $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; como todo punto de π es límite de estos últimos puntos, tendremos $E' = \Pi$.

Podemos formar de una manera análoga ejemplos donde E' es un conjunto reducible. Pero Π resulta de lo que hemos visto en el parágrafo 15 que un conjunto cerrado y además invariante para la substitución dada sobre la circunferencia, este conjunto no será en general el derivado de los consecuentes de un punto; ya que el conjunto formado por dos puntos dobles distintos es un conjunto cerrado e invariante y sabemos que si un conjunto E' encierrra estos dos puntos, encierra una infinidad del resto.

Bastan estos ejemplos para mostrar que el estudio del conjunto E' es un problema de naturaleza aritmética al cual podríamos aplicar los métodos de Borel-Lebesgue para la medida de los conjuntos, y que reclaman de nuevas investigaciones; pero en todos los casos hemos probado superabundantemente que los puntos límites de los consecuentes de un punto s de la circunferencia son funciones discontinuas de z en cada punto de ésta.

21. Pasamos ahora al estudio de las substituciones de primer tipo y de segunda especie. Estando confinado el punto doble atractor al infinito, podemos establecer

$$R(z) = kz + h - \sum \frac{A}{z-a} \qquad (A > 0,\ k > 1),$$

de donde

$$R'(z) = k + \sum \frac{A}{(z-a)^2}.$$

Tenemos entonces sobre el eje real

$$R'(k) > k > 1.$$

Estableciendo

$$Z = R(z) = X + iY,$$

tenemos

$$\begin{cases} X = kx + h - \sum \frac{A(x-a)}{(x-a)^2+y^2} \\ Y = ky + \sum \frac{Ay}{(x-a)^2+y^2}. \end{cases}$$

Tenemos constantemente

$$\mid Y \mid > k \mid y \mid, \quad \mid y_n \mid > k^n \mid y \mid,$$

de donde resulta que $\lim y_n = \infty$ uniformemente para $y > y_0 > 0$. Tenemos, además,

$$\mid X \mid > k' \mid x \mid \qquad (k' > 1)$$

cuando $\mid x \mid$ sobrepasa P. Consideremos, por ejemplo, un rectángulo teniendo por centro el origen con lados paralelos a los ejes y de longitudes $2P$ y 2η, siendo η elegida de manera que tuvieramos en este rectángulo

$$\mid R'(z) \mid > k' > 1,$$

lo que es imposible para η suficientemente pequeña ya que $R'(z) > k$ sobre el eje real.

En toda la región $\mathcal{D}$ del plano exterior al rectángulo y sobre el contorno, tenemos

$$\begin{cases} \mid X \mid > k' \mid x \mid \\ \\ \mid Y \mid > k \mid y \mid \end{cases} \quad (k > 1, k' > 1),$$

de donde concluimos que el dominio $\mathcal{D}_1 = R(\mathcal{D})$ es interior a $\mathcal{D}$ y que los consecuentes z_n de un punto z de $\mathcal{D}$ tienden uniformemente hacia el infinito.

Podemos si así lo queremos, deformar el contorno del rectángulo de tal manera para obtener un contorno analítico C a la tangente continua sin que las dos propiedades anteriores dejen de ser exactas. Vemos además que los puntos críticos de $R_1(z)$ los cuales son los consecuentes inmediatos de los ceros de $R'(z)$ serán exteriores a C. Cuando z describe C, las d ramas de la función $R_1(z)$ vuelven a tomar cada una su valor inicial después de que z recorrido un contorno completo sobre C; las d curvas así descritas son interiores a C ya que los consecuentes de un punto de C o exterior a C son exteriores a C. Dichas curvas no se cortan a sí mismas ni entre ellas ya que las $R_1(z)$ son las inversas de una misma función uniforme además de que el mismo C es un contorno simple. Decimos que son exteriores las unas a las otras. Sea C_1 una de ellas correspondiendo a una rama de $R_1(z)$ que llamamos $f(z)$ y que es holomorfa en el interior y sobre el contorno de C; sean, además, z' un punto interior a C y $z'_{-1} = f(z')$. La variación del argumento $f(z) - f(z')$ será cero ó 2π según si z'_{-1} es exterior o interior a C_{-1}; o bien es diferente de cero ya que z' es un punto raíz de

$$f(z) - f(z') = 0.$$

Con lo que es entonces igual a 2π. Por lo tanto a un punto z' interior a C corresponde un punto z'_{-1} interior a C_{-1} y sólo uno, y viceversa. Hay aplicación conforme y biunívoca del interior de C_{-1} sobre el interior de C.

Lo mismo tiene lugar para las d curvas distintas $C_{-1}^{(1)}, C_{-1}^{(2)}, \ldots, C_{-1}^{(d)}$. Estas curvas son entonces exteriores unas de otras , pues si un punto ξ estuviera por ejemplo a la vez en el interior de $C_{-1}^{(1)}$ y sobre el contorno $C_{-1}^{(2)}$, tendríamos a la vez $R(\xi)$ interior a C y $R(\xi)$ sobre C.

Consideremos el interior de C con la curvas $C_{-1}^{(1)}, C_{-1}^{(2)}, C_{-1}^{(3)}$, (tomando por ejemplo $d = 3$) y haciendo de nuevo la aplicación de esta figura sobre $C_{-1}^{(1)}$, después sobre $C_{-1}^{(2)}$, después sobre $C_{-1}^{(3)}$. El interior de C siendo aplicable de una manera biunívoca sobre el interior de $C_{-1}^{(1)}$, a las tres curvas $C_{-1}^{(1)}, C_{-1}^{(2)}, C_{-1}^{(3)}$ corresponderán tres nuevas curvas interiores a $C_{-1}^{(1)}$ y al interior de las primeras curvas el interior de las segundas. Sean $C_{-2}^{(1)}, C_{-2}^{(2)}, C_{-2}^{(3)}$ estas tres nuevas curvas. Obtendremos de igual forma, con la aplicación de C sobre $C_{-1}^{(2)}$, las tres curvas $C_{-2}^{(4)}, C_{-2}^{(5)}, C_{-2}^{(6)}$ interiores a $C_{-1}^{(2)}$. Finalmente aplicando C sobre $C_{-1}^{(2)}$, obtenemos $C_{-2}^{(7)}, C_{-2}^{(8)}, C_{-2}^{(9)}$ interiores a $C_{-1}^{(3)}$. Las curvas C_{-2} limitan así nueve dominios acotados sin punto en común cuyo conjunto constituye la región antecedente de orden 2 del interior de C. De una manera general, el antecedente de orden k del interior de C estará formado por el interior de 3^k

curvas:

$$C_{-k}^{(1)} C_{-k}^{(2)} \dots C_{-k}^{(3^k)}$$

pudiendo distribuirse en 3^{k-1} grupos de tres curvas respectivamente interiores a las curvas de rango anterior y exteriores unas de otras. El dominio antecedente de $\mathcal{D}$ será el dominio complementario extendiendose hacia el infinito de una sola pieza y de orden de conexión 3^k.

En el caso que nos ocupa, todas estas curvas cortan el eje real en dos puntos ya que todos los antecedentes de un punto real son reales.

El dominio abierto de convergencia de las $R_{-n}(z)$ hacia el infinito es el conjunto de los puntos perteneciendo a todos los dominios

$$\mathcal{D}_{-n}(\mathcal{D}_{-1} < \mathcal{D}_{-2} < \cdots < \mathcal{D}_{-n})$$

que acabamos de definir. Comprende todo el plano salvo los puntos interiores a una infinidad de curvas C_{-n}; sea P este último conjunto. Decimos que es perfecto y por todas partes dicontinuo. Tenemos, en efecto, las curvas C_{-n} que son interiores a C:

$$\mid R'(z) \mid < k' < 1.$$

Entre los diferenciales de los arcos de una curva C_{-n} y de su consecuente inmediato que es una curva $C_{-(n-1)}$, tenemos la relación

$$d\sigma_{-(n-1)} = d\sigma_{-n} \mid R'(z) \mid \qquad (z \text{ sobre } C_{-n}),$$

de donde

$$d_{-n}\sigma < \frac{1}{k'} d_{-(n-1)}.$$

Entre las longitudes finitas de las curvas C_{-n} y $C_{-(n-1)}$, tenemos la misma relación:

$$l_{-n}, \frac{1}{k'} l_{-(n-1)},$$

de donde

$$l_{-n} < \frac{l_0}{k'^n}, \qquad \lim_{n=\infty} l_{-n} = 0.$$

Las longitudes de las curvas C_{-n} tienden hacia cero con $\frac{1}{n}$. Por otra parte, toda curva C_{-n} encierra curvas de rangos $n+1,\ n+2,\ n+3,\ \dots$ respectivamente, de las cuales cada una es interior a la anterior; existe entonces un punto interior común que pertenece a P.

