Solitones en el autómata celular regla 110 a través de choques binarios

Genaro Juárez Martínez*
Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Sección Computación

Abril 8, 2002

Resumen

Se presentan las propiedades generales del espacio de evoluciones de la regla 110 y sus estructuras periódicas, útiles para la generación de choques binarios y la determinación de solitones. Se hace uso de las fases de las estructuras periódicas definidas por el ether, encontrando propiedades que son fácil de implementar.

*correo-e: genaro@enigma.red.cinvestav.mx y genarojm@correo.unam.mx

1 Introducción

El estudio formal de la "onda solitaria" es toda un área en el campo de la física que no esta ligada directamente al estudio de los autómatas celulares. La primera descripción de este fenómeno se le atribuye al ingeniero escocés John Scott Russell por el año de 1834 [Eil98]. En 1895 dos físicos holandeses Diederick J. Korteweg y Gustav de Vries se dieron a la tarea de describir de manera formal este fenómeno, sin embargo hasta el año de 1965 que el físico Martin Kruskal llama al choque de estas ondas "solitón".

La regla 110 es un autómata celular unidimensional con dos elementos en su alfabeto y una función de transición, en esta regla de evolución se pueden observar estructuras periódicas desplazandose en el espacio de evoluciones, algunas de ellas de construcción simple y otras complejas, todas ellas interactuando en un fondo periódico.

El fenómeno solitón fue observado al efectuar choques binarios entre estructuras periódicas de manera sistemática, obteniendo resultados interesantes como producciones simétricas, grupos de gliders[1], gliders individuales, choques complejos y solitones.

En este reporte se presentan todos aquellos choques binarios que se comportan como solitones y se muestra el procedimiento para obtener dichos resultados.

2 Autómatas celulares en una dimensión

Un autómata celular es un sistema dinámico discreto que evoluciona a través del tiempo, esta constituido por un conjuto de estados $\mathcal{K}$ y una función de transición φ, donde $\mathcal{K} \in \mathbb{Z}^+$. Los autómatas celulares en una dimensión pueden ser representados con dos parametros (k, r) [Wolf86], donde k es la cardinalidad del conjunto $\mathcal{K}$ y r el número de vecinos en cada lado que se encuentran con respecto a una célula central.

Se tiene un arreglo lineal donde cada elemento se le conoce como célula, cada una de ellas toma un elemento del conjunto de estados $\mathcal{K}$, este arreglo es la configuración inicial, el arreglo lineal es acotado por sus condiciones a la frontera, es decir, la célula inicial se concatena con la célula final para formar un anillo. La configuración inicial se verá transformada por la función de transición a través del tiempo.

Una vecindad esta formada por una célula central y r vecinos a cada lado, entonces una vecindad tiene $2r + 1$ células y una regla de evolución esta formada por k^{2r+1} vecindades, de esta manera la función de transición evalua cada una de las vecindades en la configuración inicial.

La actualización de cada configuración en un paso se hace de manera simultánea o en paralelo, cada actualización induce una transición de manera global, es decir, entre configuraciones.

Definición 2.1. Un autómata celular se representa como una cuadrupla:

$$\{\mathcal{K}, \varphi, r, c\}$$

donde $\mathcal{K}$ representa el conjunto de estados, φ la función de transición, r el radio de vecindad y c la configuración inicial del sistema.

Regla 110 es un autómata celular unidimensional de orden $(k = 2, r = 1)$, dos elementos en el conjunto de estados y el radio de vecindad de una célula. El número 110 se refiere a la notación decimal de la regla de evolución que se encuentra en binario, las vecindades 001, 010, 011, 101 y 011 se transforman al estado 1 en la siguiente generación y las vecindades 000, 100 y 111 se transforman en 0.

Sthepen Wolfram menciona que la regla 110 puede ser universal y en general aquellos autómatas con comportamientos complejos [Wolf84], por su parte Wentian Li y Mats G. Nordahl en [LN92]

[1] Un glider es una estructura periódica que se desplaza a través del tiempo

realizaron un estudio estadístico de la regla 110 ilustrando algunos de los comportamientos de dicha regla, sin embargo hasta finales de los 90's Matthew Cook presenta resultados interesantes de la regla 110 que dan motivo a este trabajo.

Cook en [Cook99] presenta una clasificación de todos los gliders hasta ahora encontrados en la regla 110, por su parte Harold V. McIntosh en [Mc99] y [Mc00] realiza un estudio sobre dicho autómata, mostrando como el espacio de evoluciones puede ser cubierto con polígonos.

Retomando el estudio realizado por McIntosh en [JM01] se realizó un análisis sistemático para calcular todos los choques binarios que se derivan de los gliders existentes. En este análisis se encontraron que algunos choques tienen comportamiento solitón.

3 Solitón

Kenneth Steiglitz ha realizado varios trabajos de solitones en autómatas celulares de una dimensión, una variante conocido como "automata filtrado" utilizando reglas de paridad como puede verse en [PST86].

Definición 3.1. Un solitón es una onda solitaria con comportamiento no lineal que al interactuar con otras ondas o algún otra interrupción conserva su forma y su velocidad, sufriendo pequeños desplazamientos en cada choque.

La onda solitaria que describió Scott es representada formalmente por la ecuación de Korteweg-de Vries:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{3.1}$$

donde la función u mide la altura de la onda en la posición x en el tiempo t, los subíndices representan diferencias parciales. El segundo término representa la dispersión que puede tener la onda y el último es el término no lineal.

Recordemos que los modelos hasta ahora conocidos en autómatas celulares, no presentan alguna relación directa con soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no integrables. Algunos trabajos relacionados que han tratado de encontrar tal relación pueden consultarse en algunos artículos de Steiglitz [PST86] y [JSS01].

4 Fases en la regla 110

En el espacio de evoluciones de la regla 110 se pueden ver estructuras periódicas que son creadas de manera natural a través del tiempo, sin embargo existen gliders difíciles de obtener a partir de configuraciones aleatorias, algunos de ellos pueden ser obtenidos a través de choques muy precisos, por ejemplo el glider H, el glider gun o el Bbar8 [Jua02].

En [Mc99] y [JM01] se muestran con detalle la estructura de cada uno de los gliders, en este caso solo ilustraremos algunos que nos serán útiles. McIntosh denota a estos polígonos como Tn, donde n indica el tamaño del triángulo y $n \in \mathbb{Z}^+$.

Primero describimos el espacio de evoluciones de la regla 110 que está constituido por dos tipos de triángulos rectángulos alfa-α y beta-β como se ilustra en la Figura 1 para el caso de un T3.

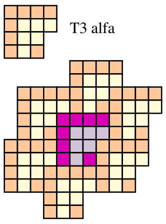


Figura 1: Tipos de triángulos T3

Es claro que estos triángulos equilateros pueden cubrir el espacio de evoluciones sin violar la regla de evolución, en este caso el triángulo T3 beta es el fondo periódico que domina en el espacio de evoluciones llamado por Cook "ether". Aunque el espacio de evoluciones puede ser cubierto por cualquier Tn hasta un T4 de manera individual, en el caso donde $n > 4$ solo es posible con combinaciones de ellos y mejor aún, cada uno de los gliders por sí mismos pueden cubrir el espacio de evoluciones como se puede ver en [JMS02].

El ether define propiedades importantes para toda estructura que existe en el espacio de evoluciones, veremos como el ether define cuatro fases como se ilustra en la Figura 2.

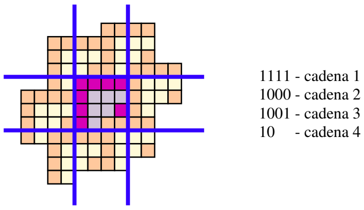


Figura 2: Fases del ether

Es importante notar que este T3 beta determinará las fases de cada uno de los gliders, así como su período y desplazamiento, aún de manera informal estas propiedades son presentadas en [Jua01].

Para determinar una configuración en particular se deben seguir cada una de las fases que representa el T3 beta y obtener una evolución donde cada una de las estructuras puedan ser representadas en una sola fase en dos tipos de alineación.

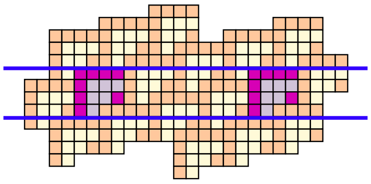


Figura 3: Período del ether

Se tienen cuatro fases periódicas del ether $11111000100110 - e(f1)$ ('e(f1)' indica fase uno del ether), $10001001101111 - e(f2)$, $10011011111000 - e(f3)$ y $10111110001001 - e(f4)$ como se ilustra en la Figura 3.

Si la configuración inicial es cubierta con la expresión $*e*$, tendremos el espacio de evoluciones cubierto de puro ether. Se puede ver que cualquiera de estas cuatro fases es una permutación de la misma cadena. El período del ether es de 14 células a la derecha en 7 generaciones.

El ether puede representar dos tipos de pendientes, que determinan la velocidad máxima negativa y positiva que puede tener una estructura periódica en el espacio de evoluciones como se ilustra en la Figura 4.

Se puede ver que el desplazamiento de estas pendientes siempre es de 2 células, para obtener los choques entre gliders hay que identificar los puntos de contacto donde los gliders puede interactuar con otras estructuras.