Así los puntos de P pueden estar encerrados en el interior de un número finito de curvas, a saber las d^n curvas C_{-n} de las cuales cada una tiene una longitud tan pequeña como queramos para n suficientemente grande y que contiene todos o al menos uno de los puntos. De lo anterior se sigue que P es perfecto y discontinuo en cada punto. Primero P es cerrada, pues si ξ punto límite de los puntos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ de P no perteneciera a P, ξ sería para un cierto valor de n exterior a todas las curvas C_{-n}; siendo entonces h la distancia más corta de ξ a las curvas C_{-n} y los puntos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ siendo interiores a las C_{-n}, la distancia de ξ a $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sería mayor o igual a h; ξ no sería entonces punto límite de P. P es perfecto, pues estando α encerrada en una curva $C_{-n}^{(i)}$ y a su vez esta encerrando en su interior al menos dos curvas distintas y exteriores una de otra $C_{-(n+1)}$, α estará contenida igualmente en una de éstas últimas, sea $C'_{-(n+1)}$. Pero otra curva $C''_{-(n+1)}$ igualmente interior a $C_{-n}^{(i)}$ contiene al menos un punto β de P necesariamente distinto de α y la distancia $\alpha\beta$ es inferior al diámetro l de la curva $C_{-n}^{(i)}$ que es tan pequeña como queramos para n suficientemente grande. P es discontinua en cada punto, ya que si α y β son dos puntos de P, podemos encerrarlos en curvas C_{-n} cuyo diámetro sea inferior a la semi-distancia de $\alpha\beta$; α y β son entonces encerrados en dos curvas C_{-n} y C''_{-n} distintas y exteriores una de la otra y toda línea poligonal uniendo $\alpha\beta$ y teniendo por vértices puntos de P tendrá al menos un lado igual a la distancia más corta de una de las curvas C_{-n} en el conjunto P, o a la distancia más corta de dos curvas C_{-n}.

En el caso actual, al conjunto P pertenece por completo al eje real ya que todas las curvas C_{-n} cortan el eje real en dos puntos.

La elección es evidente *a priori* ya que hemos visto al inicio de este análisis que z_n tiende hacia el infinito cuando z es imaginaria y que el conjunto P es el conjunto de puntos para los cuales esta convergencia no tiene lugar. Habríamos podido servirnos de esta observación para construir el conjunto P. En efecto, consideremos la raíz más grande (real) λ de la ecuación $R(z) = z$, comprendida entre el último polo a hacia la derecha y $+\infty$, y de igual manera la más pequeña raíz μ comprendida entre el último polo a hacia la izquierda y $-\infty$, y veamos el conjunto de las dos semi-rectas $(\lambda, +\infty)$ y $(\mu, -\infty)$ como constituyendo un segmento único conteniendo el punto en el infinito. En este segmento, z_n converge hacia el infinito (excepto en los extremos). Pues, para $z = \lambda$, tenemos $z < z_1 < \cdots < z_n < \cdots, \lim_{n=\infty} z_n = +\infty$, y para $z < \mu, z > z_1 > z_2 \ldots > z_n \ldots$ (en valor algebráico) y

$$\lim_{n=\infty} z_n = +\infty.$$

Los puntos del eje real que pertenecen al dominio D_∞ de convergencia hacia el infinito son el segmento $\lambda\mu$ y sus antecedentes, extremos no comprendidos; tenemos así una infinidad numerable de intervalos sin puntos en común de dos a dos y sin extremos comunes, contiguos a un conjunto perfecto que es el conjunto P del cual probaremos fácilmente la discontinuidad. Pero el análisis anterior es preferible por que es aplicable a casos donde P no es lineal.

Consideremos un punto m de P y un círculo c de radio ε teniendo por centro m. Para un valor conveniente del entero n, el diámetro de las curvas C_{-n} será inferior a ε; el círculo c conteniendo m contendrá entonces un dominio $\mathcal{A}_(-n)$ acotado por una curva $C_{-n}^{(i)}$ y que es un antecedente de rango n del interior de $\mathcal{A}$ de la curva C. El n-ésimo consecuente del círculo c cubrirá entonces $\mathcal{A}$. Por otra parte, siendo $\mathcal{A}$ el complemento del dominio (abierto) $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}_p + \mathcal{D}_p$ recubre todo el plano; como $\mathcal{D}_p$ para p suficientemente grande es exterior a un círculo de radio tan grande como queramos, $\mathcal{A}_p$ cubrirá todo el plano excepto quizá el exterior de este círculo; pero $\mathcal{A}_p\mathcal{A}_1$ contiene $\mathcal{A}_{p'}$, si $p' < p$, y como $\mathcal{A}$ encierra un polo $R(z)$, contiene el exterior de un cierto círculo de centro O. Entonces $\mathcal{A}$ para p suficientemente grande cubre todo el plano. Como c_n cubre $\mathcal{A}$, c_{n+p} cubre todo el plano. Así:

El $n^{\text{ésimo}}$ consecuente de un dominio tan pequeño como lo queramos rodeando un punto de P cubre todo el plano para un valor finito de n.

Todo punto de P es así límite de los antecedentes de un punto cualquiera del plano. Veamos por otra parte inmediatamente que P contiene los consecuentes y antecedentes de todos sus puntos. Contiene también los puntos dobles y periódicos además de $z = \infty$. Aún podremos demostrar que P es límite de puntos periódicos; que contiene, puntos tales que el conjunto derivado de sus consecuentes sea idéntico a P, etc. No cabe insistir, pues encontraremos en el Capítulo siguiente (que será publicado posteriormente) teoremas más generales.

Es interesante saber si P es de medida lineal nula, esta propiedad interviene en el estudio de las funciones uniformes que admiten a P como conjunto de sus singularidades esenciales. Para que lo anterior tenga lugar basta que la suma de las longitudes de las curvas C_{-n} tienda a cero con $\dfrac{1}{n}$. Lo que sucederá siempre que tengamos $k > d$ [grado de $R(z)$], condición en absoluto necesaria. Además no alcanzé a reconocer si P puede ser de medida no nula.

En resumen, dada una substitución en el círculo fundamental de segunda especie, los consecuentes de un punto cualquiera del plano convergen hacia el punto doble atractor situado sobre la circunferencia, exceptuando los puntos de un conjunto perfecto P por todas partes discontinuo situado igualmente sobre la circunferencia; este conjunto que es invariante, goza de la propiedad de que cada uno de sus puntos es límite de los antecedentes de un punto cualquiera del plano. En todo dominio cerrado no conteniendo ningún punto en común con P, la convergencia es naturalmente uniforme.

22. Consideremos ahora el caso singular donde hay sobre la circunferencia un punto doble de multplicador igual a $+1$, contando por dos puntos dobles iguales. La substitución puede entonces llevarse a la forma

$$Z = R(z) = z + h - \sum \frac{A}{z-a},$$

donde las a son reales, las A positivas al igual que h si los ejes están convenientemente orientados. Tenemos entonces

$$X = x + h - \sum \frac{A}{(x-a)^2 + y^2}$$
$$Y = y + \sum \frac{A}{(x-a)^2 + y^2}$$

En todo dominio acotado no teniendo ningún punto en común con el eje real, z_n tiende uniformemente hacia el infinito. En efecto, tenemos para un punto fuera de este eje por ejemplo sobre:

$$y_{n+1} > y_n > \ldots, > y > 0,$$

y_n tiende hacia un límite finito o infinito. Si es finito, tenemos en virtud de la igualdad

$$y_{n+1} - y_n = y_n \sum \frac{A}{(x_n - a)^2 + n^2}$$

un límite infinito para x_n. Entonces en todos los casos, z_n tiende hacia el infinito; z_n se encuentra entonces, a partir de un cierto rango, en un dominio limitado por una paralela al eje imaginario y donde hay convergencia uniforme hacia el infinito (§ 8); estando z_p en el interior de un dominio de convergencia uniforme, lo mismo ocurre para z; y sabemos que una serie de funciones que converge uniformemente en todos los puntos de un dominio, es decir en dominios parciales rodeando cada punto, converge uniformemente en todo el dominio.