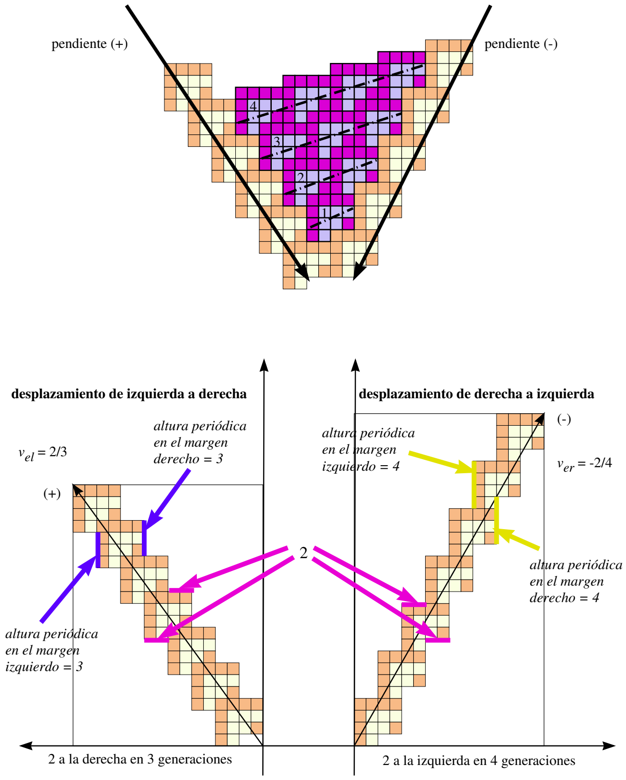


Figura 4: Dos tipos de pendientes producidas por el ether

Estos puntos de contacto van a estar determinados por el número de margenes pares mp e impares mi que tenga un glider en particular.

Entonces los puntos de contacto para un glider g estan determinados por el número de margenes pares de su lado izquierdo y por el número de margenes impares de su lado derecho. Ambos margenes tienen una correspondencia biyectiva y la existencia de un punto de contacto en una parte implica la existencia de un punto que no es de contacto en su contraparte [Jua01].

Los margenes pares tienen una altura de 4 células, mientras que los margenes impares tienen una altura de 3 células. Con estas simples propiedades se puede determinar el desplazamiento de un glider g que es determinado por la siguiente ecuación:

$$d_g = (2 * mi) - (2 * mp). \tag{4.1}$$

Toda estructura periódica tendrá un período definido por la cantidad de margenes pares e impares, por lo tanto el período de una estructura en particular esta derminado por:

$$p_g = (3 * mi) + (4 * mp) \tag{4.2}$$

finalmente un glider tendrá una velocidad de:

$$v_g = \frac{(2 * mi) - (2 * mp)}{(3 * mi) + (4 * mp)}. \tag{4.3}$$

Para identificar algún glider en particular de la regla 110, utilizaremos la clasificación propuesta por Cook en [Cook99].

Analizemos el glider A y el glider B, el glider A tiene un margen impar, entonces tiene una velocidad de:

$$v_A = \frac{(2*1)-(2*0)}{(3*1)+(4*0)} = \frac{2}{3}$$

y un punto de contacto en su lado derecho. El glider B tiene un margen par y un punto de contacto en su lado izquierdo, entonces tiene una velocidad de:

$$v_B = \frac{(2*0)-(2*1)}{(3*0)+(4*1)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

se puede ver que ambos gliders tienen un punto que no es de contacto en su lado opuesto como se ilustra en la Figura 5.

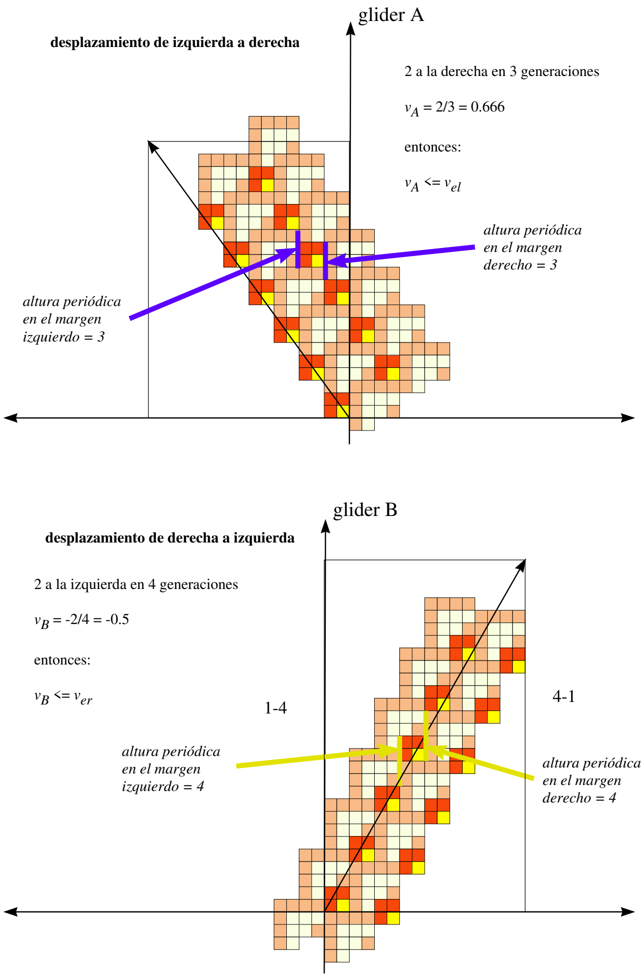


Figura 5: Gliders A y B

Existe otro método para calcular el velocidad de un glider, como se hace en el Juego de la Vida de John Horton Conway [BCG82], la alternativa propuesta esta limitada a la regla 110. El cálculo para cada uno de los gliders existentes se describe con detalle en [Jua01].

Para determinar las fases que tiene un glider utilizamos la alineación del ether, cuando obtenemos una fase de manera implicita estamos calculando el número de margenes pares e impares y sus puntos de contacto, como se ilustra en las Figuras 5 y 6 para el glider A.

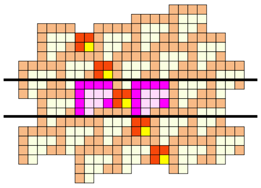


Figura 6: Fases del glider A

El glider A puede ser representado en 4 fases: $111110 - A(f1)$, $100011 - A(f2)$, $100110 - A(f3)$ y $101111 - A(f4)$. Cada una de ellas produce un glider de este tipo dejando el resto de la configuración en la fase correspondiente, se podrían utilizar combinaciones de ellas, pero el número de combinaciones crecería mucho, por esa razón utilizaremos solo una fase y veremos que con una de ellas es suficiente para obtener todos los choques deseados.

Analizemos la siguiente expresión:

$$*e - A - e*$$

el primer término indica que la parte izquierda de la configuración es cubierta por ether, en la parte central se encuentra un glider A y la parte derecha cubierta por ether, todas estas expresiones alineadas en fase uno del ether.

La principal razón por la que se utiliza una sola fase, es porque las cuatro fases son equivalentes.

Una manera de obtener estas secuencias es utilizando el diagrama de de Bruijn extendido [Mc91], donde el diagrama de de Bruijn calcula todas las secuencias periódicas representadas por los ciclos del diagrama. Una limitante es que para estructuras más elaboradas estos diagramas crecen exponencialmente.

Un estudio interesante en este camino puede ser estudiando los árboles topológicos que describe Andrew Wuensch en [WL92], identificando estructuras periódicas y sus ancestros en ciclos atractores, algo interesante es sobre la busqueda o representación de gliders en reglas de evolución con comportamiento complejo como puede verse en [Wue99].

Utilizando las fases del ether se pueden obtener todas las secuencias para una fase en particular de cualquier estructura periódica, en este análisis solo se toma en consideración un glider y no grupos de ellos o cualquier otra combinación, este problema es tratado en [JMS02].

Los puntos de contacto para los gliders son determinados por los margenes mi y mp, pero a su vez estos margenes estan determinados por las fases del ether. Una vez identificados los puntos de contacto se realizó un estudio sistemático para calcular todos los choques binarios, esta colección se puede consultar en [JM01].

Los choques tienen una cota máxima que esta determinada por el número de margenes periódicos, entonces para un glider arbitrario con mi puntos de contacto y otro glider arbitrario de mp puntos de contacto, se tiene que:

$$c \leq |mi * mp| \tag{4.4}$$

donde c representa el número máximo de choques que pueden existir entre dos gliders.

Sin embargo para algunos gliders que tienen puntos de contacto y de no contacto, la cota máxima no se cumple. Depurando la igualdad se tiene que el número de choques que existen entre dos gliders g_i y g_j esta representada por la siguiente ecuación:

$$c = |(mp_{g_i} * mi_{g_j}) - (mp_{g_j} * mi_{g_i})|. \tag{4.5}$$

Por ejemplo el glider Bbar tiene 3 margenes pares y 0 margenes impares, el glider G tiene 9 margenes pares y 2 margenes impares, recordemos que estos margenes siguen una correspondencia biyectiva y existen en igual cantidad en ambos lados de los gliders, entonces tenemos que:

$$c = |(9 * 0) - (3 * 2)| = 6$$

existen 6 maneras de chocar entre estos dos gliders como se ilustra en [JM01].

Un trabajo importante que trata de formalizar el número de choques entre gliders de manera general y no particular como en nuestro caso, puede ser consultado en el trabajo de Cosma Rohilla Shalizi [HSC01], donde los resultados obtenidos a través del estudio de mecánica computacional pueden ser aplicados en la regla 110.

Para dos gliders dados no todos los choques producen el fenómeno solitón, esto es originado por la fase en que chocan los gliders. Se tiene que controlar la fase en que los gliders llegan, la manera como controlamos estas fases es desde la configuración inicial.