Hay entonces convergencia uniforme en toda parte acotada de un dominio definido por $y > t_0 > 0$ ó $y < -y_0 < 0$. Sabemos que también hay convergencia en todo dominio cerrado definido por $x \geq x_0$ para x_0 suficientemente grande. Podríamos considerar el dominio de los puntos para los cuales tenemos una de estas tres desigualdades y buscar sus antecedentes sucesivos como en el parágrafo anterior. Nos conformaremos con examinar lo que sucede sobre el eje real. Sea λ el último punto doble a distancia finita a la derecha de los polos a, las z_n convergen hacia el infinito cuando z es interior al segmento $(\lambda, +\infty)$, y recíprocamente los consecuentes de todo punto z tal que z_n tienda hacia el infinito se encuentran a partir de un cierto rango en el interior de este segmento, a excepción de los antecedentes del punto en el infinito. El conjunto de los puntos z del eje real para los cuales hay convergencia uniforme para las $R_n(z)$ hacia el infinito es el conjunto de los puntos interiores al segmento $(\lambda, +\infty)$ y a todos sus antecedentes. Estos segmentos todos descritos en el mismo sentido [ya que $R'(z)$ es positiva para z real] entonces no tienen puntos en común de dos en dos y ni extremos comunes; son contiguos a un conjunto perfecto P. Decimos que P es no denso, es decir que todo segmento conteniendo en su interior un punto de P encierra antecedentes de puntos de σ. En efecto, si z es un punto de P que no sea un antecedente del punto en el infinito, sus consecuentes serán interiores una infinidad de veces a un segmento acotado, por ejemplo aquel que tiene por extremos el polo a el más a la izquierda y el punto doble λ. Pues si z está a la izquierda de las a, tenemos

$$z_1 - z = R(z) - z = h - \sum \frac{A}{z-a} > 0 \quad (z < z_1),$$

y si todas las z_n permanecieran a la izquierda de las a, tenderían hacia un único punto límite b tal que $b = R(b)$, es decir hacia un punto doble y no a la izquierda de las A. Entonces el último polo hacia la izquierda a' será rebasado y tendremos un z_p interior al segmento precipitado, ya que z_p no puede rebasar a λ, extremo del segmento de convergencia σ.

Dicho lo anterior, tenemos

$$R'(z) = 1 + \sum \frac{A}{(z-a)^2}.$$

Entonces $R'(z) > 1$ para z real y $R'(z) > k > 1$ en todo segmento acotado.

Sea entonces s un segmento conteniendo el punto z. Si los segmentos consecuentes $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ fueran constantemente exteriores a σ, jamás contendrían polos a y serían todos descritos en el mismo sentido, α_n y β_n extremos de izquierda y de derecha de s_n; siendo los consecuentes respectivos de α y de β, extremos de izquierda y de derecha de s; las longitudes de los segmentos s_n creciendo constantemente debido a que $R'(z) > 1$; además, α_n siendo una infinidad de veces interior a un segmento acotado (a', λ) y β_n no rebasando λ, tendremos una infinidad de veces

$$\text{longitud } s_{n+1} > k \text{ longitudes } s_n \qquad (k > 1),$$

ya que s_n está completamente en el segmento (a', λ) para estos valores de n. Se sigue que la longitud del segmento s_n crecería indefinidamente y sobrepasaría por consiguiente la del segmento (a', λ). Hay una contradicción. Debemos entonces suponer que los s_n invaden a partir de un cierto rango el segmento σ. P es no denso y cada uno de sus puntos es límite de segmentos contiguos, antecedentes de σ. Igual demostraremos sin dificultad que los consecuentes de un segmento conteniendo un punto de P cubren cada uno todo el eje real a partir de un rango finito; de lo que se sigue que cada punto de P es límite de antecedentes de un punto cualquiera del eje real. Aún es verdad que cada punto de P es límite de antecedentes de un punto cualquiera del plano, pero dejaremos esta demostración de lado por el momento. Podemos decir en resumen que dada una substitución del círculo fundamental Γ teniendo sobre la circunferencia un punto doble α para el cual $R(\alpha) = +1,\ R''(\alpha) \neq 0$ el dominio de convergencia uniforme de las substituciones iteradas hacia α comprende todo el plano salvo los puntos de un conjunto perfecto no denso de puntos de la circunferencia la cual forma la frontera de este dominio y contiene el mismo punto α. Consideremos ahora el caso donde tenemos un punto doble α con

$$R'(\alpha) = +1, \qquad R''(\alpha) = 0.$$

La substitucion se lleva entonces a la forma

$$R(z) = z - \sum \frac{A}{z - a} \qquad (A > 0),$$

la constante h en todo momento siendo nula. Las fórmulas

$$X = x - \sum \frac{A(x-a)}{(x-a)^2 + y^2}$$
$$Y = y \left[1 + \sum \frac{A}{(x-a)^2 + y^2}\right]$$

permiten establecer como anteriormente que $\lim z_n = \infty$ cuando z es exterior al eje real y también uniformemente en toda parte acotada del semi-plano superior o del semi-plano inferior; pero estos dos dominios de convergencia son distintos y las z_n no pueden converger uniformemente en ningún dominio encerrando en su interior un punto del eje real. Lo anterior resulta de lo que ha sido dicho en el Capítulo II (§ 11). Lo verificamos aquí señalando que si z es real tenemos $z_1 < z$ si z está a la derecha de las a y $z_1 > z$ (en valor algebráico) si z está a la izquierda de las a, por consiguiente $| z_{n+1} | < | z_n |$, cuando $| z_n |$ es suficientemente grande; z_n solamente puede entonces tender hacia el infinito si z es uno de los antecedentes (en infinidad numerable) del punto en el infinito. Dejaremos de lado aquí la demostración del hecho de que los consecuentes de un segmento del eje real terminen por recubrirlo completamente, la demostración es análoga a aquella del parágrafo anterior.

Vemos que las substituciones de este género son un caso límite de aquellas de segunda especie, los dos puntos dobles atractores siendo iguales a uno situado sobre la circunferencia; los llamaremos entonces substituciones singulares de primera especie. Al contrario de aquellas examinadas anteriormente $[R'(\alpha) = +1, R''(\alpha) = 0]$ deben ser vistas como substituciones singulares de segunda especie.

Finalmente, la extensión de los resultados obtenidos en las substituciones de segundo tipo, aquellas que permutan entre si el interior y el exterior de un círculo, es demasiado simple para insistir.

Señalemos que lo que ha sido dicho en el Capítulo I (§ 6) a propósito de los dominios invariantes encuentra aquí su aplicación, que especialmente el interior y el exterior del círculo fundamental quienes constituyen dos dominios completamente invariantes encierran cada uno la mitad de los puntos críticos de la función inversa.

23. Vamos a mostrar ahora que los métodos utilizados para estudiar las substituciones teniendo un círculo fundamental se aplican a un gran número de casos. Consideremos por ejemplo la substitución (§ l5):

$$Z = z^2 + 5$$

Hemos señalado que dicha substitución admite el único punto doble atractor $z = \infty$, siendo el resto de los puntos dobles o periódicos repulsivos. Por otra parte, los z_n convergen uniformemente hacia el infinito en el dominio definido por $| z | > 4$ este dominio encierra su consecuente y contiene por otra parte los dos puntos críticos de la función inversa

$$R_{-1} = \sqrt{z - 5}$$

que son el punto en el infinito y el punto $z = 5$. De lo que resulta que el análisis del parágrafo 21 es aplicable aquí. El dominio de convergencia hacia el infinito, que es el dominio límite de los antecedentes del dominio inicial comprende todo el plano salvo los puntos interiores a una infinidad de curvas C_{-n}, idénticas desde el punto de vista del *Analysis situs* a aquellas examinadas en este parágrafo. Las dimensiones de estas curvas tienden aún hacia cero, pues tendremos sobre cada una de ellas a partir de un cierto rango

$$\mid R'(z) \mid > k > 1.$$

Podemos tomar aquí $k = 2$. En efecto, $R'(z) = 2z$ y, para $\mid z \mid \leq 1$, $R(z) \geq 4$. El dominio antecedente de rango 1 del dominio inicial $\mathcal{D}$ comprende entonces el dominio $\mid R(z) \mid \geq 2$ sobre las curvas C_n tendremos por lo tanto a partir de $n = 2$

$$\mid R'(z) \mid > k > 2.$$

De lo que resulta que no solamente las longitudes de las curvas l_{-n} tienden hacia cero, sino que la suma de sus longitudes puede hacerse tan pequeña como se quiera para un valor conveniente de n. El conjunto perfecto P de los puntos que son interiores a una infinidad de curvas C_{-n} aquí es entonces no solamente discontinuo, sino de longitud nula. Vemos aquí que P no está sobre una curva simple, pues contiene dos puntos dobles $\alpha = -\dfrac{1 \pm i\sqrt{19}}{2}$ cuyos multiplicadores son imaginarios: $s = 2\alpha = 1 \pm i\sqrt{19}$; P siendo perfecto encierra puntos β cercanos a α; si calculamos los antecedentes de β por medio de la rama de la función inversa $\sqrt{z-5}$ igual a α para $z = \alpha$, estos antecedentes tienden a α agrupandose sobre una curva en espiral teniendo a α por punto asíntoto, de manera que el argumento de $\beta_{-n} - \alpha$ tuviera más de dos valores límites distintos. Ninguna curva pasando en α y conteniendo los puntos de P puede entonces tener una tangente única. Transformando la configuración obtenida alrededor de α, para las substituciones $Z = R_{-n}(z)$ obtenemos configuraciones análogas en torno de los antecedentes de α que son densos sobre P.