Es recomendable dar un espacio entre los gliders para poder observar bien el choque, en algunas ocaciones no es necesario introducirlo ya que las cadenas estan alineadas a la fase del ether y esto produce siempre un choque propio.

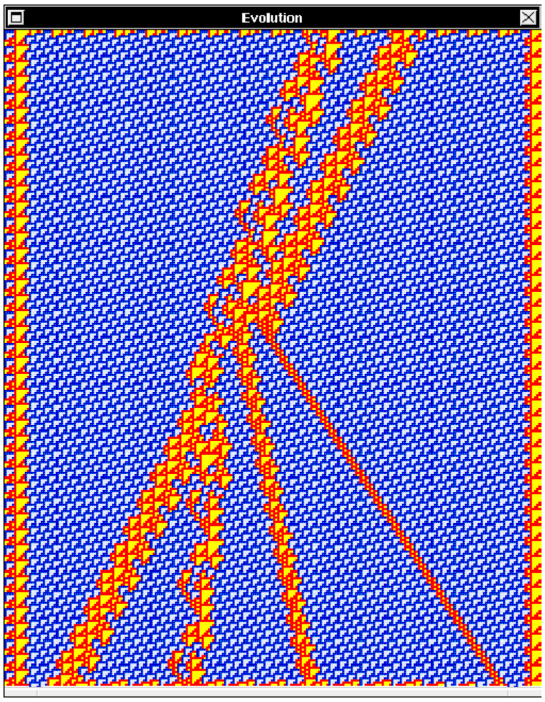
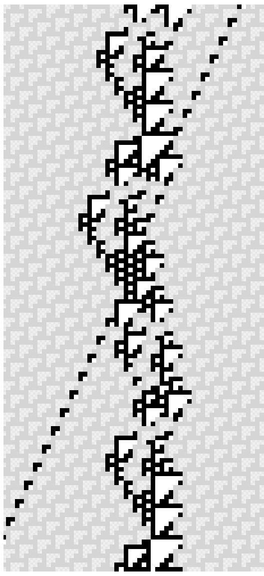


Figura 7: Producción simétrica entre el glider G y Bbar

En la Figura 7 se puede ver el resultado de la expresión $*e - G(C2) - e - Bbar(C) - e*$, viene un glider Bbar en su fase 3 chocando con un glider G en su fase 11, el producto es la expresión $3A - D2 - Bbar - F$ en orden de aparición[2]. El resultado es una producción simétrica compuesta de cuatro gliders y aunque el glider Bbar logra atravesar despues del choque el glider G no.

Finalmente esta es la manera para obtener los choques que son solitones, necesitamos saber en que fase se produce este fenómeno para los dos gliders en cuestión. Por ejemplo evaluemos la expresión $F(A2) - e - B$ que se sabe debe producir un solitón.

[2] Estos choques fueron reproducidos con el sistema OSXLCAU21 para los sistemas operativos OpenStep y Mac OS X, disponible de manera gratuita en http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/s2001/s2001.html



F(A2)-e-B

Figura 8: Solitón F $\rightarrow$ B

En la Figura 8 se puede ver un choque solitón entre el glider F y el glider B, donde los gliders conservan su forma y velocidad despues del choque, finalmente solo sufren un pequeño desplazamiento en sus fases, cumpliendo con las propiedades de un solitón.

En el universo de la regla 110 se pueden obtener solitones que viajen en la misma dirección, en direcciones opuestas o con un glider estático. Los desplazamientos en los gliders siempre se dan en retroceso al original, tal como ocurre en los solitones.

En el apéndice de este reporte mostramos todas las expresiones binarias que producen solitones con algunos de los gliders de la regla 110. Finalmente se puede decir que no todos los gliders pueden soportar solitones.

5 Conclusiones

El fenómeno solitón que se representan con los gliders de la regla 110, ofrecen la posibilidad de discutir como corre la información, esta idea esta en proceso de investigación. Por otra parte se puede ver que una manera sencilla de obtenerlos es a través del control que se tiene en la configuración incial, definiendo la fase en que estos gliders deben iniciar.

Una de las principales ideas a desarrollar es la simulación de algunas operaciones lógicas a través de estas producciones. Tomando algunos artículos de Steiglitz como en [JSS01], simula algunas operaciones lógicas a través de solitones utilizando el modelo de Manakov, presentamos una simulación muy sencilla ambientada con los gliders de la regla 110.

En la Figura 9 (reproducida de [JSS01]) se muestra la simulación de una operación move implementada en el sistema Manakov.

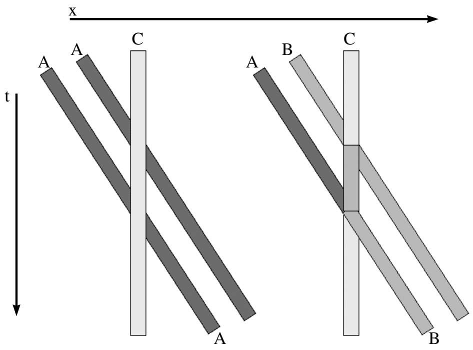


Figura 9: Operación move en el sistema Manakov

La partícula C funciona para el acarreo de información chocando con las otras partículas A y B, el color mostrado en las partículas ilustra el cambio de estado. La operación move se obtiene de la primera a la segunda partícula en la condición final. Se puede ver como los gliders tienen que funcionar como operadores y datos para simular operaciones.

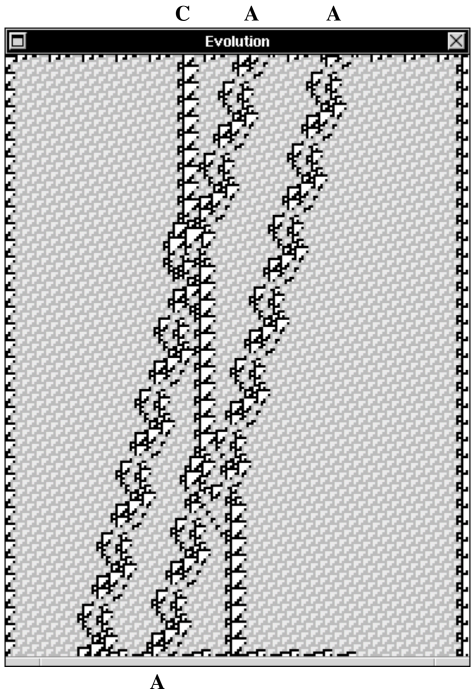


Figura 10: Operación move con la expresión $C1(A) - e - Ebar(A) - e - Ebar(B)$

En la Figura 10 se simula el primer caso de la Figura 9 con los gliders C1 y Ebar, en la Figura 11 se trata de simular el segundo caso utilizando los gliders C1, Ebar y F; observando que no es posible reproducirlo de manera inmediata, respetando estrictamente el modelo de Manakov.

Por el momento las simulaciones son sencillas, sin embargo se pueden realizar rapidamente gracias al control de fases desde la configuración inicial y por supuesto apoyandonos en las investigaciones de Steiglitz.

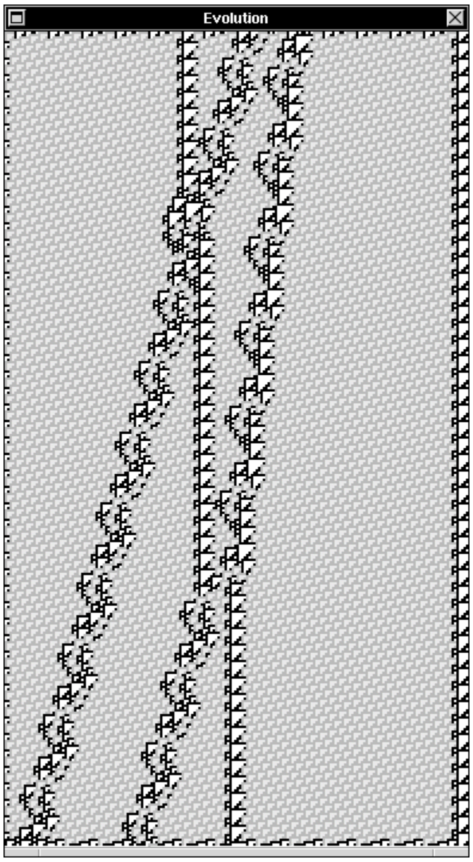


Figura 11: Operación move con la expresión $C1(A) - e - Ebar(A) - e - F(A)$

Es claro que operaciones más complejas deben ser construidas cuidadosamente, algo similar a lo que se obtiene con el Juego de la Vida [BCG82]. De esta manera se pretende obtener una mejor descripción primero de el fenómeno solitón y posteriormente de la simulación de compuertas lógicas.

Un operador que funciona a través de incrementos y decrementos es posible con el glider E_n, donde el glider A decrementa en uno al glider E y el glider B lo incrementa, este modelo puede verse con detalle en [MSCJ01].