Obtenemos resultados semejantes sobre numerosos ejemplos de polinomios, por ejemplo de la forma $z^m + a$, si $\mid a \mid$ es suficientemente grande.

Ahora aquí están ejemplos en los cuales $R(z)$ no es un polinomio. Basta tomar $R(z) = \dfrac{z}{z^m + 2}$ $(m \geq 2)$. Para $m = 2$, tenemos una substitución en el círculo fundamental ya estudiada. No sucede así para $m > 2$. En efecto, tenemos el punto doble atractor $z = 0$, y los puntos dobles definidos para

$z^m = -1$, situados sobre la circunferencia $\mid z \mid = 1$, y que son repulsores, pues

$$R'(z) = \frac{2-(m-1)z^m}{(z^m+2)^2},$$

y toma el valor $m+1$ para $z = (-1)^{\frac{1}{m}}$. Si hubiera un círculo fundamental, este sería el círculo $\mid z \mid \leq 1$ y debería tener un punto doble en el infinito conjugado de $z = 0$, lo cual no sucede.

Los consecuentes de un punto z convergen hacia cero para $\mid z \mid < 1$ y uniformemente en todo círculo de radio < 1. Pues, para que $\mid R(z) \mid$ sea inferior a $\mid z \mid$, basta que $\mid z^m + 2 \mid$ sea > 1, entonces $\mid z \mid < 1$. Para $\mid z \mid < r < 1$, tendremos $\mid R(z) \mid < k \mid z \mid \quad (k < 1)$. Los puntos críticos de la función $R_{-1}(z)$ son por una parte el punto en el infinito, pues para $Z = 0$, la ecuación $\dfrac{z}{z^m+2} = Z$ admite una raíz nula y $m-1$ raíces infinitas; por otra parte, los puntos que se obtienen haciendo $R'(\zeta) = 0, c = R(\zeta)$. Tenemos así

$$\zeta^m = \frac{2}{m-1}, \quad \mid c \mid = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}} \qquad (\mid c \mid < 1).$$

Consideremos un círculo de radio apenas inferior a 1 conteniendo en su interior los puntos c. Sea Γ este círculo; busquemos cual será el dominio antecedente inmediato o todo o al menos la parte de este dominio que es de una sola pieza con el origen y que comprende por consiguiente Γ en su interior; la cual comprenderá la parte positiva del eje real, pues cuando z varía de 0 a $+\infty$, $R(z)$ varía de 0 a 0 pasando por un máximo igual a $\mid c \mid$ para $z = \left(\dfrac{2}{m-1}\right)^{\frac{1}{m}}$, entonces interior a Γ. Dado lo anterior, consideremos el dominio acotado por la circunferencia Γ de la cual hemos extraído un arco en la vecindad de $z = 1$; dos paralelas al eje real de una y otra parte de este eje que trazaremos hasta la circunferencia $\mid z \mid = 2$ y que asumiremos suficientemente próximas para que la banda así obtenida a la derecha de Γ tenga su consecuente interior a Γ, finalmente, la circunferencia $\mid z \mid = 2$, suprimiendo el arco comprendido entre las dos paralelas. Tenemos así un contorno simple C dividiendo el plano en dos regiones simplemente conexas: una región no acotada (que es una parte del antecedente inmediato del interior de Γ) comprendiendo los puntos críticos de $R_{-1}(z)$, y teniendo como consecuente inmediato una región que le es completamente interior; por otra parte una región interior a C donde todas las funciones $R_{-n}(z)$ son holomorfas. El exterior de C es un dominio de convergencia uniforme hacia el punto atractor

$z = 0$. Nos encontramos así en las condiciones de la aplicación del parágrafo 21. Decimos que tendremos sobre las curvas C_{-n} a partir de un cierto rango

$$\mid R'(z) \mid > K > 1.$$

En efecto, podemos escribir

$$R'(z) = -\left[(m-1) - \frac{2}{z^m}\right] R^2(z) z^{m-2}.$$

Supongamos que hubieramos tomado el radio del círculo Γ rigurosamente igual a 1. Si z está sobre la curva $C_{-n}(n \geq 1)$, debemos suponer el argumento de z^m comprendido entre $+\frac{\pi}{2}$ y $+3\frac{\pi}{2}$ (extremos excluidos), si no tendríamos

$$\mid 2 + z^m \mid \geq \sqrt{5}, \qquad R(z) \leq \frac{z}{\sqrt{5}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}} < 1,$$

y z_1 sería interior a C

El argumento de $-\dfrac{2}{z^m}$ está entonces comprendido entre $-\dfrac{\pi}{2}$ y $+\dfrac{\pi}{2}$ y tenemos

$$\left|(m-1) - \frac{2}{z^m}\right| > \sqrt{(m-1)^2 + \frac{1}{2^{2m-2}}}$$

Además

$$\mid R^2(z) z^{m-2} \mid \geq 1.$$

Tenemos entonces

$$R'(z) > K > m - 1,$$

y, como podemos tomar el radio de Γ tan cercano a 1 como queramos, la desigualdad anterior tiene lugar cuando este radio es convenientemente elegido.

Así entonces las z_n convergen hacia cero en un dominio que tiene por frontera un conjunto perfecto por todos lados discontinuo. No sabemos si, en el caso actual, la longitud de este conjunto es nula, pero en todos los casos su área es nula, pues la relación de los elementos de área de un dominio limitado por una curva C_{-n} y de dominio consecuente será inferior a $\dfrac{1}{(m-1)^2}$, y como cada $C_{-(n-1)}$ engendra mC_{-n}, tenemos[3]

$$\sum \text{área } C_{-n} < \frac{m}{(m-1)^2} \sum \text{área } C_{-(n-1)},$$

[3] en el original tenemos $\sum airesC_{-n}$, áreas en plural

y como $\dfrac{m}{(m-1)^2}(m \geq 3)$ es < 1, estas sumas de áreas decrecen en progresión geométrica; se obtiene la conclusión.

Señalemos rápidamente el ejemplo que sigue:

$$R(z) = \frac{z^2}{z^3+2}.$$

Aquí todos los puntos críticos de la función inversa son interiores al círculo de convergencia ($\mid z \mid < 1$). Estos son los puntos $z = 0$ y $z^3 = \dfrac{2}{3^3}$. Una circunferencia de radio poco inferior a 1 jugará aquí el rol de la curva C. Para demostrar que $\mid R'(z) \mid$ es mayor estricto que K ($K > 1$) sobre las C_{-n}, operamos como antes, señalando que el argumento de z^3 esta comprendido entre $\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{3\pi}{2}$ cuando z está sobre C_1. Tendremos enseguida

$$R'(z) = \left(\tfrac{4}{z^3} - 1\right) R^2(z), \quad \mid z \mid < \sqrt{3}, \quad \mid R(z) \mid > 1 - \varepsilon.$$

Entonces:

$$\mid R'(z) \mid > K > 1.$$

El conjunto frontera del dominio de convergencia es por todas partes discontinuo. Tenemos aquí tres puntos dobles repulsores, de los cuales dos son de multiplicador imaginario.

En resumen, podemos decir que dada una substitución racional $[z \mid R(z)]$ que contiene un punto doble atractor, si podemos encontrar una curva que divida el plano en dos regiones, de las cuales una contiene el punto doble atractor y los puntos críticos de la substitución inversa, y tal que la substitución dada la transforme en otra que le sea completamente interior, de manera que sea parte del dominio de atracción del punto doble, si además, sobre las curvas antecedentes de C, tenemos a partir de cierto rango

$$\mid R'(z) \mid > k > 1,$$

el dominio total del punto doble tiene por frontera un conjunto perfecto por todas partes discontinuo; este conjunto es de medida lineal nula si k es superior al grado d de $R(z)$, de medida superficial nula si $k > \sqrt{d}$.

Veremos en el capítulo siguiente que ciertas condiciones enunciadas aquí son redundantes.