A Apéndice

A.1 Lista de solitones a través de choques binarios

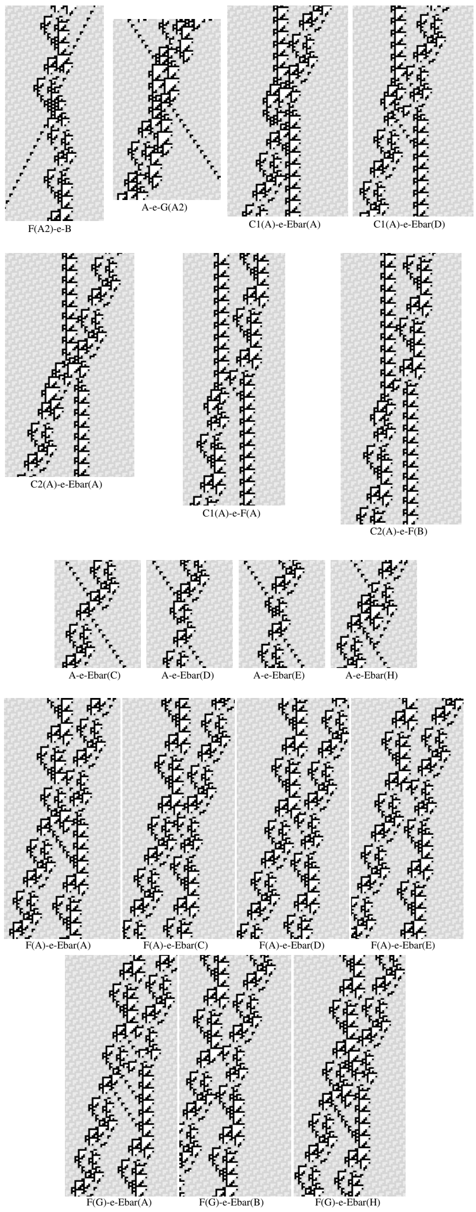


Figura 12: Choques binarios tipo solitón

A.2 Caso especial seudo-solitón F $\leftarrow$ B $\Longleftrightarrow$ Bbar $\rightarrow$ F

En este caso especial el glider B es transformado en un glider Bbar, que aunque conserva su velocidad no conserva su forma. Sin embargo el glider Bbar tiene 1/11 posibilidades de regresar al glider B, chocando otra vez con un glider F como se ilustra en la Figura 13.

La probabilidad de regresar al glider anterior despues de un choque es realmente baja y tiene que existir una sincronización que es definida por las fases del ether que inducen distancias.

Para obtener estos resultados se elaboro un programa enfocado principalmente a la regla 110, en el se pueden experimentar la construcción de configuraciones en particular, utilizando fases para todos los gliders. Este programa es gratuito y puede obtenerse de [Osx01].

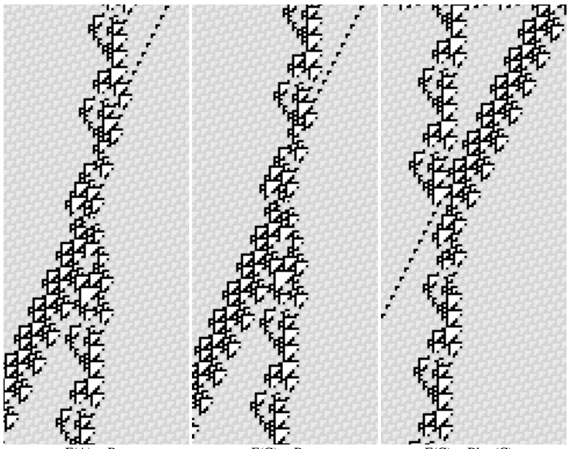
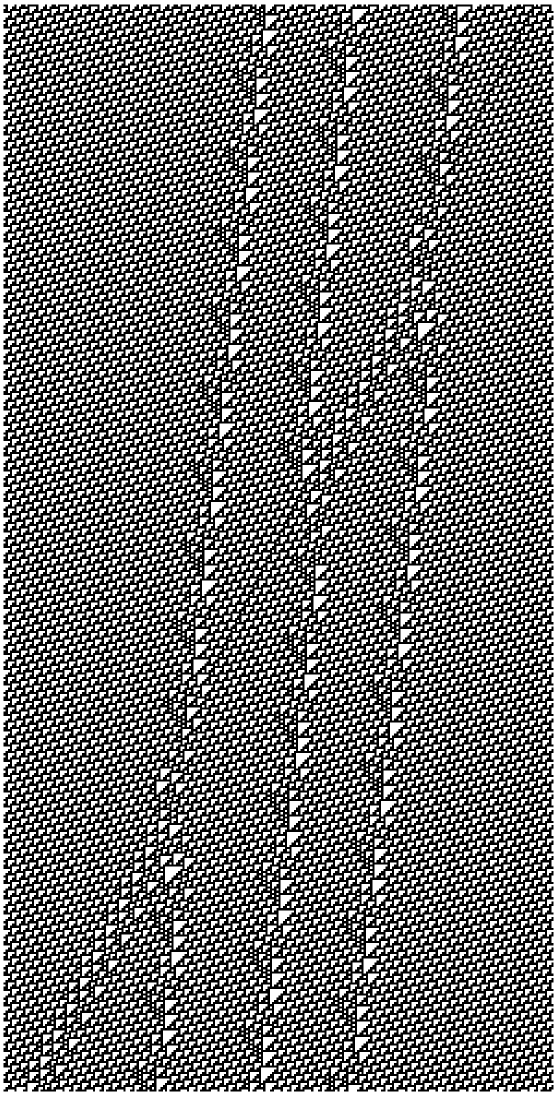