No es inútil hacer a propósito de este teorema algunas observaciones complementarias. Primero tener interés en tener para las curvas antecedentes del parágrafo 21 un sistema de numeración que no sea arbitrario. Si designamos por $R_{-1}^{(0)}, R_{-1}^{(1)}, \ldots, R_{-1}^{(d-1)}$ las determinaciones de la función inversa, uniformes y distintas en el interior de C, es natural designar por el grupo de cifras $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n?})$ la curva C_{-n} que se deriva de C por la substitución $R_{-1}^{(\alpha_1)}\left[R_{-1}^{(\alpha_2)}\left[R_{-1}^{(\alpha_3)}[\ldots z]\right]\right]$; de esta manera vemos enseguida que: 1^0 para que dos curvas C_{-n} y $C_{-n'}(n' > n)$ sean interiores una en otra, es necesario y suficiente que el grupo de cifras o *índice* de $C_{-n'}$ comienze por las cifras de C_{-n}; 2^0 que los índices de los consecuentes de C_{-n} se obtienen suprimiendo sucesivamente $1, 2, 3, \ldots$ cifras a la izquierda de su índice; 3^0 que los antecedentes de C_{-n} se obtienen agregando cifras a la izquierda del índice. Enseguida infinidad de cifras harán corresponder el punto interior común a todas las curvas teniendo por índices sucesivos los grupos de $1, 2, 3, \ldots$ primeras cifras de la serie; de esta manera, hay correspondencia biunívoca entre los puntos de P y las series infinitas de cifras en cuestión. A esta serie de cifras corresponde además el número comprendido entre 0 y 1, tal que la serie de estas cifras representativas después de la *coma* en el sistema de numeración en base d sea la serie propuesta, siendo biunívoca la correspondencia, excepto para una infinidad de número racionales que pueden escribirse de dos maneras, a saber aquellos que pueden escribirse de manera que no tengan ceros a partir de un cierto rango y que también podemos escribir no empleando más que la cifra $d-1$ a partir de un cierto rango.

Vemos así que P tiene la potencia del continuo; no hemos hecho mas que repetir, en un caso particular, la demostración clásica de esta propiedad de los conjuntos perfectos, pero aquí el modo de representación adoptado para P está en relación estrecha con las propiedades de invarianza de este conjunto con relación a la substitución dada. En particular, a las fracciones periódicas simples les corresponden los puntos periódicos, a las fracciones periódicas mixtas los antecedentes de estos puntos. Si dejamos de lado los desarrollos que se terminan por cero repetido indefinidamente, tenemos una correspondencia biunívoca entre los números reales $(0 < t \leq 1)$ por una parte y los puntos de P por la otra, con la exclusión de los antecedentes de uno de los puntos dobles que no son representados. A dos puntos de P infinitamente cercanos corresponden dos valores de t infinitamente cercanos; la recíproca no es válida, la cantidad compleja que corresponde a un punto de P siendo una función discontinua de t para los valores de t en representación ambigua, pero continua por todas partes. Si establecemos $z = f(t)$ conviniendo que $f(t+1) = f(t)$, tenemos $R(z) = f(dt)$. Con la ayuda de estas observaciones, demostramos inmediatamente: 1^0 que todo punto de P es límite de puntos periódicos; 2^0 que hay, en la vecindad de cada punto de P, puntos tales que el conjunto derivado de sus consecuentes sea idéntico a P, etc. (cf. § 20).

Otra observación que tiene lugar, es que la existencia de un dominio de convergencia en la frontera por todas partes discontinua no es un caso singular, es decir que esta circunstancia se producirá sin que haya des-i-gual-da-des particulares entre los coeficientes de la función $R(z)$; basta que estos coeficientes varien en un dominio conveniente. Consideremos una substitución racional de grado d para la cual el hecho se produce, por ejemplo una substitución en el círculo fundamental de la segunda especie no singular y sea una curva C que divide el plano en dos regiones gozando de las propiedades indicadas con anterioridad, el exterior de C conteniendo los puntos críticos de $R_{-1}(z)$ y el punto doble atractor. Si hacemos variar los coeficientes de $R(z)$, los $2(d-1)$ puntos críticos de $R_{-1}(z)$, que se obtienen igualando a cero el discriminante de la ecuación $R(y) = z$, variarán de una manera continua y permanecerán exteriores a C para una variación suficientemente pequeña de los coeficientes. Como por otra parte $R(z)$ es una función uniformemente continua de z y de los coeficientes en el dominio $\mathcal{D}$ exterior a C, la propiedad consistiendo, en que $\mathcal{D}_1 = R(\mathcal{D})$ es interior a $\mathcal{D}$ subsistirá igualmente; por una razón análoga, aún tendremos $\mid R'(z) \mid > K' > 1$ sobre C y en su interior $(K' < K)$. Decimos que, en $\mathcal{D}$ las $R_n(z)$ convergerán hacia un punto doble atractor. En efecto, tal punto doble existe aún en $\mathcal{D}$, ya que las raíces de la ecuación $R_n(z) = z$ y los multiplicadores correspondientes $s = R'(z)$ son funciones continuas de los coeficientes; sean α el punto doble y z_0 un punto interior a C. Las funciones $\dfrac{1}{R_n(z) - z_0}$ siendo acotadas en su conjunto en $\mathcal{D}$ y tendiendo uniformemente hacia $\dfrac{1}{\alpha - z_0}$ en un pequeño círculo de centro α interior a $\mathcal{D}$ tenderán uniformemente hacia esta constante en todo el dominio $\mathcal{D}$[4]. Entonces los $R_n(z)$ convergen hacia α en $\mathcal{D}$ y finalmente en el dominio teniendo por frontera el conjunto discontinuo P.

Podemos precisar más cuando $R(z)$ es un polinomio: basta que el término constante de $R(z)$ sea suficientemente grande, el resto de los coeficientes siendo dados para que la substitución $[z \mid R(z)]$ entre en la categoría anterior. Establezcamos

$$R(z) = A_0 z^d + A_1 z^{d-1} + \cdots + A_{d-1} z + t = A(z) + t, \qquad R'(z) = A'(z),$$

siendo t un parámetro. La desigualdad $\mid R'(z) \mid \leq K \;\; (K > 1)$ define uno o

[4]Stieltjes, Recherches sur les fractions continues (Annales de la Faculté de Toulouse, t. VIII, 1894). - Montel, Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, p. 20 (Gauthier-Villars, 1910).

más dominios acotados E, que son fijos cuando t varía. Sea M el máximo[5] de las distancias de estos dominios al origen. Tomamos siempre $\mid t \mid > M$. Siendo lo anterior, para que tuvieramos $\mid R(z) \mid > \mid z \mid$, basta que $\mid z \mid$ sea superior a la raíz positiva de la ecuación

$$\mid A_0 \mid x^d - \mid A_1 \mid x^{d-1} - \ldots - [\mid A_{d-1} \mid +1]x - \mid t \mid = 0$$

Sea r esta raíz; en el dominio $\mathcal{D}$: $\mid z \mid \geq r' > r$, las $R_n(z)$ convergen uniformemente hacia el infinito. Si por otra parte, tomamos z en E, tenemos

$$\mid z_1 \mid = \mid R(z) \mid \geq \mid t \mid \; -M.$$

Para que z_1 estuviera en un dominio tal como $\mathcal{D}$, basta que $\mid t \mid \; -M > r$, es decir, con $\mid t \mid = \rho$ estableciendo que

$$\mid A_0 \mid (\rho - M)^d - \mid A_1 \mid (\rho - M)^{d-1} - \cdots - [\mid A_{d-1} + 1 \mid](\rho - M) - \rho > 0$$

El coeficiente de ρ^d siendo positivo en el primer número, lo que tendrá lugar cuando ρ sea superior a $L, L > M$ siendo, por ejemplo, la raíz positiva más grande del primer número.

Tomaremos entonces $\mid t \mid > L$, y r' suficientemente cercano a r para que la desigualdad $\mid R'(z) \mid \leq K$ conlleve a $\mid R(z) \mid > r'$, lo cual es posible en virtud del análisis anterior; $\mathcal{D}$ contiene entonces los consecuentes de los dominios E y en particular los consecuentes inmediatos de los puntos raíz de $R'(z) = 0$ que junto con el punto al infinito constituyen los puntos críticos de $R_{-1}(z)$. Además, sobre las curvas antecedentes del contorno C de $\mathcal{D}$, tenemos $\mid R'(z) \mid > K > 1$, a partir del primer rango. Estamos entonces en el caso donde la frontera del dominio de convergencia hacia el infinito es en todas partes discontinuo (y de longitud nula si $K > d$).

24. Ahora vamos a estudiar ejemplos de substituciones racionales con dos puntos dobles atractores, cuyos dominios respectivos son simplemente conexos de una sola pieza, y separados por una curva como en las substituciones en el círculo fundamental de primera especie.

Tomemos, por ejemplo $R(z) = \dfrac{z + z^d}{2}$ $(d \geq 2)$. Aquí tenemos dos puntos dobles atractores, el punto en el infinito y el origen. Constatamos fácilmente que el dominio del punto en el infinito comprende el exterior de todo círculo C de radio superior a $3^{\frac{1}{d-1}}$ y que en un dominio como éste tenemos: $\mid z_1 \mid$

[5] en el original no se menciona el término: máximo

$> K' \mid z \mid \quad (K' > 1)$. De igual manera, el dominio del origen comprende el interior de todo círculo C de radio más pequeño que 1, en el cual tendremos: $\mid z_1 \mid > k \mid z \mid$, $(k < 1)$. Los puntos críticos de $R_{-1}(z)$ son el punto en el infinito en torno al cual se permutan circularmente las d ramas de $R_{-1}(z)$ y los puntos $c = R(\zeta)$, $R'(\zeta) = \dfrac{1 + d\zeta^{d-1}}{2} = 0$, lo que da $d-1$ puntos críticos simples, todos interiores a C, si tomamos el radio de C superior a $\left(\frac{1}{d}^{\frac{1}{d-1}}\right)$.

Los valores de $R_{-1}(z)$ se permutan circularmente sobre las circunferencias C y C'. De lo que podemos deducir fácilmente que las curvas antecedentes de C son curvas simples de una sola pieza $C'_{-1}, C'_{-2}, \ldots$, tales que C'_{-n} sea interior a $C'_{-(n-1)}$ y comprendiendo todas el origen en su interior, de manera que z_{-n} regrese a su punto de partida sobre C'_{-n}, habiendo aumentado su argumento en 2π cuando z a hecho d^n veces el contorno de C' en el sentido directo.

De igual forma, las curvas antecedentes de C son curvas que se desarrollan, mutuamente comprendiendo siempre el origen en su interior y permaneciendo exteriores a las curvas C'_{-n}. Los dominios antecedentes del interior de C y del exterior de C' son así dominios simplemente conexos cada vez más grandes, limitados por las curvas C_{-n} y C'_{-n}; vamos a ver en un momento que la distancia entre las curvas C_{-n} y C'_{-n} tiende uniformemente a cero.

Para precisar la manera en la cual las cosas suceden, tracemos en la corona (C, C'), donde las funciones $R_{-n}(z)$ son analíticas pero no uniformes, el corte ab orientado según el segmento del eje real positivo; ab contiene entonces el punto doble repulsor $z = 1$, y la rama de $R_{-n}(z)$, que es igual a 1 para $z = 1$, permanece real para z situado sobre ab, de manera que los segmentos antecedentes de ab obtenidos a través de esta función, son encajados unos en otros y tienden hacia el punto doble $z = 1$. Designaremos por $R_{-1}^{(0)}(z), R_{-1}^{(1)}(z), \ldots, R_{-1}^{(d-1)}(z)$ las ramas d de la función $R_{-1}(z)$ obtenidas sucesivamente partiendo de un punto del corte con la determinación inicial igualmente situada sobre el corte, y regresando en torno al origen en el sentido directo. En el dominio inicial δ, constituido por la corona donde trazamos el corte, corresponden así d dominios δ_{-1} que asignaremos como índices superiores $(0, 1, 2, \ldots, d-1)$ y que están constituidos por cuadriláteros curvilíneos reunidos en la corona comprendida entre C_{-1} y C'_{-1}, sin que dichos dominios tengan puntos interiores en común, aunque dos dominios de índices j y $j+1$ (ó 0 y $d-1$) sean continuos siguiendo una línea transversal antecedente del corte ab. Los dominios antecedentes inmediatos de las δ_{-1}, es decir los dominios δ_{-2}, serán obtenidos a través de la aplicación de δ junto con los dominios

δ_{-1}, que están contenidos en el orden en que los encontramos, sucesivamente sobre $\delta_{-1}^{(0)}, \delta_{-1}^{(1)}, \delta_{-1}^{(2)}, \ldots$. Estos dominios δ_{-2} reunidos en la corona (C_{-2}, C'_{-2}) tendrán por índices sucesivos en el orden en que los encontramos

$$(0,0), \quad (0,1), \quad \ldots, \quad (0,d-1),$$

$$(1,0)(1,1), \ldots, (1,d-1), (2,0), \ldots, (d-1,d-1),$$

dos dominios sucesivos siendo contiguos siguiendo una transversal antecedente de rango 2 del corte ab; el primero y el último son igualmente contiguos siguiendo un segmento de ab. De una manera general, los dominios δ_{-n} o, lo que es lo mismo, los puntos a_{-n} y b_{-n} estarán designados por un índice formado de n cifras $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, lo que significa que el δ_{-n} en cuestión se reduce, de δ por la substitución

$$R_{-1}^{(\alpha_1)}\left[R_{-1}^{(\alpha_2)}\left[R_{-1}^{(\alpha_3)}[\ldots(z)]\right]\right].$$

Vemos como en el parágrafo 23, que: 1^0 para que dos dominios δ_{-n} y $\delta_{-n'}$, $(n' > n)$ sean interiores en sentido amplio uno al otro, es necesario y suficiente que el índice $\delta_{-n'}$ comience por las cifras del índice de δ_{-n}; 2^0 que los índices de los concecuentes de δ_{-n} se obtienen suprimiendo sucesivamente $1, 2, 3, \ldots$ cifras a la izquierda de su índice; 3^0 que los antecedentes de δ_{-n} se obtienen agregando cifras a la izquierda de su índice. Además, en el presente caso, dos dominios δ_{-n}, son limítrofes si uno de los índices se deduce del otro aumentando la última cifra del primero en una unidad, con la convención de que si esta última cifra es $d-1$, reemplazamos $(d-1)+1$ sobre d por cero, aumentando la cifra anterior en una unidad, y recomenzando la operación en caso de ser necesario. Finalmente un dominio δ_{-n} tendrá una parte de frontera en común con un $\delta_{-(n-1)}$ si la última cifra de su índice es cero o $d-1$, y solamente en ese caso.

Vemos además claramente como los dominios δ_{-n} son reunidos, considerando, en lugar del ejemplo estudiado, lo siguiente, $R(z) = z^d$, que da

$$z_{-n} = \rho^{\frac{1}{d^n}} e^{\frac{2iN\pi}{d^n}} \qquad (\text{para } z = \rho > 0).$$

Los dominios δ_{-n} son entonces limitados por las circunferencias concéntricas y los segmentos de radios angularmente equidistantes; pero desde el punto de vista del *Analysis situs*, todo sucede como en el presente ejemplo.

Estudiemos ahora el conjunto límite de los dominios δ_{-n}, es decir el conjunto de los puntos interiores en sentido amplio a una infinidad de estos dominios.

Decimos que, las dimensiones de estos dominios tienden uniformemente a cero con $\frac{1}{n}$. En efecto, basta demostrar, según un razonamiento ya empleado, que tenemos

$$| R'(z) | > K > 1$$

en estos dominios a partir de un cierto rango. Ahora bien ésto tiene lugar, pues tomamos primero el radio de C igual a 1; tendremos entonces sobre la curva C_{-1}:

$$R'(z) = \frac{1 + dz^{d-1}}{2} \quad \text{y} \quad | z | \geq 1,$$

de donde

$$| R'(z) | \geq \frac{d-1}{2}.$$

Si $d \geq 4$, tenemos entonces $| R'(z) | \geq \frac{3}{2}$ sobre C_{-1} ; entonces

$$| R'(z) | > K > 1,$$

igual si el radio de C es poco inferior a 1.

Los cálculos elementales que omitimos muestran que ésto aún se cumple para $d = 2$ ó 3. Las longitudes de los contornos de los dominios δ_{-n} tienden así uniformemente hacia cero con $\frac{1}{n}$; de lo que se sigue que el conjunto límite de los puntos de la corona (C_{-1}, C'_{-n}) es un conjunto perfecto, bien conectado, sin puntos interiores. A toda serie infinita de enteros $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots)$ podemos hacer corresponder el punto de este conjunto P que es interior en sentido amplio a los dominios teniendo por índices $(\alpha_1), (\alpha_1\alpha_2), \ldots, (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n), \ldots$, que son interiores en sentido amplio unos a otros. A dos series de enteros distintas corresponderán en general dos puntos distintos, lo contrario tiene lugar sólo si estas dos series representan el mismo número comprendido entre 0 y 1 en el sistema de numeración en base d. En efecto, resulta de aquello que a sido dicho anteriormente que el orden de sucesión de los dominios δ_{-n} es el mismo que el orden natural de los números

$$\left(\frac{\alpha_1}{d} + \frac{\alpha_2}{d^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{d^n}\right)$$

que corresponden al índice $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$. Si dos de estos números difieren en al menos dos unidades del $n^{\text{ésimo}}$ orden, entonces corresponden a dos dominios de rango n sin puntos comunes y sin frontera común. Si dos números t y t' son distintos, sus valores aproximados por default a $\frac{1}{d^n}$ que difieren cerca de dos unidades al menos para un cierto valor de n, los puntos p y p' del conjunto

P que les hacemos corresponder se encontrarán en dos dominios δ_{-n} y δ'_{-n} completamente separados; p y p' son distintos. Si el número t es de la forma $\frac{N}{d^n}$ le corresponderá de cualquier manera que lo escribamos en el sistema de base d un mismo punto p de P que es un antecedente del punto doble repulsor $z = 1$, los dominios δ_{-n} a los cuales es interior en sentido amplio estando entonces todos contiguos siguiendo una transversal antecedente del corte ab. Sin embargo, debemos señalar que a los dos valores de $t = 0$ y $t = 1$ les corresponde el mismo punto $z = 1$.