Figura 13: Caso especial entre gliders B y Bbar

No tratamos este caso con detalle, pero no deja de ser interesante este tipo de fenómenos que la regla 110 ofrece y que puede ser visto como un seudo-solitón.

choques F-Bbar	choques F-B
F(A)-e-Bbar(A)=A,B,Bbar,F	F(A)-e-B=Bbar,F *
F(A)-e-Bbar(B)=A,2C3,C1	F(G)-e-B=Bbar,F *
F(A)-e-Bbar(C)=A,C2	F(H)-e-B=D2,2A
F(G)-e-Bbar(A)=C2,2A	F(A2)-e-B=B,F (solitón)
F(G)-e-Bbar(B)=A,3A,A,Ebar	
F(G)-e-Bbar(C)=B,F *	
F(H)-e-Bbar(A)=A,C2	
F(H)-e-Bbar(B)=5A,Ebar	
F(H)-e-Bbar(C)=5A,Ebar	
F(A2)-e-Bbar(A)=C1	
F(A2)-e-Bbar(B)=A,3B,Ebar	



F(H)-2e-F(A)-2e-F(G)-e-B

Figura 14: Seudo-solitón con el glider B y Bar

Referencias

[BCG82] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway and Richard K. Guy, *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Academic Press, 1982 (ISBN 0-12-091152-3) vol. 2, chapter 25.

[Cook99] Matthew Cook, "Introduction to the activity of rule 110" (copyright 1994-1998 Matthew Cook), http://w3.datanet.hu/~cook/Workshop/CellAut/ Elementary/Rule110/110pics.html, January 1999.

[Eil98] Chris Eilbeck, "John Scott Rusell and the solitary wave", http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html, November 1998.

[HSC01] Wim Hordijk, Cosma Rohilla Shalizi and James P. Crutchfield, "Upper Bound on the Products of Paticle Interactions in Cellular Automata", Physica D 154, 240-258, 2001.

[JSS01] Mariusz H. Jakubowski, Ken Steiglitz and Richard Squier, "Computing with Solitons: A Review and Prospectus", *Multiple-Valued Logic*, Special Issue on Collision-Based Computing, vol. 6, Numbers 5-6, 2001 (ISSN 1023-6627).

[JM01] Genaro Juárez Martínez and Harold V. McIntosh, "ATLAS: Collisions of gliders like phases of ether in rule 110", http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh, August 2001.

[Jua01] Genaro Juárez Martínez, "Margenes periódicos en la regla 110 con correspondencia biyectiva en estructuras periódicas que definen puntos de contacto y velocidad máxima", http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh, Octubre 23, 2001.

[JMS02] Genaro Juárez Martínez, Harold V. McIntosh y Juan Carlos Seck Tuoh Mora, "Estructuras periódicas cubriendo el espacio de evoluciones en el autómata celular unidimensional regla 110", http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh, Abril 8, 2002.

[Jua02] Genaro Juárez Martínez, "Produciendo gliders a través de choques en la regla 110", en preparación.

[LN92] Wentian Li and Mats G. Nordahl, "Transient behavior of cellular automaton rule 110", Physics Letters A 166, 335-339, (1992).

[Mc91] Harold V. McIntosh, "Linear cellular automata via de Bruijn diagrams", http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh, 1991.

[Mc99] Harold V. McIntosh, "Rule 110 as it relates to the presence of gliders", http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh, January 1999.

[Mc00] Harold V. McIntosh, "A Concordance for Rule 110", http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh, April 2000.

[MSCJ01] Harold V. McIntosh, Juan Carlos Seck Tuoh Mora, Sergio V. Chapa Vergara y Genaro Juárez Martínez, "Gliders en autómatas celulares de una dimensión", http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh, Diciembre 4, 2001.

[PST86] James K. Park, Kenneth Steiglitz and William P. Thurston, "Soliton-like behavior in automata", Physica D 19, 423-432, 1986

[WL92] Andrew Wuensch and Mike Lesser, "The Global Dynamics of Cellular Automata", Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity. Addison-Wesley, Massachussetts, 1992 (ISBN 0-201-55740-1).

[Wolf84] Stephen Wolfram, "Universality and complexity in cellular automata", Physica D 10, 1-35, 1984.

[Wolf86] Stephen Wolfram, Theory and Aplications of Cellular Automata, World Scientific Press, Singapore 1986.

[Wue99] Andrew Wuensch, "Classifying Cellular Automata Automatically", Complexity, vol. 4, no. 3, 47-66, 1999.

[Osx01] Programa "OSXLCAU21" disponible en los sistemas OpenStep y Mac OS X, viable de manera gratuita en http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/s2001/s2001.html, Agosto 2001. s2001.html, Agosto 2001.