A dos valores de t infinitamente cercanos corresponderán dos puntos infinitamente cercanos, estos dos puntos perteneciendo a un mismo dominio δ_{-n} para un valor infinitamente grande de n, y las dimensiones de δ_{-n} tienden hacia cero con $\frac{1}{n}$.

Así, hay correspondencia continua y biunívoca entre los puntos del conjunto P y los números comprendidos entre 0 y 1. Los puntos de P forman una curva representada por una ecuación de la forma

$$z = f(t),$$

$f(t)$, función imaginaria de la variable real t, continua en el intervalo $(0, 1)$. Tenemos $f(1) = f(0)$ y podemos convenir que $f(t + 1) = f(t)$. Tenemos entonces

$$R(z) = f(d.t),$$

esta propiedad muestra que el estudio del conjunto de los consecuentes de un punto de la curva se lleva a aquella de los números obtenidos desplazando la coma hacia la derecha en la representación de un número t $(0 < t < 1)$ en el sistema de numeración en base d.

Vemos en definitiva que, *gracias a la introducción de un corte invariante pasando por un punto doble repulsor*, hemos podido hacer el estudio de la frontera de los dominios de atracción de los dos puntos dobles (0 e ∞) de la misma manera que en el caso recien examinado donde la frontera es discontinua.

En el presente caso, tenemos una separación del plano en dos regiones simplemente conexas por una línea continua; son las regiones de convergencia respectivas a los dos puntos dobles; vemos fácilmente que todo punto de la línea frontera es límite de los antecedentes de un punto cualquiera del plano, excepto el punto al infinito. Mas precisamente, el consecuente de orden n de un dominio circular tan pequeño como queramos teniendo por centro un punto de la frontera cubre todo el plano, salvo el exterior de un círculo de radio arbitario, para un valor finito de n.

El ejemplo anterior puede ser fácilmente generalizado. Supongamos que dos puntos dobles atractores de una substitución racional (siempre podemos suponer el origen y el infinito) pueden ser respectivamente rodeados de dos contornos simples sin puntos dobles C y C' gozando de las propiedades siguientes: los consecuentes de un punto de C o interior a C son interiores a C, los consecuentes de un punto de C' o exterior a C' son exteriores a C'; sobre C y C', todas las determinaciones de $R_{-1}(z)$ se permutan circularmente. Existe entonces (Chap. I, § 6) $d-1$ puntos críticos de $R_{-1}(z)$ en el interior de C así como en el exterior de C', entonces no hay puntos en la corona (C, C'). Los antecedentes de C y C' son curvas simples de una sola pieza, las coronas (C_{-n}, C'_{-n}) son interiores a aquellas de rango menor; supondremos que tenemos en estas coronas, a partir de un cierto rango,

$$| R'(z) | > k > 1.$$

El análisis hecho anteriormente es aplicable en este caso; vamos a mostrar que aún existe un corte invariante en (C, C'), constituido por una línea rectificable que tiene un segmento único en

$$(C_{-n}, C_{-(n-1)}) \quad \text{ó} \quad (C'_{-n}, C'_{-(n-1)}).$$

Sean a un punto de C, p el punto de C_{-1} el más próximo a a, q el punto de C'_{-1} el más próximo a p, y b el punto de C' el más próximo a q; la línea quebrada $apqb$, formada de tres segmentos de recta contenidos respectivamente en $(C, C_{-1}), (C_{-1}, C'_{-1}), (C'_{-1}, C')$, es una línea simple sin puntos dobles que designaremos simplemente por ab; si z describe ab, una rama de $R_{-1}(z)$ describe $a_{-1}b''_{-1}$ formada de arcos algebráicos contenidos en (C_{-1}, C'_{-1}); podemos unir aa_1 y bb_1 por líneas quebradas contenidas respectivamente en (C, C_{-1}) y (C', C'_{-1}) sin atravesar ab; describamos entonces la línea sin punto doble $a_{-1}abb_{-1}, R_{-1}(z)$ describirá otra línea sin punto doble formada de arcos algebráicos $a_{-2}a_{-1}b_{-1}b_{-2}$; tenemos

$$R(a_{-2}) = a_{-1}, \quad R(b_{-2}) = b_{-1};$$

z describiendo esta última línea, $R_{-1}(z)$ describe $a_{-3}a_{-2}b_{-2}b_{-3}$ y así sucesivamente; obtendremos en la n-ésima operación

$$a_{-n}a_{-(n-1)}b_{-(n-1)}b_{-n},$$

línea sin puntos dobles, con

$$R(a_{-n}) = a_{-(n-1)} \quad R(b_{-n}) = b_{-(n-1)}.$$

Las líneas $(a_{-i}, a_{-(i+1)})$ deduciendose cada una de la que sigue por la substitución $[z, R(z)]$, tendremos

$$\text{longitud } (a_{-n}, a_{-(n-1)}) < \frac{A}{K^n},$$

y, *a fortiori*,

$$\mid a_{-n} - a_{-(n-1)} \mid < \frac{A}{K^n}.$$

Siendo la serie $\sum \mid a_{-n} - a_{-(n-1)} \mid$ absolutamente convergente, tenemos

$$\lim a_{-n} = \omega,$$
$$R(\omega) = \omega, \qquad\qquad \mid R'(\omega) \mid > 1.$$

Además, las longitudes de las curvas $a_{-n}b_{-n}$ tendiendo hacia cero por la misma razón que $a_{-(n-1)}a_{-n}$, los puntos b_{-n} tienden hacia el mismo punto doble ω. Las líneas $aa_{-1}, a_{-1}a_{-2}, \ldots, a_{-n}a_{-(n+1)}, \ldots, bb_{-1}, b_{-1}b_{-2}, \ldots$ constituyen por su reunión un corte de la corona (C, C') invariante por la substitución dada, teniendo un segmento único en las coronas $(C_{-(n-1)}, C_{-n})(C'_{-(n-1)}, C'_{-n})$, de longitud finita y sin punto doble, que tendrá en ω un punto asíntoto si $R'(\omega)$ es imaginario, pero jugando en todos los casos el mismo rol que el corte rectilíneo del ejemplo anterior. Los dominios de los dos puntos dobles atractores O y O' aún son dominios simplemente conexos separados por una curva sin punto doble

$$z = f(z) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$f(t)$ función imaginaria de la variable real t, tal que, si convenimos que $f(t+1) = f(t)$, tendríamos la ecuación funcional

$$[f(t)] = f[d.t] \ (d, \text{ grado de } R).$$

Aún señalaremos que el caso examinado aquí no es un caso singular, las mismas circunstancias se presentan si damos incrementos suficientemente pequeños, a los coeficientes de $R(z)$.

25. Dejaremos de lado por el momento los casos, límites de los anteriores, donde hay un punto doble de multiplicador igual a $+1$, y vamos a estudiar substituciones cuya iteración conduce a considerar dominios de un caracter diferente

a aquellos examinados hasta el momento. Estos nuevos ejemplos se deducen del resto fácilmente de las substituciones en el círculo fundamental por una transformación algebraica de segundo orden.

Nos proponemos el problema siguiente: encontrar una substitución racional para la cual existe un conjunto de puntos completamente invariantes formado por un arco de círculo; este arco debe entonces contener los consecuentes y antecedentes de todos sus puntos. Podemos, por medio de una transformación homográfica previa, reemplazar este arco por el semi-eje real positivo. Sea $Z = R(z)$ la substitución buscada; z y $R(z)$ toman simultáneamente valores reales positivos o nulos.

Establezcamos $w = \sqrt{z}$, w será real para z real positivo; si z no está sobre Ox, w estará, por ejemplo, en el semi-plano superior; $R(z)$ o Z siendo igualmente exterior a Ox, $W = \sqrt{Z}$ estará afuera del eje real; tomamos W en el semi-plano superior como w. Si w varía permaneciendo en el semi-plano superior, igual sucederá para W, estos dos puntos llegando al mismo tiempo al eje real. De lo que se sigue que la función $W(w)$ así definida es racional. Tenemos, en efecto, $W = \sqrt{R(w^2)}$ y los puntos críticos de esta función de w son los ceros y los polos de $R(w^2)$. $R(w^2)$ llega a ser nula o infinito para $w^2 = a^2$, a siendo real. Si a es finita y diferente de cero y si a^2 es una raíz de orden impar de $R(z)$, tendremos

$$R(w^2) = (w^2 - a^2)^{2q+1} P(w^2) \qquad [P(a^2) \neq 0],$$
$$W = \sqrt{R(w^2)} = (w-a)^{q+\frac{1}{2}} H(w),$$

$H(w)$ siendo holomorfa y no nula para $w = a$. Si w describe un semi-círculo de radio infinitamente pequeño en el semi-plano superior en torno de a como centro, de manera que el argumento de $(w - a)$ crece de 0 a π, aumentando el argumento de W en un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$, entonces W no permanece sobre el eje real. Luego falta que a sea raíz de orden par de $R(z)$, W es entonces una función unifome de w para $w = \pm a$. La misma observación si a^2 es un polo. Finalmente, si uno de los puntos 0 o ∞ es un cero o un polo de $R(z)$, $\sqrt{R(w^2)}$ es uniforme en ese punto. Tenemos entonces

$$W = R_1(w),$$

siendo R_1 racional y dejando invariantes esta substitución al eje real y al semi-plano superior. Entonces somos llevados a una substitución en el círculo fundamental. Por lo tanto, establezcamos (§ 16)

$$W = kw + h - \sum \frac{A}{w-a},$$

las constantes del segundo miembro siendo reales, A y k positivas, y busquemos las condiciones para que, reemplazando W por $\sqrt{Z}$ y w por z, obtengamos una relación de la forma $Z = R(z)$. Para lo cual es necesario y suficiente que las dos expresiones conjugadas

$$k\sqrt{z} + h - \sum \frac{A}{\sqrt{z} - a}$$
$$-k\sqrt{z} + h + \sum \frac{A}{\sqrt{z} - a}$$

sean iguales y de signo contrario, es decir que tendríamos, cualquiera que sea z,

$$2h + \sum \frac{A}{\sqrt{z} + a} - \sum \frac{A}{\sqrt{z} - a} = 0$$

ó

$$h - \sum \frac{Aa}{z - a^2} = 0.$$

Para que ésto tenga lugar, falta que las a sean de dos en dos iguales y de signo contrario (una de las a puede ser nula). Los dos términos $\dfrac{A}{w - a}$ y $\dfrac{A'}{w + a}$ proporcionan entonces en la expresión anterior una contribución igual a $\dfrac{(A' - A)a}{z - a^2}$. Si $a \neq 0$, deberemos tener $A = A'$. Además, $h = 0$. La expresión de $R_1(w)$ será entonces

$$R_1(w) = kw - \sum \frac{2Aw}{w^2 - a^2} = w\left[k - \sum \frac{2A}{w^2 - a^2},\right]$$

las constantes A, a, k siendo reales, positivas o nulas.

De lo que deducimos

$$Z = z\left[k - \sum \frac{2A}{z - a^2},\right]^2 = R(z).$$

Tal es la expresión general de las substituciones que satisfacen a las condiciones del problema.

Si damos a z tal que no esté situada sobre la parte positiva del eje real, le corresponden dos valores de $w = \pm\sqrt{z}$, fuera del eje real; sean w uno de ellos, $w_1 = R_1(w), \ldots, w_n = R_1(w_{n-1}), \ldots$; los puntos w_n permanecen del mismo lado del eje real y tienden hacia el punto límite α situado sobre el eje real, o bien fuera, según la especie de la substitución R_1. Los puntos $z_n = w_n^2$, que se deducen de z por iteración de la substitución $R(z)$, tienen entonces por límite al punto α^2, vemos fácilmente que α^2 siempre es real.

Si R_1 es de la segunda especie, con un punto atractor único sobre el eje real, hay sobre este eje una infinidad numerable de segmentos contiguos en un conjunto perfecto P en el interior de los cuales las w_n convergen hacia α. Le corresponde una infinidad numerable de segmentos situados sobre Ox, contiguos a un conjunto perfecto Π sobre los cuales las z_n convergen hacia α^2. Π es por todas partes discontinuo; los consecuentes de un segmento que contienen un punto de Π terminan por recubrir completamente Ox. Nada hay en este caso esencialmente nuevo. Al contrario, si R_1 es de la primera especie hay convergencia para todo el plano hacia el punto $-c^2$ ($\alpha = ci$ siendo un imaginario puro), salvo sobre la parte positiva del eje real que forma la frontera continua del dominio de convergencia. Tenemos entonces un dominio de convergencia de alguna otra naturaleza a la de los encontrados hasta aquí. Encontraremos fácilmente las condiciones que deben satisfacer las constantes A, a, k para que ésto sea así. Si por ejemplo suponemos todas las a diferentes de cero, estas condiciones son

$$0 < k < 1, \qquad k + \sum \frac{2A}{a^2} > 1.$$

Dejaremos de lado la discusión de la posición de los puntos dobles que no presentan dificultades.

Si ahora efectuamos sobre Z y z una misma transformación homográfica cualquiera, obtenemos la expresión general de las substituciones que dejan invariante un arco de círculo pq y el dominio no acotado que tiene a este arco por frontera; si existe un punto doble exterior a pq, éste es entonces un punto doble atractor sobre la prolongación de pq y cuyo dominio comprende todo el plano a excepción del corte pq. En todos los casos, demostramos fácilmente que la substitución inversa $R_{-1}(z)$ admite $d-1$ puntos críticos exteriores a pq, los d valores de esta función se permutan circularmente sobre un contorno rodeando pq y cercano a este arco; igualmente hay puntos críticos sobre pq equivalentes a d puntos críticos simples y que son todos iguales a los puntos p y q (excepcionalmente a uno solo de estos puntos, si R es de segundo grado). Describiendo z el arco pq, $R(z)$ describe d veces este mismo arco en el mismo sentido mientras no alcanze los extremos p y q. Tenemos, entre p y q, uno de los cuatro sistemas de relaciones:

$$\begin{array}{lll}
\text{(I)} & R(p)=p, & R(q)=q, \\
\text{(II)} & R(p)=p, & R(q)=p, \\
\text{(III)} & R(p)=q, & R(q)=q, \\
\text{(IV)} & R(p)=q, & R(q)=p.
\end{array}$$

Todo lo cual es muy fácil de verificar mismo que resulta de que $R_{-1}(z)$ no puede tener puntos críticos interiores a pq.

Como ejemplo, busquemos si existen polinomios dejando invariante el segmento $(-1,+1)$ del eje real y el dominio exterior a este segmento. Sea $Z=R(z)$ un polinomio respondiendo a la cuestión. Si establecemos

$$w=\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}, \qquad W=\sqrt{\frac{1-Z}{1+Z}},$$

deducimos $W=R_1(w)$, que deja invariante el eje real y el semi-plano superior; siendo R un polinomio, R_1 debe admitir los puntos dobles $w=\pm i$ correspondiendo a $z=\infty$; además, estos dos puntos dobles deben ser puntos excepcionales no teniendo otros antecedentes mas que ellos mismos. Si establecemos

$$\frac{w-i}{w+i}=t \qquad \frac{W-i}{W+i}=T,$$

la relación $W=R_1(w)$ llega a ser $T=P(t)$; $P(t)$ teniendo por círculo fundamental el círculo $(\mid t\mid\leq 1)$ con los puntos excepcionales cero e infinito, tenemos necesariamente

$$P(t)=e^{ia}t^m \qquad a \text{ real, } m \text{ entero } >0.$$

Si establecemos

$$t=i\varphi, \qquad T=e^{i(m\varphi+a)}=e^{i\varphi},$$

lo cual da

$$w=\tan\frac{\varphi}{2}, \qquad W=\tan\tfrac{\Phi}{2},$$

$$z=\frac{1-w^2}{1+w^2}=\cos\varphi, \quad Z=\cos\Phi=\cos(m\varphi+a).$$

Somos llevados a buscar la condición para que $\cos(m\varphi+a)$ sea una función racional de $\cos\varphi$. Basta que a sea un múltiplo de π. Los polinomios buscados son entonces aquellos que expresan $\pm\cos m\pi$ en funcion de $\cos\varphi=z$.

Tenemos así una representación paramétrica cómoda que pone en evidencia las propiedades de las subtituciones iteradas.

Finalmente señalamos que es posible formar ejemplos análogos de substituciones que tienen un punto doble atractor con un dominio cuya frontera está constituida por una curva de Jordan no cerrada, esta curvatura no siendo un arco del círculo sino una curva no analítica. A la inversa de los casos tratados al inicio de este Capítulo, este caso es singular, es decir suponemos siempre satisfechas ciertas relaciones entre los coeficientes de la substitución. Regresaremos posteriormente sobre este sujeto.

FIN DEL TOMO XLVII.

Bibliografía

[1] Markusevich, A., *Teoría de las Funciones Analíticas*, Tomo I, MIR Moscú, 2a. reimpresión en español, p. 175-176, 1987.

[2] Markusevich, A., *Teoría de las Funciones Analíticas*, Tomo II, MIR Moscú, 2a. reimpresión en español, p. 452-595, 1987.

[3] Polya, George y Gordon Latta, *Variable Compleja*, Noriega-Limusa, 2a. reimpresión en español, p. 249-253, 1992.

[4] Rudin, Walter, *Análisis Real y Complejo*, Alhambra, primera impresión en español, p. 301-308, 1979.

Se han anexado estas referencias bibliográficas con el fin de aclarar algunos conceptos citados por el autor, que supone conocidos.